



Minta zárthelyi feladatok

I.

1. Vizsgálja meg az $a_n = \frac{3n-1}{7-2n}$ sorozatot monotonitás szempontjából. Konvergens-e a sorozat? (Indokolja a választ!) Hányadik elemtől kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$ sugarú környezetébe?

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{2n} = ?$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = ?$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{12x} = ?$.

3. Oldja meg a $z^5 - 2zi = 0$, ($z \in \mathbb{C}$) egyenletet a komplex számok halmazán.

4. Adott három vektor: $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = (12, -3, 4)$ és $\vec{c} = \vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\vec{a}\vec{b} = ?$; $\vec{a} \times \vec{b} = ?$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = ?$; $\vec{c}^0 = ?$.

b) Számítsa ki az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területét.

c) Számítsa ki a három vektor által kifeszített tetraéder (háromszög alapú gúla) térfogatát.

d) Határozza meg az $\vec{a}$ vektornak a $\vec{b}$ vektorra eső merőleges vetületvektorát.

5. Válaszolja az alábbi függvényeket és írja fel az értelmezési tartományukat és értékkészletüket:

a) $f(x) = 2\operatorname{sgn}(2-x) + \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$; b) $h(x) = \operatorname{sgn}(3+x) \cdot |4-x|$;

c) $g(x) = 4^{x+1} - 1$; d) $u(x) = [x] + 1$. d) $u(x) = \ln \frac{(x-1)}{x^2}$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$. Jellemezze a $h(x)$ függvényt folytonosság szempontjából. Van-e

korlátos és monoton függvény közöttük?

II.

1. Vizsgálja meg az $a_n = \frac{2n-1}{2-3n}$ általános elemével adott sorozatot torlódási pont, korlátosság, monotonitás és határérték szempontjából. Konvergens-e a sorozat? Hányadik

elemtől kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = \frac{2}{25^3}$ sugarú környezetébe?

2. Oldja meg a $z^6 + 16z^2 = 0$, ($z \in \mathbb{C}$) egyenletet a komplex számok halmazán.

3. Adott három vektor: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ és $\vec{c} = 2(1, -1, 1)$.

a) $\vec{a}\vec{b} = ?$; $\vec{a} \times (3\vec{b}) = ?$; $(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{c} - 5\vec{a}) = ?$; $\vec{c}^0 = ?$.

b) Számítsa ki az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét.

c) Számítsa ki a három vektor által kifeszített tetraéder térfogatát.



- d) Határozza meg a $\vec{d} = x\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ vektorban szereplő x értékét úgy, hogy az $\vec{b}$ és $\vec{d}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra.
- e) Írja fel a $P(1, -2, 3)$ ponton átmenő és a $\vec{b}$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletét.

4. Vázolja az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = \frac{(x+3)^2(x-1)}{(x^2-9)(x+4)}$; b) $h(x) = \operatorname{sgn}(3+x) + |4-x|$;

c) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 1$; d) $u(x) = \ln \frac{(x-1)}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$. Jellemezze a $g(x)$ függvényt folytonosság szempontjából.

5. Számítsa ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n+2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{4x^2 - 36}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{3x}$.

III.

1. Bizonyítsa be teljes indukcióval a következő állítást:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

2. Legyen $z = -1 - \sqrt{3}i$. Számítsa ki az alábbiakat:

a) $|z| = ?$, $\operatorname{arc} z = ?$, $\operatorname{Re} z = ?$, $\operatorname{Im} z = ?$.

b) $z^3 = ?$ (binomiális tétellel és Moivre-képlettel is!)

$\sqrt[5]{3iz} = ?$, $z\bar{z} = ?$, $\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^2 = ?$.

3. Adott három vektor: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = (1, -2, -4)$ és $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$.

- a) $2\vec{a}\vec{b} + 3 = ?$; $\vec{a} \times \vec{c} = ?$; $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} - \vec{b}) = ?$; $\vec{c}^0 = ?$.
- b) Határozza meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szöget.
- c) Számítsa ki az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területét.
- d) Számítsa ki a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatát.
- e) Lineárisan függő vagy lineárisan független az adott három vektor?

4. Vázolja az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = \left|(x-3)^4(x+2)^3(1-9x^2)\right|$; b) $h(x) = \operatorname{sgn}\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] + 1$;

c) $g(x) = e^{-2x+1} - 1$; d) $u(x) = -3 \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x}$.



$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = ?$. Írja fel az $u(x)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Írjon fel egy páros és egy páratlan függvényt értelmezési tartománnyal és értékkészlettel!

5. Számítsa ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 - n + 1})$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 4^{n+1}}{3^n + 9^{n+1}};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - 2}.$

IV.

- Oldja meg a $z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0$, ($z \in \mathbb{C}$) egyenletet a komplex számok halmazán.
- Adott három vektor: $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ és $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.
 - $\vec{a}\vec{b} = ?$; $\vec{a} \times \vec{b} = ?$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ?$.
 - Határozza meg az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területét.
 - Számítsa ki a három vektor által kifeszített tetraéder (háromszög alapú gúla) térfogatát.
 - Írja fel a $P(-2,5,6)$ ponton átmenő és az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokra merőleges sík egyenletét.

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-5}{3n} \right)^{1-2n} = ?$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = ?$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = ?$.

4. Vázolja az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2(x+3)}$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = ?$;

b) $h(x) = |x-2| \operatorname{sgn} x$. Hol nem folytonos a $h(x)$ függvény? Indokolja a választ!

c) $g(x) = -3 \ln \frac{1}{x}$, $D_g = ?$, $R_g = ?$.

V.

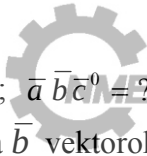
1. Adott a $z = \sqrt{3} + i$ komplex szám. Írja fel a komplex szám trigonometrikus alakját. Számítsa ki az alábbiakat:

a) $|z| = ?$; $\varphi = \operatorname{arcs} z = ?$; b) $\operatorname{Re} z = ?$; $\operatorname{Im} z = ?$;

c) $z^3 = ?$; d) $\sqrt{z} = ?$.

2. Adott három vektor: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ és $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.





- a) $\bar{a}\bar{b} = ?$; $\bar{a} \times (\bar{b} - 2\bar{j}) = ?$; $\bar{a} \bar{b} \bar{c}^0 = ?$.
 b) Határozza meg az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok által kifeszített háromszög területét.
 c) Számítsa ki a három vektor által kifeszített tetraéder (háromszög alapú gúla) térfogatát.

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{7}{2n}\right)^{3n-1} = ?$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} = ?$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{5x} = ?$.

4. Vázolja az alábbi függvényeket:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2(x+2)}$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = ?$;

b) $h(x) = |x^4 - 3x^2| \operatorname{sgn} x$. Hol nem folytonos a $h(x)$ függvény? Indokolja a választ!

c) $g(x) = -2 \ln \frac{1}{x}$, $D_g = ?$, $R_g = ?$.

A

1. Számítsa ki az alábbi függvények első deriváltját:

a) $f(x) = 5x^6 - 4\sqrt[5]{x} + e^{-3x}$; $f'(x) =$

b) $f(x) = \ln 3x + \log 8x - \cos x$; $f'(x) =$

c) $f(x) = x^3 \arctg x$; $f'(x) =$

d) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $f'(x) =$

e) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{4x+1}{x}}$; $f'(x) =$

f) $f(x) = 8 \sin^5 x^5 - 4^x$; $f'(x) =$

2. Írja fel az $x^2 + y^2 = 5y$ görbe paraméteres és polárkoordinátás egyenletét. Vázolja a görbét!

3. Számítsa ki a $\mathbf{C} = \mathbf{AB} + 2\mathbf{B}$ mátrix elemeit:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

4. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy $P_1(1, -2, -3)$ ponton és merőleges a $x - 2y + 3z - 5 = 0$ síkra.

5. Vázolja az alábbi egyváltozós valós függvények grafikonját és írja fel az f függvény értelmezési tartományát és értékkészletét:





a) $f(x) = \arcsin(x-1)+1;$

b) $h(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

6. Oldja meg Cramer-szabállyal vagy Gauss-féle eliminációs módszerrel az

$$x - y + z = 2,$$

$$x + y + z = 0,$$

$$x + 2y - z = 1$$

egyenletrendszer.

B

1. Számítsa ki az alábbi függvények első deriváltját:

a) $f(x) = 3x^4 - \sqrt[5]{x} + e^{-2x}; \quad f'(x) =$

b) $f(x) = \operatorname{sh} 3x + 2 \ln x + \sin x; \quad f'(x) =$

c) $f(x) = 2x \arctg x; \quad f'(x) =$

d) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}; \quad f'(x) =$

e) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{2x}}; \quad f'(x) =$

f) $f(x) = 7 \cos^4 x - 5^x; \quad f'(x) =$

2. Írja fel az $x^2 + y^2 = 4x$ görbe paraméteres és polárkoordinátás egyenletét. Vázolja a görbét!

3. Számítsa ki a $\mathbf{C} = \mathbf{AB} + 2\mathbf{A}$ mátrix elemeit:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy $P_1(1, -2, 4)$ ponton és merőleges a $x + 3y - 4z - 5 = 0$ síkra.

5. Vázolja az alábbi egyváltozós valós függvények grafikonját és írja fel az f és a h függvény értelmezési tartományát és értékkészletét:

a) $f(x) = \arctg(x-1);$

b) $h(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

6. Oldja meg Cramer-szabállyal vagy Gauss-féle eliminációs módszerrel az

$$x + y + z = 0,$$

$$-x + y + z = 2,$$

$$x + 2y - z = 1$$

egyenletrendszer.

