

STATIKA

Ez az anyag az
"Alapítvány a Magyar Felsőoktatásért és Kutatásért"
és a
"Gépészmérnök Képzésért Alapítvány"
támogatásával készült
a [Műszaki Mechanikai Tanszéken](#)
kísérleti jelleggel, hogy a Statika tananyag elsajátítását segítse.

Az összeállításban közreműködtek:

Dr. Elter Pálné

[Dr. Kocsis László](#)

Dr. Ágoston György

[Molnár Zsolt](#)

I. Tantárgyismertető bevezető

1. A mechanika tárgya

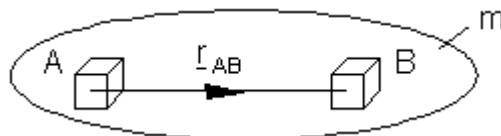
A műszaki életben fontos a mozgásjelenségek megfigyelése, leírása, a mozgást kiváltó oknak a meghatározása, ill. a mozgásoknak a műszaki feladat szerint megszabott biztosítása. Mindezek módszereit és törvényeit tárgyalja a mechanika.

Röviden: a mechanika az anyagi testek mozgásával és erőkkel foglalkozó tudomány.

2. Alapfogalmak

Az anyagi test fogalma

A mechanikában vizsgált testek a geometriában vizsgált testektől abban különböznek, hogy mindig anyagi testek. A test anyagságát a tömeg (sűrűség) fejezi ki. Az anyagi testet kontinuumnak tekintjük, ami azt jelenti, hogy az anyag a test alakja által kijelölt teret folytonosan tölti ki. A legegyszerűbb az anyagi test, amelynek alakja a mozgás során nem változik. Az ilyen testet merev testnek nevezzük. Merev test esetén a test bármely két pontjának a távolsága állandó: $AB = \text{áll.}$



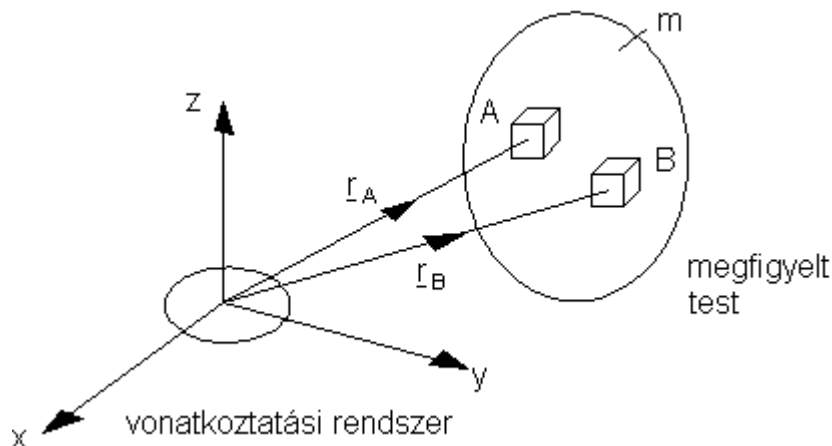
1. ábra

Vektorosan felírva a merev test kritériumát:

$$\vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} = |\vec{r}_{AB}| \cdot |\vec{r}_{AB}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{r}_{AB}|^2$$
$$|\vec{r}_{AB}| = \text{áll.}$$

A mozgás fogalma

Az anyagi test mozgásán annak egy merev testhez rögzített koordináta-rendszerhez, egy ún. vonatkoztatási rendszerhez viszonyított helyzetváltoztatását értjük.



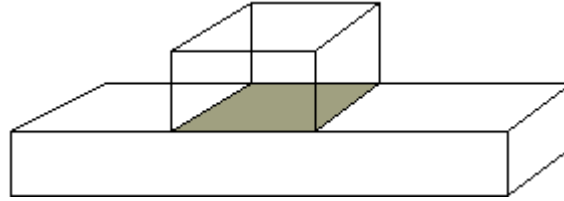
2. ábra

Az erő fogalma

Erőnek nevezzük két test egymásra gyakorolt hatását, ha annak következtében a testben mozgásállapot-változás vagy alakváltozás következik be. Jele: F , mértékegysége N (kN , MN , GN). Két test egymásra gyakorolt hatása létrejöhet közvetlen érintkezéssel vagy érintkezés nélkül.

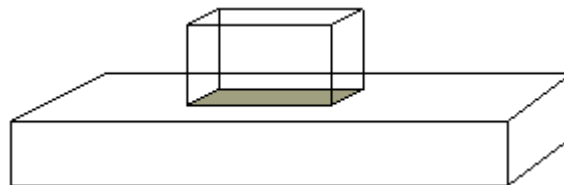
Közvetlen érintkezés esetén felszíni erőkről beszélünk. Az érintkezés történhet:

egy felület mentén $\Rightarrow$ felület mentén megoszló erőrendszer (p [N/m])



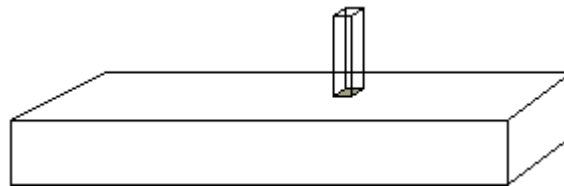
3. ábra

egy él mentén $\Rightarrow$ él mentén megoszló erőrendszer (p [N/m]).



4. ábra

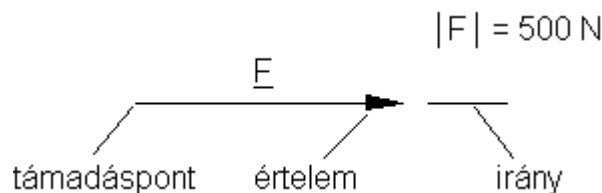
egy pont mentén $\Rightarrow$ koncentrált erő



5. ábra

Ha a két test egymásra gyakorolt hatása közvetlen érintkezés nélkül jön létre, akkor tömegerőről vagy térfogati erőről beszélünk.

Az erőt három adat jellemzi: nagyság, irány és értelem, azaz az erő vektormennyiség:



6. ábra

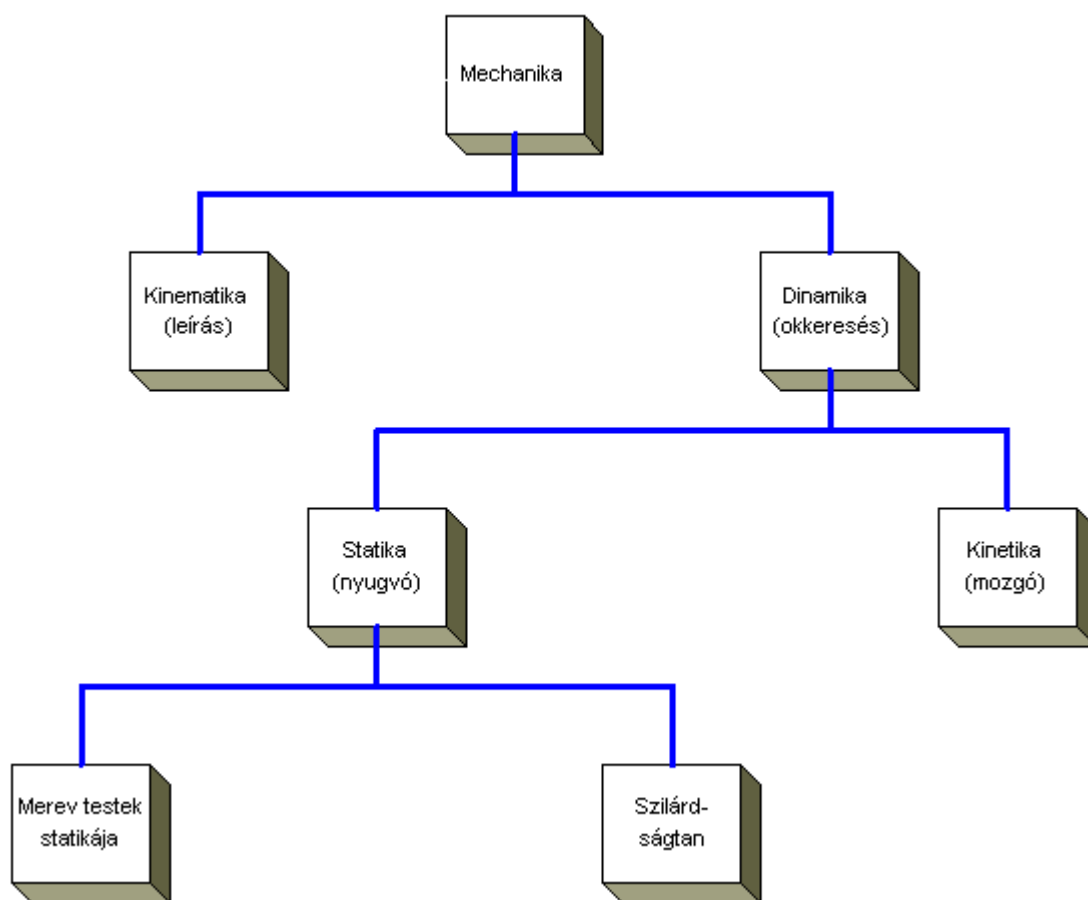
Egy testre egyidejűleg több erő is hathat. Az egyugyanazon testre ható erők összességét erőrendszernek nevezzük.

3. A mechanika vizsgálati módszere

Merev testek, él mentén megoszló erőrendszerek, koncentrált erők a valóságban nem léteznek, csak jól megközelítik azt. Mindezek modellek. A mechanika vizsgálati módszere a mechanikai modell alkotása. Ez úgy történik, hogy a valóság teljes bonyolultsága helyett a vizsgálandó testnek csak a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait tartjuk meg, a többit elhanyagoljuk. ez a mechanikai modell. Ugyanazon testnek más és más modell felel meg, ha különböző jelenségeket vizsgálunk.

4. A mechanika felosztása

A mechanika két fő részre oszlik: a kinematikára és a dinamikára. A kinematika a mozgás leírásával, a dinamika a mozgás megmagyarázásával foglalkozik. A dinamika további két részre bontható: a kinetikára és a statikára. A kinetika a mozgást kiváltó okokat kutatja. A statika a mozgás egy különleges esetének, a nyugalomnak a vizsgálatával, feltételeinek elemzésével foglalkozik.

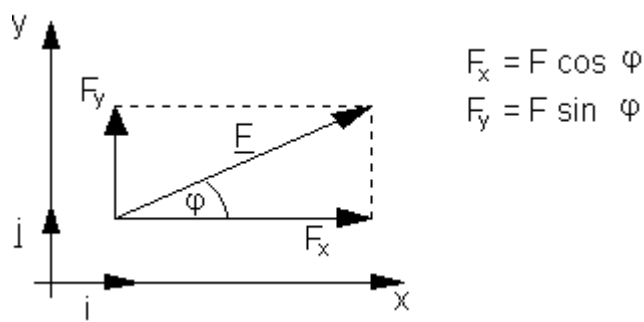


7. ábra

5. Erők összevonása ill. felbontása összetevőkre

- két, az erővel közös síkban fekvő (nem párhuzamos) hatásvonal irányába.
- három, nem egy közös síkban fekvő hatásvonal irányába.

Az erő síkbeli felbontása



8. ábra

a 8. ábra alapján az F erő skalár komponensei az x és az y tengely irányában.

Az erő felírása: $F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ vagy oszlopvektor formájában (mátrix):

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

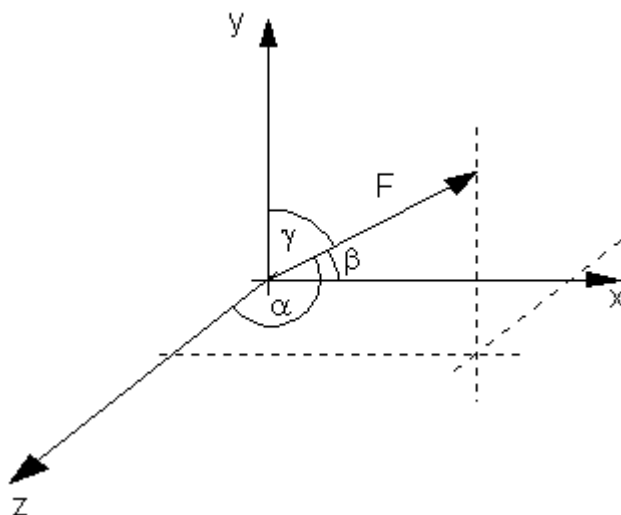
A komponensek előállíthatók a matematikában tanultak szerint is: $F_x = \underline{F} \underline{i}$ és $F_y = \underline{F} \underline{j}$

Az erő nagysága:

$$|\underline{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Szokás skalár komponensekről (F_x, F_y) és ún. vektorkomponensekről is beszélni. $\underline{F}_x = F_x \underline{i}$ és $\underline{F}_y = F_y \underline{j}$.

Az erő térbeli felbontása



9. ábra

A síkbeli felbontáshoz hasonlóan $\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$.

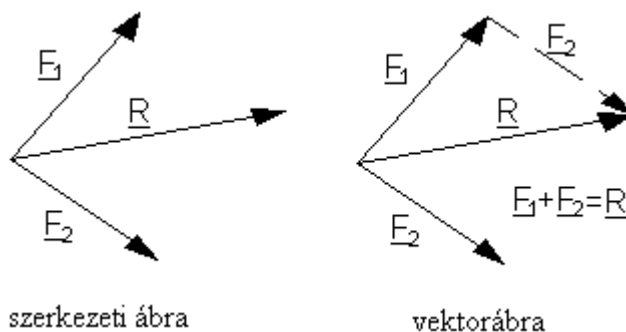
Térben is írható: $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \cos \beta$, $F_z = F \cos \gamma$, ahol α, β és γ az $\underline{F}$ vektor hatásvonalának (irányának) az x, y és z tengelyekkel bezárt szögei. Számításuk:

$\cos \alpha = F_x / F$; $\cos \beta = F_y / F$; $\cos \gamma = F_z / F$ ahol

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

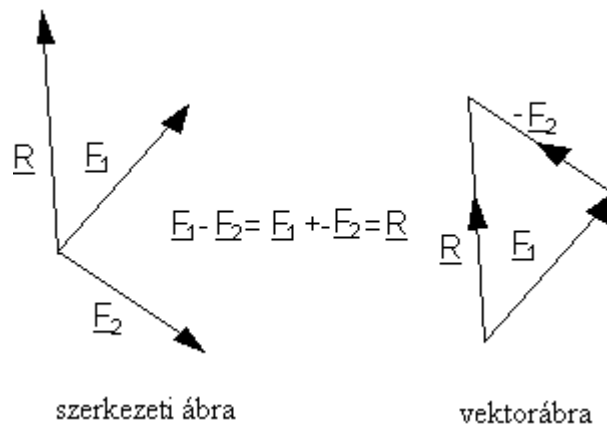
a vektor abszolútértéke.

Erők összeadása szerkesztéssel:



10. ábra

Erők kivonása szerkesztéssel:



11. ábra

II. A statika alaptételei:

Az erő statikai nyomatéka:

1. Fogalma, fajtái, az előjelszabály
2. A nyomatéki tétel

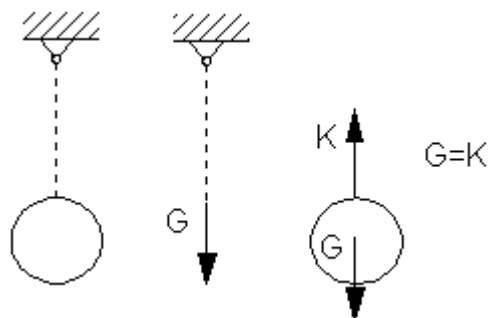
1. A statika alaptételei

A mechanika-hasonlóan a többi természettudományhoz-alaptételeit megfigyelések és tapasztalatok alapján állította fel. Ezen megfigyelések és tapasztalások vizsgálata olyan egyszerű tételekhez vezetett, amelyek tovább már nem elemezhetők. Az így kapott könnyen érthető és meggyőző tapasztalati törvények az alaptételek, amelyeket bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el.

1. alaptétel

Newton III. axiómája, az akció-reakció elve, amely kimondja, hogy két testnek egymásra gyakorolt hatása mindig egyenlő egymással, de ellentétes értelmű.

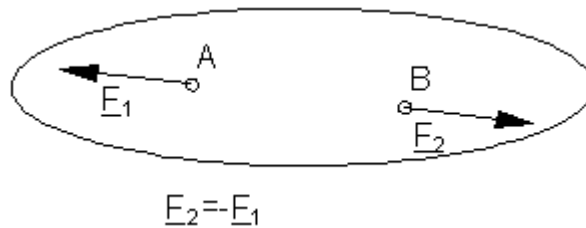
Pl.:



12. ábra

2. alaptétel

A testre ható két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentett.



13. ábra

3. alaptétel

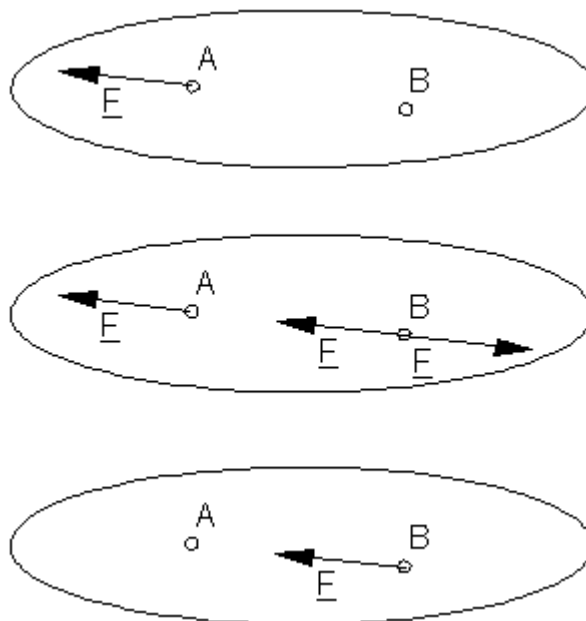
Közös támadáspontú erőrendszer mindig helyettesíthető egy vele egyenértékű egyetlen erővel, az eredővel. Az eredő erő:

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = \sum \underline{E}_i$$

támadáspontja megegyezik a közös támadásponttal.

4. alaptétel

Csak merev testre igaz. Merev testen támadó erőrendszer hatása nem változik, ha hozzáadunk vagy elveszünk belőle egy másik, önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert.

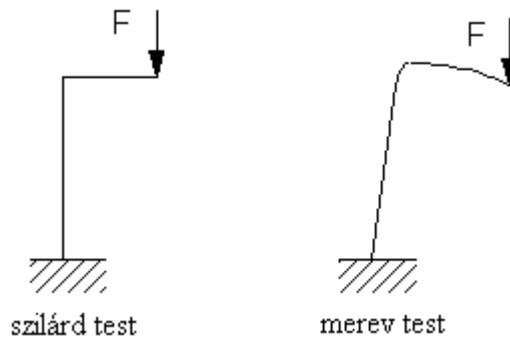


14. ábra

A tétel következménye: merev testen támadó erők hatásvonaluk mentén eltolhatók, azaz a támadáspontnak nincs jelentősége.

5. alaptétel

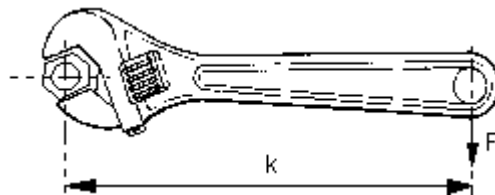
Kapcsolatot teremt a statika és a szilárdságtan között. Kimondja, hogy ha bármilyen szilárd test a ráható külső erők hatására alakváltozást szenved majd ismét nyugalomba kerül, akkor ebben a deformált állapotában helyettesíthető egy vele egyező alakú merev testtel.



15. ábra

2. Az erő statikai nyomatéka

Amikor két, egymáshoz csavarkötéssel rögzített lemeznél a csavaranyát villáskulccsal meghúzzuk, a villáskulcsra ható F erő forgató hatást vált ki. Ennek a forgatóhatásnak a mértéke egyenesen arányos az erő nagyságával, és az erő hatásvonalának a forgásponttól mért távolságával.



16. ábra

Vizsgáljuk meg mindezt általánosan. Legyen adott egy O pont körül elforgatható lemez. Működtessünk rajta egy F erőt. A lemez az erő hatására elfordul.

Általánosan kimondhatjuk: az elfordulás síkja az erővektor és a pont által meghatározott sík, az elfordulás tengelye pedig az O ponton átmenő, a síkra merőleges t -t tengely.

Tehát az erő forgató hatással rendelkezik. Az erő forgató hatását a statikai nyomaték méri. Ennek mértékéül az $M = F \cdot k$ szorzatot vezetjük be, ahol:

M : az F erő t tengelyre vett statikai nyomatéka

k : az erő karja (a t tengely és az erő hatásvonala közötti normáltranzverzális)

Az erő statikai nyomatékának mértékegysége: Nm.

Alkalmazott előjelszabály: az a nyomaték pozitív, amely felülről nézve az óramutató járásával ellenkező értelemben forog. (A jobbmenetű csavarnál a rögzítés negatív, az oldás pozitív forgatónyomatékkal történik.)

A statikai nyomatékokat nemcsak tengelyre, hanem pontra is számíthatjuk. A t tengely O pontjára számított nyomatékvektor:

$$M = r \times F.$$

Az M vektor az r és F vektorok síkjára merőleges úgy, hogy r , F és M jobb sodrású koordinátarendszert alkot. A nyomaték nagysága: $|M| = |F| |r| \sin \alpha = F \cdot k$. A vektorszámítás az erő nyomatékának forgatóértelmét egyértelműen meghatározza.

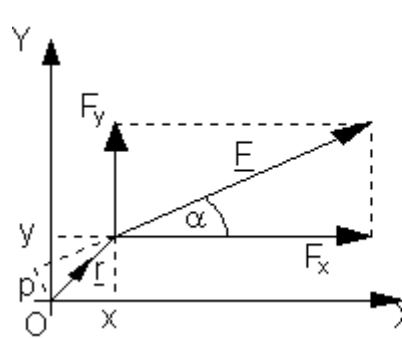
A tengelyre és a pontra vett statikai nyomatékok között kapcsolat áll fenn, miszerint: a t tengelyre vett nyomaték az O pontra vett nyomatékvektornak a t tengelyre eső vetülete. A pontra vett nyomaték zérus, ha az erő hatásvonala átmegy a ponton. A tengelyre vett nyomaték zérus, ha az erő hatásvonala metszi a tengelyt, vagy párhuzamos a tengellyel.

Nyomatéki tétel:

Az erő valamely pontra számított nyomatéka egyenlő a komponensek ugyanezen pontra vett nyomatékának összegével.

Másképpen: egy erőrendszer eredőjének nyomatéka a sík bármely pontjára ugyanakkora, mint az erők ugyanazon pontra vett nyomatékainak összege.

Az O pontra vett nyomatékvektor:



$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \underline{k}$$

17. ábra

De: a komponensekkel $M = F_y \cdot x - F_x \cdot y = p F \underline{k}$.

Így: $p F = x \cdot F - y \cdot F$, tehát a nyomatéki tétel igaz.

Közös ponton átmenő erőrendszer esetén a nyomatéki tétel: az erők nyomatékának algebrai összege bármely pontra zérus.

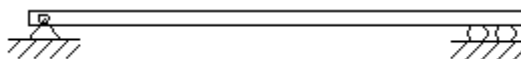
III. A kényszerek fogalma, fajtái

Közös metszéspontú erők egyensúlya:

1. Két erő egyensúlya
2. Három erő egyensúlya

1. A kényszerek

A testek mozgását sokszor kötöttségek korlátozzák. A leggyakoribbak a geometriai kötöttségek, amelyek esetén a testek egy adott merev nyugvó felületen vagy görbén mozoghatnak. Ilyen jellegű kényszerkapcsolat van pl. a híd egyik végének a rögzítésénél, ahol a híd görgőkön támaszkodik a talajra. A híd másik vége csuklóval rögzített.



18. ábra

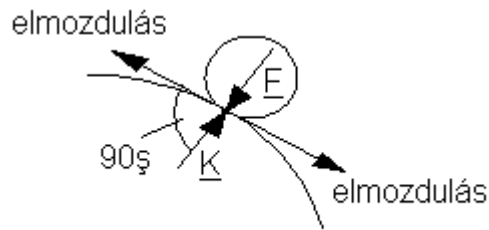
Kényszernek nevezzük a mozgást gátló elemeket, vagyis mindazokat a kapcsolatokat, erőhatásokat, amelyek egy test mozgását korlátozzák vagy megakadályozzák. Azokat az erőket, amelyeket a testre a kényszerek fejtenek ki, kényszererőknek vagy reakcióerőknek, a testet terhelő ismert erőket pedig aktív erőknek nevezzük. A kényszerkapcsolatokból, a lehetséges elmozdulásokból következtetni lehet a kölcsönhatásként jelentkező kényszererőkre.

A kényszerek tárgyalásakor feltételezzük, hogy az érintkező testek felülete tökéletesen sima.

A kényszerek fajtái

1. A megtámasztás:

olyan kényszer, amelynél a testet egy másik testre helyezzük.



19. ábra

Miután az érintkező felületek tökéletesen simák, ezért a közös érintő sík irányában nem lép fel erő-így tehát a test ebben az irányban el is mozdulhat-emiatt a felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Vagyis a megtámasztásnál fellépő kényszererő mindig normális irányú. Jelölése:

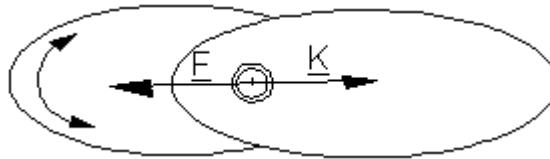


20. ábra

A megtámasztás 1 ismeretlent jelent: az erő előjeles nagyságát.

2. A síkcsukló:

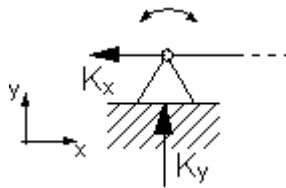
olyan kényszer, amely az egyik testnek egy másik testhez rögzített csap körüli elfordulását teszi lehetővé.



21. ábra

Miután a csukló csak tengely körüli elfordulást tesz lehetővé, elmozdulást pedig nem, ezért a kényszererő a tengelyre merőleges síkban helyezkedik el, és átmegy a csukló geometriai középpontján.

Jele:

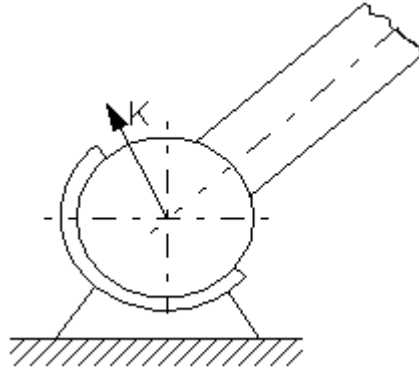


22. ábra

A síkcsukló 2 ismeretlent jelent: egy síkbeli erő előjeles nagyságát és irányát.

3. Gömbcsukló:

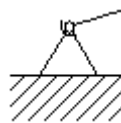
olyan kényszer, amely egy testnek egy másik testhez képest mozdulatlan pont körüli elfordulását teszi lehetővé.



23. ábra

Mivel a test elfordulhat a pont körül, de el nem mozdulhat, ezért a kényszererő egy olyan térbeli erő, amely átmegy ezen a ponton.

Jele:

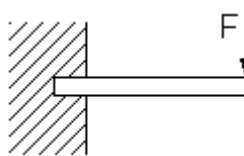


24. ábra

A gömbcsukló három ismeretlent jelent: egy térbeli erő nagyságát és irányát.

4. A befogás:

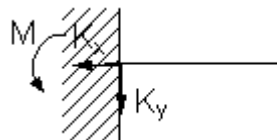
olyan kényszer, amely egy testet a megfogás helyén mereven rögzít a helytálló környezethez.



25. ábra

Miután a befogás nemcsak elmozdulást, hanem elfordulást sem tesz lehetővé, ezért a fellépő síkbeli kényszererőn kívül egy nyomaték is ébred a kényszer hatásaként. Ebből következik, hogy a befogás bármilyen tetszőleges erőrendszer átadására alkalmas, ill. bármelyik erőrendszerrel képes egyensúlyt tartani.

Jelölése:



26. ábra

A síkbeli befogás 3 ismeretlent jelent: egy síkbeli erő irányát, nagyságát és egy nyomatékot.

A térbeli befogás 6 ismeretlent jelent: egy térbeli erőt (3) és egy nyomatékvektort (3).

5. A rúd:

összetett kényszer, amelyet súlytalannak tekintünk. Alakja lehet egyenes vagy síkgörbe. A rúd csak akkor tekinthető kényszernek, ha csak a végein kap terhelést. A csak a végein terhelt rúd akkor lehet egyensúlyban, ha a kényszererő rúdírányú. A rúd egy olyan test, amelynek az egyik mérete (a hosszmenti)

lényegesen nagyobb a másik kettőnél (a keresztmetszetnél).

A rúd 1 ismeretlent jelent: az erő előjeles nagyságát.



27. ábra

Rúdirány: a rúd két végpontját összekötő egyenes.

6. A kötél

A kényszerként alkalmazott kötél súlytalan, nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony. A kötélen ébredő kényszererő mindig kötéldirányú. Az egyensúly feltétele, hogy a kötél húzott legyen.

Jele:



28. ábra

A kötél 1 ismeretlent jelent: a húzóerő nagyságát.

A statika a merev testek tartós nyugalmi helyzetének feltételével foglalkozik. A testek egyensúlyát mechanikai kényszerekkel biztosítjuk, ui. a test az aktív erők és a kényszererők hatására lesz nyugalomban.

2. Közös metszéspontú erők egyensúlya

A közös támadáspontú, n erőből álló erőrendszer eredője (a statika 3. alaptétele alapján):

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^n \underline{E}_i = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \dots + \underline{E}_n$$

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k}$$

$$R_x = \sum F_{xi} = \sum X_i$$

$$R_y = \sum F_{yi} = \sum Y_i$$

$$R_z = \sum F_{zi} = \sum Z_i$$

Vezessük be a:

$$F_{x1} = X_1$$

$$F_{x2} = X_2$$

$$F_{xn} = X_n$$

$$F_{y1} = Y_1$$

$$F_{y2} = Y_2$$

$$F_{yn} = Y_n$$

$$F_{z1} = Z_1$$

$$F_{z2} = Z_2$$

$$F_{zn} = Z_n$$

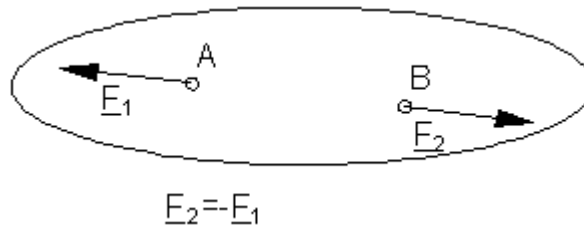
Az egyensúlyi erőrendszer egy speciális erőrendszer, amelynek hatására a testek mozgásállapotában nem következik be változás (Newton I. axiómája). Egyensúlyi erőrendszer esetén az eredő erő zérus: $\underline{R} = \underline{0}$.

A felírható 3 skalár egyenlet:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \sum X_i = 0 \\
 R_y &= \sum Y_i = 0 \\
 R_z &= \sum Z_i = 0
 \end{aligned}
 \quad \text{egyensúlyi egyenletek}$$

Két erő egyensúlya

A második alaptétel szerint a testre ható két erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos és értelme ellentett.



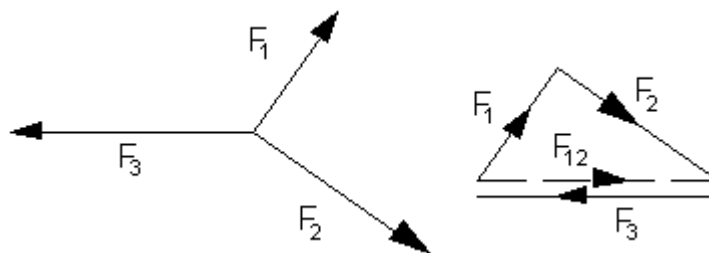
29. ábra

Három erő egyensúlya

Három erő egyensúlyát visszavezetjük két erő egyensúlyára, ezért a három erő közül tetszőleges kettőt az eredőjével helyettesítjük. Viszont a harmadik alaptétel szerint két erő csak akkor helyettesíthető egyetlen erővel, ha a két erő metszi egymást, azaz közös síkban vannak. Ez esetben az eredő is ugyanebbe a síkba esik. Evvel az eredővel a harmadik erő csak úgy tarthat egyensúlyt, ha az eredővel közös síkba esik, vagyis ha a harmadik erő is az előbbi két erő síkjában fekszik.

Három erő egyensúlyának első feltétele tehát, hogy a három erő egy közös síkba essék.

Először az F_1 és F_2 erők eredőjét határozzuk meg. Az eredő vektorát a vektorháromszög adja, és az eredő keresztülmegy a két erő M metszéspontján. Egyensúly csak akkor lehet, ha F_3 közös egyenesbe esik az F_{12} eredővel, és F_3 ugyanakkora csak ellentétes értelmű mint F_{12} , vagyis $F_3 = -F_{12}$. A vektorháromszög F_{12} vektorának helyébe az F_3 -at rajzoljuk. Látható, hogy egyensúly esetén a vektorháromszög folytonos nyílfolyammal záródik.



30. ábra

Tehát három erő egyensúlyának feltételei:

1. hatásvonaluk egy pontban metsződik
 2. vektorháromszögük záródik és folytonos nyílfolyamú.
- és ezekből következően hatásvonaluk közös síkban van

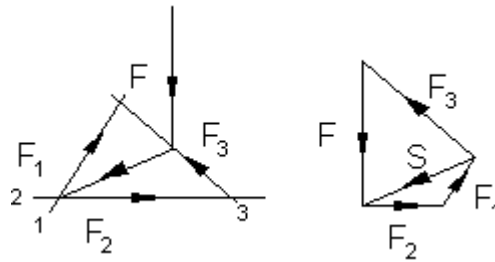
Közös síkban fekvő négy erő egyensúlya

Adott: egy erő nagysága, iránya, értelme és vele közös síkban lévő három erő hatásvonala.

Feladat: a három adott hatásvonalon működő erők meghatározása úgy, hogy a kapott négy erő egyensúlyban legyen.

A feladat egyértelműen nem megoldható, vagyis határozatlan, ha mind a négy erő közös ponton megy keresztül. Ha csak három erő megy át egy közös ponton, a negyedik pedig különálló erő, akkor pedig nem lehet egyensúly.

1. Culmann-féle szerkesztő eljárás



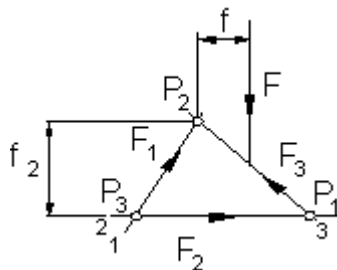
31. ábra

A négy erő egyensúlyát három erő egyensúlyára vezetjük vissza:

$$\underline{F} + \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} = \underline{0} \quad \underline{F} + \underline{F_{12}} + \underline{F_3} = \underline{0} \quad \underline{F_{12}} = \underline{S}$$

Az $\underline{F_1}$ és $\underline{F_2}$ erők eredőjéről azt tudjuk, hogy átmegy az 1 és 2 hatásvonal metszéspontján, de az így maradt három erő egyensúlyának feltétele többek között a közös metszéspont, így $\underline{F_{12}}$ -nek az $\underline{F}$ és $\underline{F_3}$ metszéspontján is át kell mennie, így ismertté válik az $\underline{F_{12}}$ eredő hatásvonala, az ún. segédirány. A kapott három erővel megszerkesztve a záródó, folytonos nyílfolyamú vektorsokszöveget, $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ és $\underline{F_3}$ meghatározható. A módszer alkalmas egy erő három síkbeli komponensre történő felbontására is.

2. A Ritter-féle számító eljárás



32. ábra

Jelöljük ki két-két ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontját. Az így kapott pontok (P_1 , P_2 , P_3) a vonatkozó erők főpontjai. P_1 a P_2 főpont az F_2 erő főpontja. Írjuk fel a nyomatéki egyensúlyi egyenleteket a főpontokra illeszkedő, a szerkezet síkjára merőleges tengelyre.

P_1 . F_2 erő meghatározása:

$$\sum_{(P_2)} \underline{M_i} = -f \cdot F + f_2 F_2 = 0$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{f}{f_2} \cdot F$$

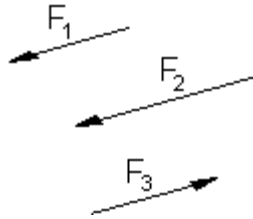
Az eljárás előnye, hogy a felírható egyenletekben csak egy ismeretlen van, a kiszámítandó erő.

IV. Az erőpár:

1. Fogalma és jellemzői
2. Erőpárok összegzése
3. Közös síkú erő és erőpár eredője

1. Párhuzamos erők

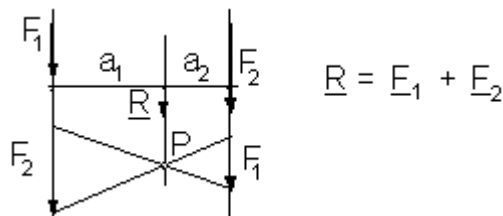
A párhuzamos erőkből álló erőrendszer az erőrendszerek egy speciális esete.



33. ábra

Az eredő erő: $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_n$ alapján meghatározható, vagyis ismert az eredő erő nagysága, iránya, értelme. Ismeretlen viszont a hatásvonala, mivel az erők metszéspontja a végtelenben van. A feladat tehát az eredő hatásvonal egy pontjának meghatározása, melyen keresztül a párhuzamos erők hatásvonalával párhuzamost húzva megkapjuk az eredő erőt. Ezen pont meghatározását a nyomatéki tétel alkalmazásával oldjuk meg. A kiindulás az, hogy az eredő hatásvonalára az erőrendszer nyomatéka zérus kell, hogy legyen, mivel az eredő egyetlen erő.

a./ Két párhuzamos hatásvonalú, megegyező értelmű erő eredője



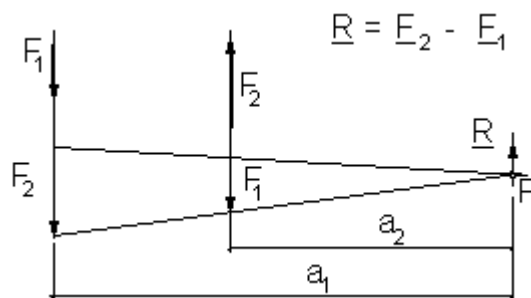
34. ábra

A szerkesztés menete: az egyik erő vektorát rámerjük a másik hatásvonalára és viszont. Majd az egyik vektor kezdőpontját összekötjük a másik vektor végpontjával és viszont. Az így kapott (P) pont valóban az eredő hatásvonalának egy pontja, mert a két háromszög hasonlóságából:

$$F_1 / F_2 = a_2 / a_1 \Rightarrow F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2 \Rightarrow F_2 \cdot a_2 - F_1 \cdot a_1 = 0 = S_{Mi}$$

Az eredő hatásvonala mindig a két erő hatásvonala közé esik.

b./ Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes értelmű erő eredője



35. ábra

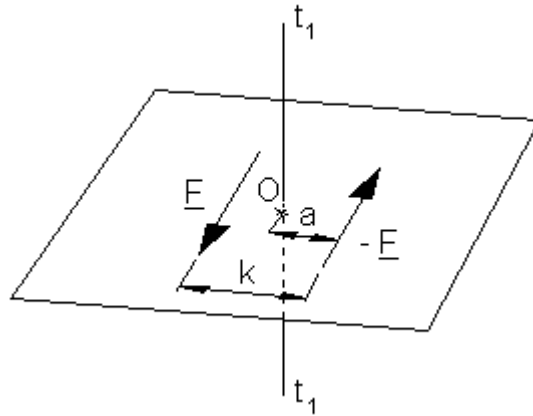
A szerkesztés menete ugyanúgy történik, mint a megegyező értelmű erőknél. Itt is felírható a két kapott háromszög hasonlósága alapján:

$$F_2 / F_1 = a_1 / a_2 \Rightarrow F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2 \Rightarrow F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot a_2 = 0 = S_{Mi}$$

Az eredő hatásvonala a két erő hatásvonala által határolt sávsíkon kívül a nagyobbik erő oldalán van.

2. Az erőpár

Két egyenlő nagyságú, párhuzamos hatásvonalú és ellentétes értelmű erőből álló erőrendszert erőpárnak nevezzük. A két párhuzamos erő síkot határoz meg, ez az erőpár síkja.



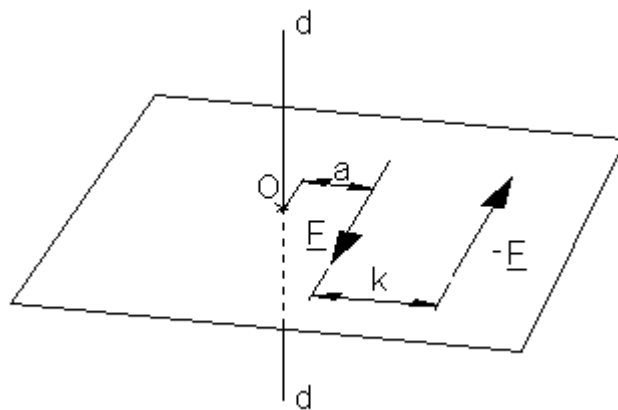
36. ábra

Ha az erőpár egy olyan merev lemezen hat, amely a síkjára merőleges t tengely körül elfordulhat, akkor az erőpára merevtestet a forgástengely körül el fogja forgatni, vagyis az erőpár forgatóhatással, nyomatékkal bír. Határozzuk meg az erőpárt alkotó erőnek a nyomatékát az O ponton átmenő, az erőpár síkjára merőleges t tengelyre: $M = F a + F (k - a) = F k$

F : az egyik erő nagysága, az erőpár alapja

k : az erőpárt alkotó két erő merőleges távolsága, az erőpár karja

Ha a nyomatékot egy másik tengelyre írjuk fel:



37. ábra

$M = F (a+k) - F a = F k \Rightarrow$ természetesen ugyanazt az összefüggést kapjuk. Az eredményből két fontos megállapítást tehetünk:

- A nyomaték nagysága nem függ az a mérettől, vagyis nem függ a forgástengely helyzetétől. Az erőpár nyomatéka a síkjára merőleges valamennyi tengelyre ugyanakkora.

- Az erőpár nyomatékát az egyik erőnek és az erők merőleges távolságának szorzata adja: $M = F k$.

Tehát az erőpárt a síkja és a nyomatéka jellemzi. Az előzőekből következik, hogy az erőpárt a saját síkjában párhuzamosan elcsúsztathatjuk, elforgathatjuk, ill. a saját síkjával párhuzamosan is eltolhatjuk. Bizonyítás nélkül is belátható, hogy az erőpár forgató hatása a síkjára merőleges bármely tengely körül változatlan marad.

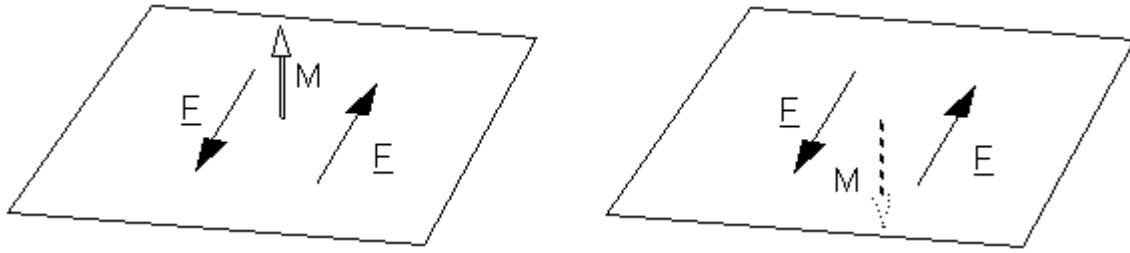
Ha ugyanazon síkban, vagy párhuzamos síkokban ható két erőpár nyomatékának összege zérus, akkor a két erőpár egyensúlyban van. Ebből következik, hogy ha közös síkban vagy párhuzamos síkokban működő két erőpár nyomatéka egyenlő, akkor a két erőpár egymással egyenértékű. Az egyenértékűségből következik, hogy az erőpárnál sem az erőnek, sem a karnak külön-külön nincs jelentősége. A kettő szorzata, a nyomaték a fontos jellemző.

Mindezekből következik, hogy az erőpárnak három meghatározó jellemzője van:

- síkjának állása

- a forgató hatás, a nyomaték értelme
- a nyomaték nagysága.

Tehát az erőpár egy vektorral jellemezhető. Az erőpár nyomatékvektora az erőpár síkjának normálvektora irányába mutat. Nagysága $F \cdot k$. Értelmét úgy vesszük fel, hogy a nyílból nézve a forgásnak az óramutató járásával ellentétesnek kell lennie (jobbmenetű csavar).



38. ábra

Miután a nyomatékvektor egyértelműen megadja az erőpárt, ezért a statikában koncentrált erőpárokkal foglalkozunk, ahol F és k értéke lényegtelen, csak M a fontos. Értelmezésénél fogva az erőpár nyomatékvektora nem kötött vektor-szemben az erővektorral-, hanem szabad vektor, ui. a tér bármely pontjához hozzárendelhető.

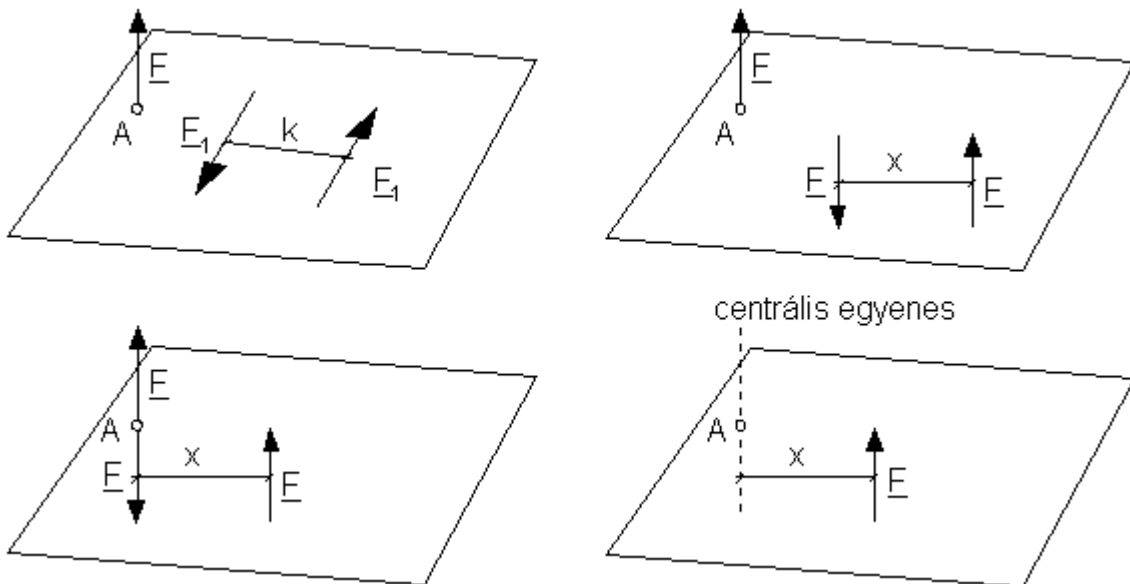
Az erőpárok nyomatékvektorai az erővektorokhoz hasonlóan, a vektoralgebra szabályai szerint összegezhethők: $\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2$

Az erőpár, hasonlóan az erőhöz önálló terhelés. A testeket tehát erők és erőpárok terhelik.

Közös síkú erő és erőpár eredője

Tétel: Közös síkban fekvő erő és erőpár mindig helyettesíthető egyetlen erővel, vagyis a közös síkú erő és erőpár eredője egyetlen erő.

Ennek igazolása a következő ábrán látható:



39.a,b,c,d ábra

A merev testre F k nyomatékú erőpár és a test A pontjában az erőpár síkjával párhuzamos F erő hat. Feladat az adott erőrendszer eredőjének a meghatározása. A megoldás lépései:

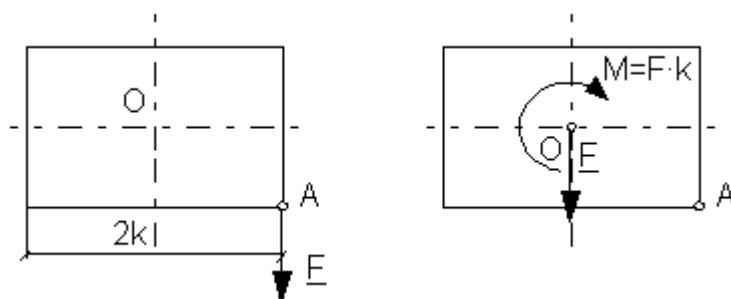
1. Az F k nyomatékú erőpárt párhuzamosan eltoljuk az A ponton átmenő síkba, és itt helyettesítjük $F_x = Fk$ erőpárral.
2. Ezt az F_x erőpárt - a c. ábrának megfelelően - az adott F erő hatásvonalába úgy toljuk el, hogy az erőpár két ereje közül az adott F erő hatásvonalába az F erővel ellentétes értelmű erő kerüljön.

3. Az A pontban a két $\underline{F}$ nagyságú erő egyensúlyt tart. Ezek a negyedik alaptétel értelmében elhagyhatók, így eredőül egyetlen $\underline{F}$ erő marad, párhuzamosan eltolva helyzetben. Az eltolás mértéke: $x = F \cdot k / F$.

Az erő eltolásakor olyan helyzetbe kerül, hogy az eltolva hatásvonalú F erő az adott A ponton átmenő és a síkra merőleges tengely körül úgy forog, mint az adott $F \cdot k$ nyomatékú erőpár forgatott. A szabályt így fogalmazhatjuk meg:

Az erő és a vele párhuzamos síkú erőpár eredője egyetlen erő, és pedíg az adott erővel egyező erő, párhuzamosan eltolva helyzetben; ennek az eltolva helyzetű erőnek a nyomatéka a tér bármely pontjára egyenlő az eredeti erőrendszer (az A ponton átmenő erő és az erőpár) ugyanerre a pontra számított nyomatékával. Az eltolva helyzetben lévő eredő erő hatásvonalát centrális egyenesnek nevezik. Így a szabály másképpen is fogalmazható: Egy erő és vele párhuzamos síkú erőpár eredője egyetlen erő, amelynek hatásvonala a centrális egyenes (a centrális egyenes: a végső redukálás eredményeként kapott egyetlen erő hatásvonala).

A feladat megfordítása az erő áthelyezése, redukálása: Ha az erőt önmagával párhuzamosan új helyzetbe toljuk el, akkor melléje társul egy erőpár. Az eltolva helyzetű erőnek és az erőpárnak együttes hatása azonos azzal a hatással, amit az eredeti erő az eredeti helyén fejt ki a merev testre.



40. ábra

Helyezzük át az A pontban ható $\underline{F}$ erőt az O pontba. Eredmény: az O pontban az $\underline{F}$ erő és egy $M = F \cdot k$ erőpár, amely az eredeti (A pontbeli) $\underline{F}$ erővel azonos értelemben forog O pont körül.

V. általános síkbeli és térbeli erőrendszerek:

1. Eredője ill. redukálása

2. Egyensúlya

1. Síkbeli erőrendszer eredője és egyensúlya

1. Közös metszéspontú erőrendszer

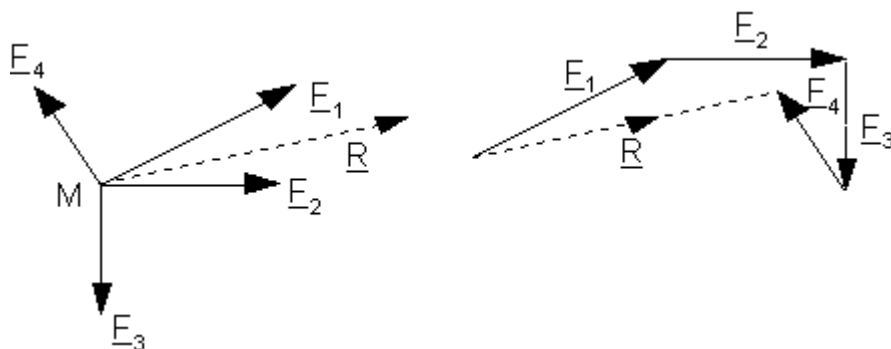
Eredő:

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \dots + \underline{F}_n \text{ (nagysága, iránya)}$$

$$R_x = \text{Szumma}(X_i)$$

$$R_y = \text{Szumma}(Y_i)$$

Hatásvonalának egy pontja: a közös metszéspont. Szerkesztéssel: a vektorpoligonon kiszerkesztett eredővel párhuzamost húzunk a közös metszésponton keresztül:

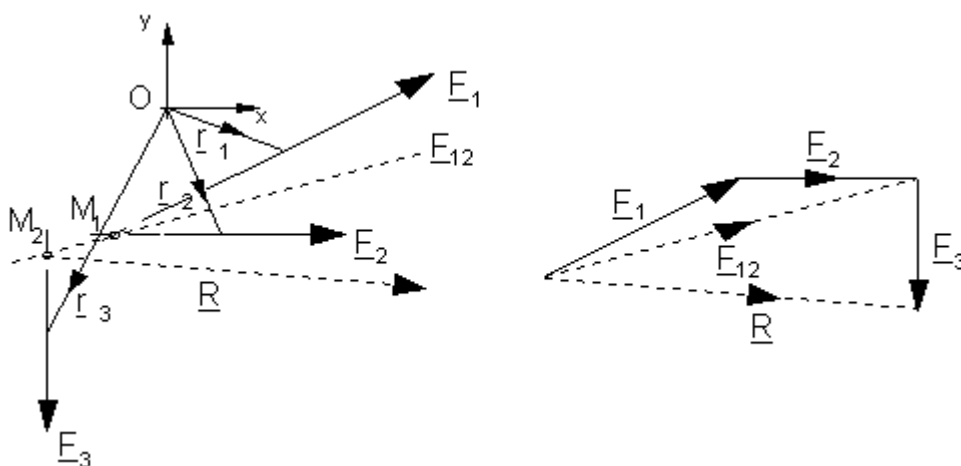


41. ábra

Egyensúly esetén: $\underline{R} = \underline{0}$ azaz $\text{Szumma}(X_i) = 0$ $\text{Szumma}(Y_i) = 0$,

2. Általános síkbeli erőrendszer

Eredő: az erőrendszer redukáltja a sík egy tetszőleges pontjába általános esetben egy erő és egy, a síkra merőleges vektorú erőpár (ami tovább redukálható egyetlen erővé): $[\underline{R}; \underline{M}]$. Szerkesztéssel:



42. ábra

Számítással:

$$R_x = \text{Szumma}(X_i) \text{ és } R_y = \text{Szumma}(Y_i)$$

$$\underline{M} = \text{Szumma}(\underline{r} \times \underline{F}_i) + \text{Szumma}(\underline{M}_j) = M_0 z \underline{k}$$

Mivel $\underline{R}$ és $\underline{M}$ egymásra merőlegesek, ezért a közös síkú erő és erőpár eredőjének meghatározásánál tanultak szerint helyettesíthető egyetlen egy erővel. Egyensúly esetén: $[\underline{R}; \underline{M}] = [\underline{0}; \underline{0}]$ azaz

$$\text{Szumma}(X_i) = 0$$

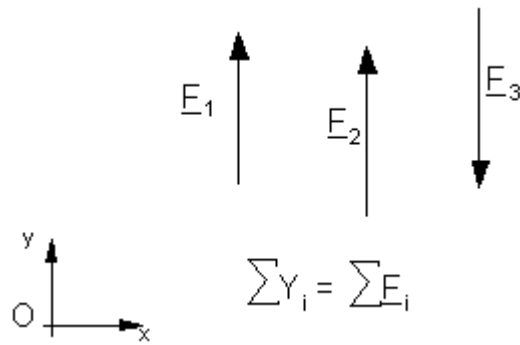
$$\text{Szumma}(Y_i) = 0$$

$$\text{Szumma}(M_i) + \text{Szumma}(M_j) = \text{Szumma}(x_i Y_i - y_i X_i) + \text{Szumma} M = 0$$

3. Síkbeli párhuzamos erőrendszer

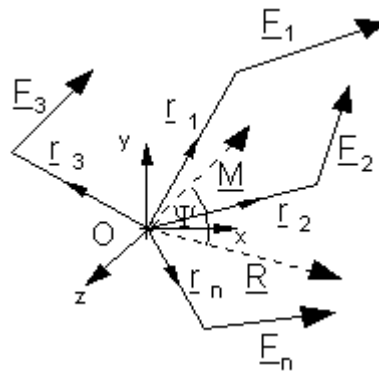
Eredő: meghatározása hasonlóan történik, mint az általános erőrendszer esetén. Itt azonban lehetőség van egyszerűsítésre, ui. a számító eljárás során az egyik koordináta-tengelyt-pl. az y tengelyt-a közös erőiránnyal párhuzamosan vesszük fel, így minden x irányú összetevő eleve zérus. Az eredő tehát: $[\underline{R}; \underline{M}] = [\text{Szumma}(Y_i); \underline{M}_0]$.

Szerkesztésnél az eredő erő meghatározását egyszerű algebrai összegzéssel végezhetjük el. Az eredő hatásvonalának egy pontját ún. kötélsokszög-szerkesztéssel állítjuk elő.



43. ábra

2. Általános térbeli erőrendszer eredője és egyensúlya Redukáljuk a merev test $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontjain támadó $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_n$ térben szétszórt erőket. Az erőrendszer redukálása ugyanúgy történik mint síkbeli esetben, vagyis az összes erőt áthelyezzük egy tetszőlegesen kiválasztott O pontba



44. ábra

Az erőknél az O pontba való áthelyezése után ott $\underline{R} = \text{Szumma } \underline{F}_i$ eredő erőt és $\underline{M} = \text{Szumma}(\underline{r}_i \times \underline{F}_i) + \underline{M}_j$ nyomatékú eredő erőpárt kapunk. Az $\underline{R}$ erő és $\underline{M}$ nyomatékvektor Y szöget zárnak be, melynek nagysága az $\underline{R} \cdot \underline{M} = |\underline{R}| |\underline{M}| \cos Y$ egyenletből számítható.

$$\cos \psi = (\underline{R} \cdot \underline{M}) / |\underline{R}| |\underline{M}| = (X \cdot M_x + Y \cdot M_y + Z \cdot M_z) / R \cdot M.$$

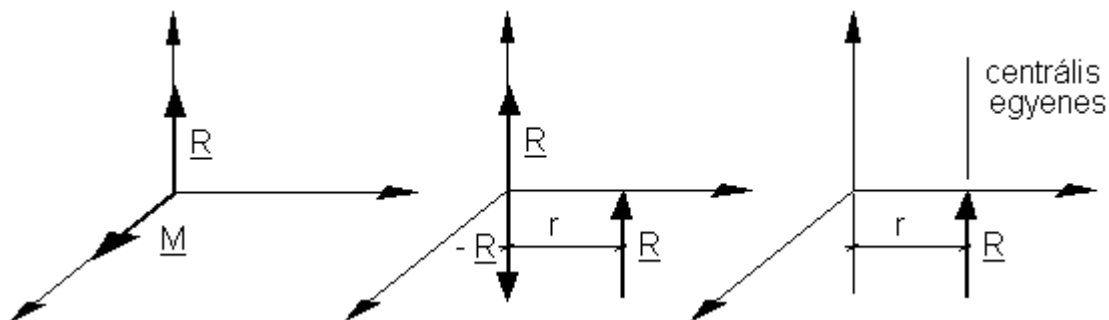
Lehetséges esetek:

1./ $R \neq 0$ és $M = 0$ az eredő egy erő.

2./ $R = 0$ és $M \neq 0$ az eredő egy erőpár.

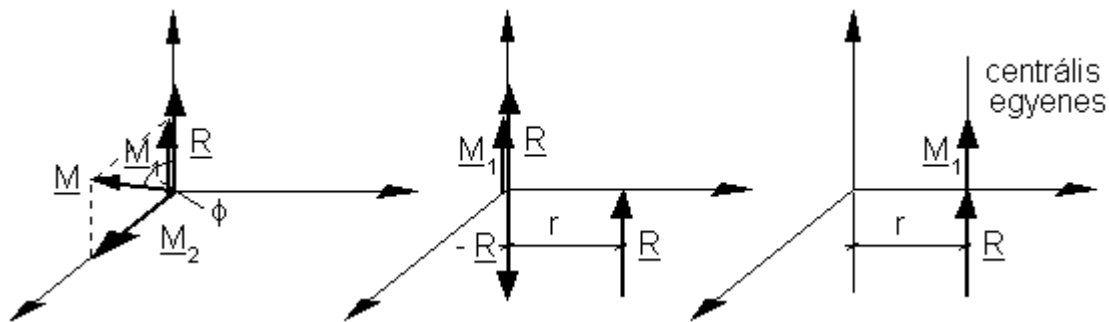
3./ $R \perp M$ Ilyenkor $Y = 90^\circ$ és $\cos Y = 0$, vagyis: $\underline{M} \cdot \underline{R} = 0$. (Ez az eset fordult elő a síkbeli erők vizsgálatánál). Skalárisan: $X M_x + Y M_y + Z M_z = 0$

Ilyen esetben az erő és az erőpár egyetlen erővé redukálható (Speciális ponton átmenő centrális egyenes).



45. ábra

4./ $R \cdot M \neq 0$. Ilyenkor az erőrendszert ún. erőcsavarrá redukáljuk a következőképpen:



46. ábra

$$M = M \cos \phi \text{ és } M = M \sin \psi$$

A centrális egyenes egy speciális pontjába mutató helyvektor ($\underline{r}$) meghatározása: Az ábrából láthatóan: $\underline{r} \times \underline{R} = \underline{M}$.

Ha mindkét oldalt megszorozzuk $\underline{R}$ -el, és a kettős vektor-szorzat kifejtési tételét alkalmazzuk:

$$\underline{R} \times (\underline{r} \times \underline{R}) = \underline{R} \times \underline{M} \text{ és } \underline{r} |\underline{R}|^2 - \underline{R} (\underline{r} \cdot \underline{R}) = \underline{R} \times \underline{M}$$

$$\text{de } \underline{r} \cdot \underline{R} = 0, \text{ mert } \underline{r} \perp \underline{R}$$

(Ezért választottunk olyan speciális $\underline{r}$ vektort, amely merőleges $\underline{R}$ vektorra.).

$$\text{Így } \underline{r} = (\underline{R} \times \underline{M}) / |\underline{R}|^2.$$

Mivel $\underline{R}$ és $\underline{M}$ vektorok párhuzamosak, szabad mindkét oldalhoz hozzáadni $(\underline{R} \times \underline{M}_1) / |\underline{R}|^2 = \underline{0}$ vektort, így $\underline{r} = (\underline{R} \times \underline{M}_2) / |\underline{R}|^2 + (\underline{R} \times \underline{M}_1) / |\underline{R}|^2$ ezzel $\underline{r} = (\underline{R} \times \underline{M}_0) / |\underline{R}|^2$.

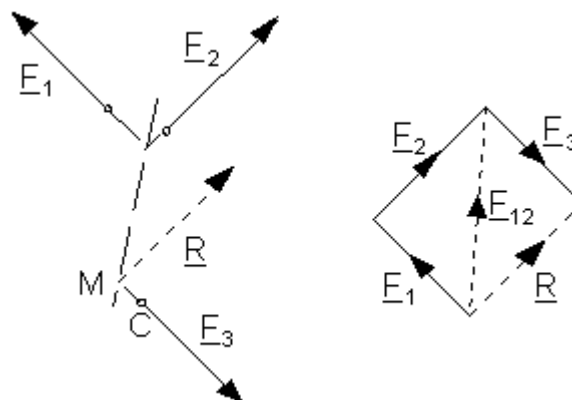
5./ $\underline{R} = \underline{0}$ és $\underline{M} = \underline{0}$. Ilyenkor az erőrendszer egyensúlyban van.

VI. Síkbeli erőrendszer eredőjének meghatározása szerkesztéssel:

1. közvetlen úton
2. kötelszög útján.

1. Eredő szerkesztése közvetlen úton

A merev test A pontjában F_1 , B pontjában F_2 , stb. közös síkba eső erők hatnak. Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét szerkesztéssel!



47. ábra

Az eredő vektora a vektorpoligonból, az adott erők vektorainak geometriai összegzéséből - függetlenül az erők összetevésének sorrendjétől - meghatározható. Ezzel szemben az eredő helyének, ill. a hatásvonal egy pontjának a meghatározásához az erőparalelogramma tétel ismételt alkalmazására van szükség, amelynek menete:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \dots + \underline{F}_n = \underline{R}$$

$$\underline{F1} + \underline{F3} + \dots + \underline{Fn} = \underline{R}$$

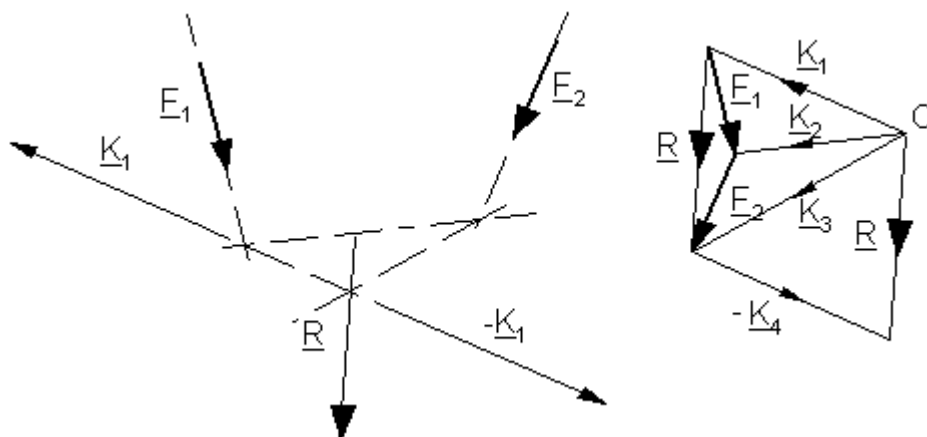
$$\underline{F123} + \dots + \underline{Fn} = \underline{R}$$

Az erőrendszer eredőjének szempontjából három jellegzetes esetet különböztethetünk meg:

- a./ Az adott erőrendszer eredője egy erő
- b./ Az adott erőrendszer eredője egy erőpár
- c./ Az adott erőrendszer egyensúlyban van.

2. Eredő szerkesztése kötelsokszög útján

A merev test A pontjában $\underline{F1}$, B pontjában $\underline{F2}$ erő hat. Határozzuk meg az eredőt!



48. ábra

A vektorpoligonból az eredő $\underline{R}$ vektor kiadódik: $\underline{F1} + \underline{F2} = \underline{R}$. $\underline{F}$ hatásvonalát keresztülmegy $\underline{F1}$ és $\underline{F2}$ metszéspontján, de az most nem hozzáférhető. Ezért az adott erőkhöz tetszőlegesen választott, de alkalmas irányú - az adott erőkhöz jó metszések biztosító - $\underline{K1}$ és $(-\underline{K1})$ erőkből álló egyensúlyi erőrendszert adunk (4. alaptétel alapján). Ennek értelmében módosítjuk a vektorpoligont de úgy, hogy a $\underline{K1}$ vektort az $\underline{F}$ elé soroljuk: $\underline{K1} + \underline{F1} + \underline{F2} + (-\underline{K1}) = \underline{R}$.

A $\underline{K1}$, $(-\underline{K1})$ erőrendszer felvételével az eredő hatásvonalának egy pontját, az M pontot volt célunk megszerkeszteni. Ezt a célt azonban bizonyos egyszerűsítéssel is elérhetjük:

- 1./ A vektorpoligonban felesleges a $(-\underline{K1})$ és az $\underline{OO1} = \underline{R}$ vektorokat megrajzolni, mert az eredő vektora mint az $\underline{F1}$ és $\underline{F2}$ vektorok összege is kiadódik.
- 2./ Felesleges a $(-\underline{K1})$ erő hatásvonalát külön kihangsúlyozni, mert ez a hatásvonal $\underline{K1}$ hatásvonalával egybeesik, így az M metszéspont mint a $\underline{K1}$ és $\underline{K3}$ erők metszéspontja adódik.

Az eredő szerkesztését gépiesen a következő módon végezzük:

- 1./ Az adott erőkből folytonos nyílfolyammal vektorpoligont szerkesztünk. Az eredő vektora a kezdőponttól a végpontig terjed (nyílűtközéssel).
- 2./ Egy tetszőlegesen felvett O pontból (pólus) a vektorsokszög vektorainak kezdő, ill. végpontjaihoz egy-egy egyenest (sugár) húzva a vektoridomot állítjuk elő.
- 3./ Megrajzoljuk a kötelsokszöget úgy, az $\underline{F1}$ vektort megelőző $\underline{K1}$ sugárral párhuzamosan rajzoljuk az $\underline{F1}$ hatásvonalát megelőző első kötéloldalt, majd az $\underline{F1}$ hatásvonalán adódó metszéspontból folytatjuk a szerkesztést úgy, hogy e ponton keresztül párhuzamosan húzunk az $\underline{F1}$ -et követő, illetve az $\underline{F2}$ -t megelőző $\underline{K2}$ sugárral. Így nyerjük sorra a további kötéloldalakat, végül a kötelsokszög utolsó utolsó oldala természetesen az utolsó vektort követő sugárral párhuzamos.
- 4./ Az első és az utolsó kötéloldal metszéspontjában az eredő vektorával párhuzamosan rajzolt egyenes adja az eredő hatásvonalát.

Az összetartozó vektor- és kötelsokszögek reciprok alakzatok:

- 1./ A kötelsökszög egyes oldalai párhuzamosak a vektorsökszög megfelelő vektorsugaraival.
- 2./ A kötelsökszögben két erő és a közöttük fekvő kötélszakasz háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a vektorsökszögben egy pont felel meg, amelyben a háromszöget alkotó erőkkel párhuzamos vektorok metszik egymást. Pl. az $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ és $\underline{K}_2$ által alkotott háromszögnek a vektorsökszög b sarokpontja felel meg.
- 3./ A vektorpoligonban két vektorsugár és egy erő vektora háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a kötelsökszögben egy pont felel meg, melyben a két vektorsugárral párhuzamos két kötéloldal az erő hatásvonalán metsződik.

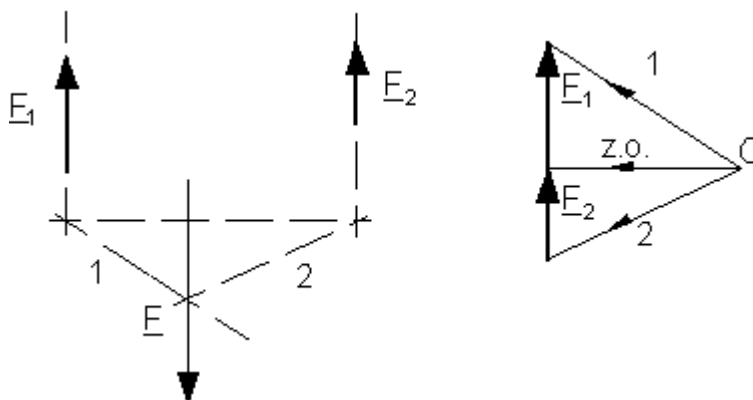
Az erőrendszer eredőjének szempontjából a következő három esetet különböztetjük meg:

- 1./ Az erővel egyenértékű erőrendszer vektorsökszöge is és kötelsökszöge is és kötelsökszöge is nyitott (az első és utolsó kötéloldal metsződik).
- 2./ Az erőpárral egyenértékű erőrendszer vektorsökszöge zárt, kötelsökszöge nyitott (az első és az utolsó kötéloldal párhuzamos).
- 3./ Egyensúlyi erőrendszer esetén a vektorpoligon is és a kötélpoligon is zárt (az első és az utolsó kötéloldal egy egyenesbe esik).

Egy adott erőrendszerrel egyensúlyt tartó erők meghatározása kötelsökszög segítségével

- 1./ Párhuzamos erők közül álló erőrendszer esetén

Adott egy erő vektora ($\underline{F}$) és két, vele párhuzamos erő hatásvonala. Szerkesszük meg a két adott hatásvonalon működő erőket úgy, hogy a három erő egyensúlyi erőrendszert alkosson!

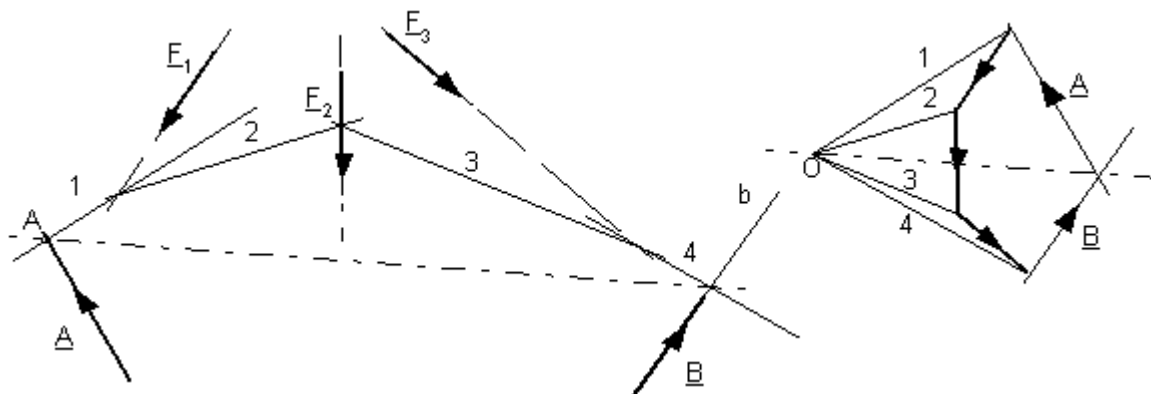


49. ábra

Az adott erőre rajzolt kötelsökszög két oldalát metszésbe hozzuk az adott hatásvonalakkal. A kapott metszéspontok a záróoldalt adják: ez megelőzi az első, ill. követi az utolsó, jelen esetben a harmadik erőt. A vektorpoligonban a záróoldallal húzott párhuzamos az adott erő egyenesén megadja a keresett két erőt.

- 2./ Síkban szétszórt erőrendszer esetén

Adott $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$ síkbeli erőrendszer. Határozzuk meg azt a P ponton átmenő, ismeretlen irányú és nagyságú $\underline{A}$ erőt, valamint azt a b egyenesbe eső $\underline{B}$ erőt, amelyek a három erővel egyensúlyt tartanak.



A szerkesztés azon alapszik, hogy egyensúly esetén a vektorpoligon is és a kötélpoligon is zárt. A kötélsokszög első oldalát az A erő hatásvonalának egyetlen ismert PA pontján át kell rajzolni. A megszerkesztett kötélpoligon a b egyenest PB pontban metszi. A záróoldal tehát PA PB egyenes lesz. A vektorpoligon záródását úgy érhetjük el, hogy a b-vel húzott párhuzamost elmetszük az O pólusból húzott záróoldallal párhuzamos egyenessel. A kapott metszéspont a B végpontja és az A kezdőpontja. Az A végpontja természetesen az F1 kezdőpontja.

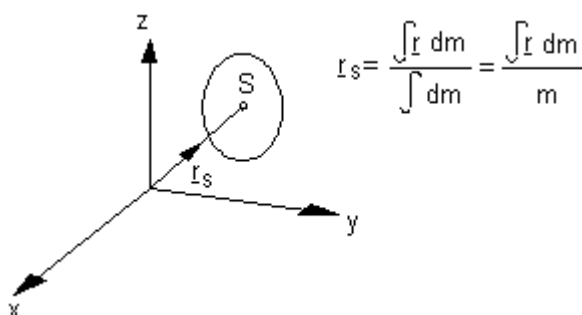
VII. A súlypont meghatározása:

1. A súlypont fogalma
2. Helyvektorának meghatározása
3. Vonalak, síkidomok, homogén testek súlypontjának kiszámítása

1. A súlypont fogalma

A Földön lévő valamennyi testre a Föld vonzásából és forgásából származó erő hat. Mivel ez a hatás a test minden elemére kiterjed, így egy térben megoszló erőrendszert alkot, amely a Föld középpontjának nagy távolsága miatt párhuzamos, függőleges irányú elemi erőkből áll. Ennek a párhuzamos erőrendszernek az eredője a test súlya. A súlyerőrendszer középpontja, az eredő támadáspontja a súlypont.

2. A súlypont számítása



51. ábra

A súlypont helyvektora:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m}$$

ahol: m a test tömege, r a dm tömegelem helye.

a./ Ha homogén tömegeloszlású testről van szó ($r=\text{áll.}$) akkor a súlypont helye a test geometriai alakjából adódik,

ugyanis $dm = \rho dV$, így:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{\int \rho dV} = \frac{\int \mathbf{r} dV}{\int dV} = \frac{\sum \mathbf{r}_i V_i}{\sum V_i}$$

Az így kapott pontot helyesebb volna geometriai középpontnak tekinteni, mivel térfogatra vonatkozik, és csak testek esetén indokolt a súlypont elnevezés.

A súlypont koordinátái az adott térfogathoz kötött koordináta-rendszerben:

$$x_s = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}$$

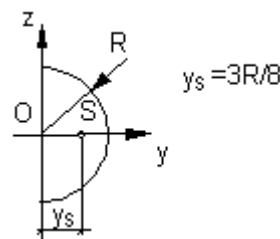
$$y_s = \frac{\int y dV}{\int dV} = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}$$

$$z_s = \frac{\int z dV}{\int dV} = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}$$

A test szimmetriasíkjai mindig átmennek a súlyponton. Néhány homogén test súlypontja:

- Gúla vagy kúp: az alaptól számított negyedmagasságban levő és az alappal párhuzamos síkmetszet súlypontjával esik egybe. Természetesen rajta van a test súlyvonalán, vagyis az alapterület súlypontjának és a gúla ill. kúp csúcsának összekötő egyenesén.

- Félgömb:



52. ábra

b./ Síkidomok súlypontja

A súlypont helyvektora:

$$\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA} = \frac{\sum \vec{r}_i A_i}{\sum A_i}$$

A súlypont koordinátái a síkidomhoz kötött koordinátarendszerben:

$$x_s = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$y_s = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

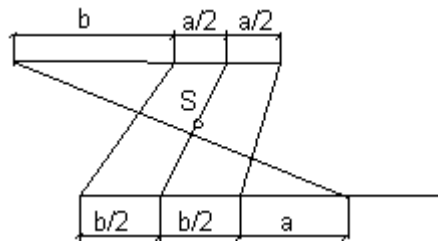
$$z_s = \frac{\int z dA}{\int dA} = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$$

A síkidom szimmetriatengelyei mindig átmennek a súlyponton. Néhány síkidom súlypontja:

- Háromszög: az oldalfelezők metszéspontja, ill. a magasság harmada (az alaptól).

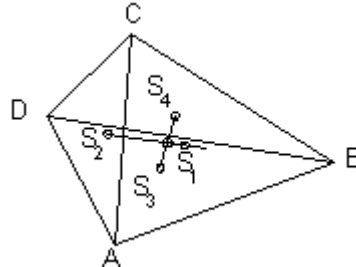
- Négyszög: az AC átló berajzolásával nyert két háromszög súlypontja S1 és S2, a BD átló behúzásával nyert két háromszöge S3 és S4. Az S1S2 és S3S4 egyenesek súlyvonalak, így metszéspontjuk a négyszög súlypontját adja.

- Trapéz:



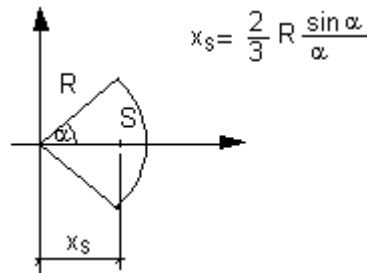
53. ábra

- Sokszög: a legegyszerűbben háromszögekre bontással határozható meg.



54. ábra

- Kőrcikk: a szögfelező sugáron van.



55. ábra

Félkör lap esetén:

$$x_s = 4R / (3\pi)$$

c./ Vonalak súlypontja

A súlypont helyvektora:

$$\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r} dl}{\int dl} = \frac{\sum \vec{r}_i l_i}{\sum l_i}$$

A súlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{\int x dl}{\int dl} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}$$

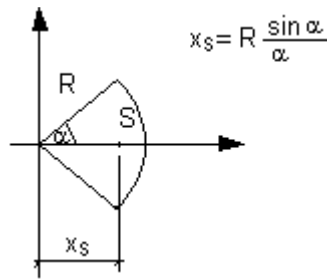
$$y_s = \frac{\int y dl}{\int dl} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}$$

$$z_s = \frac{\int z dl}{\int dl} = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}$$

Néhány vonal súlypontja:

- Egyenes vonal darab: a felezőpontban van.

- Körív: a szögfelező sugáron van.



56. ábra

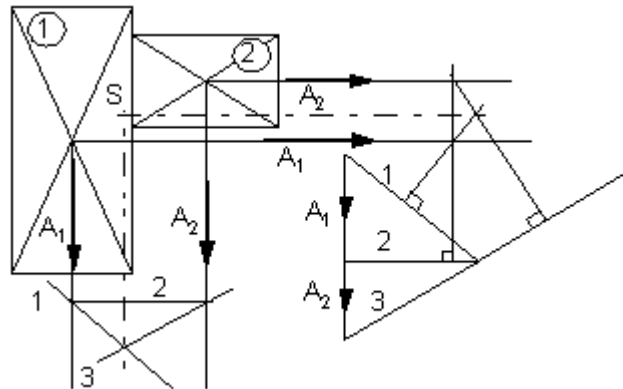
Félkörív esetén: $x_s = 2R / \pi$.

Az egyszerű részekből összetett homogén test, síkidom, törtvonal súlypontjának kiszámítási menete:

1. Célszerűen választott koordinátarendszer felvétele
2. Az összetett test, síkidom, törtvonal felbontása egyszerű részekre
3. A részek súlypontjainak meghatározása
4. Behelyettesítés a megfelelő képletbe
6. A kapott súlypont berajzolása az ábrába

3. Síkidom súlypontjának szerkesztése

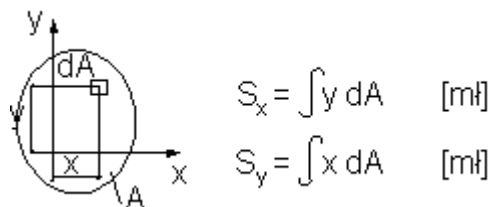
A síkidomot olyan részekre bontjuk, hogy az egyes részek területének nagysága és súlypontjának helye egyszerűen adódjék. Az egyes súlypontokban a területekkel arányos párhuzamos erőket veszünk fel. Ezek megszerkesztett eredőjének hatásvonala súlyvonal. Majd az erőrendszert elforgatjuk-célszerű 90° -kal-, és ismét megállapítjuk az eredőt. A két eredő metszéspontja a párhuzamos erők középpontja, ill. két súlyvonal metszéspontjaként a súlypontot adja. A 90° -kal való elforgatás azért célszerű, mert így a két kötélsozszög számára csak egy vektorpoligont kell rajzolni. Az egyik kötélpoligon oldalai párhuzamosak a megfelelő vektorsugarakkal, a másikéi erre merőlegesek.



57. ábra

4. Az elsőrendű, vagy statikai nyomaték

A súlypont koordinátáit meghatározó képletek számlálói a geometriai testek, síkidomok, vonalak ún. elsőrendű vagy statikai nyomatékai. Ezekben az elemi térfogat, felület, vonaldarab egy távolsággal való szorzata, ill. annak integrálja szerepel. A távolságot képezhetjük egy tengelytől vagy egy síktól, így beszélhetünk síkra vagy tengelyre vett statikai nyomatékról. A különböző elsőrendű nyomatékok közül jelentősége a síkidom statikai nyomatékának van. Ennek meghatározása:



58. ábra

Az egyes x és y hosszak, tehát az x ill. y is előjeles mennyiségek, így a statikai nyomaték lehet pozitív vagy negatív.

Összefoglalva: Valamely síkidomnak egy tengelyre számított statikai nyomatékán a síkidom területének és a súlypont tengelytől mért távolságának szorzatát értjük. Egy síkidom tetszőleges tengelyre vett statikai nyomatékát úgy is meghatározhatjuk, hogy a síkidomot részekre bontjuk, majd a síkidom részeknek az adott tengelyre vett nyomatékát algebrailag összegezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha

$$\int x dA = 0$$

akkor $x = 0$, a súlypont tehát az y tengelyen fekszik. A síkidom súlypontján átmenő egyenesre, vagyis a súlyvonalra számított statikai nyomaték mindig zérus.

VIII. A súrlódás jelenségének vizsgálata

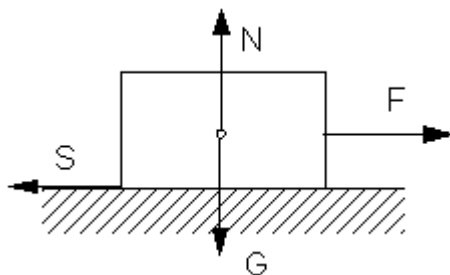
1. Alapfogalmak, összefüggések
2. A súrlódás kúpjának megszerkesztése Gördül ellenállás.

Kötélsúrlódás.

1. A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódás

A kényszerek tárgyalásánál az egymással érintkező testek felszínét teljesen simának tekintettük. Ennek megfelelően a megtámasztásnál a tökéletesen sima felületek egymást kölcsönösen a közös normális irányában nyomják. Az érintősíkban nincs kölcsönhatás. A feltevést azonban csak közelítően tudjuk megvalósítani, mert a valóságban a testek felszíne kisebb-nagyobb mértékben mindig érdes. A felszínek ilyen fizikai állapota miatt az egymással érintkező testek az érintősík irányába eső elmozdulással szemben is ellenállást fejtenek ki. Ez a jelenség a súrlódás.

Ha a vízszintes síkra helyezett testre csak G súlyerő hat, a test egyensúlyban marad, akár érdes a test, akár sima. Ha a súlyerőn kívül egy vízszintes F erő is hat, akkor az tökéletesen sima érintkezési felszínnek esetén elmozdítaná a testet. A valóságban - az érintkező felszínek érdessége miatt - az F erő hatására fellépő súrlódás miatt a test egyensúlyban maradhat.

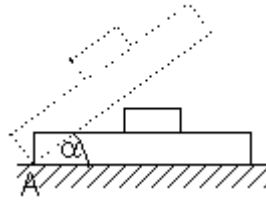


59. ábra

Nem "nagy" F erő esetén a testet a nyugvásbeli súrlódóerő tartja egyensúlyban ($S=F$). Ha F nagyobb a lehetséges súrlódó erőnél, a test mozgásnak indul. A mozgás folyamán lép fel a mozgásbeli súrlódás.. Azaz beszélhetünk nyugvásbeli és mozgásbeli súrlódásról. Ha a két érintkező felület pontjai egymáshoz képest nem mozdulnak el, akkor nyugvásbeli súrlódásról van szó, ha elmozdulnak egymáshoz képest,

akkor mozgásbeli súrlódásról beszélünk.

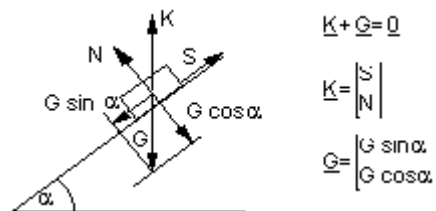
Az összefüggések tisztázására végezzünk egy egyszerű kísérletet. A vízszintes alapon nyugvó síklemez közepére merev testet helyezünk. Ezután a lemezt A pontja körül fokozatosan emeljük.



60. ábra

A test a lemezen egy darabig a lemez dőlése ellenére nyugalomban marad. Ha azonban a lemez a hajlásszöge egy meghatározott r értéknél nagyobb, a test a lemez alkotta lejtőn megindul, és lecsúszik. (Ha a lemezre egy másik merev testet helyezünk, akkor a r határérték általában megváltozik.)

Rajzoljuk meg a lejtőt a $< r$ helyzetben, amikor a G súlyú test még nem csúszik le a lejtőn, tehát még egyensúlyban van.



61. ábra

A testre ható egyensúlyi erőrendszer a G súlyerőből és a vele közös hatásvonalú, egyező nagyságú, ellentétes értelmű K erőből áll. A K kényszererő lejtőirányú koordinátáját S -sel (súrlódóerő), normális irányú koordinátáját pedig N -nel jelöljük.

Az egyensúlyi egyenleteket a lejtő és a normálisa irányába írjuk fel:

$$S - G \sin a = 0 \Rightarrow S = G \sin a$$

$$N - G \cos a = 0 \Rightarrow N = G \cos a$$

a két egyenletből: $S = N \tan a$.

Egyensúly addig van, amíg a lejtő hajlásszöge nem lépi túl a r határértéket, azaz $a < r$. A testet a lejtő irányában egyensúlyban a súrlódóerő tartja. Értéke a lejtő hajlásszögével emelkedik, de csak az $N \tan r$ értékig, mert amint a lejtő hajlásszöge a r határértéket átlépi, a test mozgásnak indul.

Összefoglalva: A test nyugalmi helyzetében is ébred súrlódás, az ún. nyugvásbeli súrlódás. Ilyenkor a súrlódó erő nagysága éppen akkora, amekkora az egyensúly biztosításához szükséges, de nem lehet egy meghatározott értéknél nagyobb: $S < N \cdot \tan r$ ahol: $\tan r = S / N = m$ a nyugvásbeli súrlódás tényezője. A r szög a felületek érdességére jellemző. Meghatározása az előbb említett lejtőkísérlettel történik. A lejtő hajlásszögét addig növeljük, amíg a ráhelyezett test épp az elmozdulás határhelyzetébe kerül. Így: $S < m N$

A súrlódóerő ilyen módon való számolása Coulomb-tól származik. Ebben az értelemben szokás Coulomb-féle súrlódásról beszélni.

A mozgásbeli súrlódás

Ha a lejtő hajlásszöge túllépi a r határt, a test a lejtőn lecsúszik. Az ilyenkor fellépő mozgásbeli súrlódóerő a két test relatív sebességével ellentétes értelmű. Nagysága függ a normális erőtlől, a felületek fizikai állapotától, a mozgás sebességétől. (Ha két száraz -kenés nélküli-érdes felület mozog egymáson, akkor a sebességtől független súrlódóerővel számolhatunk.)

Ebben az esetben a kényszererő két komponense közötti összefüggés: $S = m N$ ahol: m a mozgásbeli súrlódási tényező.

A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódás összehasonlítása

- A nyugvásbeli és a mozgásbeli súrlódási tényező általában nem egyenlő egymással. Rendszerint: $m < m_0$, vagyis a szokásos anyagú testeknél azonos N esetén a mozgásbeli súrlódóerő általában kisebb, mint a nyugvásbeli súrlódóerő volt.
- A nyugvásbeli súrlódás értékét egyenlőtlenség, a mozgásbeli súrlódását egyenlőség fejezi ki.
- A nyugvásbeli súrlódásra az egyensúly fenntartása érdekében van szükség, míg a mozgásbeli súrlódást a mozgás hozza létre. (A nyugvásbeli súrlódást az érintősíkra eső erő ébreszti.)

A valóságban amikor üzemszer_ körülmények között mozognak felületek egymáson, a súrlódást kétféleképpen szokás modellezni:

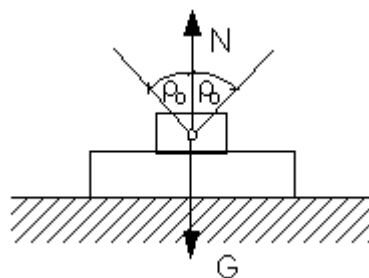
- Coulomb-féle súrlódással, amikor feltételezzük, hogy az érintkező felületek szárazak, közöttük folyadék vagy más kenőanyag nincs.
- Folyadéksúrlódással, amikor a két felület közötti részeket valamilyen folyadék, kenőanyag tölti ki. Ilyenkor a felületek relatív mozgásánál a folyadéknak jelentős szerepe van.

A valóságos esetek tulajdonképpen mindkét modellt magukban foglalják úgy, hogy nyugvó súrlódás esetén a felületeket összenyomó erő mintegy kiperéseli a folyadékot, és ezért inkább a száraz súrlódás esete valósul meg. Mozgás esetén a mozgó felület "úszik" a folyadékfilmen, ezáltal a súrlódóerő kisebb lesz. Mindez indokolja, hogy $m < m_0$.

2. A súrlódás vizsgálata szerkesztéssel

A felület érdességét a számító eljárásokban a m ill. a m_0 tényezővel jellemezzük, a szerkesztő eljárásokban pedig a súrlódás kúpjával, amelynek félcsúcsszöge α_0 :

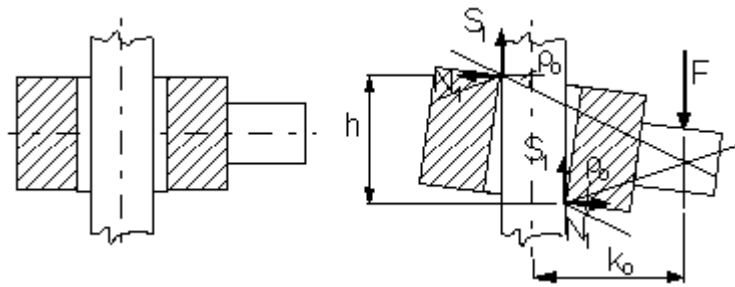
- Nyugvásbeli súrlódás esetén egyensúly csak akkor lehetséges, ha a kényszererő az érintkezés normálisa körül $2\alpha_0$ csúcsszöggel szerkesztett súrlódási kúp palástján belül marad ($S < N \tan \alpha_0$).
- Az elmozdulás határhelyzetében a kényszererő a kúp palástjára illeszkedik, azaz valamelyik alkotóval esik egybe ($S = N \tan \alpha_0$).
- Mozgásbeli súrlódás esetén a reakció mindig egybeesik a súrlódási kúp palástjának valamely alkotójával ($S = N \tan \alpha_0$).



62. ábra

Az önzárás feltétele

Megállapítandó, hogy a rajzolt szerkezet milyen $k = k_0$ karhosszúság mellett lesz önzáró. Önzárás esetén a k_0 vagy annál nagyobb karon bármekkora erő működhet, a bilincs nem mozdul el.



63. ábra

a./ Megoldás szerkesztéssel: a bilincs lefelé akar elcsúszni, a súrlódóerő iránya csak a rajzolt lehet. Az elmozdulás határhelyzete miatt a reakciók a szélső alkotókkal esnek egybe. Az F erő hatásvonalát át kell menjen a kényszererők hatásvonalainak metszéspontján. Ebből a feltételből a k_0 kar hossza meghatározható.

b./ Megoldás számítással:

$$N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 \Rightarrow S_1 = S_2 = m_0 N$$

$$m_0 N_1 + m_0 N_2 - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_i(A) = m_0 N_2 d + N_2 h - (k_0 + d/2) F = 0 \quad (3)$$

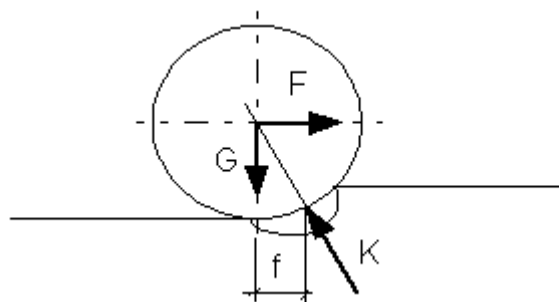
$$(2)\text{-ből } F = 2 m_0 N$$

(3)-ba beírva a kapott összefüggéseket, és N -nel egyszerűsítve:

$$m_0 d + h - 2 m_0 k_0 - 3 m_0 d / 2 = 0 \Rightarrow h - 2 m_0 k_0 = 0 \Rightarrow k_0 = 0.5 h / m_0.$$

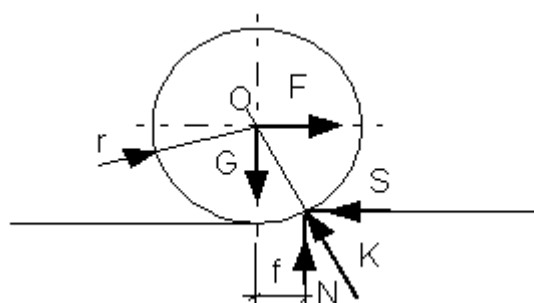
3. Gördülőellenállás

Vizsgáljunk egy gördülő kereket. Bármely forgástestnek sík felületen való gördüléséhez szükséges követelmény az, hogy ébredjen súrlódás, ill. súrlódóerő a test és a sík között. A gördülő kerék bizonyos mértékig belapul és benyomódik az érintkező felületbe. Így az elméletileg keletkező koncentrált reakcióerő helyett egy megoszló reakció-erőrendszer keletkezik, amelynek eredője f távolsággal eltolódik a haladás irányába a kerék középvonalához képest. Ez az f a gördülő ellenállás karja [m]. Értéke kísérletileg állapítható meg.



64. ábra

Ismert G és F erő. Határozzuk meg a gördülőellenállás karját!



65. ábra

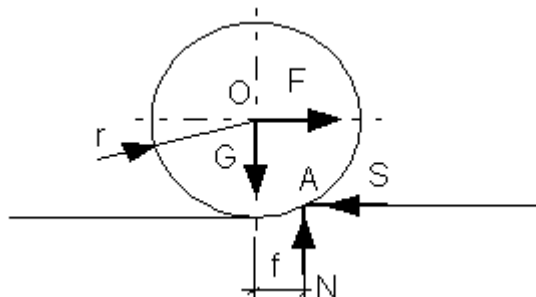
$$\underline{G} + \underline{F} + \underline{K} = \underline{0}$$

$$N - G = 0$$

$$F - S = 0$$

$$N f - S r = 0 \Rightarrow f = S r / N \text{ elmozdulás határhelyzetében}$$

Összefoglalva: gördüléskor a testek deformációjának következtében a mozgással szemben fellép egy ellenállás, az ún. gördüléellenállás. A kerék gördítéséhez a tengelyen F vízszintes erőt alkalmazunk:



66. ábra

Az elmozdulás határán:

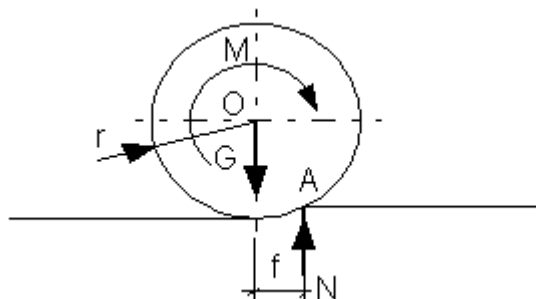
$$G f - F r = 0 = S M(A)$$

innen:

$$F = G f / r$$

az a legnagyobb erő, amelynek hatására a kerék még éppen nyugalomban marad. Nagyobb sugár esetén kisebb a gördítéshez szükséges F erő.

A kerék egyenletes gördüléséhez M nyomatékú erőpárt alkalmazunk:



67. ábra

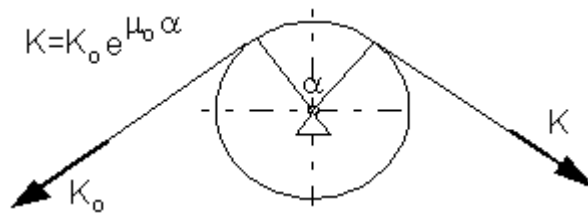
$$M = f N$$

A nyugalom feltétele:

$$N f \geq M$$

4. A kötél súrlódás

Egy kötel a középponti szögnek megfelelő íven nyugszik érdes hengerfelületre hajlítva. Teljesen sima hengerfelszín esetén a kötel a nagyobb erő irányába megcsúszik. Érdes felszínnél viszont a henger és a ráfeszülő kötel között súrlódóerők ébrednek, amelyek a mozgást gátolják, esetleg meg is akadályozzák. Az elmozdulás határán, az egyensúly határhelyzetében a kötel két ágában ható erők közötti összefüggés:



68. ábra

ahol

μ : a súrlódási tényező a kötél és a henger között

α : a felfekvő kötélkerület középponti szöge [rad].

IX. Igénybevételek

1. A feszültség fogalma

A tartókra ható erőket két csoportra bonthatjuk. A szerkezet önsúlya, a külső hatásokból származó erők, azaz a terhelés, valamint a reakciók alkotják a külső erőket, ill erőrendszert, amely egyensúlyi, azaz:

$$\sum \underline{F} = \underline{0} \text{ és } \sum (\underline{r} \times \underline{F}) + \sum \underline{M} = \underline{0}$$

Beszélhetünk belső erőkről is, amelyeket akkor kapunk meg, amikor a tartót valamelyik keresztmetszete mentén gondolatban kettévágjuk. Az elvágott keresztmetszetben egy felület mentén megoszló erőrendszer működik - amely a másik tartórész hatásának a következménye -, ami biztosítja a tartórész egyensúlyát. Ennek a keresztmetszet felületén megoszló belső erőrendszernek a fajlagos értéke, az erőintenzitás-vektora a feszültség, amely tehát a keresztmetszet 1 m²-ére ható belső erő: $\underline{p}$ [N/m²]. Ennek eredőjét a keresztmetszet súlypontjában igénybevételnek nevezzük. A tartók méretezésénél mindig az igénybevételek meghatározására törekszünk.

2. Az igénybevétel definíciója és meghatározása

Keressük egy rúd alakú tartó egyik kijelölt keresztmetszetének az igénybevételét. Evégből a rudat az eddigiek szerint a vizsgálandó keresztmetszet mentén két részre vágottnak képzeljük.

Az elhagyott bal oldali rúdrészre ható erőrendszernek a megmaradó rúd elvágott keresztmetszetének súlypontjába redukált vektorkettőse: $[\underline{F}; \underline{M}_s]$. Ha pedig a jobb oldali erőrendszert redukáljuk az S pontba, akkor a kapott $[\underline{F}'; \underline{M}_s']$ -re fennáll a hatás-ellenhatás törvényénél fogva: $\underline{F} = \underline{F}'$ és $\underline{M} = \underline{M}'$. Ezt az $\underline{F}(\underline{F}')$ eredő erőt és az $\underline{M}(\underline{M}')$ nyomatékú erőpárcu keresztmetszet igénybevételének.

Általában tehát: Egy keresztmetszet igénybevételén a keresztmetszet egyik oldalán lévő erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába való redukáltját értjük. (Ez egyenértékű a keresztmetszet mentén működő belső, megoszló erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába számított eredőjével.)

3. Az igénybevétel fajtái

Bontsuk fel az $\underline{F}$ és $\underline{M}_s$ vektorokat a koordinátatengelyek szerinti összetevőkre (vagyis a keresztmetszet síkjába eső és arra merőleges komponensekre):

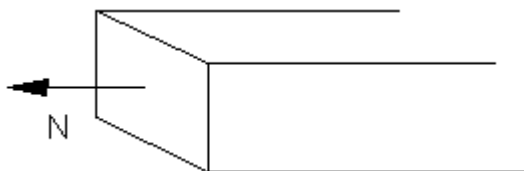
$$\underline{F} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k} \text{ és } \underline{M} = M_x \underline{i} + M_y \underline{j} + M_z \underline{k}$$

Az erőrendszer redukáltját tehát hat tényező jellemzi. Ebből három egy-egy erő, melynek közös támadáspontja a keresztmetszet súlypontja, hatásvonaluk pedig azonos a felvett koordinátatengelyekkel. A másik három egy-egy erőpár, melyek az x, y és z tengely körül forgatnak.

Ha az összetevők közül csak egy nem zérus, akkor alapigénybevételről beszélünk.

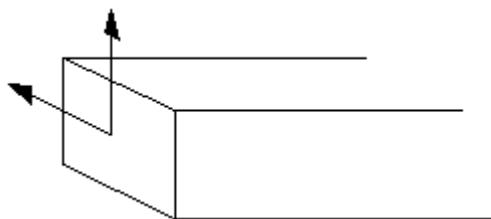
Alapigénybevételek:

1. Ha csak az $X \neq 0$, azaz az erő a keresztmetszet síkjára merőleges, akkor az igénybevétel húzás, ill. nyomás ($X \equiv N$).



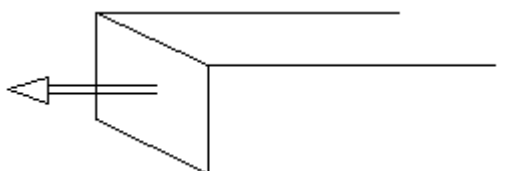
96.. ábra

2. Ha csak az $Y \neq 0$, vagy csak $Z \neq 0$, vagy egyik sem zérus, vagyis az eredő a keresztmetszet síkjába esik, akkor az igénybevétel nyírás ($Y \equiv V$).



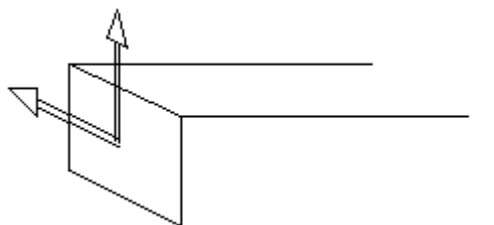
97. ábra

3. Ha csak az $M \neq 0$, azaz az eredő erőpár a keresztmetszet síkjára x merőleges tengely körül forgat, akkor az igénybevétel csavarás ($M \equiv M_t$).



98. ábra

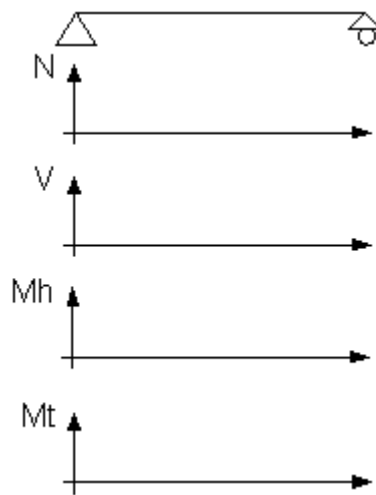
4. Ha csak $M_y \neq 0$, vagy $M_z \neq 0$, azaz az erőpár a keresztmetszet síkjába eső tengely körül forgat, akkor az igénybevétel hajlítás ($M \equiv M_h$).



99. ábra

Az igénybevételi ábra

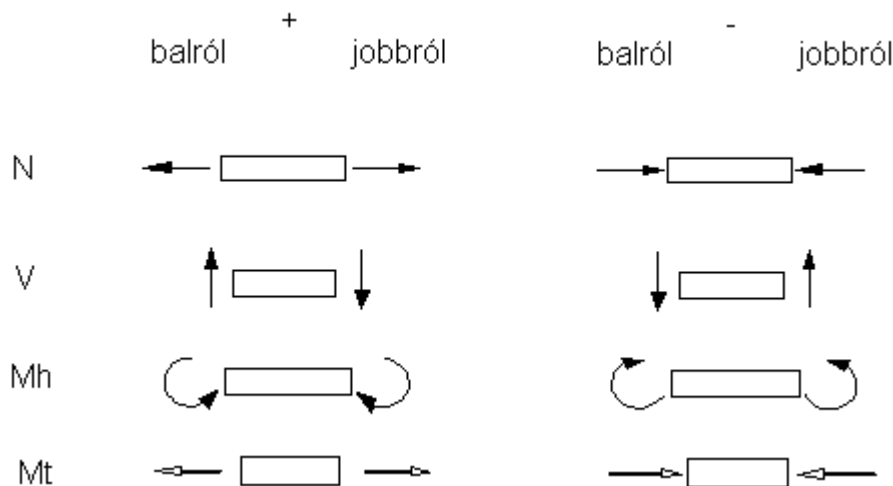
A tartó hossztengele mentén ábrázolt alapigénybevételeket igénybevételi ábráknak nevezzük:



100. ábra

Előjelszabály

Az igénybevételi ábrák rajzolásakor következetes előjelszabályt kell betartanunk. Az előjelnek függetlennek kell lennie attól, hogy az ábrák rajzolását balról vagy jobbról kezdjük. Az alkalmazott előjelszabály:

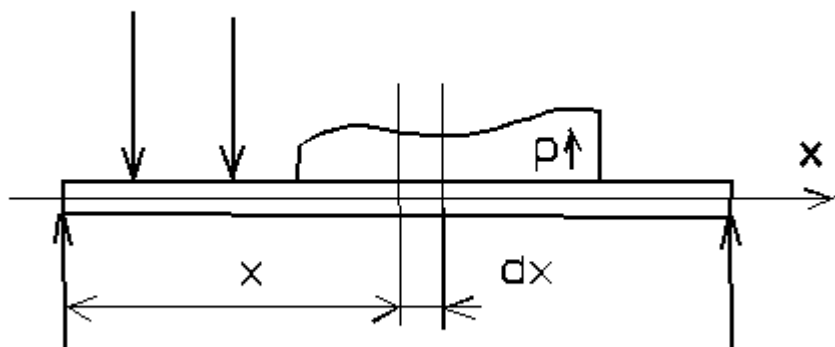


101. ábra

A pozitív előjelű mennyiségeket mindig az adott igénybevételi ábra zérus vonala fölé mérjük, míg a negatívakat alá.

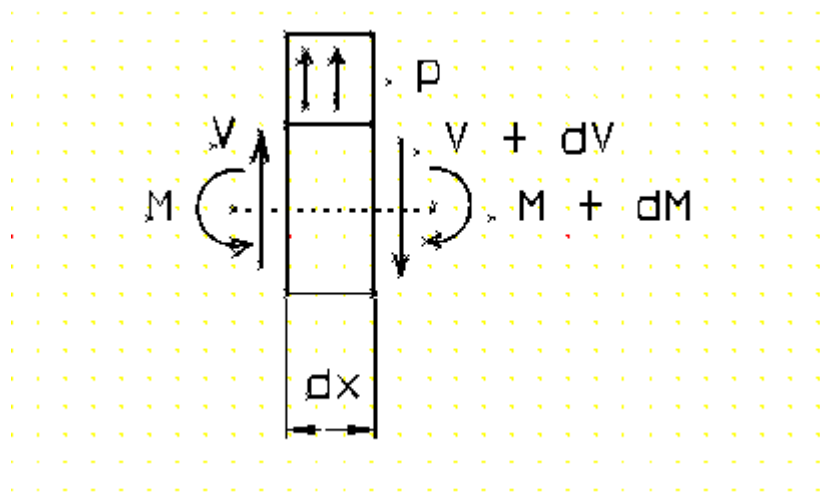
4. Összefüggés a terhelés és az igénybevételek között

Terhelje a rudat az xy síkban olyan egyensúlyi erőrendszer, mely a koncentrált és megoszló, aktív és passzív, de a rúdra merőleges erőkből áll. (71. ábra)



71. ábra

A hajlítónyomaték és a nyíróerő közötti analitikus összefüggés megállapítása végett képzeljünk a rúdból kivágva egy az x keresztmetszet után következő dx darabot. (72. ábra)



72. ábra

Az elemi rúdrész bal oldali végét az $\frac{M}{}$ és $\frac{V}{}$ nyíróerő terheli a balról elhagyott rúdrész az $\frac{M}{} + d\frac{M}{}$ hajlítónyomaték és a $\frac{V}{} + d\frac{V}{}$

nyíróerő a jobb oldali elhagyott rúdrész hatásaképpen. Ezenkívül az elemi rúddarabot még a megoszló terhelés ráeső $p dx$

$$\sum M_1 = 0 \quad \text{és} \quad \sum Y_1 = 0$$

A nyomatéki egyenletet az elemi rúdrész jobb oldali keresztmetszetének S pontján átmenő és a rajz síkjára merőleges tengelyére írjuk fel

$$M - (M + fM) - V dx - p dx \frac{dx}{2} = 0$$

Az utolsó tagot mint másodrendű kicsi mennyiséget elhanyagolva:

$$\frac{dM}{dx} = -V$$

kapjuk, azaz: a nyíróerő függvénye a hajlítónyomaték függvényének x szerinti első differenciálhányadosának negatívja.

A másik egyensúlyi egyenlet:

$$V + p dx - (V + dV) = 0 \quad \text{ebből} \quad \frac{dV}{dx} = p$$

azaz a nyíróerő függvényének az x szerinti első deriváltja a terhelés függvényét adja.

A két fenti összefüggésből:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p$$

A terhelés és az igénybevételek közötti összefüggés integrál formában:

$$\text{A } \frac{dV}{dx} = p(x) \quad \text{összefüggést integrálva:} \quad V = V_0 + \int_0^x p(x) dx$$

(ahol V_0 a nyíróerő kezdeti értéke) ($x=0$) adódik.

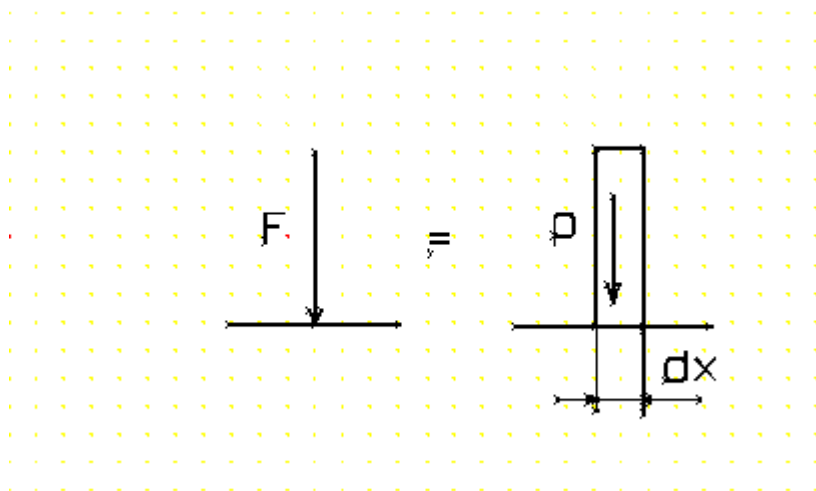
$$\text{A } \frac{dM}{dx} = -V(x) \quad \text{összefüggést integrálva:} \quad M = M_0 - \int_0^x V(x) dx$$

adódik, ahol M_0 a hajlítónyomaték kezdeti értéke ($x=0$)

A fenti összefüggések az ún. Zsuravszkij tételek.

Mindezek alapján, ha az adott tartót terhelő egyensúlyi erőrendszert ismerjük (a rendelkezésre álló egyensúlyi egyenletekből az ismeretlen reakcióerőket meghatároztuk), akkor a tartó terhelésének ismeretében integrálással megkaphatjuk a V nyíróerő ábrát, és ebből - ugyancsak integrálással - a hajlítónyomatéki ábrát.

Az összefüggések megállapításánál úgy mentünk át az x -hez tartozó $x + dx$ szöveges terhelés volt a tartón, vagyis koncentrált erő helyén nem haladtunk át. Ennek megfelelően a tartót terhelő koncentrált erőt olyan - igen kis szakaszon megoszló - nagy intenzitású terhelésnek kell tekinteni, amelynek eredője a koncentrált erő. (73. ábra)



73. ábra

$$F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} p \Delta x$$

Ahol a tartón koncentrált erő hat, ott a koncentrált erő irányának megfelelően - ha a tartón balról jobbra haladunk - felfelé mutatónál pozitív, lefelé mutatónál negatív irányú szakadás keletkezik a nyiróerő ábrában. Ennek a nagysága a koncentrált erő értéke.

Ha a tartó valamely keresztmetszetében koncentrált erőpár működik, akkor ezen a helyen a nyomatéki ábrában szakadás keletkezik. A szakadás nagysága a koncentrált erőpár nyomatékának értéke. Pozitív irányú az ugrás, ha - a tartón balról jobbra haladva - a koncentrált erőpár nyomatéka a megmaradó tartórészekre pozitív.

A $p(x)$, $V(x)$ és $M(x)$ függvények közötti differenciális kapcsolat következményeit az I. táblázat

I. táblázat

$p(x)$	$V(x)$	$M(x)$
0	0	állandó
	állandó $\neq 0$	lineáris
állandó	lineáris	másodfokú parabola
lineáris	másodfokú parabola	harmadfokú parabola
stb.		
A parabolák tengelye a rúdra merőleges irányú		

Ahol $\frac{dM(x)}{dx} = -V(x) = 0$, ott a hajlítónyomatéknak helyi szélsőértéke van. A maximális hajlítónyomaték $M_{\max} = |M_{\max}|$

Az egyes ábraszakaszok illeszkedését a II. táblázatban foglaltuk össze:

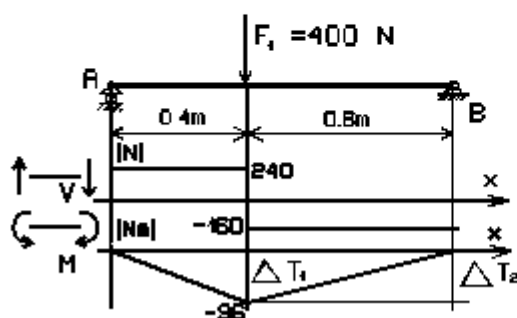
II. táblázat

Terhelési ábra	V ábra	M ábra
----------------	--------	--------

p -ben szakadás	töréspont	közös érintő
koncentrált erő	szakadás	töréspont
koncentrált erőpár	közös érintő	szakaszad

5. Tartók igénybevételi ábráinak és függvényeinek meghatározása koncentrált erők és erőpárok eseténben

1.) Határozzuk meg a 74. ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit!



74. ábra

Első lépésként határozzuk meg a tartót terhelő egyensúlyi erőrendszert.

Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum Y_i = 0 \quad A - F_1 - B = 0 \quad A = 240 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum M_i = 0 \quad A \cdot 1 - 400 \cdot 0,6 = 0 \quad B = 160 \text{ N} \uparrow$$

Mivel a tartón megoszló terhelés nem működik, csak koncentrált erők hatnak, a nyiróerőábra állandó szakaszokból, a nyomatéki ábra egyenesekből fog állni.

Az igénybevételi ábrákban az A , F_1 és B erők helyén lesz változás. Ezen helyeknek megfelelő függőleges egyeneseket az igénybevételi ábrák megrajzolása előtt már húzzuk meg, mert ezek "emlékeztetnek" a változásokra.

Második lépésként rajzoljuk meg a nyiróerő ábrát. Az A keresztmetszettől balra nyilvánvalóan zérus értékű a nyiróerő. Az A keresztmetszetben $A = 240 \text{ N}$ nagyságú felfelé történő ugrás következik. Ez lesz a nyiróerő értéke egészen az F_1 erőig. $F_1 = 400 \text{ N}$ nagyságú negatív irányú ugrás következik, mert F_1 lefelé mutat. A nyiróerő az az érték nem változik a tartó végéig, ahol $B = 160 \text{ N}$ nagyságú pozitív ugrással zérussá válik a nyiróerő.

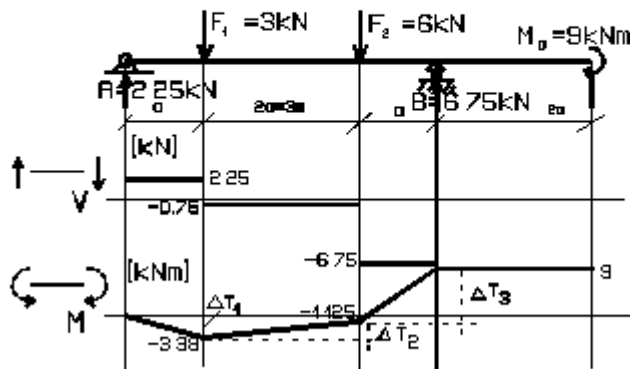
Harmadik lépés a nyomatéki ábra meghatározása. Tudjuk, hogy az A csuklóban a nyomaték zérus. Mivel az $A - F_1$ szakaszon a nyiróerő állandó, a nyomatéki ábra egyenes. A nyomatéki ábra F_1 keresztmetszetbeli értékét úgy kaphatjuk meg, ha a nyiróerő ábra $A - F_1$ szakasza alatti

$\Delta T_1 = 240 \cdot 0,4 = 96 \text{ Nm}$ területnek megfelelő értéket az A pontbeli nyomatékértékből (ez itt zérus) negatív irányban - mivel $\Delta T_1 < 0$! - lemérjük.

Az előbb elmondottakból következik, hogy a nyomatéki ábra $F_1 - B$ szakasza is

egyenes. F_1 -beli értéket ismerjük. Ha meghatározzuk a B -beli értéket, az egyenes - két pontja ismeretében - megrajzolható. A B keresztmetszetbeli értéket úgy kapjuk, hogy az F_1 -beli értékhez pozitív előjelű értékkel hozzáadjuk.

$\Delta T_2 = -160 \cdot 0,6 = -96 \text{ Nm}$ értékét. ($\Delta T_2 < 0$, ezért a változás pozitív). Mivel B-ben a nyomaték zérusra adó ellenőrzésül is szolgál, hiszen előre tudtuk, hogy a B csukóban nem léphet fel nyomaték.



75. ábra

2.) Határozzuk meg a 75. ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit!

Mivel a tartót terhelő egyensúlyi erőrendszer koncentrált erőkől és erőpárból áll, a nyiróerő ábra állandó szakaszokból, a nyomatéki ábra egyenesekből fog állni.

Az igénybevételi ábrákban a koncentrált erők és az erőpár helyén lesz változás. Húzzuk meg ezeknek a helyeknek megfelelő függőleges egyeneseket.

Második lépés a nyiróerőábra megrajzolása. Az A keresztmetszettől balra nyilvánvalóan zérus értékű a nyiróerő.

Az A keresztmetszetben $A = 2,25 \text{ kN}$ nagyságú felfelé történő ugrás következik. Ez lesz a nyiróerő értéke egészen az $F_1 = 3 \text{ kN}$ negatív irányú ugrás következik (F_1 lefelé mutat!).

A nyiróerő új értéke $2,25 - 3 = 0,75 \text{ kN}$.

Ez az érték nem változik egészen az F_2 erőig, ahol $F_2 = 6 \text{ kN}$ nagyságú, negatív ugrás követ $-0,75 - 6 = 6,75 \text{ kN}$. Ez az érték nem változik a B pontig, ahol $B = 6,75 \text{ kN}$ pozitív ugrással zérussá válik és a konzó végéig zérus értékű marad.

Harmadik lépés a hajlító nyomatéki ábra meghatározása.

Tudjuk, hogy az A csuklóban a nyomaték zérus, és az $A - F_1$ szakasza alatti

$\Delta T_1 = 2,25 \cdot 1,5 = 3,375 \text{ kN} \cdot \text{m}$ területnek megfelelő értéket az A pontbeli nyomatékértéktől (ez itt zérus) negatív irányban - mivel $\Delta T_1 < 0$! - lemerjük. szakaszbeli egyenes iránytangense más értékű. Az $F_2 - F_1$ -beli értékhez pozitív irányban hozzáadjuk ΔT_2 -t.

ΔT_2 - a nyíróerőábra $F_1 - F_2$ szakasza alatti terület:

$$\Delta T_2 = -0,75 \cdot 3 = -2,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(Mivel $\Delta T_2 < 0$, pozitív irányban kell ΔT_2 -t mérni!).

Hasonlóan rajzolható meg a nyomatéki ábra $F_2 - B$ -beli szakasza. Itt

$$\Delta T_3 = -6,75 \cdot 1,5 = -10,125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ezt pozitív irányban felmérve a nyomaték értéke:

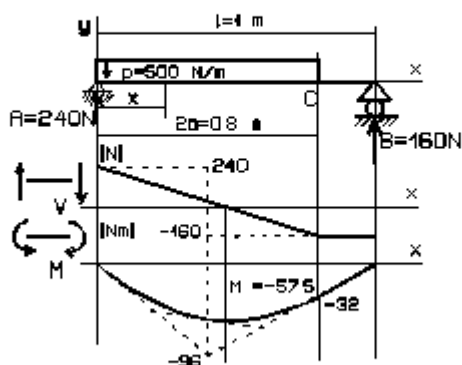
$$-1,125 + 10,125 = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A konzolos szakaszon ez az érték állandó, mert a nyíróerő zérus. A tartó végén M_o koncentrált erőpár hat. E negatív irányban kell mérni, mert a tartón balról jobbra továbbhaladva M_o - a tőle jobbra lévő keresztmetszetekre negatív hajlítónyomatékot jelent. M_o -t lefelé mérve a nyomaték értéke zérussá válik, és mivel eljutottunk a tartó vég nyomaték zérus kell legyen - ez egyben ellenőrzésül is szolgált számításaink helyességére.

6. Megoszló erőrendszerrel terhelt tartók igénybevételi ábráinak és függvényeinek meghatározása

1.) Határozzuk meg a 76. ábrán vázolt tartó igénybevételi ábráit.

Tudjuk, hogy ahol a tartón állandó megoszló terhelés hat, ott a nyíróerőábra lineáris, a nyomatéki ábra parabolikus lesz. A zérus megoszló terhelésű szakaszon a nyíróerőábra állandó, a nyomatéki ábra lineáris. A két szakasz határán a nyíróerőábrában törés lesz, a nyomatéki ábra két szakaszának érintője közös. Húzzuk be az előbb említett keresztmetszeteknél az igénybevételi ábrákba a függőleges - emlékeztető - egyeneseket.



76. ábra

Rajzoljuk meg a nyíróerőábrát. A -tól balra a nyíróerő zérus értékű. A -ban $V = 240 \text{ N}$ pozitív érték.

Innen - eg&eac pontig - lineáris. A C keresztmetszetbeli értéket megkapjuk, ha az A keresztmetszetbeli értékből levonjuk a megoszló terhelés alatti területet (P_o lefelé mutat!)

$\Delta V = p_o \cdot 2a = 5000 \cdot 0,8 = 400 \text{ N}$. A nyiróerő értéke $240 - 400 = -160 \text{ N}$. Ez az érték a B keresztmetszeti nem változik és itt B értékével zérussá válik.

A nyomatéki ábra megrajzolásához a nyiróerőábra lineáris szakaszát helyettesítsük két állandó szakasszal úgy, hogy a függvény alatti terület értéke ne változzon és az állandó szakaszok a lineáris szakasz kezdő és végértékével egyezzenek meg. (Az állandó szakaszokat a 76. ábrában szaggatott vonalla jelöltük). A két állandó szakasz a lineáris szakasz feléig tart.

Ezzel az egyszerű fogással elértük, hogy a nyiróerő ábra csak állandó szakaszokból áll. Ilyen nyiróerőábrához már tudunk nyomatéki ábrát szerkeszteni. A szaggatott nyiróerőértékekhez tartozó egyeneseket a nyomatéki ábrában is szaggatottan rajzoltuk meg. E két egyenes a valóságos nyomatéki

ábra parabolikus szakaszának kezdő és végérintője. ($\frac{dM}{dx} = -V$ és az állandó szakaszok a lineáris szakasz kezdő és végértékével egyeznek meg!)

A parabolikus szakasz két pontját és a pontbeli érintőke ismerve - a parabola már megrajzolható.

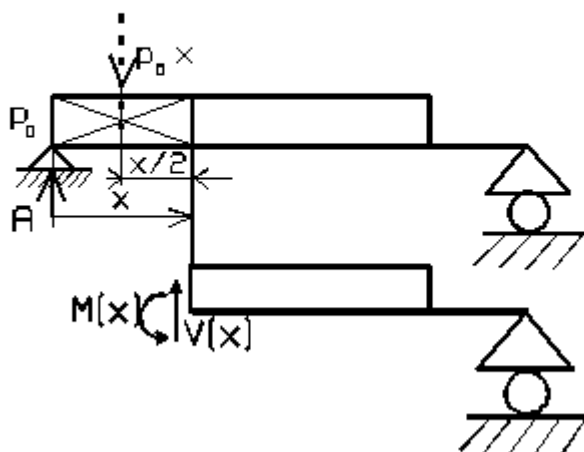
A nyomatéki ábrának helyi szélsőértéke ott van, ahol a nyiróerőábra zérussá válik. Először határozzuk meg ezt a helyet. Ehhez írjuk fel a nyiróerő függvényét.

A 77. ábrán sraffozott - balról lévő - részt elhagyva a definíció szerint:

$$V(x) = A - p_o x$$

$V(x) = 0$ értéknél

$$x - x_o = \frac{A}{p_o} = \frac{240}{500} = 0,48 \text{ m}$$



77. ábra

Írjuk fel a hajlítónyomatéki függvény értékét is az x helyen.

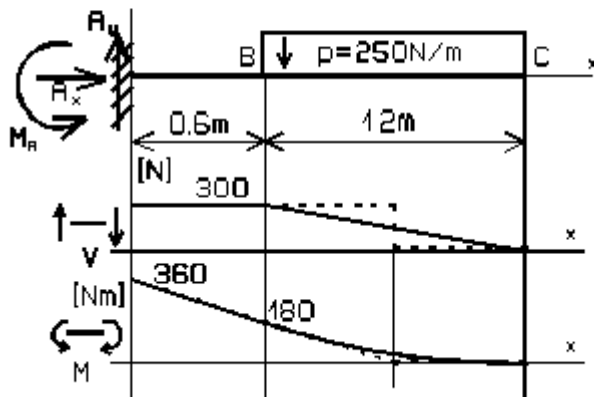
$$M(x) = -Ax + p_o x \cdot \frac{x}{2}$$

A nyomaték értéke az $x = x_0$ helyen

$$M(x_0) = -Ax_0 + p_0 \frac{x_0^2}{2} = -A \frac{x_0}{2} = -240 \cdot 0,24 = -57,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(mert $p_0 x_0 = A$).

A maximális nyomaték helyének és nagyságának ismeretében a nyomatéki ábra már megrajzolható.



78. ábra

2.) Rajzoljuk meg a 78. ábrán vázolt befogott tartó igénybevételi ábráit.

Először határozzuk meg a reakcióerőrendszert. Befogásnál egy általános helyzetű erő (A_x, A_y) és M_A

Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum X_i = 0 \quad A_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad A_y - p \cdot 1,2 = 0 \quad A_y = 300 \text{ N}$$

$$\sum M_i = 0 \quad M_A - p \cdot 1,2(0,6 + 0,6) = 0 \quad M_A = 360 \text{ Nm}$$

Tudjuk, - a terhelés ismeretében - hogy a nyíróerőábra egy állandó és egy lineáris szakaszból áll.

A nyomatéki ábra lineáris és parabolikus szakaszokból áll. A nyíróerőábra kezdőértéke A_y , a nyomatéki M_A

Rajzoljuk meg a nyíróerőábrát.

Az A-B szakasz állandó $V = A_y$ - pozitív.

A B-C szakasz lineáris és a végére $p \cdot 1,2 = 250 \cdot 1,2 = 300 \text{ N}$ a változás negatív irányban, mert p lefelé mutat.

A nyomatéki ábra megrajzolásához a nyíróerőábra lineáris szakaszát helyettesítsük állandó (szaggatottan rajzolt) szakaszokkal.

A nyomatéki ábra értéke A -ban $M_A = 360 \text{ Nm}$. Az A-B szakaszon lineáris. A változás $300 \cdot 0,6 = 180 \text{ Nm}$ - negatív irányban, mert a terület pozitív.

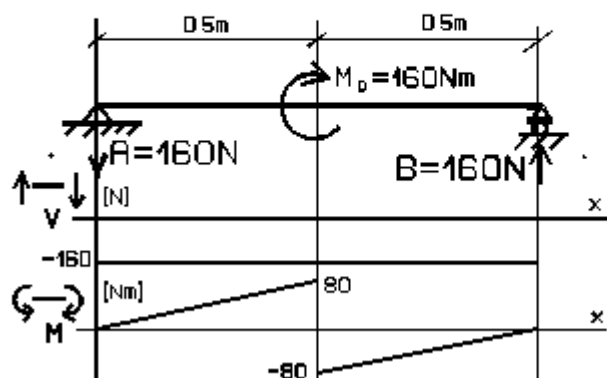
A szaggatott nyierőerőábra alatti terület: $300 \cdot 0,6 = 180 \text{ Nm}$, azaz a nyomaték értéke a BC szakasz felére zérusra csökken és utána nem változik (szaggatott egyenesek).

A két érintő ismeretében a parabolikus szakasz megrajzolható.

7. Gyakorló feladatok

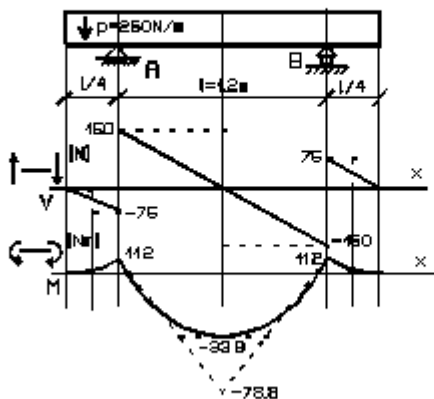
A IV. fejezetben foglaltak begyakorlására minden magyarázat nélkül megadjuk az alábbi feladatokat és végeredményüket.

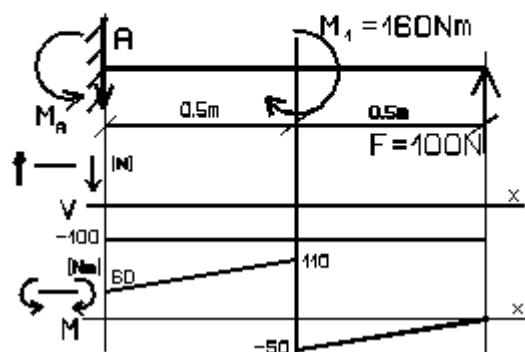
1.) Határozza meg a 79. ábrán vázolt kéttámaszú tartó igénybevételi ábráit!



79.ábra

2.) Határozza meg a 80. ábrán vázolt konzolos tartó reakcióit és igénybevételi ábráit:





81. ábra

3.) Határozza meg a 81. ábrán vázolt befogott tartó reakcióit és igénybevételi ábráit!