

**MISKOLCI EGYETEM**  
Gépészmérnöki Kar  
Főiskolai Szintű Gépészmérnöki Szak

## **MECHANIKA I.**

Előadásvázlat  
I. éves levelező (kölségtérítéses) hallgatók  
részére

Előadó:  
Dr. Király Béla  
Mechanikai Tanszék

2000/2001-es tanév  
II. félév

# 1. BEVEZETÉS, ALAPFOGALMAK

A mechanika a fizikának a mérnöki munkában széleskörűen alkalmazott részterülete.

A *mechanika tárgya* anyagi rendszerek (testek) helyzetváltozással járó mozgásainak és az ezeket létrehozó hatásoknak (erőknek) a vizsgálata. Itt a helyzetváltoztatást általánosan értelmezzük, magában foglalja a testek nyugalmi állapotát és alakváltozását is.

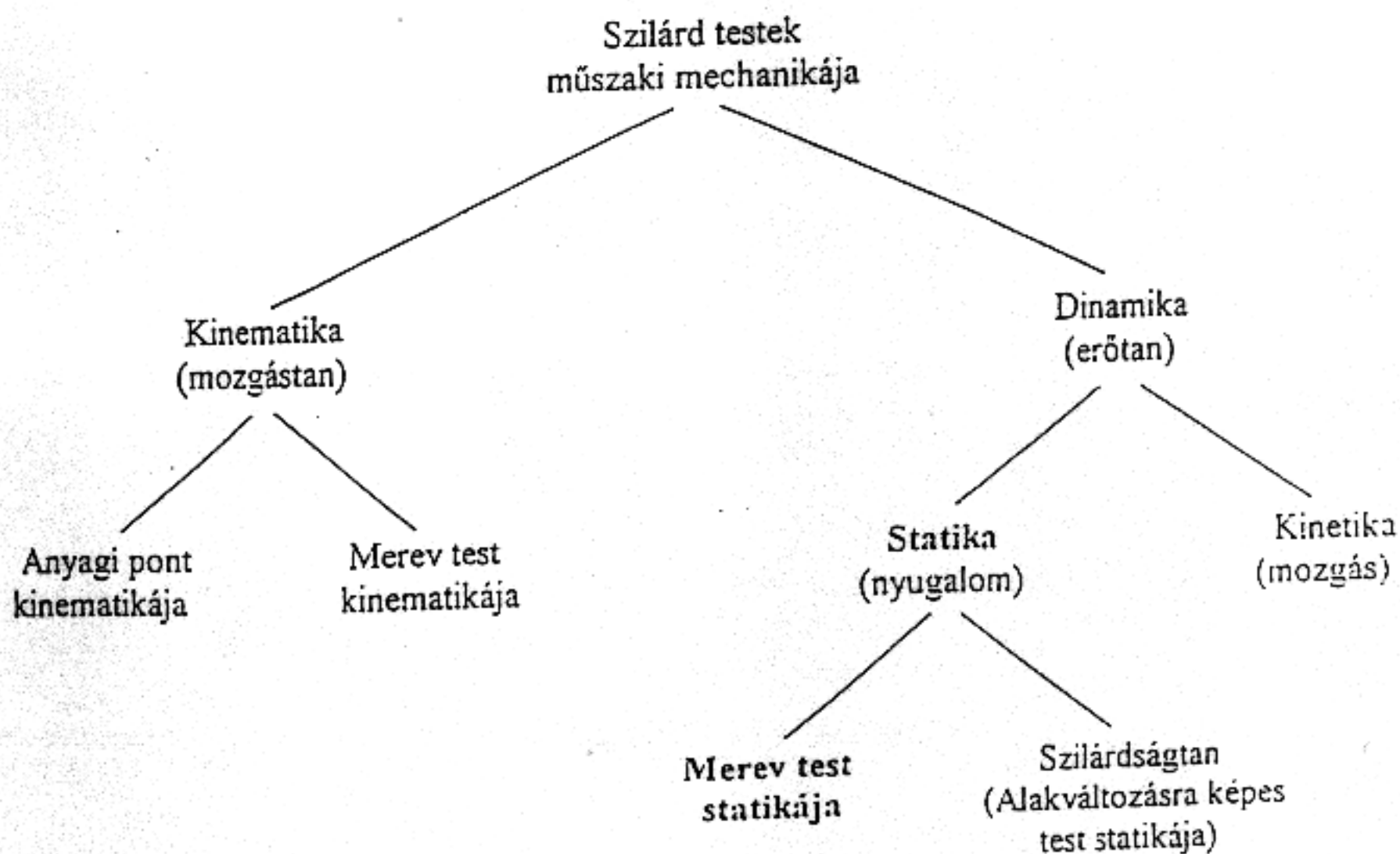
A vizsgált anyagi rendszer halmazállapotától függően beszélhetünk *szilárd testek*, *folyadékok* és *gázok* mechanikájáról.

A *műszaki mechanika* egyrészt a mechanika általános törvényeit és vizsgálati módszereit alkalmazza műszaki (mérnöki) feladatok megoldására, másrészt a speciális műszaki feladatokhoz illő megoldási módszereket tartalmaz. A műszaki mechanika alapvető szerepet játszik a legtöbb mérnöki tudományban (pl. gépészet, építészet, bányászat, kohászat, stb.).

A mérnöki munka szempontjából két alapvető műszaki mechanikai feladat merül fel:

- *Tartós nyugalom biztosítása* pl. épületek, hidak, csővezetékek, tartályok, tartószerkezetek, stb. esetén,
- *Előírt mozgások biztosítása* pl. járművek, robotok, liftek, daruk, megmunkálógépek, stb. esetén.

A továbbiakban *szilárd halmazállapotú testekből* álló rendszerek vizsgálatával foglalkozunk. Az 1.1 ábra szilárd testek műszaki mechanikájának egy lehetséges felosztását szemlélteti:



1.1 ábra

A fenti ábrán a jegyzet témaköreit vastagbetűs szedés jelzi.

A Statika tantárgy tartós nyugalomban lévő, merev testekből álló rendszerek vizsgálatával foglalkozik. A továbbiakban röviden megadjuk a részben már eddig is használt *alapfogalmak* értelmezését.

*Rendszernek* (testnek) azt az objektumot nevezzük, amit vizsgálunk. A rendszer a vizsgálat tárgya. A mechanikában a valóságos anyagi testeket, rendszereket modellekkel helyettesítjük. A modellezés mindig a valóságos viszonyok leegyszerűsítését jelenti, annak kényszerű beismerése, hogy nem vagyunk képesek a valóságos rendszerek viselkedésének minden szempontból pontos leírására.

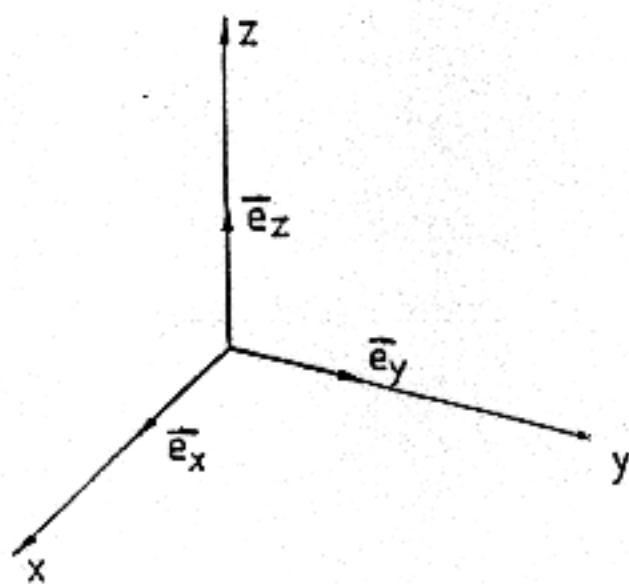
*Modellnek* az olyan idealizált testet, vagy testekből álló rendszert nevezzük, amely a valóságos rendszernek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait megtartja, a többi tulajdonságát pedig elhanyagolja.

A statikában az alábbi test modellek játszanak szerepet:

- *Merev testnek* azt a test modellt nevezzük, amelyben bármely két pont távolsága állandó. A merev test pontjai egymástól mért távolságukat tehát még terhelés (erő) hatására sem változtatják meg.
- *Szilárd testnek* azt a test modellt nevezzük, amely alakváltozásra képes, tehát pontjainak távolsága terhelés (erő) hatására megváltozhat.
- *Anyagi pontnak* a műszaki mechanikában azt a merev testet tekintjük, amelynek mozgása egyetlen pontjának mozgásával jellemezhető.
- *Anyagi pontrendszernek* anyagi pontok halmazát, összességét nevezzük.

A mechanikai modellek és mozgások különböző típusú mennyiségekkel jellemezhetők. A statikában skálár- és vektormennyiségeket használunk.

- A *skalár mennyiség* olyan fizikai (pl. hőmérséklet, tömegsűrűség) vagy geometriai (pl. távolság, térfogat) mennyiség, amelyet *nagysága és előjele*, valamint *mértékegysége* jellemez. A skálár mennyiségeket általában (latin vagy görög) kisbetűvel jelöljük: pl.  $s$ ,  $l$ ,  $\rho$ , ...
- A *vektor mennyiség* olyan fizikai (pl. erő, sebesség) vagy geometriai (pl. helyvektor, elmozdulásvektor) mennyiség, amelyet *nagysága és iránya*, valamint *mértékegysége* jellemez. A vektor mennyiségeket a skálár mennyiségektől a betűjel fölé tett nyíllal különböztetjük meg: pl.  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$ , ...



1.2 ábra

A mechanikában mozgásról a rendszer anyagi pontjainak helyzetváltoztatása esetén beszélünk. A mechanikai mozgások mindig valamihez képest, valamire vonatkoztatva értelmezettek. A vonatkoztatási alapot a koordináta-rendszer képezi. A Statika tantárgy keretében kizárólag derékszögű Descartes\*-féle koordináta-rendszereket használunk (1.2 ábra).

A derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszert az jellemzi, hogy  $x, y, z$  -vel jelölt tengelyei egymásra kölcsönösen merőlegesek és az irányukat megadó  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  vektorok egységvektorok, tehát abszolút értékük:

$$|\bar{e}_x| = |\bar{e}_y| = |\bar{e}_z| = 1.$$

[Ebben az előadásvázlatban felhasználásra került Dr. Égert János: Statika, továbbá a Mechanikai Tanszék Munkaközösségei által írt: Műszaki mechanika I-II. (levelezők részére), Szilárdságtan I., Mechanikai példatár I-II. jegyzeteknek néhány fejezete.]

---

\* René Descartes (1596-1650) francia filozófus, matematikus és fizikus



## 2. KONCENTRÁLT ERŐ

### 2.1. A KONCENTRÁLT ERŐ ÉRTELMEZÉSE ÉS MEGADÁSA

A *koncentrált erő* egy testnek egy másik testre történő hatása, amely pontszerű, vagy a test méreteihez képest kis felületen történő érintkezéssel valósul meg. A testek közötti hatások mindig kölcsönösek.

A koncentrált erő *vektormennyiség*, amelyet nagysága és iránya, valamint mértékegysége jellemez.

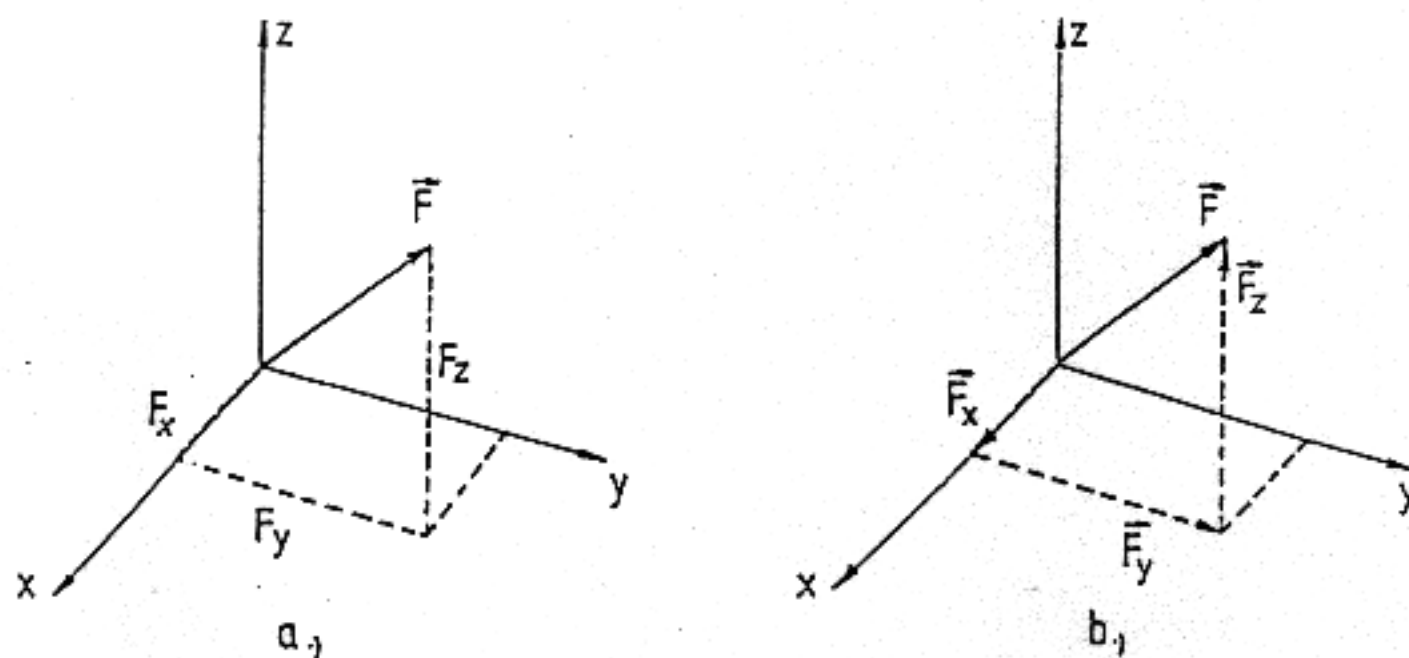
A műszaki mechanikában elektromos, mágneses, stb. hatások eredményeként fellépő erőkkel általában nem foglalkozunk.

Koncentrált erőt a koordináta-rendszer egységvektorai, illetve az erő irány egységvektorának felhasználásával adhatunk meg. Az erőt általában  $\vec{F}$  betűvel jelöljük.

Az erő megadása az egységvektorok felhasználásával:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z.$$

Ebben az összefüggésben  $F_x, F_y, F_z$  az erő koordinátái és  $\vec{F}_x = F_x \vec{e}_x$ ,  $\vec{F}_y = F_y \vec{e}_y$ ,  $\vec{F}_z = F_z \vec{e}_z$  az erő összetevői. Az erőkoordináták skalár, az erőösszetevők vektor mennyiségek, szemléltetésük a 2.1 ábrán látható.



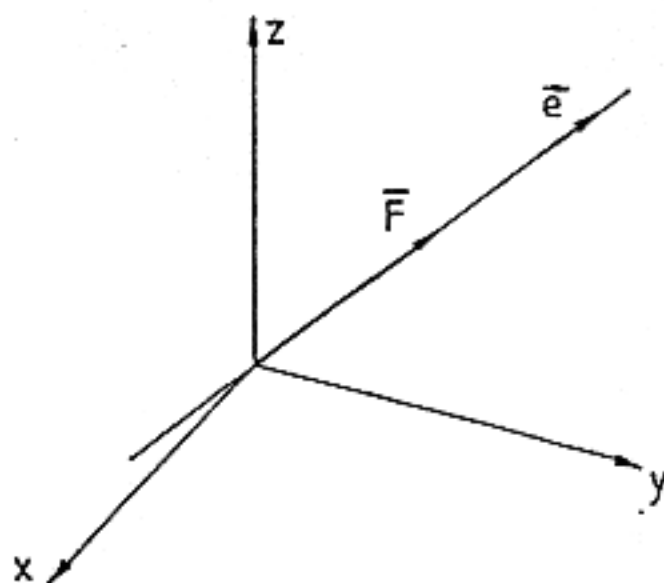
2.1 ábra

Az erő megadása irány egységvektor felhasználásával:

$$\vec{F} = F \vec{e}.$$

Itt  $F$  az erő skaláris koordinátája és  $\vec{e}$  az erő irány-egységvektora, szemléltetésük a 2.2 ábrán látható.

Az erő alap mértékegysége SI mértékrendszerben a Newton (N):  $1 \text{ N} = \text{kgm/s}^2$ . A Statikában leggyakrabban használt mértékegységek még a kilonewton:  $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$  és a meganewton:  $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$ .



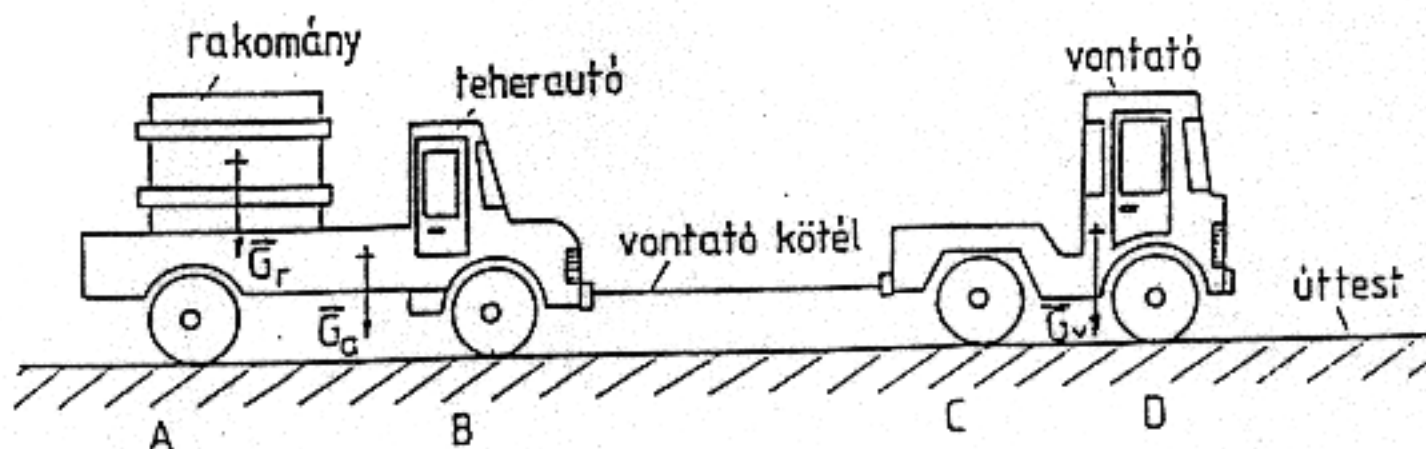
2.2 ábra

## 2.2. PÉLDÁK TESTEK KÖLCSÖNHATÁSÁRA

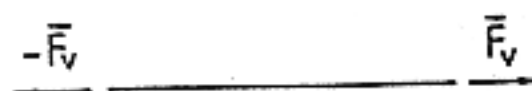
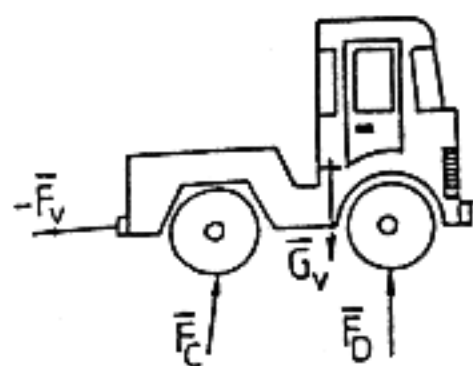
### 1. Példa: teherautó vontatása

A 2.3 ábrán látható rendszer öt testből áll, ezek a vontató, a vontatókötél, a teherautó, a rakomány és az úttest.

A testek súlyereje a test és a Föld közötti kölcsönhatásból (gravitáció) adódik. A súlyerő jelölésére a  $\bar{G}$  betűt használjuk, amelynek indexe az adott testet azonosítja. A vontatókötél súlyereje a járművek és a rakomány súlyerejéhez képest nagyon kicsi, ezért elhanyagoljuk. A 2.4 ábra a rendszert alkotó egyes testekre ható erőket szemlélteti.

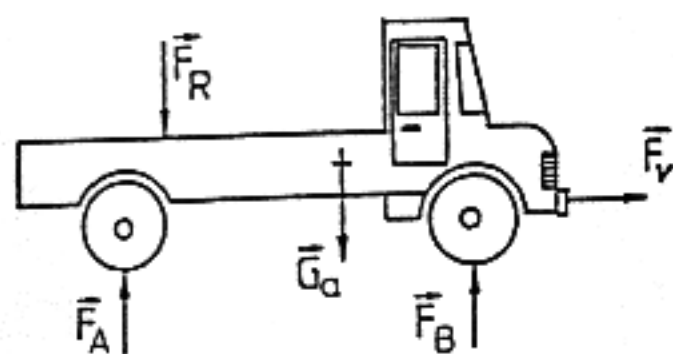


2.3 ábra

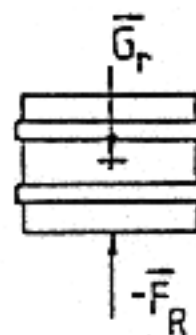


2.4.a,b ábra

Teherautóra ható erők

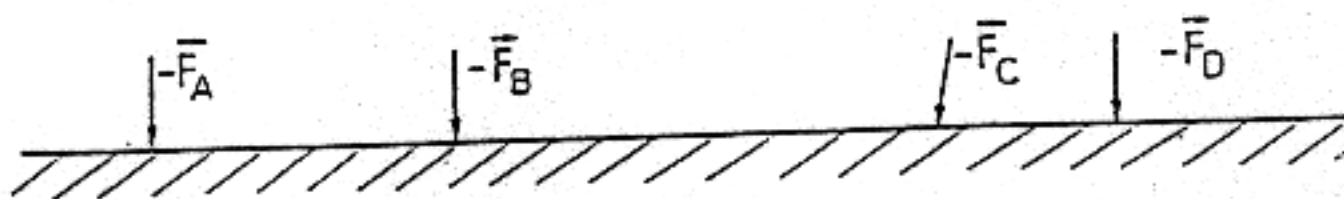


Rakományra ható erők



2.4.c,d ábra

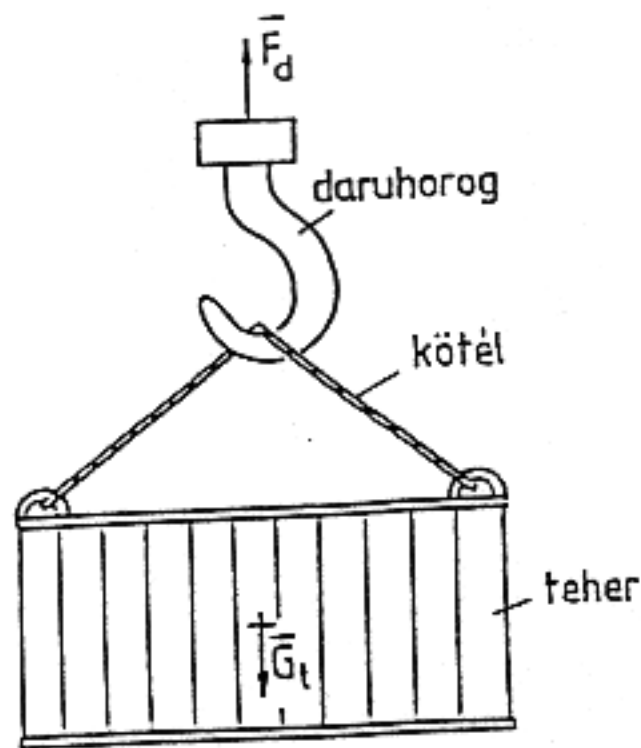
Úttestre ható erők



2.4.e ábra

## 2. Példa: teher emelése

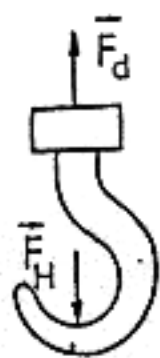
A 2.5 ábrán látható rendszer három testből áll, ezek a teher, az emelőkötél és a daruhorog. Nem tekintjük viszont már a rendszerhez tartozónak a darukötelet és magát a darut sem. A darukötélnek a rendszerre gyakorolt hatását azonban - a gravitációs hatáshoz hasonlóan - figyelembe kell venni.



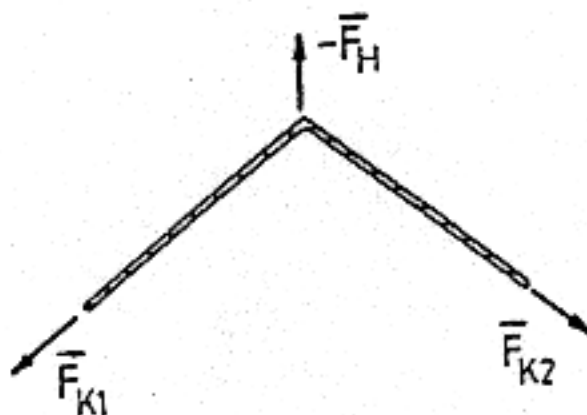
2.5 ábra

A rendszert alkotó egyes testekre ható erőket a 2.6 ábra szemlélteti.

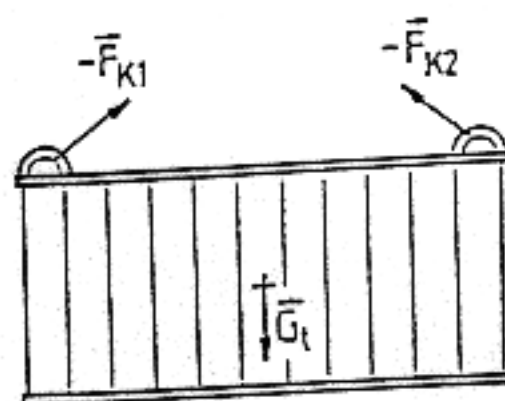
Daruhorogra ható erők



Emelőkötélre ható erők



Teherre ható erők



2.6 ábra

### 2.3. PÉLDÁK ERŐK ÖSSZEGZÉSÉRE ÉS FELBONTÁSÁRA

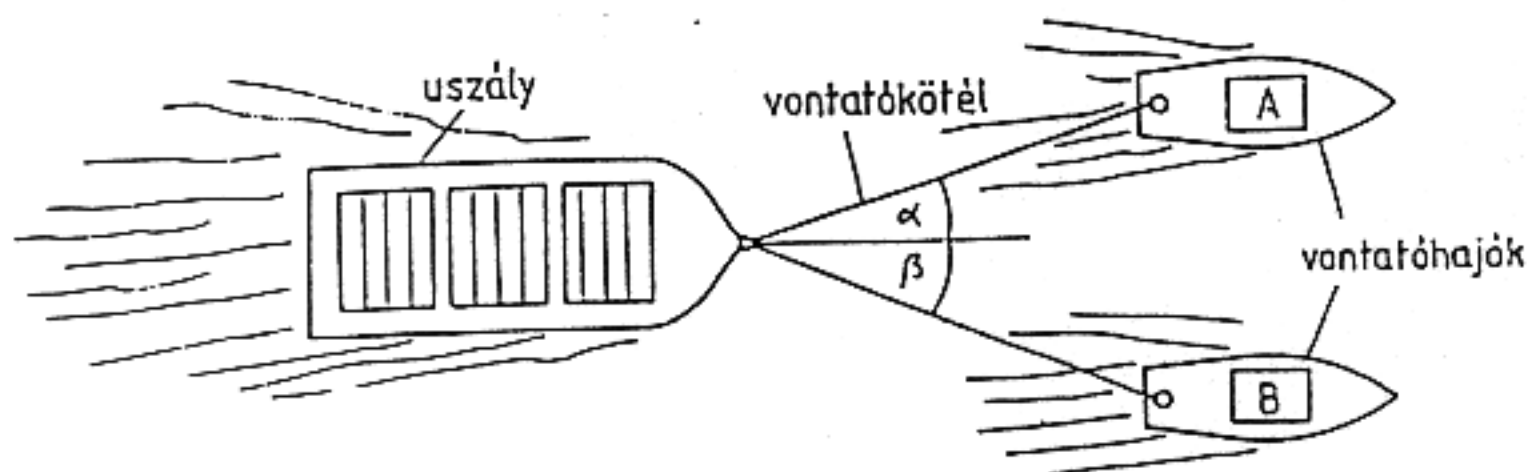
#### 1. Példa: két erő összegzése

A 2.7 ábrán látható A és B jelű vontatóhajó uszályt vontat úgy, hogy a vontatókötélek a haladási iránnyal  $\alpha$  és  $\beta$  szöget zárnak be.

A vontatókötélről az uszályra ismert  $F_A$  és  $F_B$  nagyságú erők adódnak át. Feladat az uszályra ható  $\bar{F}_V$  vontatóerő meghatározása.

A feladat megoldása:

$$\bar{F}_V = \bar{F}_A + \bar{F}_B.$$



2.7 ábra

Az adott szögek és az erők nagysága ismeretében az erővektorok meghatározhatók:

$$\vec{F}_A = F_A \vec{e}_A, \quad \vec{F}_B = F_B \vec{e}_B,$$

ahol  $\vec{e}_A$  és  $\vec{e}_B$  az erők irány-egységvektorai:

$$\vec{e}_A = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y, \quad |\vec{e}_A| = 1,$$

$$\vec{e}_B = \cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_y, \quad |\vec{e}_B| = 1, \quad \beta \leq 0.$$

Az  $\vec{e}_A, \vec{e}_B$  vektorokat a 2.8.a ábra szemlélteti. A vontatóerő tehát:

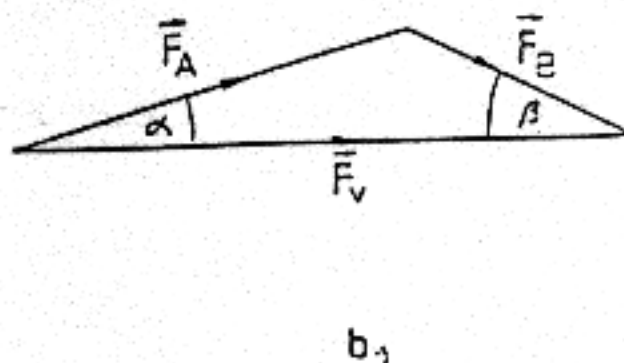
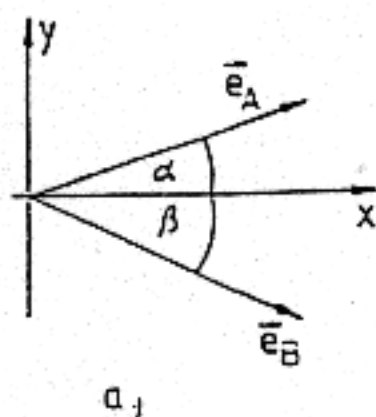
$$\vec{F}_V = (F_A \cos \alpha + F_B \cos \beta) \vec{e}_x + (F_A \sin \alpha + F_B \sin \beta) \vec{e}_y, \quad \beta \leq 0.$$

Ha azt akarjuk, hogy az uszály haladási iránya az  $x$  tengellyel egyezzen meg, akkor az  $\vec{F}_V$  vontatóerőnek nem lehet  $y$  irányú koordinátája:

$$F_A \sin \alpha + F_B \sin \beta = 0,$$

tehát fenn kell állnia a következő összefüggésnek:

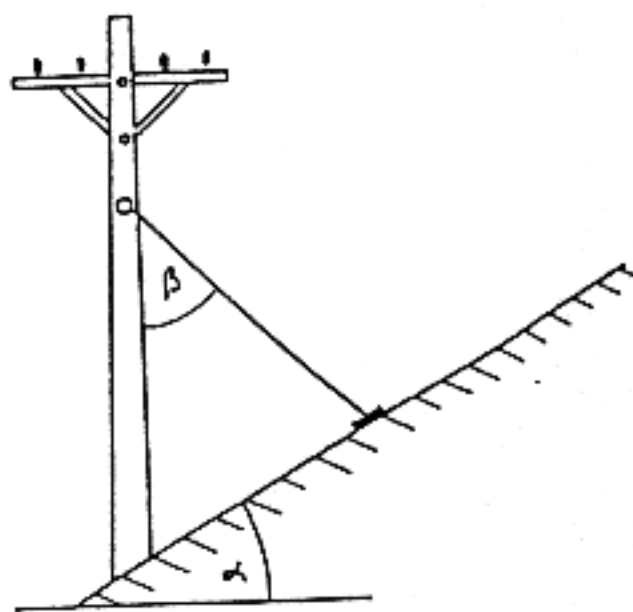
$$\frac{F_A}{F_B} = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \beta \leq 0.$$



2.8 ábra



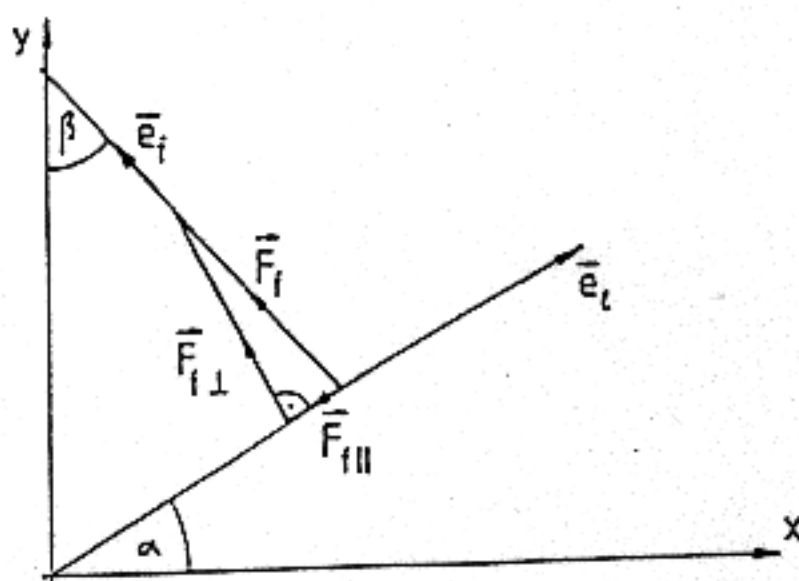
2. *Példa:* erő felbontása adott iránnyal párhuzamos és arra merőleges összetevőre.



2.9 ábra

A 2.9 ábrán lejtős terepen álló villanyoszlop látható, amelyet acél feszítőkötél tart függőleges helyzetben. Ismert a lejtő hajlásszöge:  $\alpha = 30^\circ$ , a feszítőkötél függőlegessel bezárt szöge:  $\beta = 45^\circ$ , valamint a kötélen fellépő feszítőerő nagysága:  $F_f = 20 \text{ kN}$ .

Feladat a feszítőkötél betonalapjára átadódó erő lejtővel párhuzamos  $\vec{F}_{f\parallel}$  és lejtőre merőleges  $\vec{F}_{f\perp}$  összetevőjének meghatározása.



2.10 ábra

Az alapozásra a kötélről az adott  $F_f$  nagyságú, függőlegessel  $\beta$  szöget bezáró erő adódik át (2.10 ábra). Ezt az erőt kell felbontanunk lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges összetevőre.

A lejtő irány-egységvektora

$$\vec{e}_l = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y,$$

a felbontandó erővektor pedig

$$\vec{F}_f = F_f \vec{e}_f = F_f (-\sin \beta \vec{e}_x + \cos \beta \vec{e}_y) = 20 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \right) \text{ kN}.$$

Az erő lejtővel párhuzamos összetevője

$$\vec{F}_{f\parallel} = (\vec{e}_l \cdot \vec{F}_f) \vec{e}_l = \left( -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \vec{e}_l = -0,2588 \vec{e}_l,$$

$$\vec{F}_{f\parallel} = (-0,2241 \vec{e}_x - 0,1294 \vec{e}_y) \text{ kN}.$$

Az erő lejtőre merőleges összetevője:

$$\vec{F}_{f\perp} = (\vec{e}_l \times \vec{F}_f) \times \vec{e}_l = \vec{F}_f \underbrace{(\vec{e}_l \cdot \vec{e}_l)}_{=1} - \underbrace{\vec{e}_l (\vec{F}_f \cdot \vec{e}_l)}_{\vec{F}_{f\parallel}} = \vec{F}_f - \vec{F}_{f\parallel}.$$

azaz a szükséges vektoriális szorzatok kiszámításával:

$$\vec{F}_{f\perp} = (-13,9180 \vec{e}_x + 14,2715 \vec{e}_y) \text{ kN}.$$

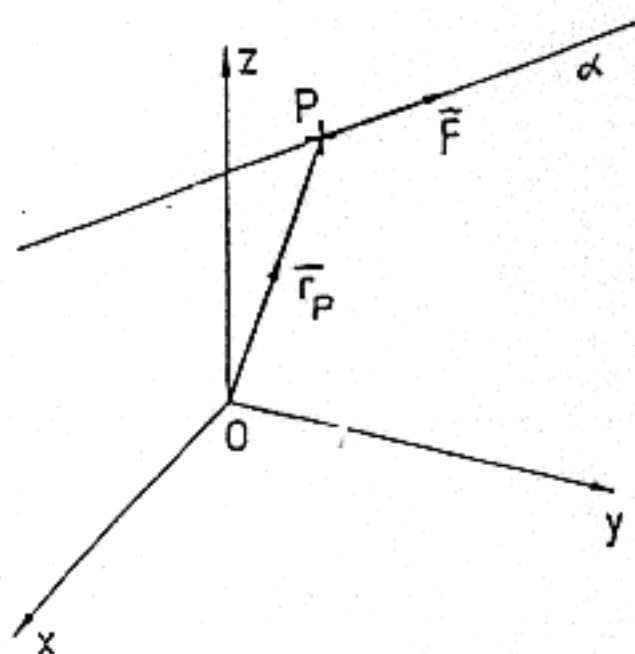
A merőleges összetevő kétszeres vektoriális szorzással történő meghatározása független az előző számításoktól. Ha a meghatározásnál az

$$\vec{F}_{f\perp} = \vec{F}_f - \vec{F}_{f\parallel}$$

összefüggést használjuk, akkor fennáll az  $\vec{F}_{f\parallel}$  számításánál esetleg elkövetett hiba továbbvitelének veszélye.

## 2.4. A KÖTÖTT ERŐVEKTOR

*Kötött erővektornak* nevezzük azt a koncentrált erőt, amelyet a tér adott  $P$  pontjához kötünk (2.11 ábra). A  $P$  pontot az erő *támadáspontjának* nevezzük.



2.11 ábra

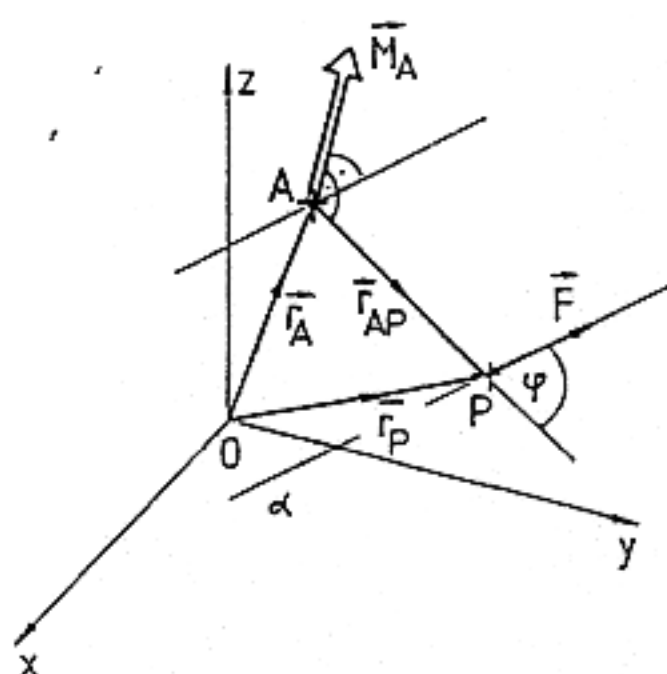
Kötött erővektor két vektormennyiséggel, támadáspontjának  $\vec{r}_P$  helyvektorával és az  $\vec{F}$  koncentrált erővektorral adható meg egyértelműen. A  $P$  ponton átmenő  $\vec{F}$  irányú egyenes a kötött erővektor  $\alpha$  hatásvonala.

## 2.5. KÖTÖTT ERŐVEKTOR PONTRA SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA

A  $P$  ponthoz kötött  $\vec{F}$  koncentrált erő  $A$  pontra számított  $\vec{M}_A$  nyomatékát a következő vektoriális szorzattal értelmezzük:

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}} \quad (2.1)$$

A pontra számított nyomaték vektor mennyiség. Az  $A$  index azt a pontot azonosítja, amelyre a nyomatékot számítjuk. Az  $\vec{r}_{AP}$  az  $A$  pontból az erő  $P$  támadáspontjába mutató helyvektor:  $\vec{r}_{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A$ . A nyomatékvektort a 2.12 ábrán és a továbbiakban is kettős nyíllal jelöljük.



2.12 ábra

A nyomatékvektor nagysága a vektoriális szorzás értelmezésének megfelelően számítható

$$|\vec{M}_A| = |\vec{r}_{AP}| |\vec{F}| \sin \varphi,$$

ahol  $\varphi$  az  $\vec{r}_{AP}$  és  $\vec{F}$  vektorok által bezárt szög. A nyomatékvektor merőleges az  $\vec{r}_{AP}$  és az  $\vec{F}$  vektorok által meghatározott síkra úgy, hogy az  $\vec{r}_{AP}$ ,  $\vec{F}$  és  $\vec{M}_A$  jobbsodratú vektorhármast alkotnak.

Koncentrált erő adott pontra számított nyomatéka független attól, hogy az erőt hatásvonalának mely pontjához kötjük.

Ez az állítás az alábbiak szerint egyszerűen belátható. Kössük az  $\vec{F}$  koncentrált erőt az első esetben hatásvonalának  $P_1$ , a második esetben pedig hatásvonalának  $P_2$  pontjához (2.13 ábra).

Számítsuk ki mindkét esetben az  $\vec{F}$  erő nyomatékát az  $A$  pontra:

1. eset:  $\vec{M}_{A_1} = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F},$

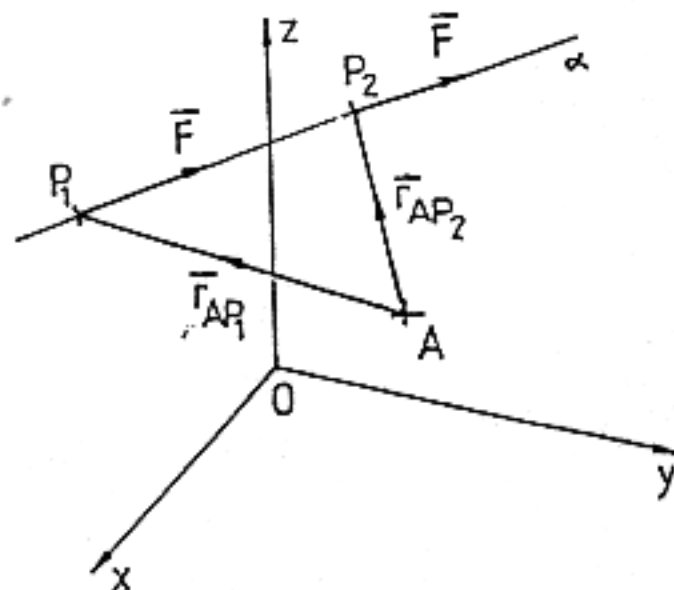
2. eset:

$$\vec{M}_{A_2} = \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F}$$

Vegyük figyelembe és helyettesítsük be a 2. eset összefüggésébe a 2.13 ábra alapján felírható  $\vec{r}_{AP_2} = \vec{r}_{AP_1} + \vec{r}_{P_1P_2}$  összefüggést:

$$\vec{M}_{A_2} = \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AP_1} + \vec{r}_{P_1P_2}) \times \vec{F} = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{r}_{P_1P_2} \times \vec{F}}_{=0} = \vec{M}_{A_1}$$

A második vektoriális szorzat azért nulla, mert a benne szereplő vektorok egymással párhuzamosak. Ezzel állításunkat igazoltuk.



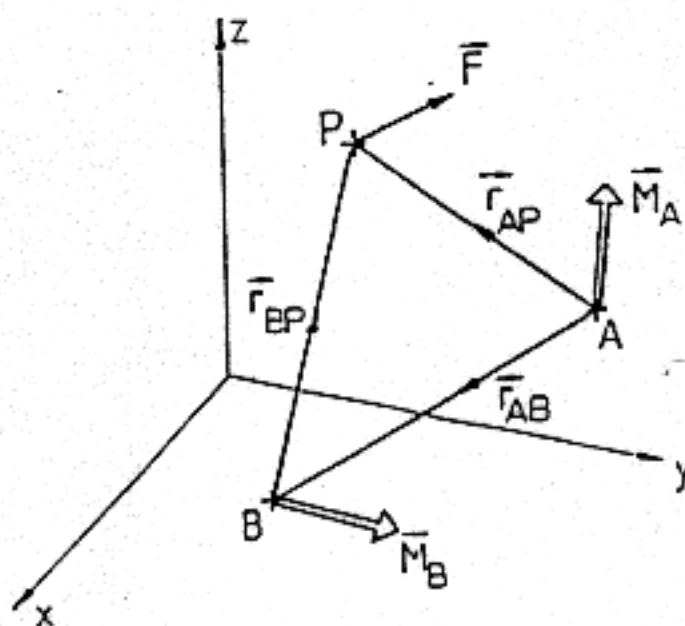
2.13 ábra

## 2.6. ÖSSZEFÜGGÉS ERŐ KÉT PONTRA SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA KÖZÖTT

Írjuk fel az  $\vec{F}$  erőnek a tér két különböző  $A$  és  $B$  pontjára számított nyomatékát:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F}.$$

Az  $A$  és a  $B$  a tér tetszőleges, de rögzített pontjai. Alakítsuk át az  $\vec{M}_B$ -re felírt összefüggést, figyelembevéve, hogy az  $\vec{r}_{BP}$  helyvektor az  $\vec{r}_{BA}$  és  $\vec{r}_{AP}$  vektorok összege (2.14 ábra):



2.14 ábra

$$\vec{r}_{BP} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AP} - \vec{r}_{AB}.$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AP} - \vec{r}_{AB}) \times \vec{F} = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} + \vec{F} \times \vec{r}_{AB} = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}.$$

Az átalakításnál felhasználtuk a vektoriális szorzásnak azt a tulajdonságát, hogy tagonként elvégezhető és a szorzótényezők sorrendjének felcserélése előjelváltást okoz. Erő két pontra számított nyomatéka között tehát az alábbi összefüggés áll fenn:

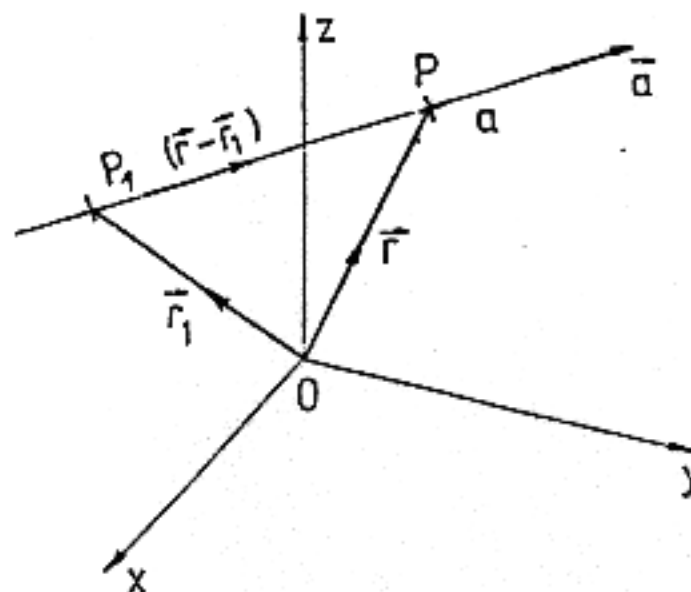
$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}.}$$

(2.2)

## 2.7. KÖTÖTT ERŐVEKTOR TENGELYRE SZÁMÍTOTT NYOMATÉKA

### 2.7.1. Tengely értelmezése és egyenletének Plücker\* vektoros alakja

*Tengelynek* egy irányított egyenest tekintünk. A mechanikában a tengely tehát geometriai fogalom, amelyet hatásvonala és iránya jellemez. Egy egyenesen (hatásvonalon) mindig két tengely vehető fel.



2.15 ábra

A 2.15 ábrán látható  $a$  jelű tengely irányvektora  $\vec{a}$ . Az  $\vec{a}$  általában nem egységvektor:  $|\vec{a}| \neq 1$ . A  $P_1$  pont az egyenes rögzített (megadott) pontja,  $P$  pedig futópont.

Az egyenes egyenletét azt felhasználva írhatjuk fel, hogy az  $\vec{a}$  irányvektor párhuzamos az egyenes rögzített  $P_1$  pontjából a tetszőleges  $P$  pontba mutató helyvektorral:

$$\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{0},$$

$$\vec{a} \times \vec{r} - \vec{a} \times \vec{r}_1 = \vec{0}.$$

Bevezetve a  $\vec{b} = -\vec{a} \times \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{a}$  jelölést, kapjuk a *tengely egyenletének Plücker vektoros alakját*:

\* Julius Plücker (1801-1868) német matematikus és fizikus



$$\vec{a} \times \vec{r} + \vec{b} = \vec{0}.$$

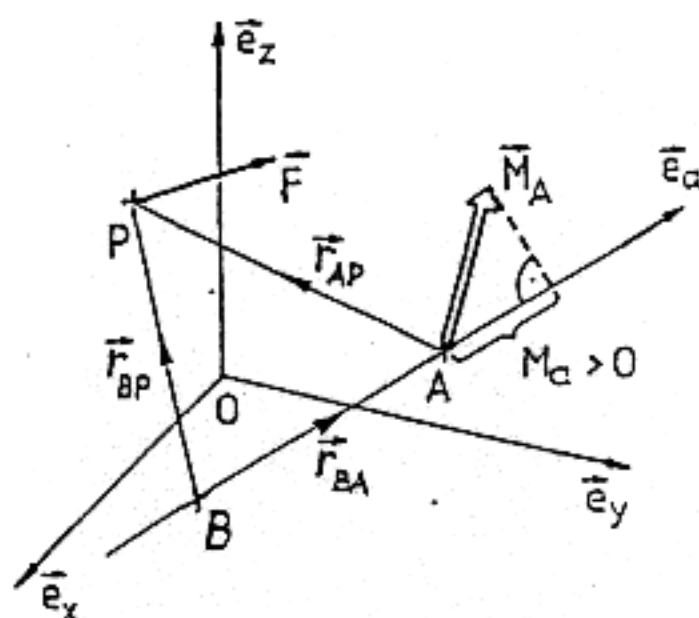
(2.3)

A (2.3) egyenletben  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  a  $P$  futópont helyvektora (független változó), az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorokat pedig Plücker-féle vektoroknak nevezzük. A  $\vec{b}$  vektor az egyenes  $\vec{a}$  irányvektorának a koordináta-rendszer  $O$  kezdőpontjára számított nyomatéka. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  egymásra merőleges vektorok:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

### 2.7.2. Tengelyre számított nyomaték értelmezése és kiszámítása Plücker-vektorok felhasználásával

A  $P$  ponthoz kötött  $\vec{F}$  koncentrált erőnek az " $a$ " tengelyre számított nyomatékát két lépésben határozhatjuk meg. Az első lépésben ki kell számítanunk az erő nyomatékát a tengely tetszőleges  $A$  pontjára (2.16 ábra):

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}.$$



2.16 ábra

A második lépésben kapjuk meg az erő " $a$ " tengelyre számított  $M_a$  nyomatékát, ha az  $A$  pontra számított nyomatékvektort *skalárisan megszorozzuk* a tengely  $\vec{e}_a$  irány-egységvektorával:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a.$$

(2.4)

A *tengelyre számított nyomaték (előjeles) skalár mennyiség*, " $a$ " indexe azt a tengelyt azonosítja, amelyre a nyomatékot számítjuk. A skaláris szorzás értelmezéséből következően  $M_a$  a tengely egy pontjára számított nyomatékvektornak az  $\vec{e}_a$  vektor irányú skaláris koordinátája (előjeles vetülete).

A tengely  $\vec{e}_a$  irány-egységvektora az ismert módon számítható:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1.$$

Az  $\vec{F}$  koncentrált erőnek a koordináta-rendszer tengelyeire számított nyomatékát például az erő origóra számított nyomatékából állíthatjuk elő:

$$M_x = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_x, \quad M_y = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_y, \quad M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z.$$

A tengelyre számított nyomaték értéke független attól, hogy az első lépésben a tengely mely pontjára számíthatjuk ki az erő nyomatékát. A tengelyre számított nyomaték értékét felhasználva a fenti állítás az alábbiak szerint igazolható:

$$\begin{aligned} M_a &= \vec{M}_B \cdot \vec{e}_a = (\vec{r}_{BP} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a = [(\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}) \times \vec{F}] \cdot \vec{e}_a = \\ &= \underbrace{(\vec{r}_{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a}_{=0} + \underbrace{(\vec{r}_{AP} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_a}_{= \vec{M}_A} = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a. \end{aligned}$$

Az első tagban szereplő vegyes szorzat azért 0, mert az  $\vec{r}_{AB}$  és  $\vec{e}_a$  vektorok egymással párhuzamosak.

Ha a tengely és az erő hatásvonala metszik egymást, vagy párhuzamosak egymással, akkor az erő tengelyre számított  $M_a$  nyomatéka zérus.

A tengelyre számított nyomaték (2.4) szerinti értelmezéséből kiindulva végezzünk el néhány matematikai átalakítást:

$$\begin{aligned} M_a &= \vec{e}_a \cdot \vec{M}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{M}_A = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot (\vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OA}) = \\ &= \frac{1}{|\vec{a}|} [\vec{a} \cdot \vec{M}_O + \vec{a} \cdot (\vec{F} \times \vec{r}_{OA})] = \frac{1}{|\vec{a}|} [\vec{a} \cdot \vec{M}_O + \vec{F} \cdot \underbrace{(\vec{r}_{OA} \times \vec{a})}_{\vec{b}}]. \end{aligned}$$

Az  $\vec{F}$  erőnek az "a" tengelyre számított nyomatékát tehát a tengely Plücker vektoraival és az erő origóra számított  $\vec{M}_O$  nyomatékának felhasználásával is ki tudjuk számítani:

$$\boxed{M_a = \frac{1}{|\vec{a}|} (\vec{a} \cdot \vec{M}_O + \vec{F} \cdot \vec{b})} \quad (2.5)$$

A (2.5) összefüggésben két vektornak ( $\vec{a}$  és  $\vec{F}$ ), valamint ezen vektorok origóra számított nyomatékvektorainak ( $\vec{b}$  és  $\vec{M}_O$ ) "keresztben vett" skaláris szorzata szerepel.

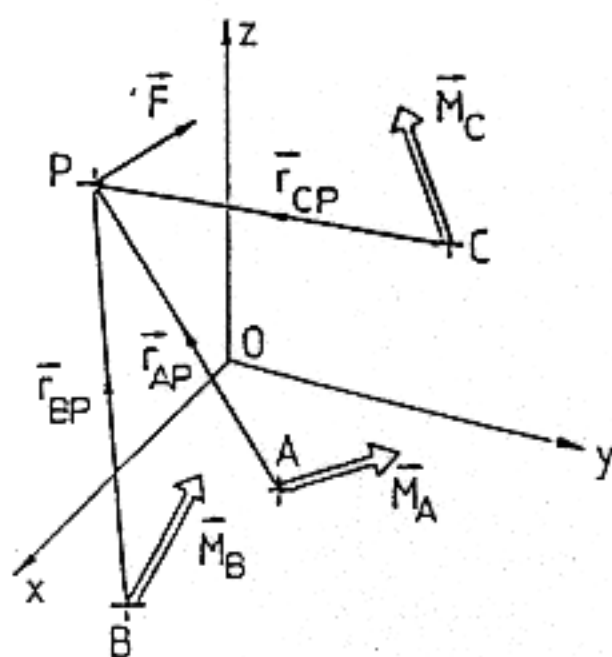
## 2.8. NYOMATÉKI VEKTORTÉR

Vektortérhez vagy másszóval vektormezőhöz úgy jutunk, ha a geometriai tér (vagy vizsgált test) minden egyes pontjához egy-egy vektort kötünk. Vektortér a geometriai tér minden egyes pontjához rendelt vektorok halmaza. A vektortér végtelen sok vektort foglal magában.

Nyomatéki vektortéren a geometriai tér minden egyes pontjához kötött nyomatékvektorok halmazát értjük. Az  $\vec{F}$  erő nyomatéki vektorterét úgy állíthatjuk elő, ha kiszámítjuk az erő A, B, C, ... pontokra számított  $\vec{M}_A, \vec{M}_B, \vec{M}_C, \dots$  nyomatékvektorait (2.17 ábra). Ha a számítást a tér minden pontjára elvégezzük, akkor megkapjuk az  $\vec{F}$  erő nyomatéki vektorterét.

Az alábbiakban egy erő nyomatéki vektortérének néhány fontos tulajdonságát közöljük. A tulajdonságok bizonyítását az olvasóra bizzuk.

1. tulajdonság: Az erő hatásvonalával párhuzamos egyenes pontjaira számított nyomatékvektor állandó.
2. tulajdonság: Az erő hatásvonalát metsző egyenes pontjaiban a nyomatékvektor iránya állandó, nagysága pedig a hatásvontól mért távolság lineáris függvénye.
3. tulajdonság: A tér tetszőleges egyenesének pontjaiban a nyomatékvektorok egyenesre eső vetülete állandó.
4. tulajdonság: Olyan körhenger-felület pontjaiban, amelynek tengelye megegyezik az erő hatásvonalával, a nyomatékvektorok a hengerfelület tengelyre merőleges érintői és nagyságuk állandó.



2.17 ábra

### 3. KONCENTRÁLT ERŐKBŐL ÁLLÓ ERŐRENDSZER

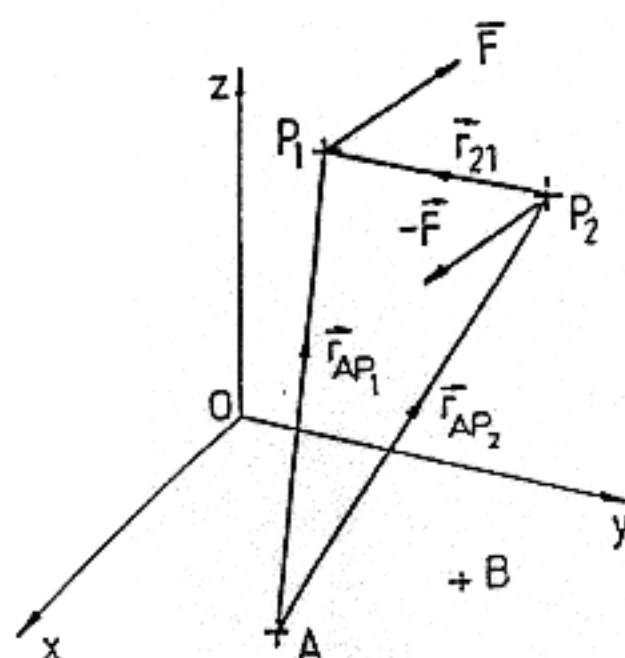
Koncentrált erőkből álló erőrendszerről, vagy röviden koncentrált erőrendszerről beszélünk, ha a vizsgált rendszert egyidejűleg több hatás éri és ezek a hatások koncentrált erőkkel modellezhetők. *Koncentrált erőrendszernek* tehát koncentrált erők halmazát, összességét nevezzük, ha azt legalább két koncentrált erő alkotja.

#### 3.1. KONCENTRÁLT ERŐRENDSZEREK JELLEMZŐI

##### 3.1.1. Erőpár, koncentrált nyomaték

Vizsgáljuk meg a 3.1 ábrán látható, két erőből álló, speciális erőrendszert. Legyen a két erő *azonos nagyságú, ellentétes irányú és párhuzamos hatásvonalú*:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}.$$



3.1 ábra

Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát az  $A$  pontra:

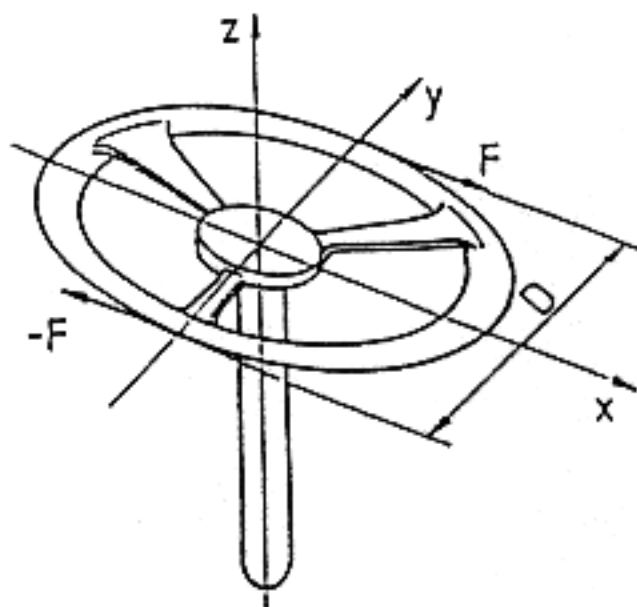
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} - \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = (\vec{r}_{AP_1} - \vec{r}_{AP_2}) \times \vec{F} = \vec{r}_{21} \times \vec{F} = \vec{M}_B.$$

Azt tapasztaljuk, hogy a *nyomatékvektor nem függ az  $A$  pont helyétől*, értékét pedig az  $\vec{F}$  erővektor és a  $P_2$  támadáspontból a  $P_1$  támadáspontba mutató helyvektor határozza meg. Tehát az  $A$  és  $B$  pontokra számított nyomatéknak meg kell egyeznie. Ezt a speciális erőrendszert *erőpárnak* vagy más szóhasználattal *koncentrált nyomatéknak* szokás nevezni. Erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyanannyi, tehát erőpár *homogén nyomatéki vektorteret* hoz létre.

Az erőpár megadásakor elegendő csak az  $\vec{M}_A$  koncentrált nyomatékot megadni. Ekkor az erőpár egy olyan erőrendszernek tekinthető, amely egyetlen nyomatékból áll. Vegyük észre, hogy az  $\vec{M}_A$  nyomatékvektor azonban nem határozza meg egyértelműen az erőpárt alkotó erővektorokat.



Erőpárt alkotnak például jármű kormánykerékének elfordításakor a kormánykerékre ható  
rők (3.2 ábra).



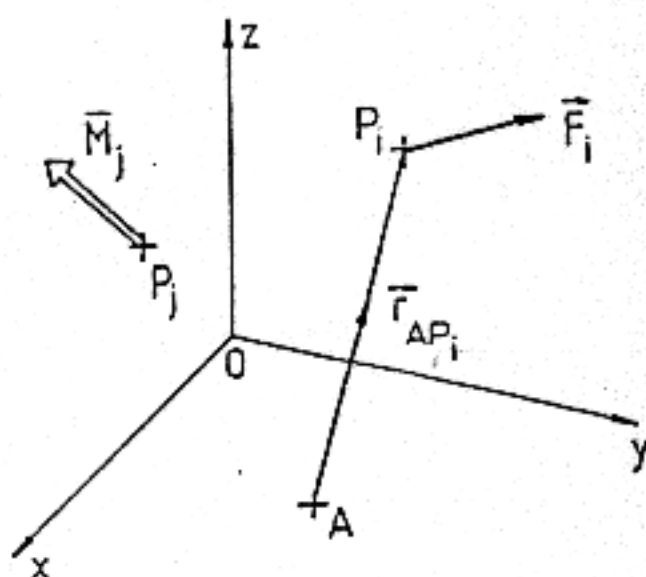
3.2 ábra

Ha  $D$  jelöli a kormánykerék átmérőjét, akkor az erőpár nyomatéka:

$$\vec{M} = (D\vec{e}_y) \times (F\vec{e}_x) = -DF\vec{e}_z.$$

### 3.1.2. Általános, szétszórt erőrendszer

Koncentrált erőrendszer általános esetben  $\vec{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) koncentrált erőből és  $\vec{M}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) koncentrált nyomatékból (erőpárból) állhat (3.3 ábra).



3.3 ábra



Az erőrendszer eredő erővektorát az  $\vec{F}_i$  erővektorok összegzésével kapjuk:

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i} \quad (3.1)$$

Az erőrendszer  $A$  pontra számított eredő nyomatékvektora az  $\vec{F}_i$  erők  $A$  pontra számított nyomatékvektorai és az  $\vec{M}_j$  koncentrált nyomatékvektorok összegzésével állítható elő:

$$\boxed{\vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j} \quad (3.2)$$

Megjegyezzük, hogy  $\vec{F}$  és  $\vec{M}_A$  származtatott mennyiségek és nem tartoznak közvetlenül az erőrendszerhez, mint  $\vec{F}_i$ , vagy  $\vec{M}_j$ .

Erőrendszer tengelyre számított nyomatékát értelemszerűen szintén a (2.4) összefüggéssel definiáljuk.

### 3.1.3. Erőrendszer redukált (eredő) vektorkettőse

Koncentrált erőrendszer redukált (eredő) vektorkettőse két vektort tartalmaz:

- az erőrendszer eredő erővektorát és
- az erőrendszer egy adott  $A$  pontra számított eredő nyomatékvektorát.

A redukált vektorkettős jelölése:

$$[\vec{F}(A), \vec{M}_A]_A \quad (3.3)$$

A redukált vektorkettős vektorainak kiszámítása a (3.1) és a (3.2) összefüggésekkel történik:

$$\vec{F}(A) = \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \quad (3.4)$$

Az erőrendszer a nyomatéki tér vonatkozásában a redukált vektorkettőssel jellemezhető egyértelműen. A redukált vektorkettős bevezetésével az általános (szétszórt) erőrendszer problémáját egy koncentrált erő és egy koncentrált nyomaték feladatára vezettük vissza. Ugyanis az erőrendszer  $A$  pontra számított redukált vektorkettősének ismeretében az erőrendszernek a tér bármely  $B$  pontjára számított redukált vektorkettőse előállítható:

- az erőrendszer eredő erővektora a tér bármely pontjába redukálva ugyanaz az érték:

$$\vec{F}(A) = \vec{F}(B) = \vec{F},$$

- az erőrendszer  $B$  pontra számított nyomatékvektora pedig a (2.2) összefüggéssel számítható:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}.$$

Ez az összefüggés a 2.6 pontban ismertetett gondolatmenettel erőrendszerek esetén is egyszerűen bizonyítható.

## 3.2. ERŐRENDSZEREK EGYENÉRTÉKŰSÉGE

### 3.2.1. Az egyenértékűség értelmezése

Az  $(E')$  és  $(E'')$  erőrendszer egymással egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre. Ez azt jelenti, hogy a két erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatékvektorának meg kell egyeznie.

Az  $(E')$  és  $(E'')$  erőrendszer egyenértékűségét a következőképpen jelöljük:

$$(E') \stackrel{M}{=} (E''). \quad (3.5)$$

Itt az  $\stackrel{M}{=}$  jel arra utal, hogy az erőrendszerek közötti egyenlőség a nyomatéki vektortér vonatkozásában áll fenn.

### 3.2.2. Az egyenértékűség kritériumai (feltételei)

Az egyenértékűség értelmezése nem alkalmas annak megállapítására (eldöntésére), hogy két erőrendszer egyenértékű-e vagy sem, hiszen eszerint a tér végtelen sok pontjára kellene elvégezni a nyomatékvektor kiszámítását.

Az egyenértékűség megállapítására kritériumokat (feltételeket) használunk. Az egyes kritériumok külön-külön is alkalmasak az egyenértékűség eldöntésére, tehát bármelyik kritérium teljesülése elégséges az egyenértékűség megállapítására.

1. kritérium: Két erőrendszer egyenértékű, ha a tér egy tetszőleges, de rögzített  $A$  pontjára számított redukált vektorkettősük megegyezik:

$$\bar{F}' = \bar{F}'', \quad \bar{M}'_A = \bar{M}''_A. \quad (3.6)$$

2. kritérium: Két erőrendszer egyenértékű, ha a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kollineáris)  $A, B$  és  $C$  pontjára számított nyomatékvektoruk megegyezik:

$$\bar{M}'_A = \bar{M}''_A, \quad \bar{M}'_B = \bar{M}''_B, \quad \bar{M}'_C = \bar{M}''_C. \quad (3.7)$$

3. kritérium: Két erőrendszer egyenértékű, ha a tér hat tetszőleges, egymástól lineárisan független tengelyére számított nyomatékuk megegyezik:

$$M'_i = M''_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.8)$$

Tengelyek lineáris függetlenségét a kritérium bizonyításánál értelmezzük. Itt csak megemlítjük, hogy lineárisan függetlenek például egy tetraéder oldalélei, vagy egy háromszög alapú hasáb oldalélei.

### 3.2.3. Az egyenértékűség kritériumainak bizonyítása

#### 1. kritérium

Kérdés, hogy a (3.6) két vektoregyenletének teljesülése garantálja-e, hogy a tér bármely  $B$  pontjára számított nyomatékvektorok is megegyeznek:

$$\vec{M}'_B = \vec{M}''_B ?$$

Írjuk fel az  $(E')$  erőrendszer  $B$  pontra számított nyomatékát:

$$\vec{M}'_B = \vec{M}'_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}'.$$

Állítsuk elő az  $(E'')$  erőrendszer  $B$  pontra számított nyomatékát is, majd alakítsuk át a felforrat összefüggést az 1. kritérium (3.6) egyenletei felhasználásával:

$$\vec{M}''_B = \vec{M}''_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}'' = \vec{M}'_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}' = \vec{M}'_B.$$

Ezzel igazoltuk, hogy az 1. kritérium egyenleteinek teljesülése elegendő az egyenértékűség biztosításához, hiszen  $B$  a tér bármely pontja lehet. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egy tetszőleges szétszórt erőrendszer egyenértékű a redukált vektorkettőssével.

#### 2. kritérium

Kérdés, hogy a (3.7) három vektoregyenletének teljesülése garantálja-e, hogy az  $(E')$  és  $(E'')$  erőrendszerek egymással egyenértékűek legyenek?

Állítsuk elő a  $B$  és  $C$  ponti nyomatékvektorokat az  $A$  pontra számított nyomatékokból kiindulva:

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}'_B &= \vec{M}'_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}', \\ \vec{M}''_B &= \vec{M}''_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{F}'', \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \vec{M}'_C &= \vec{M}'_A + \vec{r}_{CA} \times \vec{F}', \\ \vec{M}''_C &= \vec{M}''_A + \vec{r}_{CA} \times \vec{F}''. \end{aligned} \right\}$$

Az azonos oszlopban lévő egyenleteket egymásból kivonva, majd figyelembe véve a 2. kritérium egyenleteit, kapjuk a következő összefüggéseket:

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{r}_{AB} \times (\vec{F}' - \vec{F}''), \quad \vec{0} = \vec{0} + \vec{r}_{CA} \times (\vec{F}' - \vec{F}'').$$

A vektoriális szorzás eredménye nem zérusvektor szorzótényezők esetén akkor nulla, ha az összeszorozandó vektorok egymással párhuzamosak, tehát

$$\vec{r}_{AB} \parallel (\vec{F}' - \vec{F}'') \quad \text{és} \quad \vec{r}_{CA} \parallel (\vec{F}' - \vec{F}'').$$

Mivel  $\vec{r}_{CA}$  nem párhuzamos  $\vec{r}_{AB}$ -vel (ugyanis kikötöttük, hogy az  $A, B$  és  $C$  pontok nem eshetnek egy egyenesre), ezért az  $(\vec{F}' - \vec{F}'')$  vektor csak akkor lehet az  $\vec{r}_{CA}$  és  $\vec{r}_{AB}$  vektorral is egyszerre párhuzamos, ha

$$(\vec{F}' - \vec{F}'') = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F}''.$$

Ezzel a problémát visszavezettük az 1. kritériumra és erről pedig már bebizonyítottuk, hogy teljesülése esetén az egyenértékűség biztosított.

#### 3. kritérium

Kérdés, hogy a (3.8) hat skaláregyenletének teljesülése garantálja-e, hogy az  $(E')$  és  $(E'')$  erőrendszerek egymással egyenértékűek legyenek?

Az  $\alpha_i$  jelű tengely egyenlete a (2.3) összefüggés alapján



$$\bar{a}_i \times \bar{r} + \bar{b}_i = \bar{0} \quad (\bar{a}_i \neq \bar{0}, \quad \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6)$$

alakban írható. A (2.5) egyenlet felhasználásával az  $(E')$  és  $(E'')$  erőrendszerek  $\alpha_i$  tengelyekre számított nyomatéka:

$$M'_{\alpha_i} = \frac{1}{|\bar{a}_i|} (\bar{a}_i \cdot \bar{M}'_O + \bar{b}_i \cdot \bar{F}') \quad \text{és} \quad M''_{\alpha_i} = \frac{1}{|\bar{a}_i|} (\bar{a}_i \cdot \bar{M}''_O + \bar{b}_i \cdot \bar{F}'').$$

Ezeket az összefüggéseket behelyettesítve a 3. kritérium egyenleteibe és az egyenleteket egy oldalra átrendezve hat skaláris egyenletből álló egyenletrendszert kapunk:

$$\bar{a}_i \cdot (\bar{M}'_O - \bar{M}''_O) + \bar{b}_i \cdot (\bar{F}' - \bar{F}'') = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

A zárójelben álló kifejezésekre az

$$(\bar{M}'_O - \bar{M}''_O) = M_x \bar{e}_x + M_y \bar{e}_y + M_z \bar{e}_z,$$

$$(\bar{F}' - \bar{F}'') = F_x \bar{e}_x + F_y \bar{e}_y + F_z \bar{e}_z$$

jelölést bevezetve az egyenletrendszer az alábbi alakban írható:

$$a_{1x} M_x + a_{1y} M_y + a_{1z} M_z + b_{1x} F_x + b_{1y} F_y + b_{1z} F_z = 0$$

$$a_{2x} M_x + a_{2y} M_y + a_{2z} M_z + b_{2x} F_x + b_{2y} F_y + b_{2z} F_z = 0$$

$$a_{3x} M_x + a_{3y} M_y + a_{3z} M_z + b_{3x} F_x + b_{3y} F_y + b_{3z} F_z = 0$$

$$a_{4x} M_x + a_{4y} M_y + a_{4z} M_z + b_{4x} F_x + b_{4y} F_y + b_{4z} F_z = 0$$

$$a_{5x} M_x + a_{5y} M_y + a_{5z} M_z + b_{5x} F_x + b_{5y} F_y + b_{5z} F_z = 0$$

$$a_{6x} M_x + a_{6y} M_y + a_{6z} M_z + b_{6x} F_x + b_{6y} F_y + b_{6z} F_z = 0.$$

Ennek a homogén, lineáris algebrai egyenletrendszernek az  $M_x, M_y, M_z, F_x, F_y$  és  $F_z$  ismeretlenekre nézve akkor van

$$M_x = M_y = M_z = F_x = F_y = F_z = 0$$

azonosan nulla megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa, amely a hat tengely Plücker-féle vektorainak koordinátáit tartalmazza, nem nulla:

$$\begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} & b_{1x} & b_{1y} & b_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} & b_{2x} & b_{2y} & b_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} & b_{3x} & b_{3y} & b_{3z} \\ a_{4x} & a_{4y} & a_{4z} & b_{4x} & b_{4y} & b_{4z} \\ a_{5x} & a_{5y} & a_{5z} & b_{5x} & b_{5y} & b_{5z} \\ a_{6x} & a_{6y} & a_{6z} & b_{6x} & b_{6y} & b_{6z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ezzel a feltétellel értelmezzük hat tengely lineáris függetlenségét is.

**Definíció:** Hat tengely lineárisan független, ha a Plücker vektoraik koordinátáit tartalmazó determináns nem zérus.

A homogén lineáris algebrai egyenletrendszer azonosan zérus megoldása esetén:

$$(\bar{M}'_O - \bar{M}''_O) = \bar{0} \Rightarrow \bar{M}'_O = \bar{M}''_O,$$

$$(\bar{F}' - \bar{F}'') = \bar{0} \Rightarrow \bar{F}' = \bar{F}''.$$

Ezzel a problémát visszavezettük az 1. kritériumra, amelyről pedig már bebizonyítottuk, hogy teljesülése esetén az egyenértékűség biztosított.

### 3.2.4. A statikai egyenletek jellege

A statikában általában az erőrendszerek egyenértékűségi kritériumaiban szereplő (3.6)-(3.8) típusú egyenleteket használunk. Egy vektoregyenlet térbeli esetben három független skaláregyenletet foglal magába. Például az 1. kritérium (3.6) szerinti két vektoregyenletének  $x, y$  és  $z$  irányokhoz tartozó skaláregyenletei:

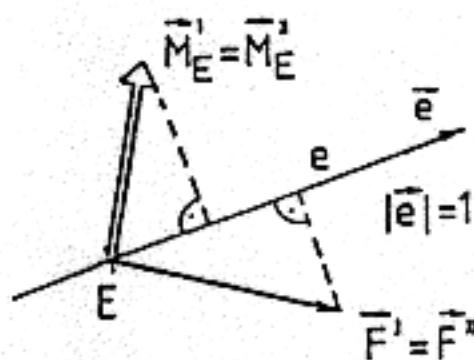
$$F'_x = F''_x, \quad M'_{Ax} = M''_{Ax},$$

$$F'_y = F''_y, \quad M'_{Ay} = M''_{Ay},$$

$$F'_z = F''_z, \quad M'_{Az} = M''_{Az}.$$

A (3.8) szerinti 3. kritérium nyilvánvalóan hat skaláregyenletet tartalmaz. A fentiek alapján a (3.7) vektoregyenletekkel megadott 2. kritérium kilenc skaláregyenletet tartalmaz. Kimutatható azonban, hogy a kilenc egyenletből csak hat független egymástól. Az 1.-3. kritériumokban szereplő egyenleteket *statikai egyenleteknek* nevezzük. A statikai egyenletek térbeli esetben *hat független skaláris összefüggést* tartalmaznak. Az erőkre vonatkozó skaláregyenleteket a továbbiakban *vetületi egyenleteknek*, a nyomatékokra vonatkozó skaláregyenleteket pedig *nyomatéki egyenleteknek* nevezzük.

Alkalmazzuk a 3.4 ábrán vázolt esetre az 1. kritériumot.



3.4 ábra

Szorozzuk be skalárisan a megadott  $\bar{e}$  egységvektorral a kritérium első vektoregyenletét:

$$\bar{F}' \cdot \bar{e} = \bar{F}'' \cdot \bar{e},$$

$$F'_e = F''_e,$$

(3.9)

ekkor az  $\bar{F}'$  és  $\bar{F}''$  erők az  $\bar{e}$  irányra eső (előjeles) vetületét és így a (3.9)-es  $\bar{e}$  irányú *vetületi egyenletet* kapjuk.



Ha a kritérium második vektoregyenletét szorozzuk be skalárisan az adott  $\vec{e}$  egységvektorral:

$$\begin{aligned}\bar{M}'_E \cdot \vec{e} &= \bar{M}''_E \cdot \vec{e}, \\ M'_e &= M''_e,\end{aligned}\tag{3.10}$$

akkor az  $\bar{M}'_E$  és  $\bar{M}''_E$  nyomatéknak az  $\vec{e}$  irányra eső (előjeles) vetületét, vagy más szóval a (2.4) értelmezésnek megfelelően az  $M'_e$  és  $M''_e$  tengelyre számított nyomatékokat kapjuk, a (3.10) egyenletet pedig *e* tengelyre számított nyomatéki egyenletnek nevezzük.

### 3.3. ERŐRENDSZER EGYENSÚLYA

#### 3.3.1. Az egyensúly értelmezése

Az  $(E)$  erőrendszer egyensúlyi, ha zérus nyomatéki vektorteret hoz létre. Ez azt jelenti, hogy az erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatékának nulla vektornak kell lennie.

Az  $(E)$  erőrendszer egyensúlyát a (3.5) összefüggéshez hasonlóan jelöljük:

$$(E) \stackrel{M}{=} (0).\tag{3.11}$$

#### 3.3.2. Az egyensúly kritériumai (feltételei)

Az egyenértékűséghez hasonlóan az egyensúlyi kritériumok szintén külön-külön is alkalmasak annak eldöntésére, hogy egy erőrendszer egyensúlyi-e.

1. kritérium: Egy erőrendszer egyensúlyi, ha a tér egy tetszőleges, de rögzített  $A$  pontra számított vektorkettőse zérus értékű:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0}, \quad \vec{M}_A = \vec{0}.}\tag{3.12}$$

2. kritérium: Egy erőrendszer egyensúlyi, ha a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kollineáris)  $A, B$  és  $C$  pontjára számított nyomatékvektora nulla:

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{0}, \quad \vec{M}_B = \vec{0}, \quad \vec{M}_C = \vec{0}.}\tag{3.13}$$

3. kritérium: Egy erőrendszer egyensúlyi, ha a tér hat tetszőleges, egymástól lineárisan független tengelyére számított nyomatéka nulla:

$$\boxed{M_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6).}\tag{3.14}$$

Lineárisan független tengelyek például egy tetraéder oldalélei, vagy egy háromszög alapú hasáb oldalélei.

Az egyensúlyi kritériumok igazolása a 3.2.3 fejezetben leírtaknak megfelelően egyszerűen elvégezhető. A 3.2.4 fejezetben leírtak az egyensúlyi kritériumok (3.12)-(3.14) egyenleteire is érvényesek.

### 3.4. ERŐRENDSZER CENTRÁLIS EGYENESE

#### 3.4.1. A centrális egyenes értelmezése

*Erőrendszer centrális egyenese azon pontok mértani helye, amelyekben az erőrendszer eredő erővektora és eredő nyomatékvektora egymással párhuzamos.*

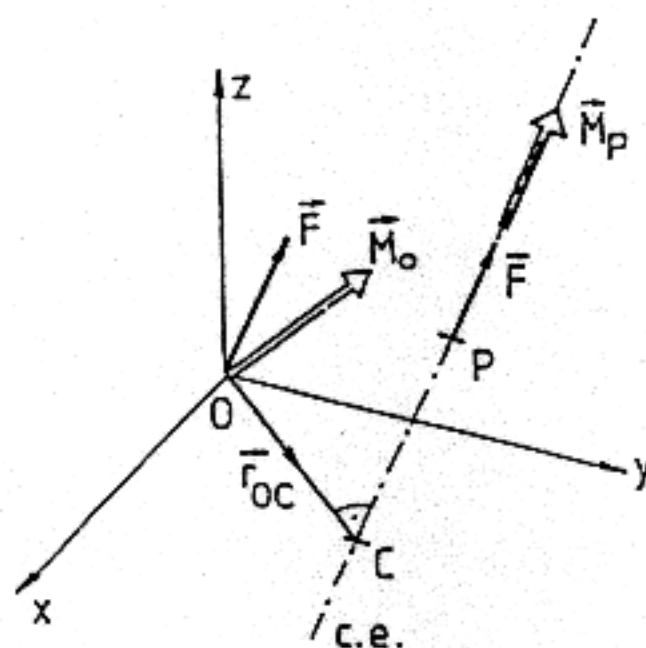
Ugyanez más formában is megfogalmazható:

*Erőrendszer centrális egyenese azon pontok mértani helye, amelyekben az eredő nyomatékvektornak az eredő erővektorra merőleges összetevője zérus. A centrális egyenest a c.e. rövidítéssel is szokás jelölni.*

#### 3.4.2. A centrális egyenes egyenlete

A centrális egyenes tetszőleges  $P$  pontjára számított  $\vec{M}_P$  nyomatékvektor (3.5 ábra) kifejezhető az erőrendszernek a koordináta-rendszer  $O$  kezdőpontjába redukált  $[\vec{F}, \vec{M}_O]_O$  eredő vektorkettőssével:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{F} \times \vec{r}_{OP} = \vec{M}_O - \vec{r}_{OP} \times \vec{F}. \quad (3.15)$$



3.5 ábra

A centrális egyenes értelmezéséből kiindulva írjuk fel az  $\vec{M}_P$  nyomatékvektornak az  $\vec{F}$  erővektorra merőleges összetevőjét:

$$(\vec{F} \times \vec{M}_P) \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Helyettesítsük be ebbe a kifejezésbe az  $\vec{M}_P$ -re vonatkozó (3.15) összefüggést és végezzük el tagonként a zárójelben kijelölt vektoriális szorzást:

$$[\vec{F} \times \vec{M}_O - \vec{F} \times (\vec{r}_{OP} \times \vec{F})] \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Alkalmazzuk a szögletes zárójelben álló kétszeres vektoriális szorzásra a kifejtési szabályt, majd a szögletes zárójelben álló kifejezést szorozzuk be tagonként jobbról vektoriálisan  $\vec{F}$ -fel:

$$(\vec{F} \times \vec{M}_O) \times \vec{F} - F^2 (\vec{r}_{OP} \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \vec{r}_{OP}) \underbrace{\vec{F} \times \vec{F}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

Az utolsó tagban szereplő vegyes szorzat azért nulla, mert két tényezője ugyanaz a vektor. Az egyenletet  $F^2 \neq 0$ -val elosztva, a vektoriális szorzásokban a tényezők sorrendjét felcserélve és mindkét tagból az  $\vec{F}$  vektort kiemelve kapjuk a *centrális egyenes egyenletét*:

$$\boxed{\vec{F} \times \left( \vec{r}_{OP} - \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} \right) = \vec{0}.} \quad (3.16)$$

A (3.16) egyenletet összevetve az egyenes egyenletének

$$\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{0}$$

alakjával (2.15 ábra) megállapítható, hogy a centrális egyenes

irányvektora:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{F}} \quad \text{és} \quad (3.17)$$

egy ismert pontjának helyvektora:

$$\boxed{\vec{r}_1 = \vec{r}_{OC} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2}} \quad (3.18)$$

Az ismert pont éppen a centrális egyenesnek az  $O$ -hoz legközelebb lévő  $C$  pontja, hiszen (3.18) szerint az  $\vec{r}_{OC}$  helyvektor merőleges az egyenes  $\vec{F}$  irányvektorára.

Ha az előző levezetésnél az  $O$  pontba redukált  $[\vec{F}, \vec{M}_O]_O$  eredő vektorkettős helyett az erőrendszer  $A$  pontba redukált  $[\vec{F}, \vec{M}_A]_A$  eredő vektorkettősét használjuk fel (3.6 ábra), akkor (3.16) helyett a következő egyenletet kapjuk:

$$\vec{F} \times \left( \vec{r}_{AP} - \frac{\vec{F} \times \vec{M}_A}{F^2} \right) = \vec{0}. \quad (3.19)$$

A zárójelben álló kifejezés második tagja az  $A$  pontból a centrális egyenes  $D$  pontjába mutató helyvektort adja meg:

$$\boxed{\vec{r}_{AD} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_A}{F^2}.} \quad (3.20)$$

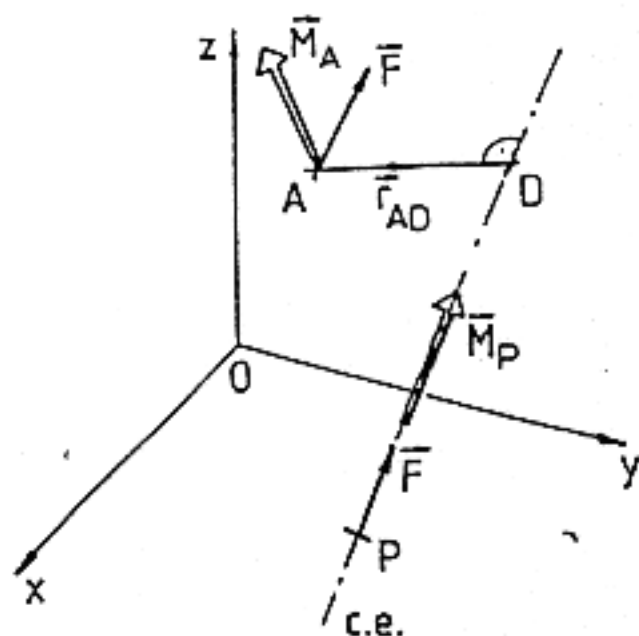
A  $D$  pont a centrális egyenesnek az  $A$  ponthoz legközelebb lévő pontja, hiszen (3.20) szerint az  $\vec{r}_{AD}$  helyvektor merőleges az egyenes  $\vec{F}$  irányvektorára.

A centrális egyenes egyenletének Plücker vektoros alakját kapjuk, ha a (3.16) egyenletben kijelölt vektoriális szorzást tagonként végezzük el:

$$\vec{F} \times \vec{r}_{OP} + \frac{1}{F^2} \vec{F} \times (\vec{M}_O \times \vec{F}) = \vec{0}. \quad (3.21)$$

A (3.21) egyenletet (2.3)-mal összevetve kapjuk a *centrális egyenes egyenletének Plücker-féle vektorait*:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{F}, \\ \bar{b} &= \frac{1}{F^2} \bar{F} \times (\bar{M}_O \times \bar{F}).\end{aligned}\quad (3.22)$$



3.6 ábra

A  $\bar{b}$  Plücker vektor az  $\bar{M}_O$  nyomatékvektor  $\bar{F}$ -re merőleges irányú összetevője. Ennek bizonyítására fejtsük ki a (3.22)-ben szereplő kétszeres vektoriális szorzatot:

$$\bar{b} = \frac{1}{F^2} \bar{F} \times (\bar{M}_O \times \bar{F}) = \bar{M}_O - \frac{\bar{F} \cdot \bar{M}_O}{F^2} \bar{F} = \bar{M}_O - \bar{M}_{O\parallel} = \bar{M}_{O\perp}.$$

### 3.4.3. A centrális egyenes pontjaira számított nyomaték

Erőrendszer A pontra számított  $\bar{M}_A$  nyomatékvektora felbontható az erőrendszer  $\bar{F}$  eredő erőjével párhuzamos és arra merőleges összetevőre:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_{A\parallel} + \bar{M}_{A\perp} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{M}_A}{F^2} \bar{F} + \frac{\bar{F} \times (\bar{M}_A \times \bar{F})}{F^2}. \quad (3.23)$$

A centrális egyenes tetszőleges P pontjára számított  $\bar{M}_P$  nyomatékvektor az A ponti redukált vektorkettős felhasználásával a következőképpen írható fel:

$$\bar{M}_P = \bar{M}_A + \bar{F} \times \bar{r}_{AP} = \bar{M}_{A\parallel} + \bar{M}_{A\perp} + \bar{F} \times \bar{r}_{AP}. \quad (3.24)$$

A centrális egyenes pontjaiban az eredő erővektor és a nyomatékvektor egymással párhuzamos, ezért

$$\bar{F} \times \bar{M}_P = \bar{0}.$$

Helyettesítsük be ebbe az egyenletbe a (3.24) összefüggést:



$$\vec{F} \times \vec{M}_{A1} + \vec{F} \times (\vec{M}_{A1} + \vec{F} \times \vec{r}_{AP}) = \vec{0}. \quad (3.25)$$

A (3.25) egyenlet első tagja nulla, mert  $\vec{F}$  párhuzamos  $\vec{M}_{A1}$ -val. Ebből az következik, hogy a második tag zárójelben álló tényezőjének is nullának kell lenni, mert  $\vec{F} \neq \vec{0}$  és  $\vec{F}$  nem párhuzamos a zárójelben álló egyik taggal sem:

$$\vec{M}_{A1} + \vec{F} \times \vec{r}_{AP} = \vec{0}. \quad (3.26)$$

Ez egyúttal a (3.19) összefüggéssel is felírt centrális egyenes egyenletének egy másik alakja.

A (3.26) eredmény figyelembevételével (3.24)-ből az adódik, hogy

$$\boxed{\vec{M}_P = \vec{M}_{A1} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_A}{F^2} \vec{F}}. \quad (3.27)$$

Tehát a centrális egyenes tetszőleges  $P$  pontjára számított  $\vec{M}_P$  nyomatékvektor egyenlő az erőrendszernek a tér tetszőleges  $A$  pontjára számított nyomatékvektorának a centrális egyenes irányába eső összetevőjével.

### 3.5. ERŐRENDSZEREK OSZTÁLYOZÁSA REDUKÁLT (EREDŐ) VEKTORKETTŐSÜK ALAPJÁN

Erőrendszerek redukált vektorkettősük alapján négy csoportba sorolhatók. A négy csoport közül az első kettőre  $\vec{F} = \vec{0}$ , míg a második kettőre  $\vec{F} \neq \vec{0}$  jellemző. A továbbiakban az első két csoportot 1. osztálynak, a harmadik-negyedik csoportot pedig 2. osztálynak nevezzük.

1. osztály:  $\vec{F} = \vec{0}$

a/ eset:  $\vec{M}_A = \vec{0}$ , az erőrendszer egyensúlyi,

b/ eset:  $\vec{M}_A \neq \vec{0}$ , az erőrendszer az  $\vec{M}_A$  nyomatéki erőpárral egyenértékű.

2. osztály:  $\vec{F} \neq \vec{0}$

a/ eset:  $\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0$ , az erőrendszer egy olyan  $\vec{F}$  erővektorral egyenértékű, amelynek hatásvonala az erőrendszer centrális egyenese,

b/ eset:  $\vec{F} \cdot \vec{M}_A \neq 0$ , az erőrendszer egy olyan  $\vec{F}, \vec{M}_P$  vektorcsavarral (vektorkettőssel) egyenértékű, amelynek hatásvonala az erőrendszer centrális egyenese.

### 3.6 ERŐRENDSZEREK OSZTÁLYOZÁSA AZ ERŐK TÉRBELI ELHELYEZKEDÉSE ALAPJÁN - SPECIÁLIS ERŐRENDSZEREK

Az erők térbeli elhelyezkedése alapján az erőrendszerek három csoportba sorolhatók:

- közös ponton támadó erőrendszerek,

- párhuzamos erőrendszerek, és
- szétszórt (tetszőleges) erőrendszerek.

Mindhárom csoportba sorolt erőrendszereknél az erők lehetnek térbeli és síkbeli elhelyezkedésűek. *Síkbeli erőrendszerről* beszélünk, ha az erők hatásvonalai egy síkba esnek. *Térbeli erőrendszer* esetén az erők hatásvonalai tetszőleges térbeli elhelyezkedésűek, nem esnek egy síkba.

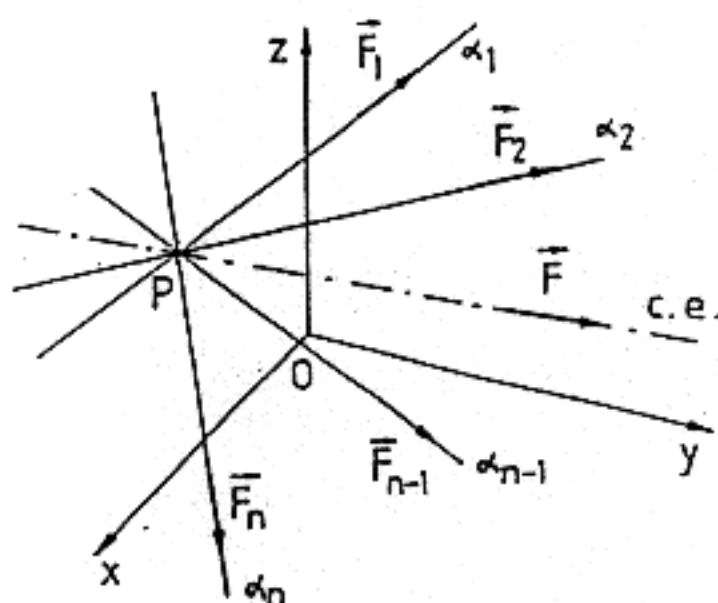
Az egyes esetekben megvizsgáljuk, hogy

- az eredő vektorkettős alapján az erőrendszer milyen osztályba (esetbe) sorolható és
- hány skaláregyenlet áll rendelkezésükre az egyenértékűségi és egyensúlyi feladatoknál.

A vizsgálat után az adott erőrendszerre gyakorlati példát is bemutatunk.

### 3.6.1. Közös ponton támadó erőrendszer

*Közös ponton támadó erőrendszerről* beszélünk abban az esetben, ha az erőrendszert alkotó  $\vec{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) erők  $\alpha_i$  hatásvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a metszéspontot a 3.7 ábrán  $P$ -vel jelöltük.



3.7 ábra

Az erőrendszer  $P$  pontba redukált eredő vektorkettőse:

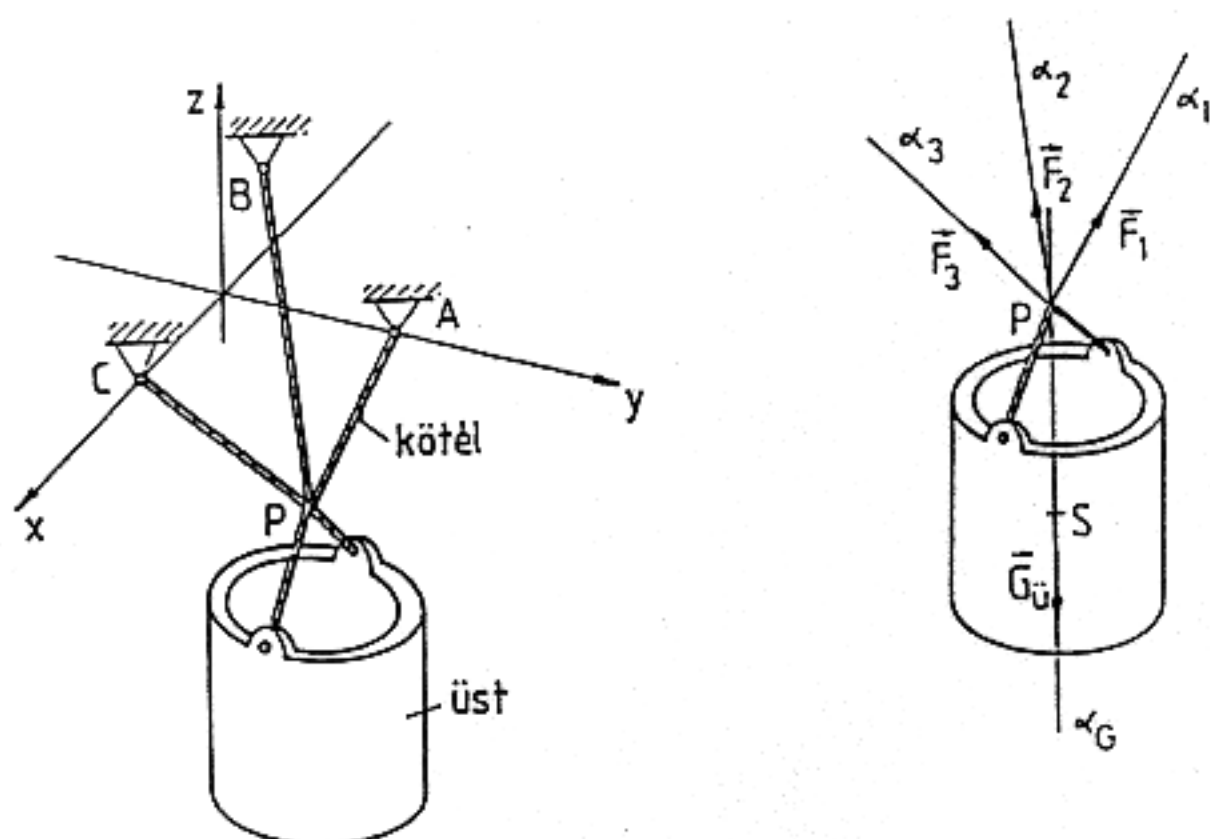
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_P = \vec{0}. \quad (3.28)$$

Az erőrendszer vagy az 1/a vagy pedig a 2/a osztályba tartozhat a redukált vektorkettős alapján történő osztályozás szerint. A közös ponton támadó erőrendszer tehát vagy egyensúlyban van, vagy pedig a  $P$  ponton támadó  $\vec{F}$  eredő erővektorral helyettesíthető. Ebből az is következik, hogy az erőrendszerre térbeli esetben három független vetületi egyenlet, míg síkbeli esetben két független vetületi egyenlet írható fel.

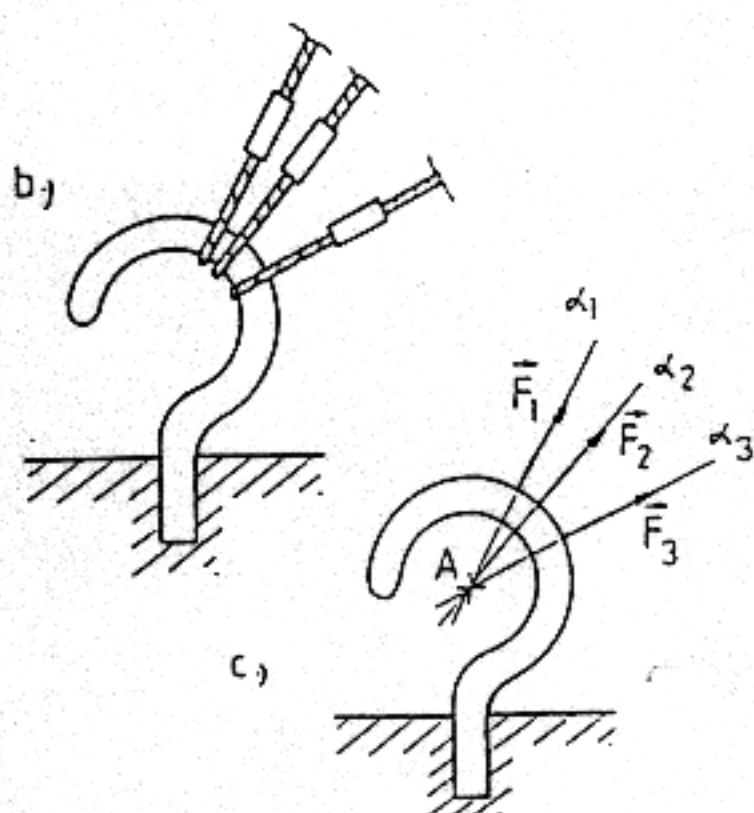
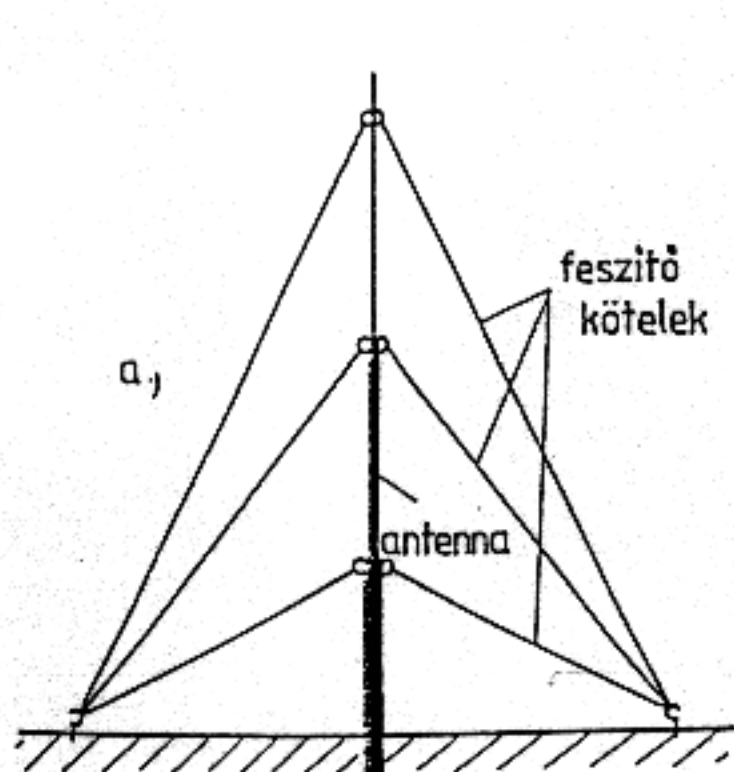
*Példaként térbeli, közös ponton támadó erőrendszerre* vizsgáljuk meg a 3.8 ábrán látható kötéllal felfüggesztett üstre ható erőket. Az  $A, B$  és  $C$  pontokban rögzített kötelekről a  $P$  pontba a kötélágak irányával megegyező irányú  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  és  $\vec{F}_3$  erők adódnak át. Az üst  $S$

támadáspontú  $\vec{G}_H$  súlyerővektorának  $\alpha_G$  hatásvonala is átmegy a  $P$  ponton, így az  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  és  $\vec{G}_H$  erők térbeli, közös ponton támadó erőrendszert alkotnak.

*Példaként síkbeli, közös ponton támadó erőrendszerre vizsgáljuk meg a 3.9 ábrán látható antenna feszítőköteleinek talajhoz történő rögzítését (3.9.b ábra). A feszítőkötelekről a talajba bebetonozott acélkampóra a 3.9.c ábrán látható  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  és  $\vec{F}_3$  erők adódnak át. A három erő egy síkba esik és hatásvonalai az  $A$  pontban metszik egymást, ezért az  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  és  $\vec{F}_3$  erők síkbeli, közös ponton támadó erőrendszert alkotnak.*



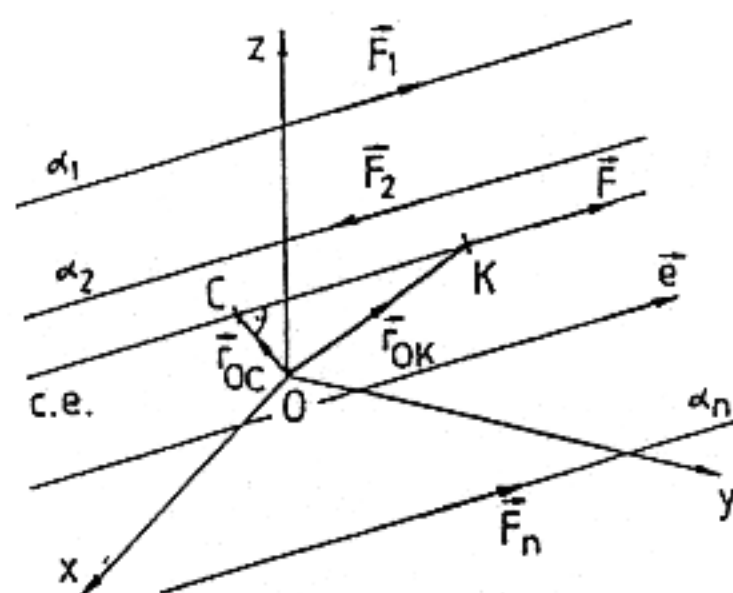
3.8 ábra



3.9 ábra

### 3.6.2. Párhuzamos erőrendszer

*Párhuzamos erőrendszerről* beszélünk abban az esetben, ha az erőrendszert alkotó erők hatásvonalai párhuzamosak egy  $\vec{e}$  egységvektorral kijelölt iránnyal (3.10 ábra).



3.10 ábra

Az erőrendszert alkotó valamennyi erő ezért

$$\vec{F}_i = F_i \vec{e}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.29)$$

alakban írható fel.

A párhuzamos erőrendszer  $O$  pontba redukált eredő vektorkettőse (3.29) figyelembevételével az alábbi módon számítható ki:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \vec{e} = F \vec{e}, \quad (3.30)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{Oi} \times F_i \vec{e} = \left( \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_{Oi} \right) \times \vec{e}. \quad (3.31)$$

A (3.30-3.31) összefüggésekből látható, hogy az  $\vec{F}$  eredő erővektor mindig  $\vec{e}$  irányú, és az  $\vec{M}_O$  eredő nyomatékvektor mindig merőleges az  $\vec{e}$  irányra, tehát mindig egy  $\vec{e}$ -re merőleges síkban helyezkedik el. Ebből következően a párhuzamos erőrendszerek a redukált vektorkettős alapján történő osztályozás szerint az 1/a, 1/b és 2/a esethez tartozhatnak. Párhuzamos erőrendszerre térbeli esetben három független (1 vetületi és 2 nyomatéki) egyenlet, síkbeli esetben pedig két független (1 vetületi és 1 nyomatéki) egyenlet írható fel.

#### 3.6.2.1. Párhuzamos erőrendszer középpontja

*Párhuzamos erőrendszer  $K$  középpontjának* a térnek azt a pontját tekintjük, amelyben az erőrendszer helyettesíthető az  $\vec{F}$  eredő erővel.



Ha az erőrendszer a  $K$  pontban helyettesíthető az  $\vec{F}$  erővel, akkor az erőrendszer  $O$  pontra számított nyomatéka:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OK} \times \vec{F} = \vec{r}_{OK} \times \left( \sum_{i=1}^n F_i \vec{e} \right) = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \vec{r}_{OK} \times \vec{e} \quad (3.32)$$

A (3.31) és (3.32) egyenletet összevetve kapjuk meg a  $K$  pont helyvektorát:

$$\vec{r}_{OK} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_{Oi}}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.33)$$

Az erőrendszer  $K$  középpontjának értelmezéséből következik, hogy a  $K$  ponton átmenő  $\vec{e}$  irányú egyenes az erőrendszer centrális egyenese.

A (3.18) összefüggésből kiindulva bebizonyítjuk, hogy a  $K$  pont is a centrális egyenesen fekszik:

$$\vec{r}_{OC} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} = \frac{F \vec{e} \times (\vec{r}_{OK} \times F \vec{e})}{F^2} = \vec{e} \times (\vec{r}_{OK} \times \vec{e}) = \vec{r}_{OK} \underbrace{(\vec{e} \cdot \vec{e})}_{=1} - (\vec{r}_{OK} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e} \quad (3.34)$$

Az  $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$ , mert  $\vec{e}$  egységvektor, az  $\vec{r}_{OK} \cdot \vec{e}$  skaláris szorzat pedig egy  $c$  skaláris számot eredményez, tehát (3.34)-ből az alábbi összefüggés adódik:

$$\vec{r}_{OK} - \vec{r}_{OC} = c \vec{e}.$$

A  $K$  és  $C$  pontok helyvektorainak különbsége egy  $\vec{e}$  irányú vektor. Ebből az következik, hogy ha  $C$  a centrális egyenes pontja, akkor a  $K$  pontnak is a centrális egyenesen kell lennie (3.10 ábra).

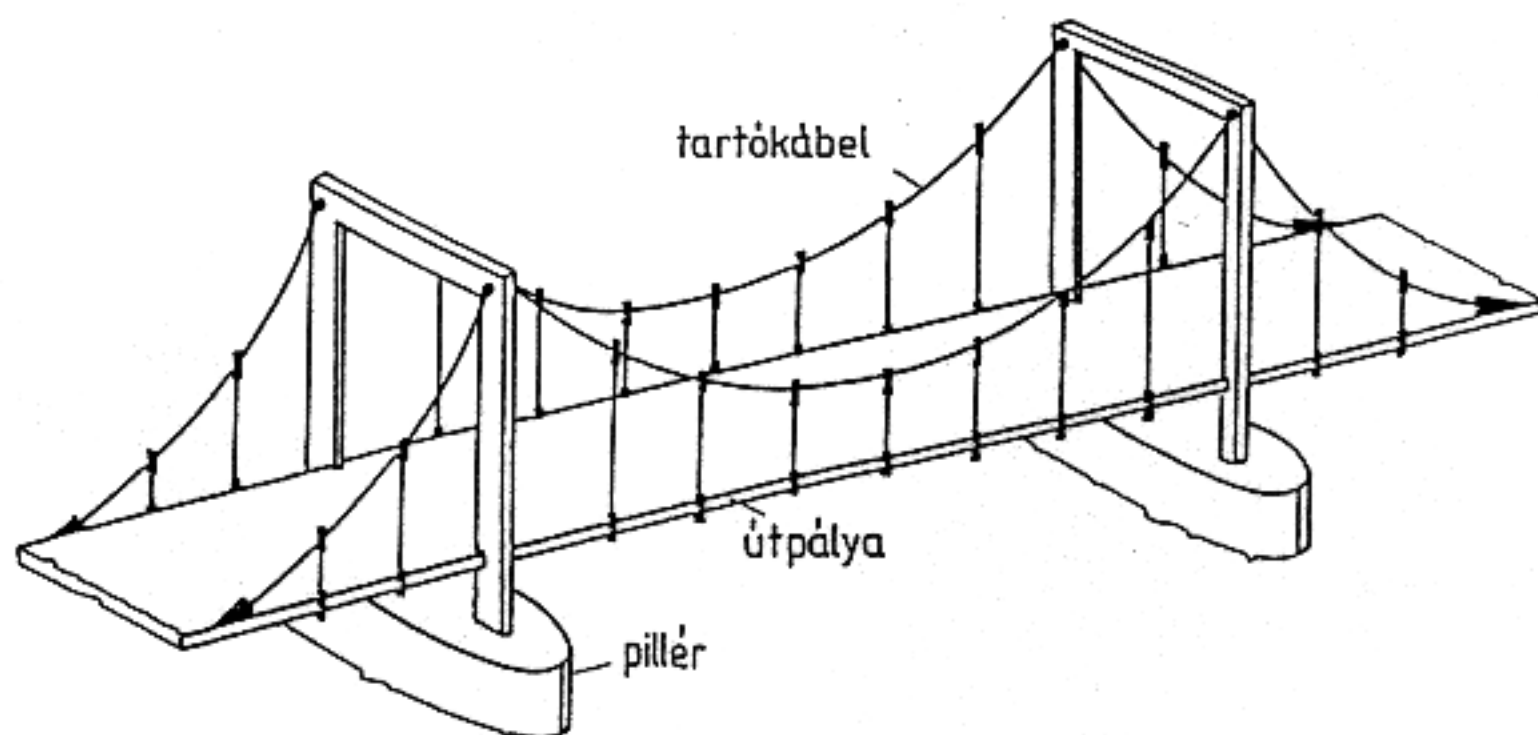
### 3.6.2.2. Súlypont értelmezése

A környezetünkben leggyakrabban előforduló erőrendszer a *súlyerőrendszer*. A Földön lévő valamennyi testre hat súlyerőrendszer (minden testnek van súlya), amely a test és a Föld közötti kölcsönhatásból (gravitációból) adódik. A műszaki gyakorlatban előforduló testméretek esetén a *súlyerőrendszer párhuzamos erőrendszernek* tekinthető.

*Test súlypontjának a testre ható súlyerőrendszernek, mint párhuzamos erőrendszernek a középpontját nevezzük.*

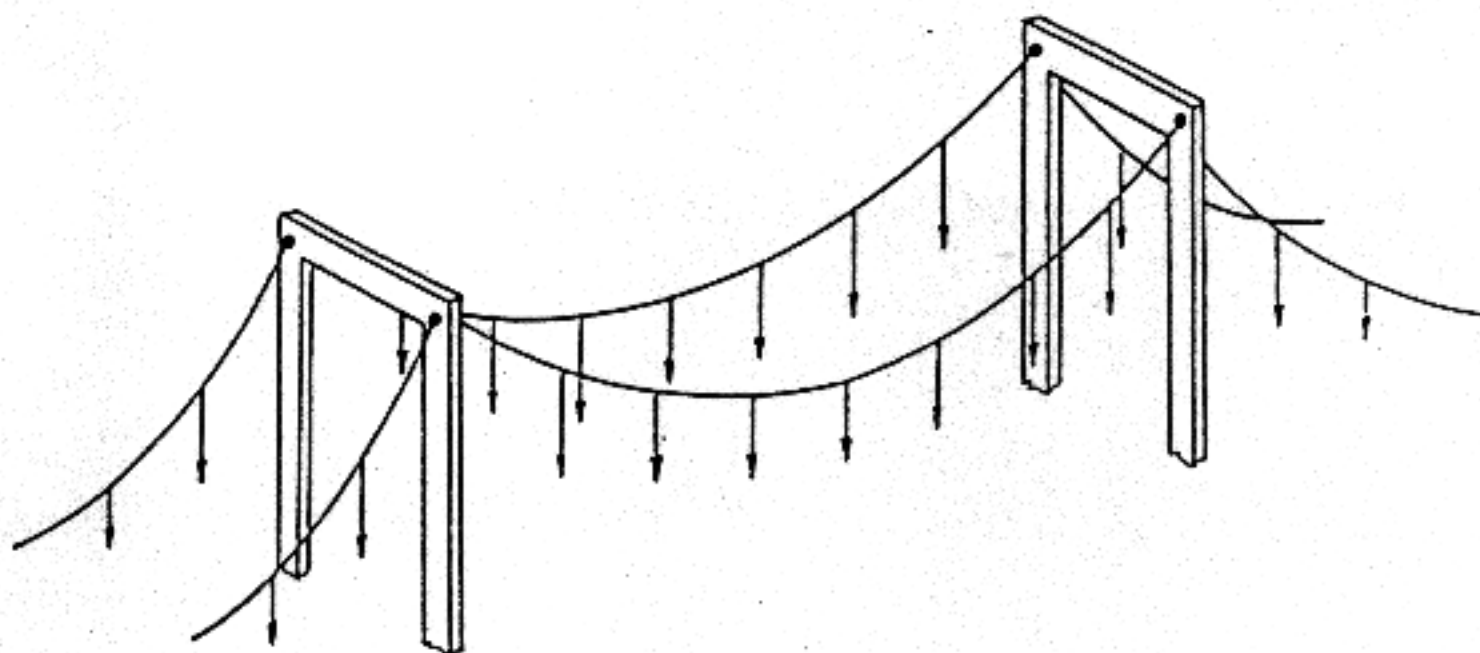
### 3.6.2.3. Példák párhuzamos erőrendszerekre

*Térbeli párhuzamos erőrendszerre példaként vizsgáljuk meg a 3.11 ábrán látható függőhíd tartókábeleire működő erőket.*



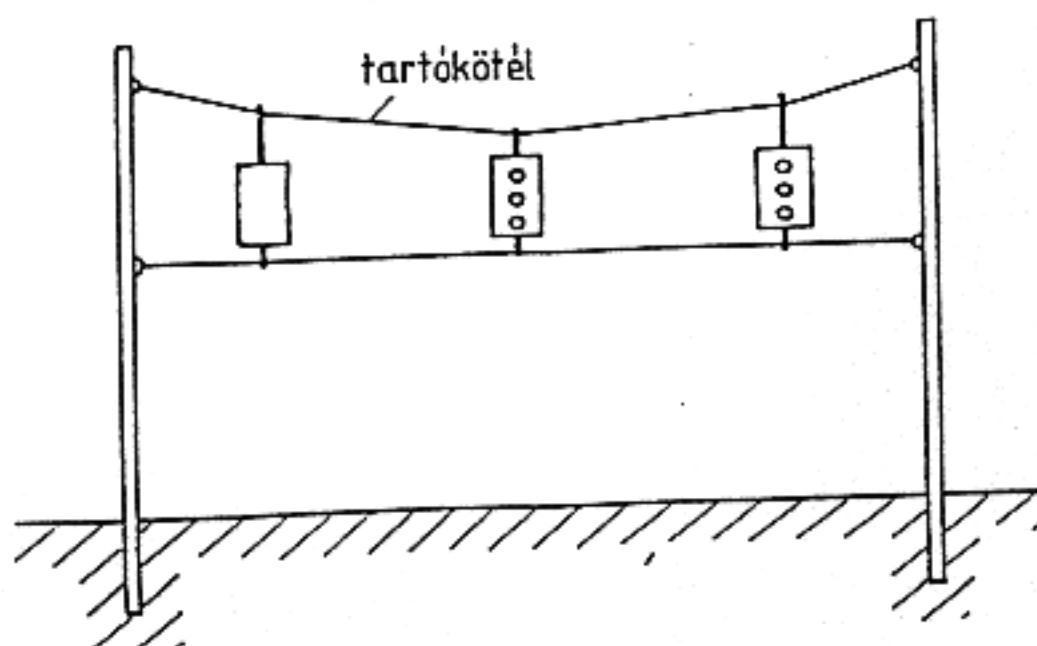
3.11 ábra

A tartókábelekre az útpálya és a hídon áthaladó járművek súlyából származó térbeli párhuzamos erőrendszer hat (3.12 ábra)



3.12 ábra

Síkbeli párhuzamos erőrendszere példaként vizsgáljuk meg a 3.13 ábrán látható közlekedési jelzőlámpa-rendszert. A lámpák a felső tartókötélre vannak felfüggesztve. Az alsó kötélnak csak az a szerepe, hogy széles időjárás esetén meggátolja a lámpatestek túlzott belengését.



3.13 ábra

A tartókötélre a lámpatestek súlyából származó síkbeli párhuzamos erőrendszer adódik át,



3.14 ábra

### 3.6.3. Szétszórt erőrendszer

*Szétszórt erőrendszerről* beszélünk abban az esetben, ha az erőrendszert alkotó erők tetszőleges térbeli elhelyezkedésűek, tehát hatásvonalaik helyzetére semmilyen megkötés nincs. Ez az általános eset.

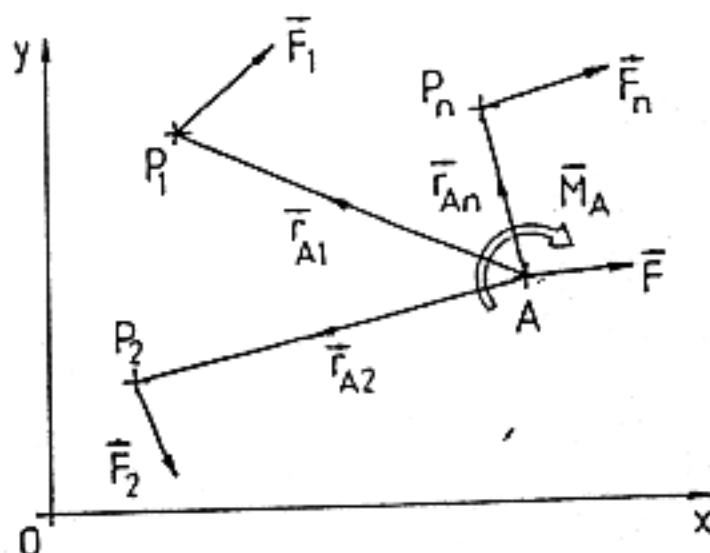
Szétszórt erőrendszer  $A$  pontra számított redukált vektorkettőse a (3.1) és (3.2) értelmezés alapján határozható meg. A redukált vektorkettős alapján történő osztályozás szerint az erőrendszer bármely, azaz  $1/a$ ,  $1/b$ ,  $2/a$  és  $2/b$  esethez tartozhat. Szétszórt, általános erőrendszerre térbeli esetben hat független (3 vetületi és 3 nyomatéki) egyenlet, síkbeli esetben pedig három független (2 vetületi és 1 nyomatéki) egyenlet írható fel.

### 3.6.4. Síkbeli erőrendszer

*Síkbeli erőrendszerről* beszélünk abban az esetben, ha az erőrendszert alkotó erők egy síkba esnek. A műszaki feladatoknál többségében síkbeli erőrendszerek fordulnak elő, vagy legalábbis a

probléma jó közelítéssel síkbeli erőrendszerrel modellezhető (lásd például a 2.3 és 2.4 ábrán látható feladatot). Ez indokolja síkbeli erőrendszerek tulajdonságainak részletesebb megvizsgálását.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a 3.15 ábrán látható  $xy$  síkba eső erőrendszert.



3.15 ábra

Síkbeli erőrendszer  $A$  pontba redukált eredő vektorkettőse:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i.$$

Az  $\vec{F}$  eredő vektor minden esetben benne van az  $xy$  síkban, a sík bármely  $A$  pontjára számított  $\vec{M}_A$  nyomatékvektor pedig mindig merőleges az  $xy$  síkra:

$$\boxed{\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0.} \quad (3.35)$$

Síkbeli erőrendszerekre alkalmazva a (3.27) összefüggést, azt kapjuk, hogy a centrális egyenes pontjaiban a nyomaték zérus.

Síkbeli erőrendszerek között is előfordulhatnak szétszórt, párhuzamos és közös ponton támadó erőrendszerek. Ezek redukált vektorkettős alapján történő osztályozását és a rájuk felírható független statikai egyenletek számát már a 3.6.1-3.6.3 fejezetben megbeszéltük.

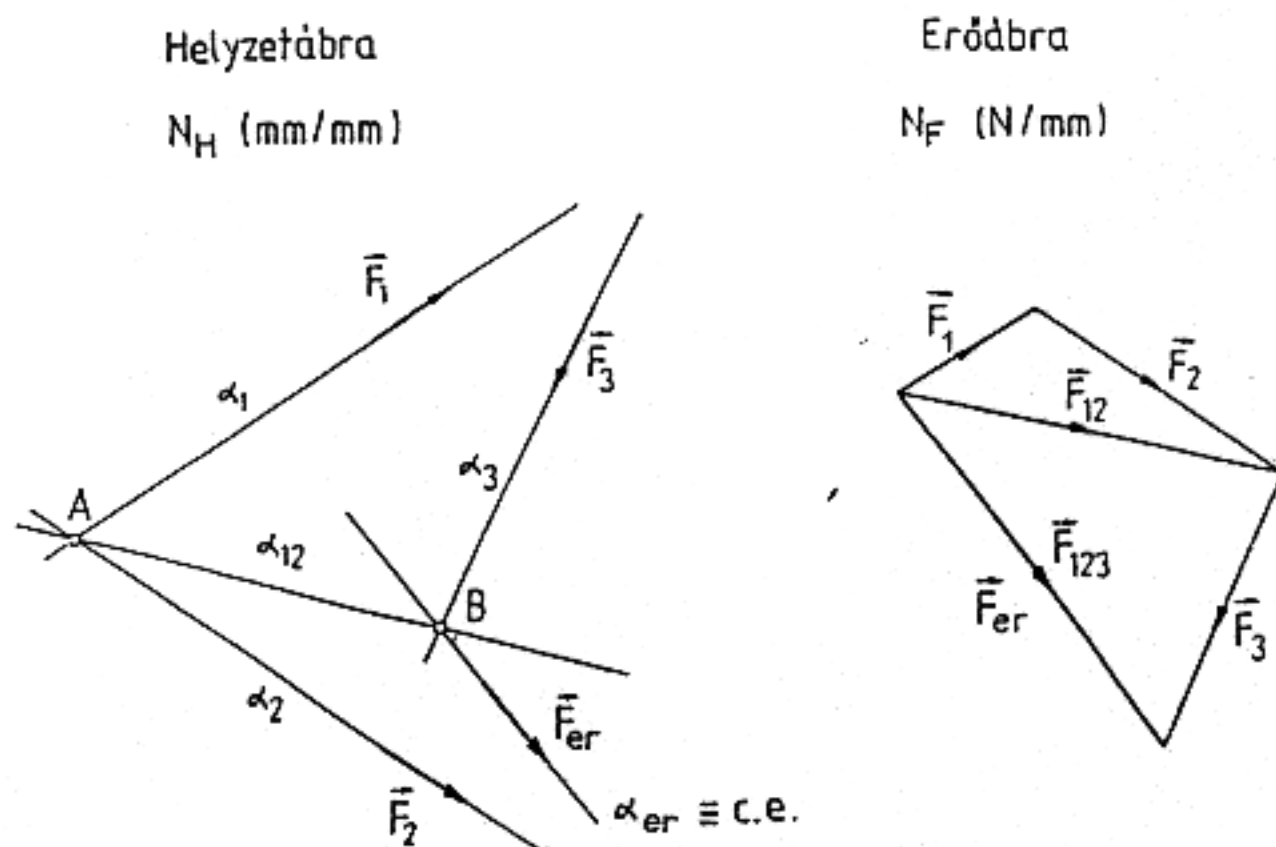
### 3.7. SÍKBELI ERŐRENDSZER EREDŐJÉNEK MEGHATÁROZÁSA SZERKESZTÉSSEL

#### 3.7.1. Szétszórt síkbeli erőrendszer

##### 3.7.1.1. Részeredő sokszög szerkesztés

A szerkesztést a 3.16 ábrán látható három erőből álló síkbeli szétszórt erőrendszerre mutatjuk be.





3.16 ábra

A szerkesztés alapjául az erőrendszer eredő erővektorának értelmezése szolgál:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_{123}. \quad (3.36)$$

A szerkesztés gondolatmenete a következő:

- az első lépésben előállítjuk az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erők eredőjét, amit  $\vec{F}_{12}$  részeredőnek nevezünk,
- a második lépésben előállítjuk az  $\vec{F}_{12}$  és  $\vec{F}_3$  erők  $\vec{F}_{123}$  részeredőjét, ami itt megegyezik az erőrendszer  $\vec{F}$  eredő erőjével.

Ha az erőrendszer  $n$  számú erőből áll, akkor a részeredő sokszög szerkesztés  $n-1$  lépésben végezhető el.

A szerkesztés elvégzéséhez két ábrát, a helyzetábrát (szerkezetábrát) és az erőábrát (vektorábrát) kell megrajzolni.

A helyzetábra, vagy szerkezetábra az erők  $\alpha$  hatásvonalainak helyzetét tartalmazza. A helyzetábra  $N_H$  (mm/mm) léptéke azt mutatja meg, hogy az ábráról lemért 1 mm hosszának a valóságos szerkezeten hány mm-es hossz felel meg.

Az erőábra, vagy vektorábra az erővektorok összegzését tartalmazza. Az erőábra  $N_F$  (N/mm) léptéke azt mutatja meg, hogy az ábráról lemért 1 mm hosszának hány N erő felel meg.

A szerkesztést az erőábrán kezdjük azzal, hogy megszerkesztjük az  $\vec{F}_{12}$  részeredő erővektort. Az  $\vec{F}_{12}$  részeredő  $\alpha_{12}$  hatásvonala át kell hogy menjen az  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  hatásvona-

lak  $A$  metszéspontján. Így második lépésként a helyzetábrában az  $A$  ponton át  $\vec{F}_{12}$ -vel párhuzamost húzva kapjuk meg az  $\alpha_{12}$  hatásvonalat. A harmadik lépést ismét az erőábrán kell elvégezni: meg kell szerkeszteni az  $\vec{F}_{12}$  és  $\vec{F}_3$  erők  $\vec{F}_{123} = \vec{F}$  eredővektorát. A következő lépésben a helyzetábrán határozzuk meg az  $\alpha_{cr}$  hatásvonalat úgy, hogy az  $\alpha_{12}$  és  $\alpha_3$  hatásvonalak  $B$  metszéspontján át az  $\vec{F}$  vektorral párhuzamos egyenest rajzolunk be. Az  $\alpha_{cr}$  hatásvonal egyben az erőrendszer centrális egyenese. A részeredő sokszög szerkesztéssel tehát meg lehet határozni egy szétszórt síkbeli erőrendszer  $\vec{F}$  eredő vektorát és ennek  $\alpha_{cr}$  hatásvonalát, ami egyben az erőrendszer centrális egyenese.

### 3.7.1.2. Kötélsokszög szerkesztés

A kötélsokszög szerkesztést olyan esetekben szokás alkalmazni, amikor a síkbeli erőrendszert alkotó erők hatásvonalai "közel párhuzamosak", vagy párhuzamosak. A "közel párhuzamos" egyenesek által bezárt szög igen kicsi, ami azt eredményezi, hogy metszéspontjuk szerkesztéssel csak pontatlanul határozható meg és esetleg nem is esik a szerkesztéshez rendelkezésre álló területre (pápirlapra). A párhuzamos hatásvonalaknak pedig nincs is metszéspontja. Ezek a problémák kötélsokszög szerkesztéssel megkerülhetők.

A szerkesztést a 3.17 ábrán látható három erőből álló síkbeli erőrendszerre mutatjuk be. A szerkesztés alapjául itt is az erőrendszer eredő erővektorának értelmezése szolgál:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Vegyünk fel egy két erőből álló, az eredetivel azonos síkba eső erőrendszert:

$$\vec{F}_0, -\vec{F}_0.$$

Az erők  $\alpha_0$  hatásvonalának azonosnak kell lennie, de az  $\alpha_0$  hatásvonal helye és az  $\vec{F}_0$  erővektor nagysága és iránya tetszőleges.

Ezt az egyensúlyi erőrendszert az eredeti három erőből álló erőrendszerhez hozzáadva sem az eredő erővektor, sem a centrális egyenes nem fog megváltozni.

A hozzáadást az alábbi sorrendben végezzük el:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 - \vec{F}_0. \quad (3.37)$$

Az így kapott erőrendszerre már elvégezhető a részeredő sokszög szerkesztés:

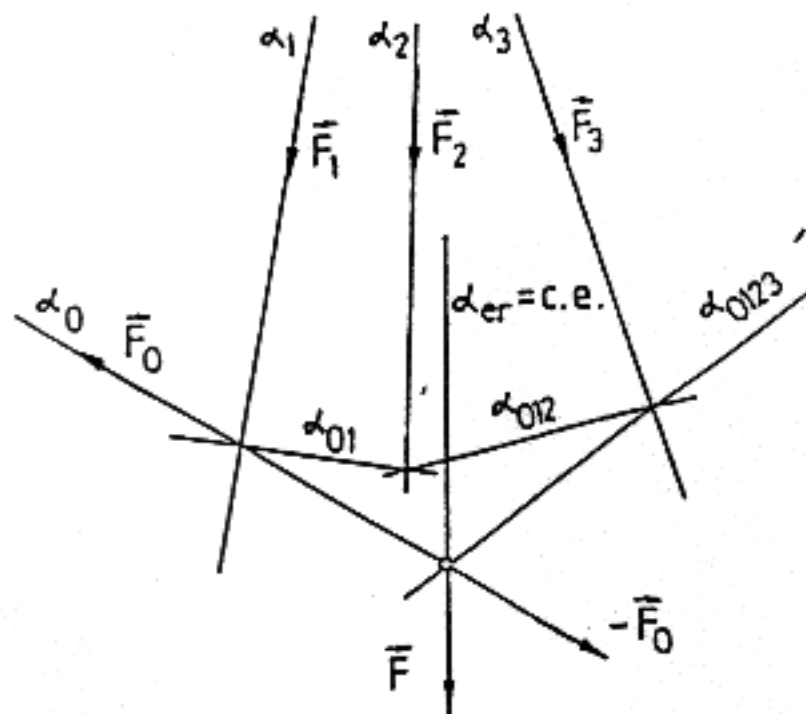
$$\vec{F} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 - \vec{F}_0 = \vec{F}_{012} + \vec{F}_3 - \vec{F}_0 = \vec{F}_{0123} - \vec{F}_0 = \vec{F}_{123}.$$

A szerkesztés első lépésében vegyünk fel a helyzetábrában egy tetszőleges  $\alpha_0$  hatásvonalat és az erőábrában egy tetszőleges nagyságú, de az  $\alpha_0$  hatásvonallal párhuzamos irányú  $\vec{F}_0$  erővektort. Ezután végezzük el a 3.7.1.1 fejezetben leírt módon a részeredő sokszög szerkesztést (3.17 ábra). A szerkesztés eredményeként az erőábrában megkapjuk az erőrendszer  $\vec{F}$  eredő erővektorát. Az erőrendszer centrális egyenes a helyzetábrán látható.

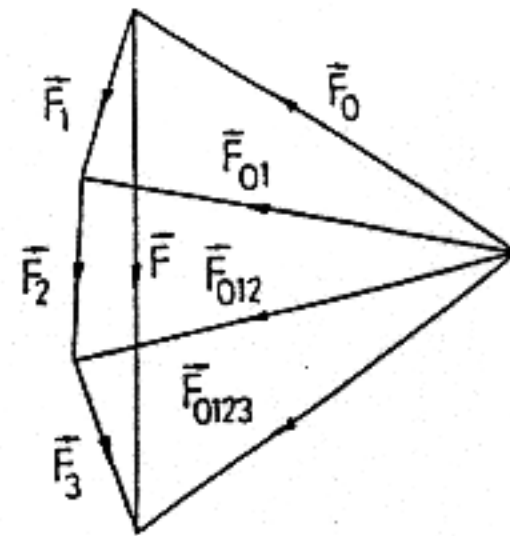
A centrális egyenes, ami azonos az  $\vec{F}$  eredő erő  $\alpha_{cr}$  hatásvonalával, átmegy az  $\alpha_0$  és  $\alpha_{0123}$  hatásvonalak metszéspontján és párhuzamos az  $\vec{F}$  eredő erő vektorábrából ismert irányával.

A szerkesztés elnevezése onnan származik, hogy az  $\alpha_0, \alpha_{01}, \alpha_{012}, \alpha_{0123}$  egyenesek által alkotott sokszög alakja megegyezik a koncentrált erőkkel terhelt súlytalan kötél alakjával.

Helyzetábra  
N (mm/mm)



Erőábra  
N (N/mm)



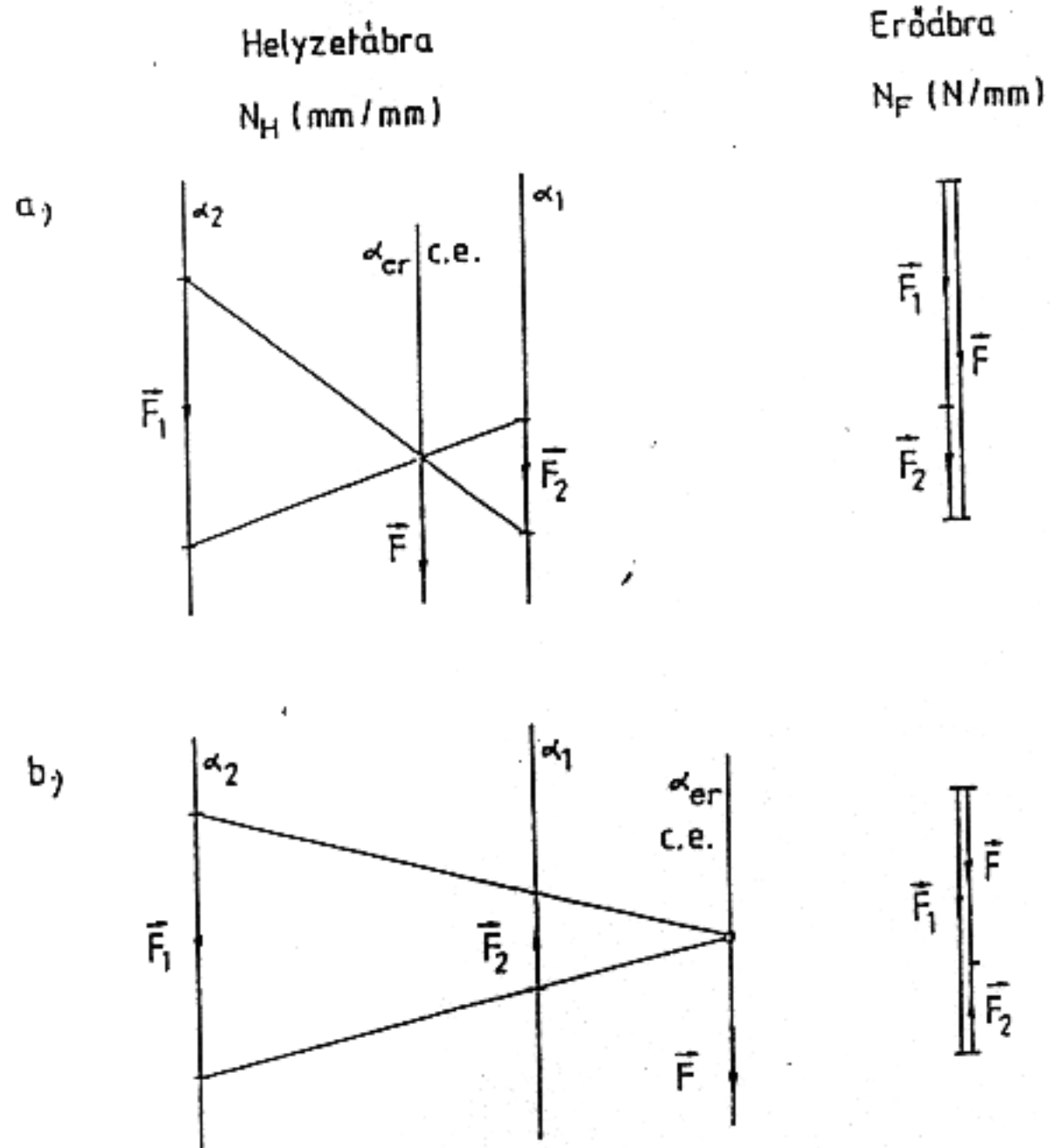
3.17 ábra

### 3.7.2. Párhuzamos síkbeli erőrendszer

Ha a síkbeli párhuzamos erőrendszer *kettőnél több erőből áll*, akkor mindig az előző pontban leírt kötélsokszög szerkesztést alkalmazzuk.

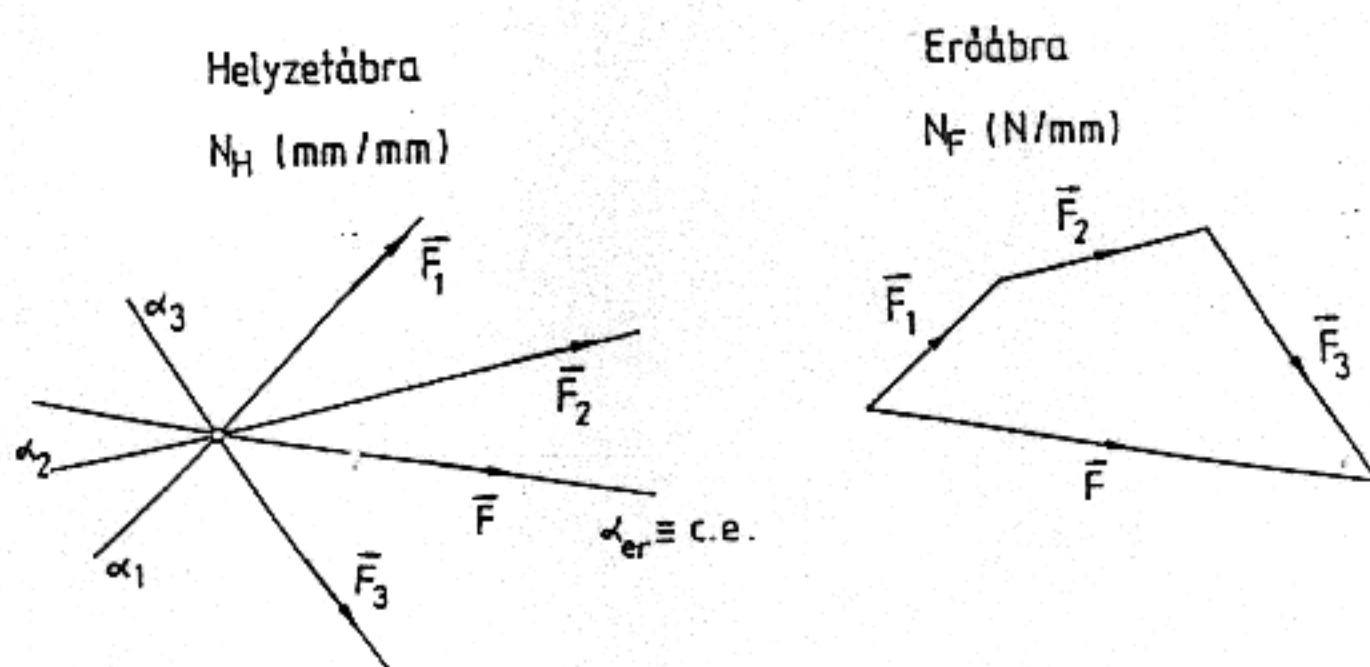
Ha a síkbeli párhuzamos erőrendszer *két erőből áll*, akkor is használható a kötélsokszög szerkesztés, de itt egy másik egyszerű szerkesztő eljárás is alkalmazható.

A szerkesztést a 3.18.a ábra egyirányú erők esetére, a 3.18.b ábra pedig ellentétes irányú erőkre mutatja be. Az erőábrában az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erőket a szokásos módon vektoriálisan összegezzük. A helyzetábrában az  $\alpha_2$  hatásvonalra felmérjük az  $\vec{F}_1$  erőt, az  $\alpha_1$  hatásvonalra pedig az  $\vec{F}_2$  erőt. Ezután az  $\vec{F}_1$  kezdőpontját összekötjük az  $\vec{F}_2$  végpontjával és fordítva. Az így kapott egyenesek metszéspontja adja meg a centrális egyenes, azaz az eredő hatásvonalának helyét.



3.18 ábra

### 3.7.3. Közös ponton támadó síkbeli erőrendszer



3.19 ábra



Az erőrendszer  $\vec{F}$  eredő erővektora és centrális egyenese ebben az esetben is a *részeredő sokszög szerkesztéssel* határozható meg. Ez a részeredő sokszög szerkesztés annyiban speciális, hogy valamennyi erő, részeredő erő és az  $\vec{F}$  eredő erő hatásvonala is egy pontban metszi egymást. A 3.19 ábra három erőből álló síkbeli közös ponton támadó erőrendszerre mutatja be a szerkesztést.



### 3.8. Helyhez kötött megoszló vektorrendszerek

Az eddig vizsgált vektorrendszerek vektorai egymástól különálló, diszkrét pontokban támadtak. Ezeket a vektorokat koncentrált vektoroknak nevezzük.

A valóságban azonban találhatók olyan vektorrendszerek is melyekre jellemző, hogy nem diszkrét pontokban támadnak, hanem pontok sokaságán mely adott esetben vonal, felület, térfogat lehet. A következőkben csak a vonalmentén megoszló vektorrendszerekkel foglalkozunk.

#### 1. Vonalmentén folytonosan megoszló párhuzamos vektorrendszer

A vonalmentén megoszló vektorrendszerek az  $\vec{f}(s)$  sűrűségvektorral jellemezhetők (1.15. ábra). ha a  $g$  görbe  $ds$  hosszúságú íveleméhez  $d\vec{F}$

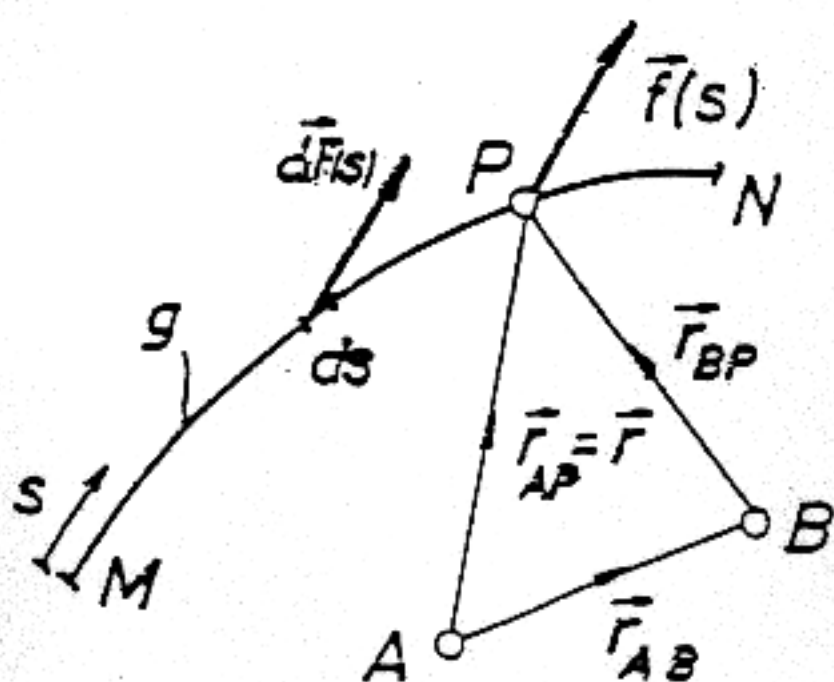
vektort kötjük, akkor az  $\vec{f}(s) = \frac{d\vec{F}}{ds}$  módon értelmezett vektort sűrűségvektornak nevezzük.

Ha a sűrűségvektor a vonal minden egyes pontjában egy adott  $\vec{e}$  vektorral párhuzamos, vagyis

$$\vec{f}(s) = f(s) \vec{e}$$

párhuzamos megoszló vektorrendszer-ről beszélünk.

Legyen  $MN$  valamely mérhető ívhosszuságú ( $l$  hosszúságú) térgörbe (1.15. ábra), amelynek pontjaiban az integrálható  $\vec{f} = \vec{f}(s)$  sűrűségvektorral jellemzett megoszló vektorrendszer támad.



1.15. ábra

$$\vec{M}_A = \int_0^{\ell} (\vec{r} \times \vec{f}) ds \quad (1.17)$$

a tetszőlegesen választott A pontra számított nyomatéka, ha a görbének az A pontra vonatkoztatva  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  az egyenlete.

Két különböző A és B pontra számított nyomaték között a következő összefüggés írható fel:

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= \int_0^{\ell} (\vec{r}_{BP} \times \vec{f}) ds = \int_0^{\ell} [(\vec{r} - \vec{r}_{AB}) \times \vec{f}] ds = \\ &= \int_0^{\ell} (\vec{r} \times \vec{f}) ds - (\vec{r}_{AB} \times \int_0^{\ell} \vec{f} ds) = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB} \end{aligned}$$

ahol  $\vec{F} = \int_0^{\ell} \vec{f} ds$  a vektorrendszer eredője.

Látható, hasonló összefüggést kaptunk mint a koncentrált vektor esetén.

koncent-

A koncentrált vektorokhoz hasonlóan itt is értelmezhető a  $[\vec{F}(A); \vec{M}_A]$  eredő vektorkettős adott A pontban.

Az eredő vektorkettős alapján a megoszló vektorrendszerek a koncentrált vektorokból álló vektorrendszerekhez hasonlóan osztályozhatók.

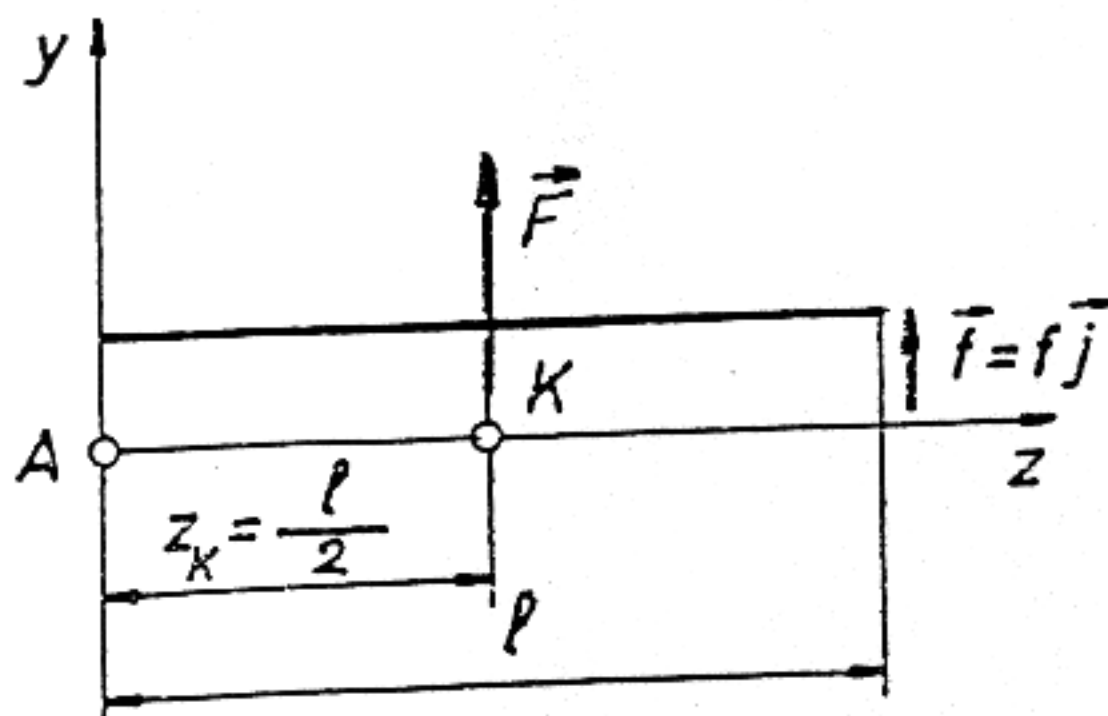
Határozzuk meg a következő néhány megoszló vektorrendszer K középpontját és redukáljuk a vektorrendszert ebbe a pontba.

a) A K középpontba redukált eredő vektorkettős párhuzamos vektorkettős esetén  $[\vec{F}; \vec{0}]$  alakú, vagyis  $\vec{M}_K = \vec{0}$  úgy, hogy a vektorrendszer eredője a K ponton támadó  $\vec{F}$  vektor.

Egyébként, ha  $\vec{f} = f \vec{j} = \text{állandó}$  (1.16. ábra), akkor

$$\vec{F} = \int_0^{\ell} \vec{f} dz = \vec{f} \int_0^{\ell} dz = \vec{f} \ell = f \ell \vec{j}$$

$$\vec{M}_A = \int_0^{\ell} (\vec{r} \times \vec{f}) dz = f(\vec{k} \times \vec{j}) \int_0^{\ell} z dz = - \frac{f \ell^2}{2} \vec{i}.$$



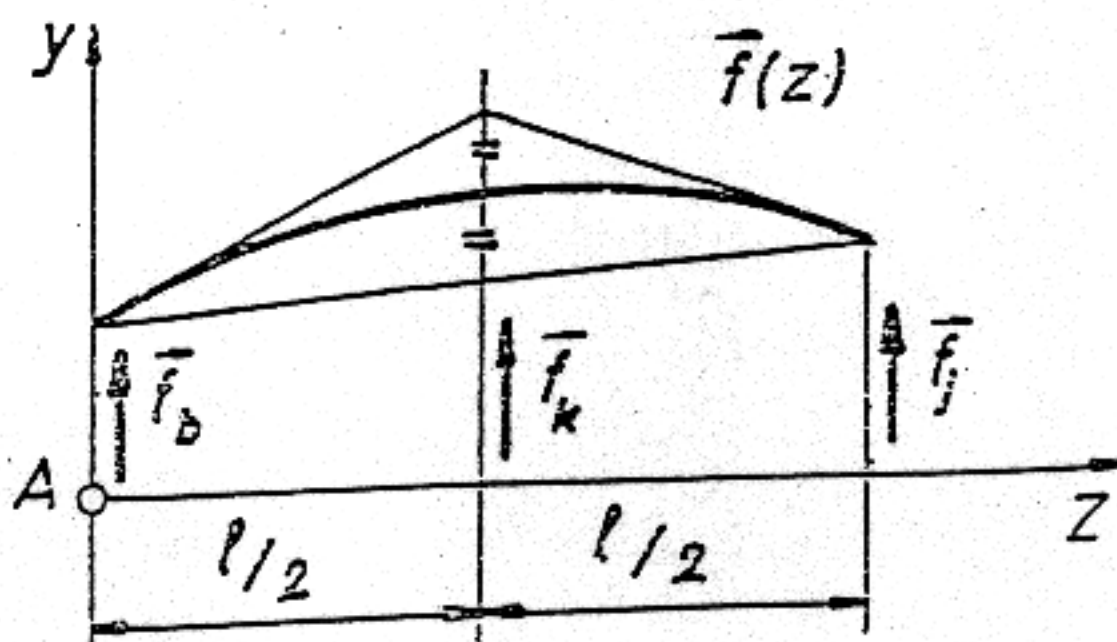
1.16. ábra

Mivel az eredő egyenértékű a megoszló vektorrendszerrel

$$\vec{M}_A = \vec{r}_K \times \vec{F} = z_K f l (\vec{k} \times \vec{j}) = -z_K f l \vec{i}$$

amiből  $z_K = \frac{l}{2}$  egyenlőség következik.

b) Az  $\vec{f}(z)$  legfeljebb másodfokú racionális egész függvény, ahol  $\vec{f}_b = f(z=0) \vec{j}$ ;  $\vec{f}_k = f(z = \frac{l}{2}) \vec{j}$  és  $\vec{f}_j = f(z=l) \vec{j}$  (1.17. ábra).



1.17. ábra

A vektorrendszer eredője

$$\vec{F} = \int_0^l f(z) \vec{j} dz .$$

Ez az integrál kiszámítható a Simpson-szabály alkalmazásával is:

$$\vec{F} = \frac{\ell}{6} (f_b + 4 f_k + f_j) \vec{j}.$$

Az A pontra számított nyomaték

$$\vec{M}_A = \int_0^{\ell} (\vec{r} \times \vec{f}) dz = \int_0^{\ell} z \vec{k} \times f(z) \vec{j} dz = (\vec{k} \times \vec{j}) \int_0^{\ell} z f(z) dz,$$

illetve

$$\vec{M}_A = \vec{r}_K \times \vec{F} = z_K \vec{k} \times \int_0^{\ell} f(z) \vec{j} dz = (\vec{k} \times \vec{j}) z_K \int_0^{\ell} f(z) dz,$$

amiből

$$z_K = \frac{\int_0^{\ell} z f(z) dz}{\int_0^{\ell} f(z) dz} = \frac{1}{F} \int_0^{\ell} z f(z) dz$$

adódik.

Legyen  $h(z) = z f(z)$ , így

$$z_K = \frac{1}{F} \int_0^{\ell} h(z) dz = \frac{\ell}{6F} (h_b + 4 h_k + h_j);$$

ahol

$$h_b = 0; \quad h_k = \frac{\ell}{2} f_k; \quad h_j = \ell f_j.$$

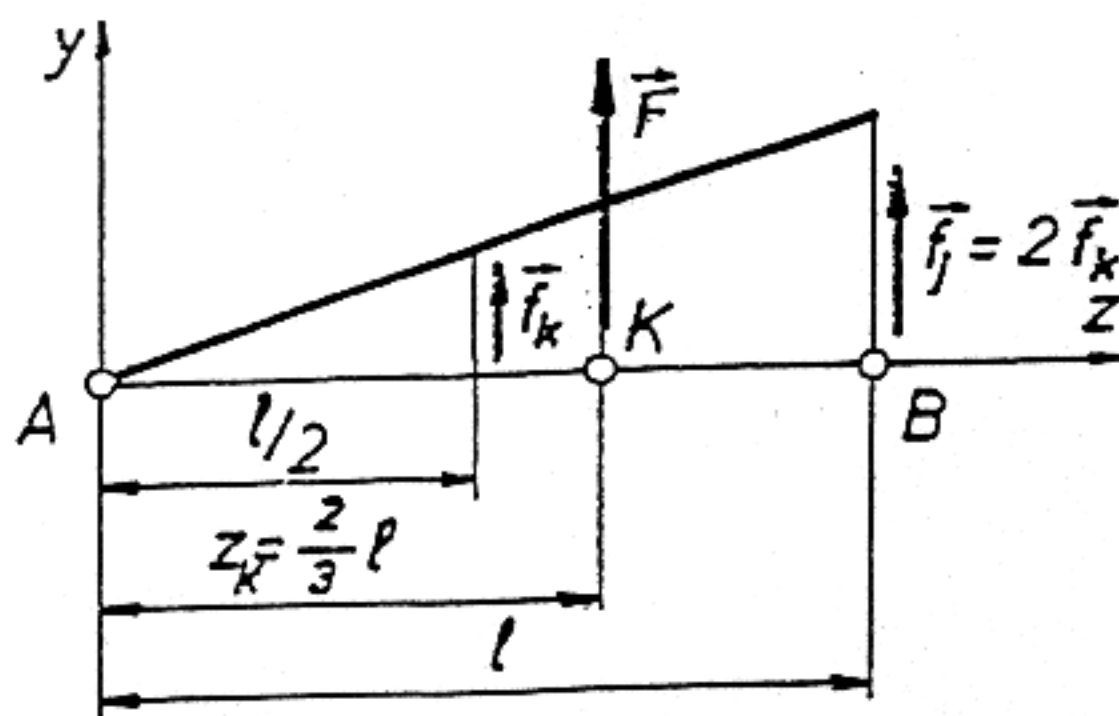
Ezek figyelembevételével

$$z_K = \frac{\ell^2}{6F} (2 f_k + f_j) = \frac{\ell (2 f_k + f_j)}{f_b + 4 f_k + f_j}.$$

a) Abban a különleges esetben, amikor  $f$  ábrája háromszögalakú (1.18. ábra) vagyis  $f_b = 0; \quad f_j = 2 f_k$ ,

$$z_K = \frac{2}{3} \ell.$$





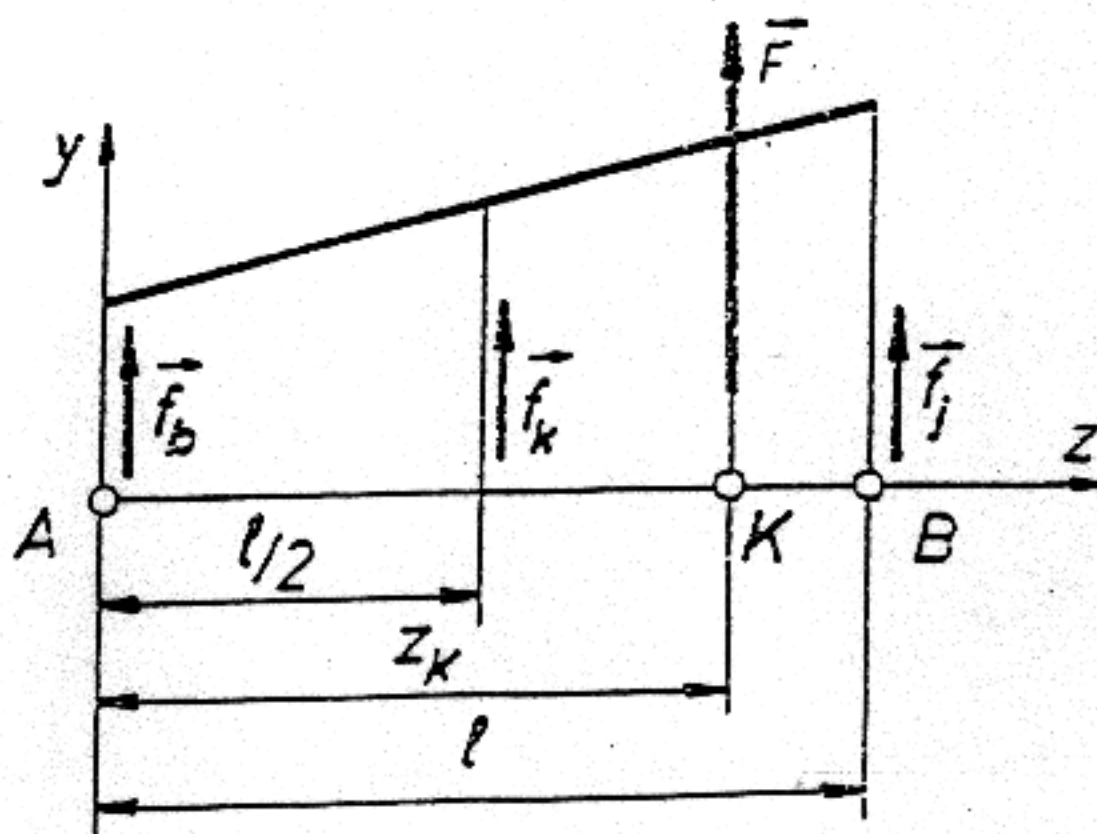
1.18. ábra

b) Az 1.19. ábrán vázolt trapéz alakú megoszló terhelés esetében

$$2 f_k = f_b + f_j .$$

Ennek megfelelően

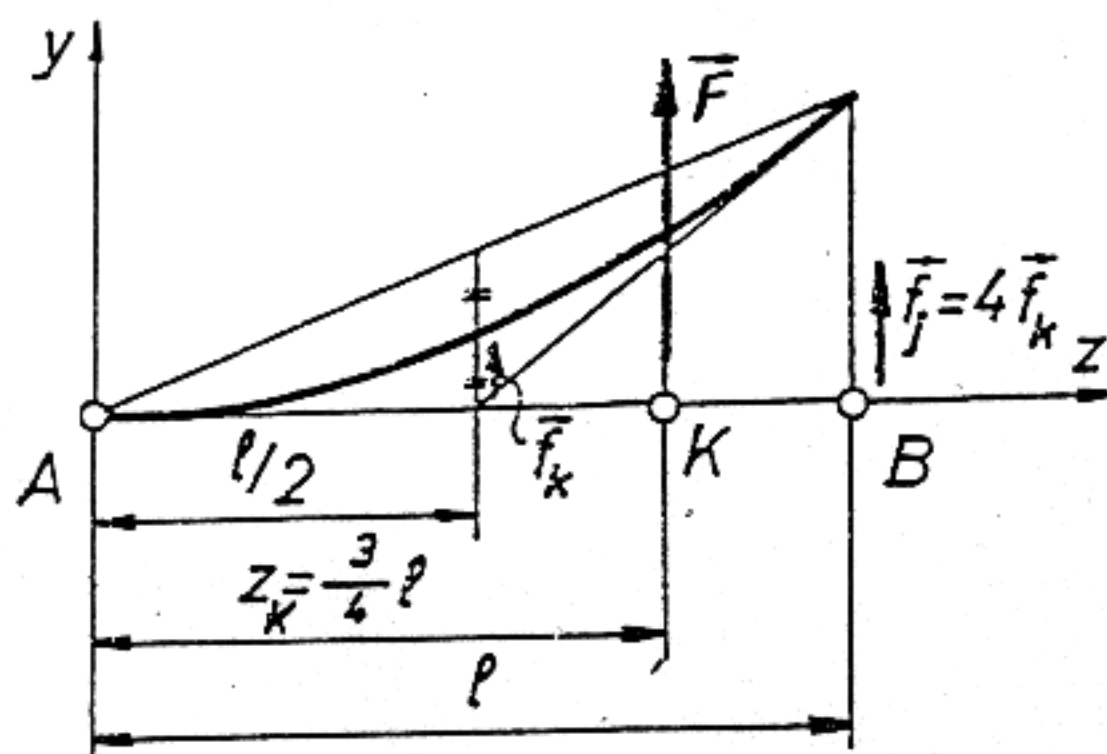
$$z_K = \frac{l}{3} \frac{f_b + 2f_j}{f_b + f_j} .$$



1.19. ábra

c) Az 1.20. ábrán vázolt parabola alakú megoszló vektorrendszer olyan másodfoku függvény határol, amely a  $z$  tengelyt az  $A$  pontban érinti. Ezért  $f_b = 0$ ;  $\frac{4}{3} f_k = f_j$  és

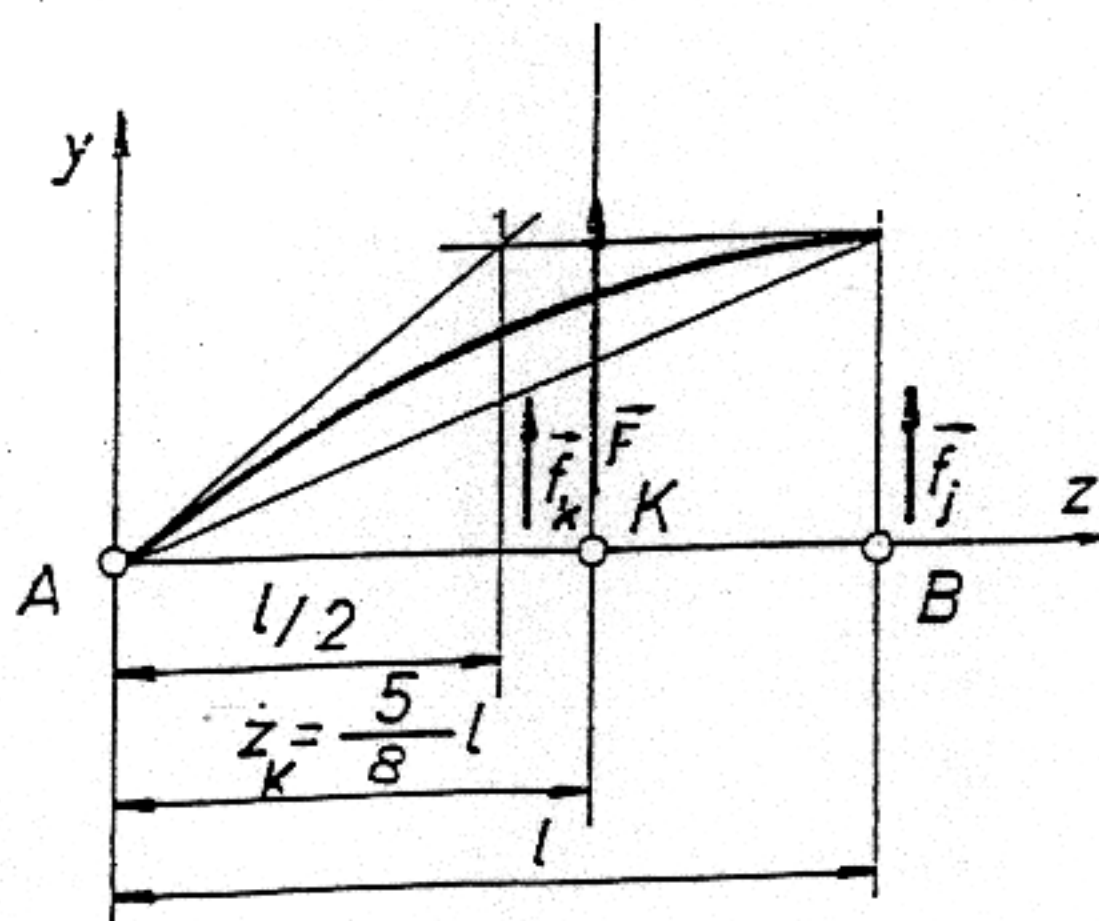
$$z_K = \frac{3}{4} l .$$



1.20. ábra

d) Az 1.21. ábrán parabola alakú megoszló terhelés látható. Ennek a másodfokú parabolának a  $z = l$  helyen vízszintes az érintője.  $f_B = 0$ ;  $4 f_k = 3 f_j$ . Ebben az esetben

$$z_K = \frac{5}{8} l.$$



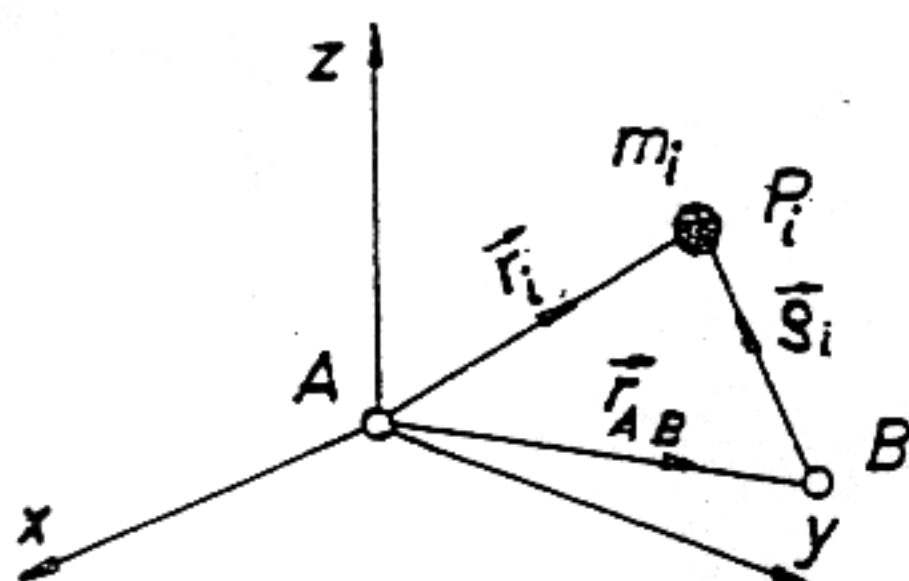
1.21. ábra

### 3.9. Statikai nyomaték. Súlypont. Tömegközéppont

Értelmezés szerint az  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tömegből álló tömegpont rendszer  $A$  pontra számított elsőrendű vagy másnéven statikai nyomaték alatt

$$\vec{S}_A = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (1.18)$$

mennyiséget értjük (1.22. ábra).



1.22. ábra

Az  $A$  pontra számított statikai nyomaték felírható az  $A$  pont tartozó három, egymásra kölcsönösen merőleges síkra számított, és a közösképp értelmezett

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n z_i m_i \quad (1.19)$$

$$S_{yz} = \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad (1.20)$$

$$S_{xz} = \sum_{i=1}^n y_i m_i \quad (1.21)$$

$xy$ ,  $yz$  és  $xz$  síkra számított statikai nyomatékok segítségével.

$$\vec{S}_A = S_{yz} \vec{i} + S_{xz} \vec{j} + S_{xy} \vec{k}. \quad (1.22)$$

Az állítás helyességéről meggyőződhetünk az (1.18) kifejezés  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  egységvektorokkal történő skaláris szorzás útján.  
Két különböző pl.  $A$  és  $B$  pontra számított

$$\vec{S}_A = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \text{és} \quad \vec{S}_B = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i$$

statikai nyomaték között a következő összefüggés írható fel:

$$\begin{aligned}\vec{S}_B &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{AB}) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - \vec{r}_{AB} \sum_{i=1}^n m_i = \vec{S}_A - m \vec{r}_{AB}\end{aligned}$$

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A - m \vec{r}_{AB} \quad (1.23)$$

ahol  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ .

A térnek azt a  $T$  pontját, melyre számítva az elsőrendű vagy statikai nyomatékokat zérus, tehát

$$\vec{S}_T = \vec{0} \quad (1.24)$$

tömegközéppontnak nevezzük.

Mivel a tömegközéppontra számítva fennáll, hogy

$$\vec{S}_T = \vec{0} = \vec{S}_A - m \vec{r}_{AT}$$

ezért

$$\vec{r}_{AT} = \frac{\vec{S}_A}{m} \quad (1.25)$$

összefüggés megadja a  $T$  tömegközéppont helyzetét az  $A$  ponthoz viszonyítva.

Más úton is eljuthatunk ehhez a kifejezéshez. A tömegpontrendszerre működő súlyerőrendszer jó közelítéssel párhuzamos vektorrendszernek fogható fel.

A párhuzamos súlyerőrendszer középpontját súlypontnak nevezzük.

Szokásos jele  $S$ , helyvektora  $\vec{r}_S$ . Ha a vizsgált súlyerőrendszer

$\vec{G}_i = m_i \vec{g}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) vektorból áll, akkor a 3.6.2.1. pontban leírtak alapján tehát

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (1.26)$$

összefüggést kapjuk.



Látható, hogy a súlyerőrendszer középpontja, azaz a súlypont és a tömegpontrendszer középpontja a tömegközéppont egybeesik.

A súlypont vagy a vele egybeeső tömegközéppont ismeretében a

$$\vec{S}_S = \vec{0} = \vec{S}_A - m \vec{r}_{AS}$$

kifejezésből

$$\vec{S}_A = m \vec{r}_{AS}$$

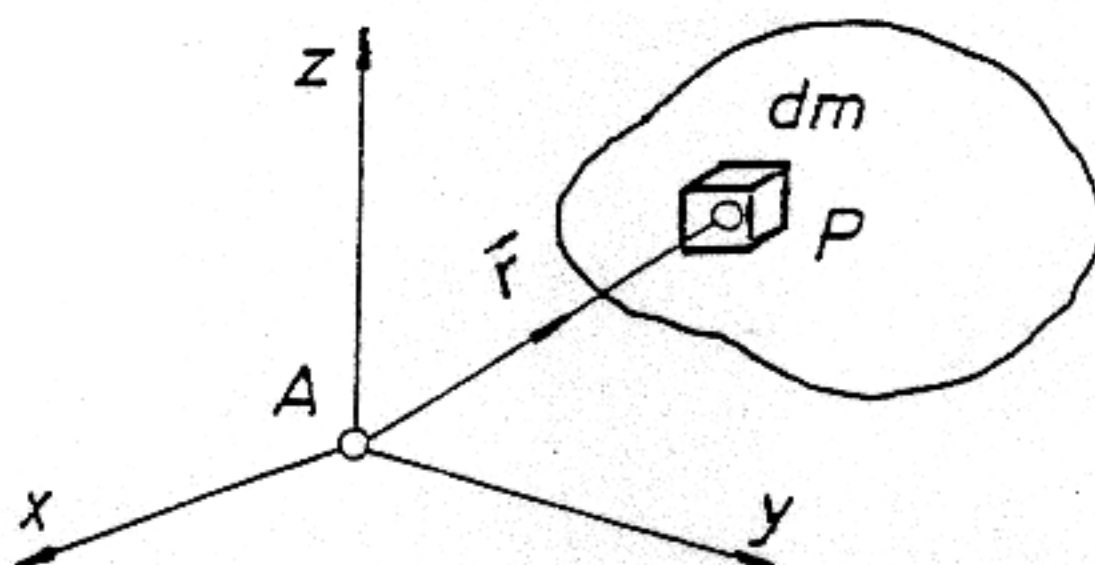
adódik, ami azt mutatja, hogy a tömegpontrendszer statikai nyomatékát, a súlypontba koncentrált egyetlen  $m$  tömegpont statikai nyomatékaként lehet számítani, ahol

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Anyagi test esetén legyen  $\vec{r}$  a  $P$  pontban elhelyezkedő tömeg-elem helyvektora,  $\rho$  a homogén test sűrűsége. Az elemi  $dV$  térfogatú résznek

$$dm = \rho dV$$

az elemi tömege (1.23. ábra).



1.23. ábra

Az elemi tömeg statikai nyomatéka

$$d\vec{S}_A = \vec{r} dm$$

ennek segítségével a test  $A$  pontra számított statikai nyomatéka

$$\vec{S}_A = \int_{(m)} d\vec{S}_A = \int_{(m)} \vec{r} dm = \int_{(m)} \vec{r} \rho dV .$$

a) A homogén anyagi test esetén  $\rho = \text{áll.}$ , így a súlypont helyvektorára

$$\vec{r}_{AS} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \vec{r} dV \quad (1.27)$$

kifejezés, illetve az egységvektorokkal történő skaláris szorzás után ebből származó skaláris kifejezések

$$x_{AS} = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV ; \quad y_{AS} = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV ;$$

$$z_{AS} = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV$$

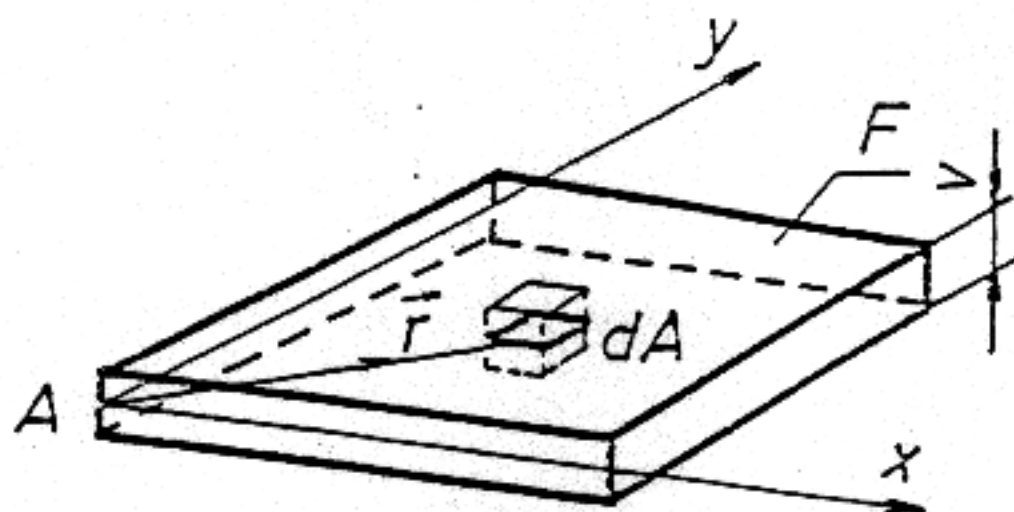
adódnak.

b) Párhuzamos síkokkal határolt lemez alakú testek esetén az elemi térfogat

$$dV = b dA$$

alakban írható fel. (1.24. ábra).

Ebben az esetben a súlypont helyvektorára



1.24. ábra

$$\vec{r}_{AS} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \vec{r} dA \quad (1.28)$$

illetve az egységvektorokkal történt skaláris szorzás után

$$x_{AS} = \frac{1}{A} \int_{(A)} x dA ; \quad y_{AS} = \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA$$

skaláris egyenletek segítségével számíthatjuk a súlypont koordinátáit.

c) Az állandó keresztmetszetű fonal vagy drót alakú testeknél (1.25. ábra) a test elemi részének térfogata

$$dV = A ds$$

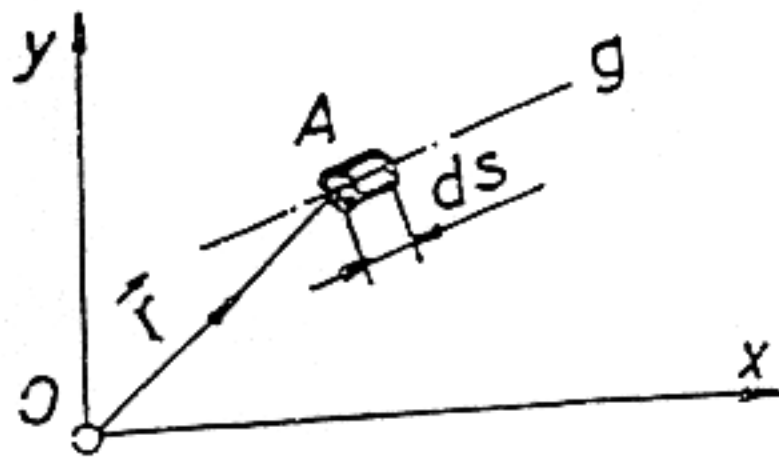
felhasználásával a test súlypontjának helyvektorára

$$\vec{r}_{OS} = \frac{A \int_{(g)} \vec{r} ds}{A \int_{(g)} ds} = \frac{1}{\ell} \int_{(g)} \vec{r} ds \quad (1.29)$$

adódik, melynek skaláris koordinátái az egységvektorokkal történt skaláris szorzás után

$$x_{OS} = \frac{1}{\ell} \int_{(g)} x ds \quad \text{és} \quad y_{OS} = \frac{1}{\ell} \int_{(g)} y ds$$

módon számítható.



1.25. ábra

## 4. ANYAGI PONTOKBÓL, MEREV TESTEKBŐL ÁLLÓ RENDSZEREK EGYENSÚLYA

### 4.1. A statika főtétele

A statika főtétele anyagi pontokból, merev testekből álló rendszerek *tartós nyugalomban maradásának szükséges feltételét* adja meg. Tartós nyugalomban lévőnek tekintünk egy rendszert, vagy szerkezetet, ha az a rá működő külső hatásokra helyzetét hosszú időn át nem változtatja meg. A statika főtételenek alapját a *Newton törvények* képezik.

**Főtétel:** *Anyagi pontokból, vagy merev testekből álló rendszer csak akkor lehet tartós nyugalomban, ha a rá ható külső erőrendszer egyensúlyi.*

A *külső erőrendszer* a vizsgált anyagi pontokból, vagy merev testekből álló rendszerhez nem tartozó testek rendszerre gyakorolt hatását tartalmazza. A külső erőrendszer két részre bontható:

- *megadott terhelésekre* (ismert, erőrendszer) és
- *támasztó-erőrendszerre* (ismeretlen erőrendszer).

*Megtámasztásnak, vagy támasztásnak* tekintjük azokat a vizsgált rendszerhez nem tartozó testeket, amelyek a rendszer helyváltoztatását (mozgását) akadályozzák és amelyekről a vizsgált rendszerre átvihető erők nem ismertek.

A *belső erőrendszer* a vizsgált rendszert alkotó testek közötti erőhatásokat tartalmazza.

A statika főtételenek kielégülése a tartós nyugalom szükséges, de nem elégséges feltétele. Anyagi pontokból, merev testekből álló rendszer *tartós nyugalomban maradásának elégséges feltétele olyan megtámasztások alkalmazása, amelyek megakadályozzák a rendszer (szerkezet) helyváltoztatását.*

### 4.2. A statika feladatának általános megfogalmazása

A *statika feladata* anyagi pontokból, illetve merev testekből álló rendszerek esetén

- a *támasztóerők* és
- a *belső erők*

meghatározása statikai egyenletek felhasználásával.

*Statikai egyenleteknek* az erőrendszerek egyensúlyi kritériumainak skalár egyenleteit nevezzük. Szokás ezeket a skalár egyenleteket *egyensúlyi egyenleteknek* is nevezni. A kitűzött statikai feladat megoldására merev testenként térbeli esetben (térbeli erőrendszerek) általában hat, síkbeli esetben (síkbeli erőrendszerek) pedig általában három statikai egyenlet áll rendelkezésünkre.

*Statikai ismeretleneknek* tekintjük

- a *támasztóerők skaláris koordinátáit* és
- a *belső erők skaláris koordinátáit.*



A vizsgált rendszer (szerkezet) *statikailag határozott* abban az esetben, ha a rendszerre felírható statikai egyenletek száma *megegyezik* a rendszer statikai ismeretleneinek számával.

*Statikailag határozatlan* a rendszer (szerkezet) akkor, ha a rendszerre felírható statikai egyenletek száma *kisebb* a rendszer statikai ismeretleneinek számánál.

*Statikailag túlhatározott, vagy más szóval labilis* a rendszer (szerkezet), ha a rendszerre felírható statikai egyenletek száma *nagyobb* a rendszer statikai ismeretleneinek számánál. Ebben az esetben a rendszer csak speciális terhelés esetén lehet egyensúlyban.

A statika keretében kizárólag statikailag határozott szerkezetek feladatainak megoldása lehetséges.

#### 4.3. A rendszer megtámasztása, a Coulomb'-féle súrlódási törvény

A rendszer (szerkezet) megtámasztása a rendszerhez nem tartozó testek segítségével, legtöbbször felületi érintkezéssel valósítható meg. *Az érintkező felületek a valóságban érdesek*, köztük súrlódás lép fel. Ez azt jelenti, hogy az érintkező felületek mentén az egyik testről a másikra, a felületekre merőleges és a felületek érintősíkjába eső erők is átadódhatnak. Ha az érintősíkjába eső tangenciális erők a felületre merőleges (normális) erőkhöz képest a külső terhelésektől függetlenül mindig elhanyagolhatóan kicsik, sima felületről beszélünk. A *sima felület* tehát a valóságos érdes felület egy lehetséges mechanikai modellje.

Merev testek esetén az érintkezés a felületek geometriájától függően történhet:

- felület mentén (pl. sík-sík)
- vonal mentén (pl. henger-sík) és
- pontban (pl. gömb-sík).

A felületmenti érintkezés esetén felület mentén megoszló erőrendszer a vonalmenti érintkezés esetén vonal mentén megoszló erőrendszer, a pontbeli érintkezés esetén pedig koncentrált erők adódnak át az egyik testről a másikra.

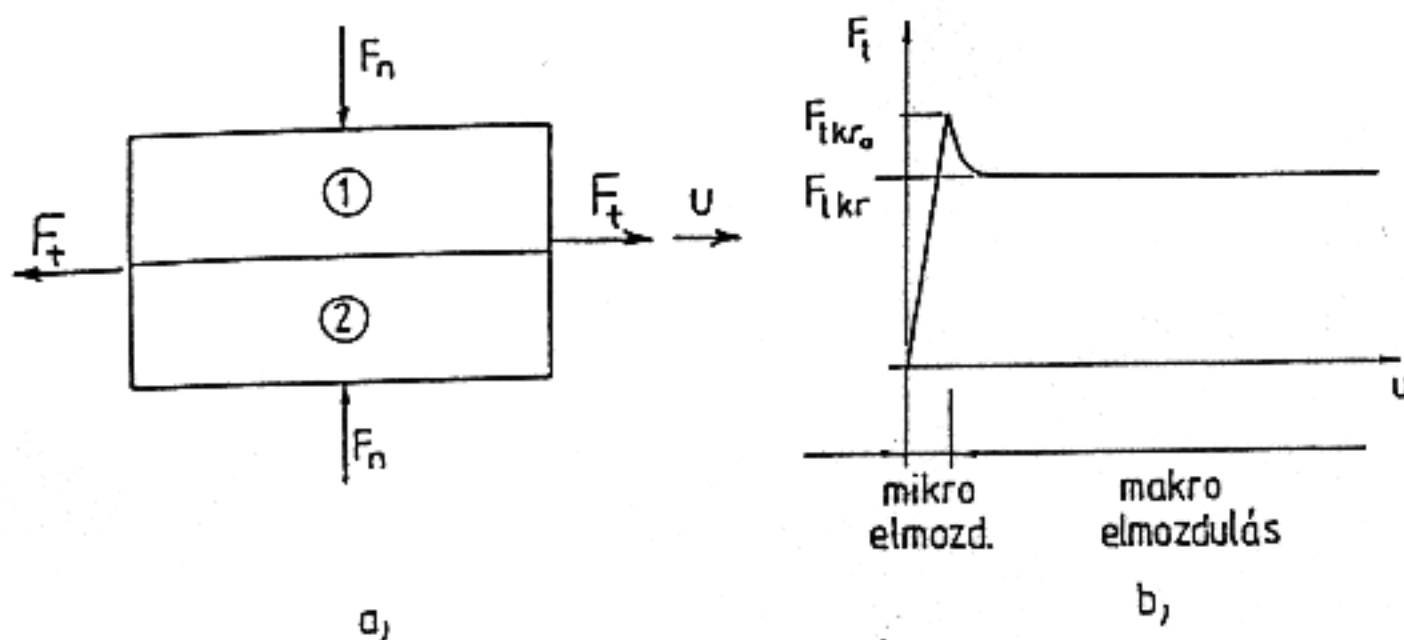
*A statikai egyenletekből csak koncentrált erőket lehet meghatározni*, ezért a felületmenti és vonalmenti érintkezés esetén fellépő megoszló erőrendszert az eredőjével kell helyettesíteni.

A *Coulomb-féle súrlódási törvény* az alábbiakban ismertetésre kerülő kísérlet eredményeinek felhasználásával fogalmazható meg.

Nyomjuk össze a 4.1.a ábrán látható 1 és 2 jelű testet állandó  $F_n$  erővel. Az  $F_n$  erő  $n$  indexe arra utal, hogy az erő az érintkezési felületre (síkra) merőleges (normális). Működtessünk növekvő  $F_t$  erőket a rendszerre az ábrán látható módon. Az  $F_t$  erő  $t$  indexe azt jelzi, hogy az erő az érintkezési felület érintősíkjával párhuzamos. Az  $u$  az 1 test 2 teshez viszonyított relatív elmozdulását jelöli. A növekvő  $F_t$  erő hatására az 1 test a 2 testhez képest a 4.1.b ábrának megfelelően mozdul el. Kezdetben a két test között szemmel nem látható, ún. "mikro elmozdulások" lépnek fel egészen addig, amíg az  $F_t$  erő el nem éri az  $F_{tkr}$  kritikus értéket. Az  $F_{tkr}$  elérése után már szemmel is érzékelhető, ún. "makro elmozdulások" következnek be,

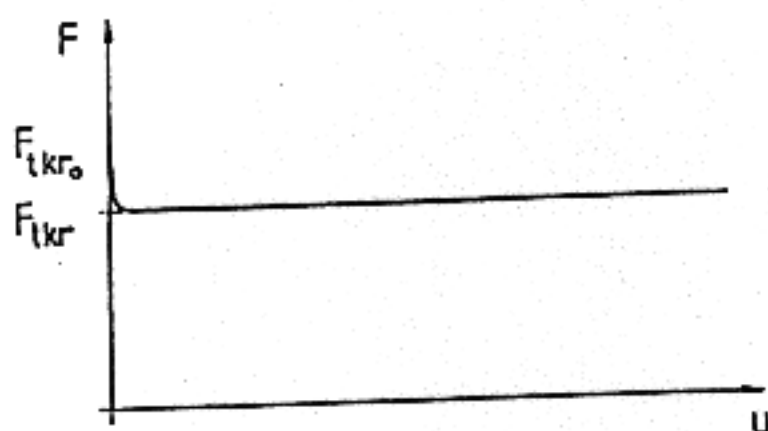
\* Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) francia hadmérnök

amelyek fenntartásához már egy az  $F_{tkr_0}$ -nál kisebb  $F_{tkr}$  erő is elegendő. A mérnöki feladatok többségénél a makro elmozdulások mellett a mikro elmozdulások elhanyagolhatóan kicsik.



4.1 ábra

A Coulomb-féle surlódási törvény ezt az elhanyagolást téve fogalmazza meg a vizsgált testek közötti tangenciális irányú relatív elmozdulások bekövetkezésének feltételét.



4.2 ábra

#### Súrlódási törvény:

A 4.1.a ábrán látható két test között elvileg végtelen nagy tangenciális irányú relatív elmozdulások keletkezhetnek, ha az  $F_t$  elér egy  $F_{tkr_0}$  kritikus értéket (4.1.b ábra). A már beindult elmozdulások az  $F_{tkr_0}$  erőnél kisebb  $F_{tkr}$  erővel is fenntarthatók (4.2 ábra).

Az  $F_{tkr_0}$  és  $F_{tkr}$  kritikus tangenciális erők arányosak a testeket összenyomó  $F_n$  normál erővel:

$$F_{tkr_0} = \mu_0 F_n, \quad (4.1.a)$$

$$F_{tkr} = \mu F_n, \quad (4.1.b)$$

ahol  $\mu_0$  a nyugvásbeli, a  $\mu$  pedig a mozgásbeli súrlódási tényező.

Kísérleti tapasztalatok szerint a súrlódási tényezők értéke függ az érintkező felületek minőségétől.

A Coulomb-féle súrlódási törvény tehát a testek között áthatódó (koncentrált) erő normális és tangenciális összetevője közötti kapcsolatot adja meg. Ha az érintkező felületek között van relatív tangenciális elmozdulás, akkor *mozgásbeli súrlódásról* beszélünk. Ebben az esetben az erő tangenciális koordinátája mindig egyenlő a (4.1.b) egyenletben megadott kritikus értékkel:

$$F_t = \mu F_n, \quad (4.2)$$

amiből az következik, hogy az erővektor iránya ismert.

Ha az érintkező felületek között nincs relatív tangenciális elmozdulás, akkor *nyugvásbeli súrlódásról* beszélünk. *Statikai feladatoknál mindig nyugvásbeli súrlódás fordul elő.* Ebben az esetben az erő tangenciális koordinátája kisebb, vagy egyenlő mint a (4.1.a) egyenletben megadott kritikus érték:

$$F_t \leq \mu_0 F_n. \quad (4.3)$$

Az egyenlőtlenség következménye, hogy statikai feladatoknál az érdes felületeken áthatódó erő iránya legtöbbször nem ismert. A  $\mu$  mozgásbeli és  $\mu_0$  nyugvásbeli súrlódási tényező értékeire a 4.1.táblázat tartalmaz néhány tájékoztató adatot.

4.1.táblázat

| Az érintkező testek anyaga | $\mu_0$<br>nyugvásbeli súrlódási<br>tényező |               | $\mu$<br>mozgásbeli súrlódási<br>tényező |               |
|----------------------------|---------------------------------------------|---------------|------------------------------------------|---------------|
|                            | szárazon                                    | olajjal kenve | szárazon                                 | olajjal kenve |
| Acél - acél                | 0,14                                        | 0,11          | 0,10                                     | -             |
| Acél - öntöttvas           | 0,19                                        | 0,10          | 0,18                                     | -             |
| Acél - poliamid            | -                                           | -             | 0,25-0,40                                | 0,05-0,09     |
| Fa - fa                    | 0,40-0,60                                   | 0,16          | 0,20-0,40                                | 0,08          |
| Fa - fém                   | 0,60                                        | 0,11          | 0,40-0,50                                | 0,10          |
| Acél - jég                 | 0,027                                       | -             | 0,014                                    | -             |
| Gumi-aszfalt               | -                                           | -             | 0,70-0,80                                | -             |

*Száraz súrlódásról* beszélünk abban az esetben, ha az érintkező felületek között nincs kenőanyag.

A Coulomb-féle súrlódási törvény *makroszkópikus jellegű*, ami azt jelenti, hogy csak az egész érintkezési felületre (érintkező testekre) és nem az érintkezési felület egyes pontjaira nézve érvényes. A törvény szigorúan véve csak az alábbi feltételek teljesülése esetén áll fenn:

- Két, egészben véve merev test érintkezik, tehát a testekre ható erők okozta deformáció elhanyagolhatóan kicsi.



- Az érintkezés sík felület mentén történik.

#### 4.4. A súrlódási törvény általánosítása

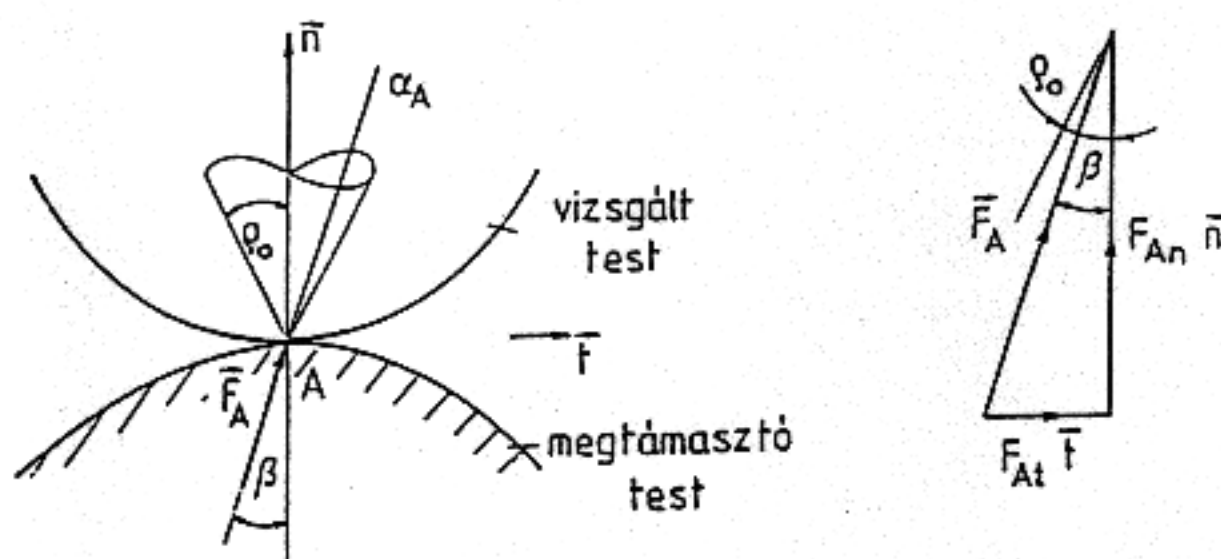
A műszaki gyakorlatban a Coulomb-féle súrlódási törvényt azokban az esetekben is elterjedten alkalmazzák mechanikai feladatok megoldására, ha az előző pontban részletezett feltételek közül a második nem teljesül. Ez azon a felismerésen (tapasztalaton) alapszik, hogy a törvény abban az esetben is *jó közelítéssel* leírja a viszonyokat, ha

- a testek közötti érintkezés pontszerű és
- az érintkezés görbült felületek mentén történik.

A következőkben a fentiek szerint általánosított Coulomb-féle súrlódási törvényt alkalmazzuk annak meghatározására, hogy az általunk vizsgált, anyagi pontokból és merev testekből álló rendszerre tartós nyugalom esetén milyen támasztóerők működhetnek.

A megtámasztó testeket mindig a koordináta-rendszerhez kötöttnek tekintjük és a továbbiakban sraffozással jelöljük.

##### a/ Pontbeli érintkezés



4.3 ábra

A 4.3 ábrán látható testek az  $A$  pontban érintkeznek. Az  $A$  pontbeli közös érintősíkhoz kötött ún. természetes koordináta-rendszer  $\bar{n}$  normális egységvektora a támasztó testből kifelé mutat,  $\bar{t}$  tangenciális egységvektor pedig a közös érintősíkba esik. A támasztó testről a rendszerre ható  $\bar{F}_A$  támasztóerő vektor  $\alpha_A$  hatásvonala átmegy az  $A$  érintkezési ponton. A nyugvásbeli súrlódási kúp  $\rho_0$ , félnyílásszögét a  $\mu_0$  nyugvásbeli súrlódási tényező határozza meg:

$$\mu_0 = \tan \rho_0. \quad (4.4)$$

*Sima érintkező felületek* ( $\mu_0 = 0$ ) esetén a rendszer (vizsgált test) tartós nyugalomban maradásának feltétele az, hogy az  $\bar{F}_A$  támasztóerő *közös érintő síkra merőleges legyen* ( $\beta = 0$ ).

$$\bar{F}_A = F_{An} \bar{n}. \quad (4.5)$$



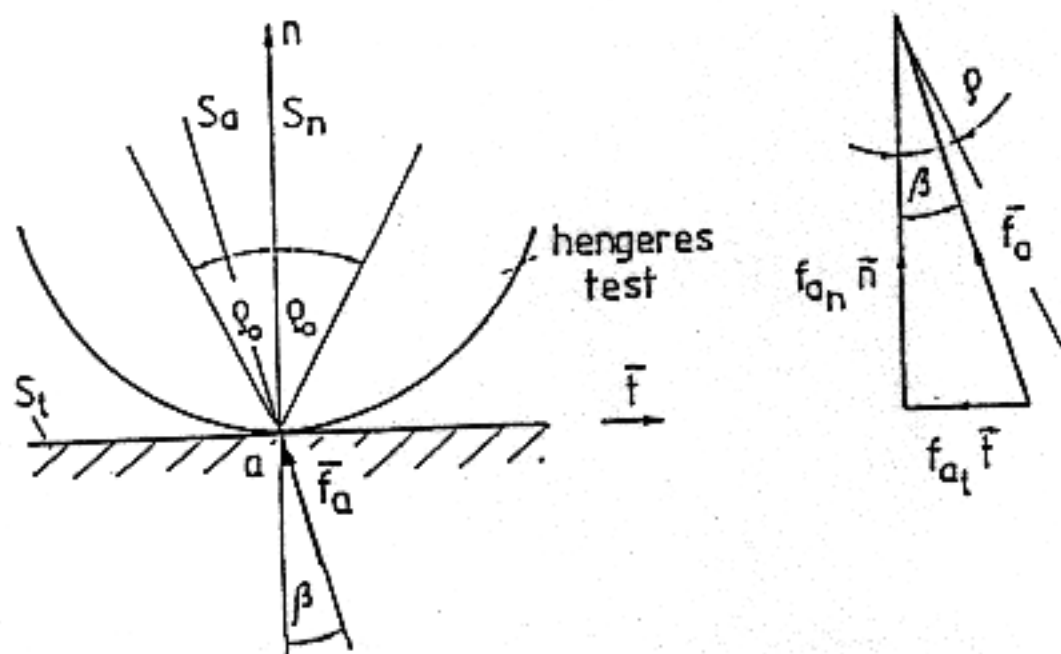
Érdes érintkező felületek ( $\mu_0 \neq 0$ ) esetén a rendszer (vizsgált test) tartós nyugalomban maradásának feltétele az, hogy az  $\vec{F}_A = F_{At}\vec{t} + F_{An}\vec{n}$  támasztóerő vektor  $\alpha_A$  hatásvonalát a nyugvásbeli súrlódási kúpon belül ( $\beta < \rho_0$ ) legyen, vagy a nyugvásbeli súrlódási kúp alkotójára ( $\beta = \rho_0$ ) essen. Ekkor a támasztóerő koordinátái között (4.3 ábra) az alábbi összefüggésnek kell fennállnia:

$$|F_{At}| \leq \mu_0 |F_{An}|. \quad (4.6)$$

#### b/ Vonalmenti érintkezés

A 4.4 ábrán látható hengeres test a rajz síkjára merőleges  $a$  egyenes mentén érintkezik az  $S_t$  támasztó síkkal. A feladathoz rendelt ú.n. természetes koordináta-rendszer  $\vec{n}$  egységvektora az  $S_t$ -re merőleges  $S_n$  síkba,  $\vec{t}$  egységvektora pedig az  $S_t$  síkba esik. A támasztó síkról a vizsgált hengeres testre az  $a$  egyenes mentén megoszló támasztóerőrendszer adódik át, amelyet az  $\vec{f}_a$  sűrűségvektor jellemez. Az  $\vec{f}_a$  sűrűségvektorok az  $S_a$  síkban helyezkednek el, amely tartalmazza az  $a$  egyenest.

Ebben az esetben nyugvásbeli súrlódási hasábról beszélünk, amelyet az  $S_n$  síkkal  $\pm\rho_0$ ,  $-\rho_0$  szöget bezáró,  $a$  egyenesre illeszkedő súrlódási határsíkok határoznak meg. A  $\rho_0$  szögre itt is érvényes a (4.4) összefüggés.



4.4 ábra

Sima érintkező felületek ( $\mu_0 = 0$ ) esetén a vizsgált hengeres test tartós nyugalomban maradásának feltétele az, hogy az  $\vec{f}_a$  támasztóerősűrűség vektor az érintkező felületekre merőleges ( $\beta = 0$ ) legyen:

$$\vec{f}_a = f_{an}\vec{n} \quad (4.7)$$

Érdes érintkező felületek ( $\mu_0 \neq 0$ ) esetén a vizsgált hengeres test tartós nyugalomban maradásának feltétele az, hogy az  $\vec{f}_a = f_{at}\vec{t} + f_{an}\vec{n}$  támasztóerősűrűség vektor  $S_a$  síkjának  $a$  nyugvásbeli súrlódási hasábon belül ( $\beta < \rho_0$ ) kell elhelyezkednie, vagy annak oldalfelületeivel kell egybeesnie ( $\beta = \rho_0$ ). Ez esetben az  $\vec{f}_a$  sűrűségvektor koordinátái között (4.4 ábra) a következő összefüggés áll fenn:

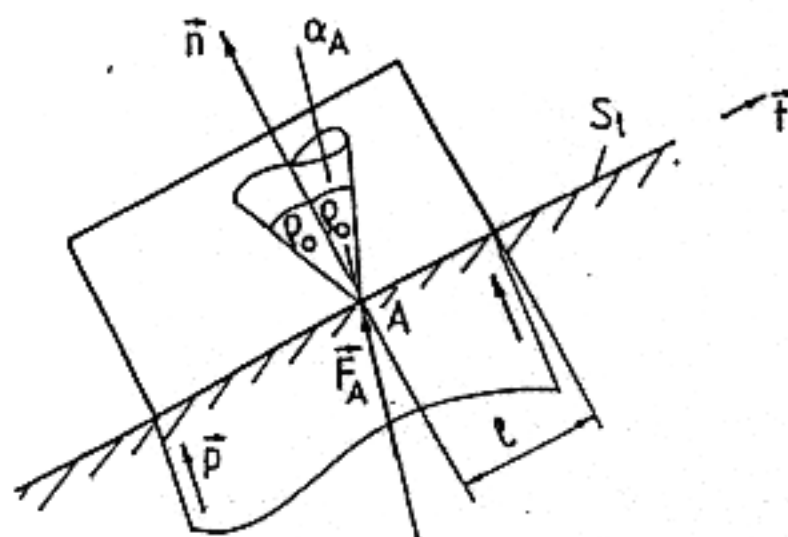
$$|f_{at}| \leq \mu_0 |f_{an}|$$

(4.8)

### c/ Felületi érintkezés

A 4.5 ábrán látható hasáb az alsó oldalfelülete mentén érintkezik az  $S_1$  támasztó síkkal. A támasztó síkról a vizsgált testre az érintkezési *felületen megoszló támasztóerőrendszer* adódik át. A megoszló támasztóerőrendszer  $\bar{p}$  sűrűségvektorának helytől való függése (megoszlása) statikai módszerekkel nem határozható meg.

A  $\bar{p}$  felületen megoszló támasztóerőrendszer  $\bar{F}_A$  eredő erővektorának viszont tartós nyugalom esetén eleget kell tenni a pontbeli érintkezésnél ( $\alpha'$  pont) leírt feltételeknek. A Coulomb-féle súrlódási törvény azonban csak az  $\bar{F}_A$  eredő erő koordinátái közötti kapcsolatot adja meg a (4.5) és (4.6) összefüggések szerint. Az  $\bar{F}_A$  eredő támaszóerő  $\alpha_A$  hatásvonala (az  $A$  pont) nem ismert, azonban statikai egyenletek segítségével meghatározható.



4.5 ábra

## 4.5. Testek leggyakrabban előforduló megtámasztási és kapcsolódási módjai

Ebben a fejezetben testek (alkatrészek) mérnöki szerkezetekben (gépekben, járművekben, építményekben, stb.) leggyakrabban előforduló megtámasztásait, kapcsolódásait vizsgáljuk meg abból a szempontból, hogy az adott megtámasztás, kapcsolódás esetén a testek között milyen erők lépnek fel. Az erőátadás alapján megállapítható, hogy a megtámasztások, kapcsolódások különböző módjai néhány egyszerű mechanikai modellel írhatók le. Ezek a mechanikai modellek a csukló, a görgő és a befalazás.

### 4.5.1. Megtámasztás, kapcsolódás előírt ponton - csukló

#### a/ Gömbcsukló (térbeli eset)

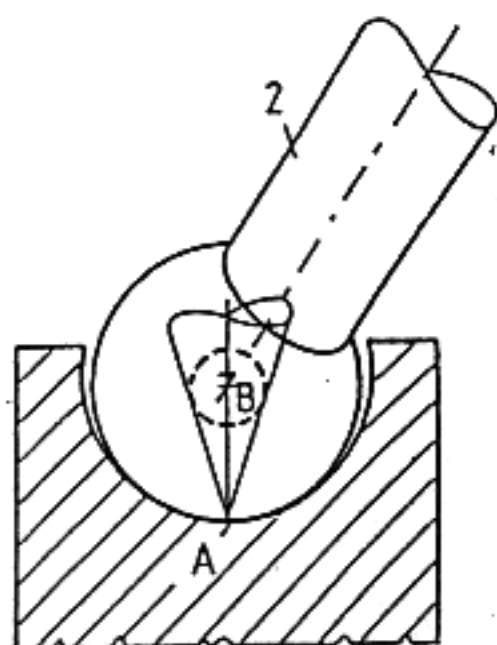
A 4.6.a ábrán látható esetben a 2 jelű megtámasztott test az 1 jelű megtámasztó testhez képest a  $B$  pont körül tetszőleges szögelfordulást végezhet. A testek az  $A$  pontban érintkeznek

és gömbfelületeik sugarai között a gyakorlatban csak olyan kis eltérés van, hogy a testek közötti nézag szemmel alig, vagy egyáltalán nem látható.

A testek közötti érintkezés a szerkezet terhelésétől függően az érintkező, közel azonos sugarú gömbfelületek az  $A$ -tól különböző pontjaiban is létrejöhet. Ha megrajzoljuk az összes lehetséges érintkezési ponthoz tartozó súrlódási kúpot, akkor ezek a kúpok a  $B$  középpontú, az ábrán szaggatott vonallal jelölt *súrlódási gömb* burkoló felületei.

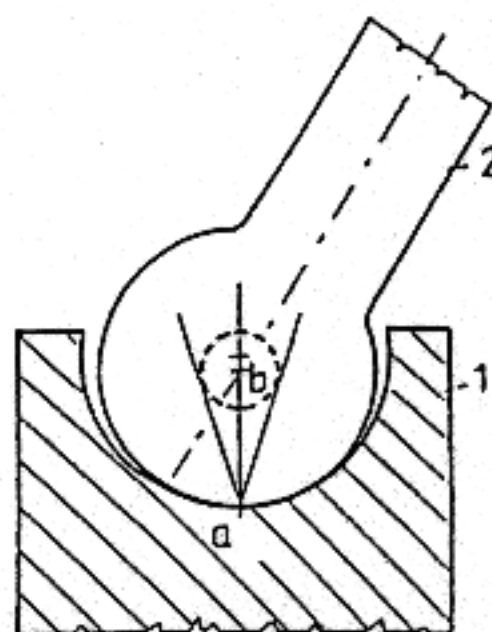
Az egyik testről a másik testre *átadódó erőnek*

- *sima felület esetén* át kell mennie az  $A$  érintkezési ponton és a gömb  $B$  középpontján,
- *érdes felület esetén* pedig át kell mennie az  $A$  érintkezési ponton és bele kell metszenie a súrlódási gömbbe.



a,

Gömbcsuklós



b,

Hengeres csukló

4.6 ábra

### 3/ Hengeres csukló (síkbeli eset)

A 4.6.b ábrán látható esetben a 2 jelű megtámasztott test az 1 jelű megtámasztó testhez képest a rajz síkjára merőleges  $b$  tengely körül tetszőleges szögelfordulást végezhet. A hengeres testek a rajz síkjára merőleges  $a$  egyenes mentén érintkeznek, sugaruk közel egyenlő. A két test a szerkezet terhelésétől függően az  $a$ -tól különböző egyenesek (alkotók) mentén is érintkezhet egymással. Ha megrajzoljuk az összes lehetséges érintkezési egyeneshez tartozó súrlódási határsíkot, akkor ezek a síkok a  $b$  tengelyű, az ábrán szaggatott vonallal jelölt *súrlódási henger* burkolósíkjai.

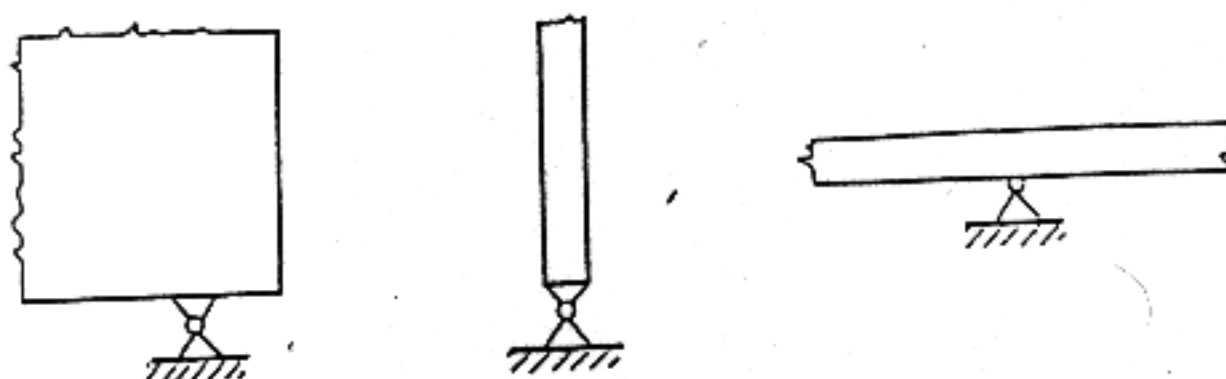
Az egyik testről a másik testre *átadódó erőnek*

- *sima felület esetén* metszenie kell a henger  $a$  alkotóját és  $b$  tengelyét,
- *érdes felület esetén* pedig át kell mennie az  $a$  alkotón és bele kell metszenie a súrlódási hengerbe.



A gömbcsuklós és hengeres csuklós megtámasztásoknál, kapcsolatoknál a legtöbb esetben jó közelítéssel *sima felületet* tételezhetünk fel. Ekkor a csuklón átadódó erőről, csak azt tudjuk, hogy hatásvonala átmegy a  $B$  ponton ( $b$  tengelyen), de hatásvonalának irányát nem ismerjük. Ennek következtében a gömbcsuklón átadódó erővektor meghatározása három, a hengeres csuklón átadódó erővektor meghatározása pedig kettő ismeretlen skaláris erőkoordináta kiszámítását igényli.

A csuklós megtámasztást, kapcsolódást a mechanikában az egymáshoz kapcsolódó testek közé rajzolt kis átmérőjű körrel, vagy félkörrel szokás jelölni (4.7 ábra)

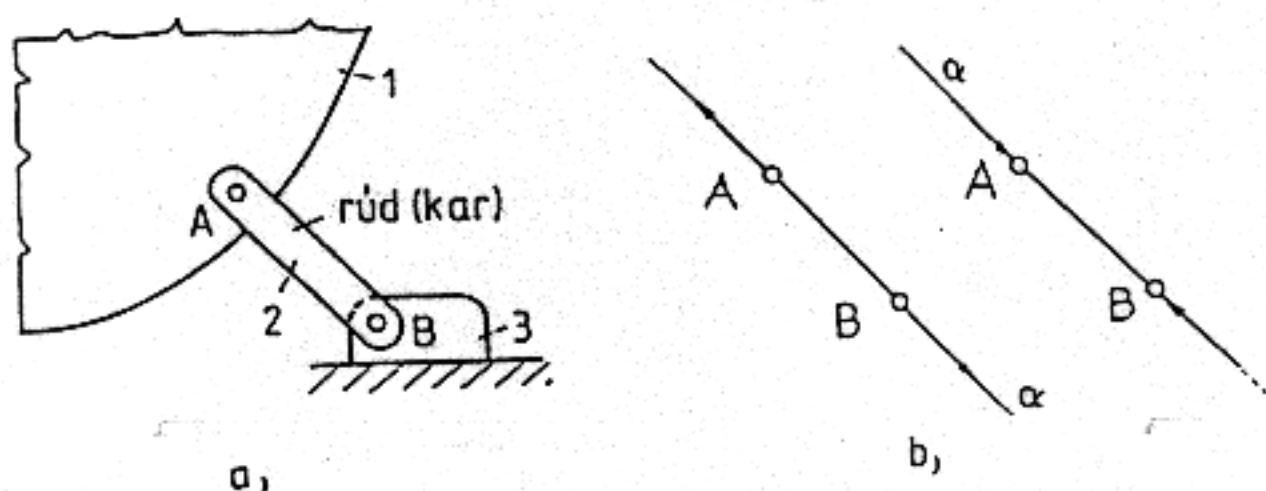


4.7 ábra

#### 4.5.2. Megtámasztás, kapcsolódás előírt hatásvonalon - görgő

##### a/ Rudas megtámasztás

A 4.8.a ábrán látható esetben az 1 jelű megtámasztott test a 3 jelű megtámasztó testhez a 2 jelű rúddal (karral) kapcsolódik úgy, hogy a rúd mindkét testhez csuklóval kapcsolódik. A rúdra csak az  $A$  és  $B$  csuklópontokban adódnak át erők. A rúd akkor van egyensúlyban, ha a rá ható két erő egyensúlyi erőrendszert alkot. Két erő pedig csak akkor alkot egyensúlyi erőrendszert, ha hatásvonaluk azonos.



4.8 ábra

Rudas (karos) megtámasztás esetén tehát a támasztóerő (a vizsgált testre az  $A$  pontban ható erő) hatásvonala az  $A$  és  $B$  csuklópontok által meghatározott  $\alpha$  egyenes (4.8.b ábra).

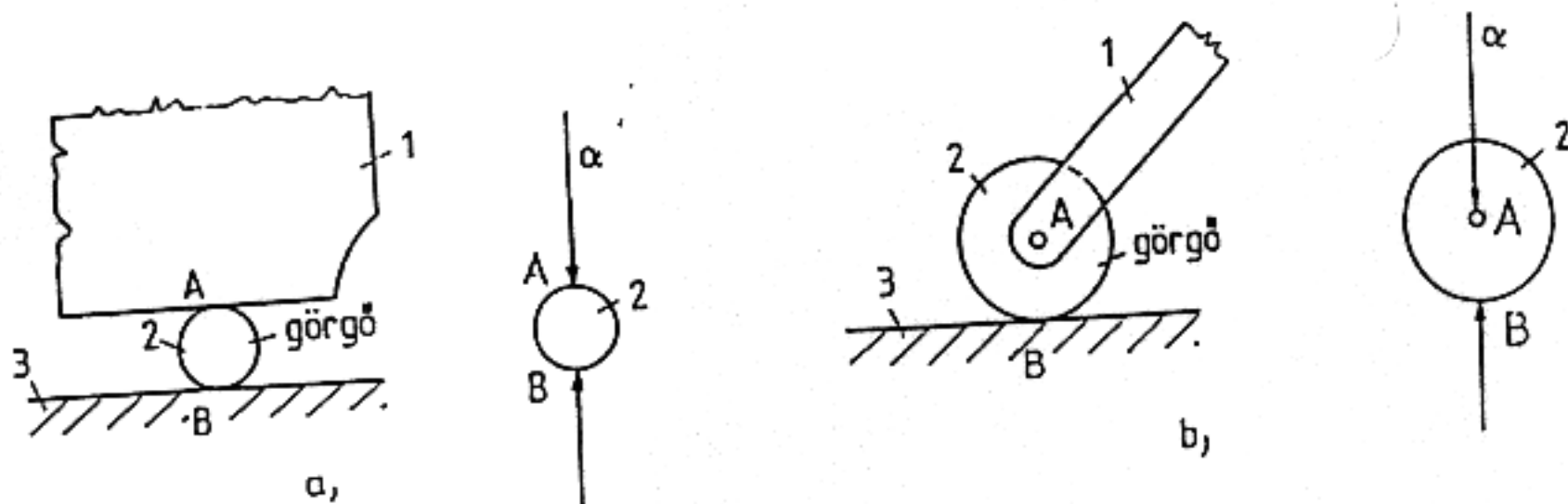


Ezért a rudas (karos) megtámasztás esetén átadódó erővektor meghatározása egy skaláris erőkoordináta kiszámítását igényli.

#### b/ Görgős megtámasztás

Görgős megtámasztás legtöbbször a 4.9.a-b ábrákon látható módon valósítható meg.

A 4.9.a ábrán az 1 jelű megtámasztott test a 3 jelű megtámasztó testhez a 2 jelű hengeres görgővel kapcsolódik. A görgő az 1 testtel az  $A$  pontban, a 3 testtel a  $B$  pontban érintkezik. A görgőre tehát az  $A$  és  $B$  pontokban adódnak át erők. A görgő akkor lehet egyensúlyban, ha a rá ható két erő hatásvonala és nagysága azonos, iránya pedig ellentétes. Így a 4.9.a ábra szerinti görgős megtámasztás esetén a támasztóerő hatásvonala az  $A, B$  érintkezési pontokat összekötő  $\alpha$  egyenes. Az  $\alpha$  hatásvonal minden esetben merőleges a 3 test felületére.



4.9 ábra

A 4.9.b ábrán az 1 jelű vizsgált test a 2 jelű görgőhöz az  $A$  jelű hengeres csuklóval kapcsolódik, a görgő pedig a  $B$  pontban érintkezik a 3 jelű támasztó testtel. A görgőre csak az  $A$  és  $B$  pontokban adódnak át erők. Két erő egyensúlyának feltételeiből következően az erők  $\alpha$  hatásvonala az  $A, B$  pontokat összekötő egyenes.

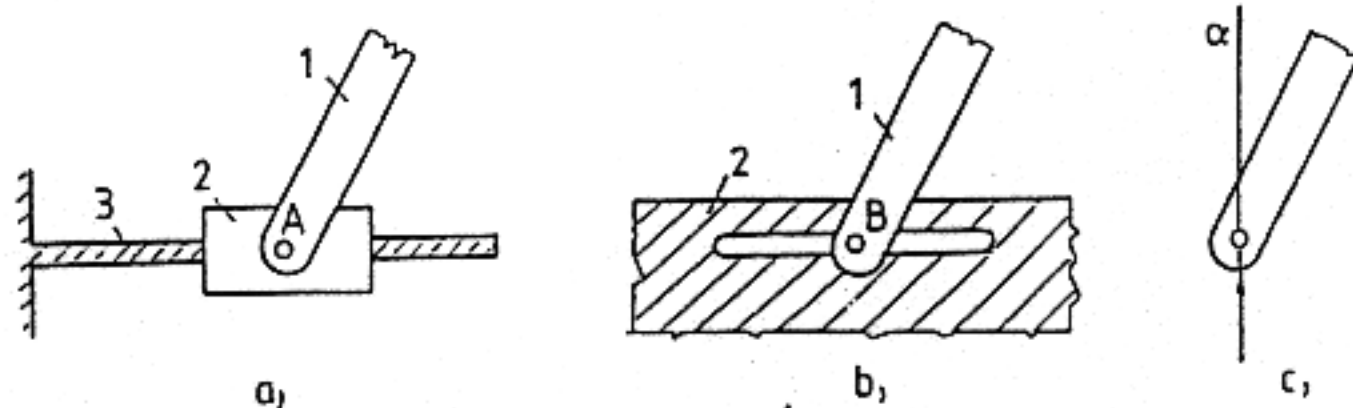
Mindkét típusú görgős megtámasztás (4.9.a-b ábra) esetén az átadódó erővektor meghatározása az erő hatásvonalának ismerete következtében egy skaláris erőkoordináta kiszámítását igényli.

#### c/ Síma felületű csúszkás megtámasztás

Csúszkás megtámasztás legtöbbször a 4.10.a-b ábrákon látható módon valósítható meg.

A 4.10.a ábrán az 1 jelű vizsgált test az  $A$  hengeres csuklóval kapcsolódik a 2 jelű csúszkához. A 2 csúszka sík felület (egyenes vonal) menti érintkezéssel kapcsolódik a 3 jelű megtámasztó testhez. Feltételezzük, hogy a 2 és 3 test érintkező felületei simák. A 2 jelű csúszkára két erő hat: egyik az 1, másik pedig a 3 jelű testről adódik át. Az 1 jelű testről átadódó erő hatásvonalának át kell mennie az  $A$  csuklópontra, de iránya tetszőleges lehet. A 3 jelű testről sík felület mentén megoszló erőrendszer adódik át, amelynek eredője merőleges a síkra, de az eredő hatásvonala az érintkező felületek mentén bárhol elhelyezkedhet. Ennek a két erőnek az egyensúlyi feltételből következően azonos hatásvonalúnak kell lennie és az azonos  $\alpha$  hatásvonalnak ki kell elégítenie a fenti követelményeket: át kell mennie az  $A$  csuklópontra és merőlegesnek kell lennie a csúszkavezetékre (4.10.c ábra).

A 4.10.b ábrán látható 1 jelű test a hozzá mereven rögzített  $B$  jelű hengeres csappal kapcsolódik a 2 jelű megtámasztó testhez. Feltételezzük, hogy a  $B$  csap felülete és a 2 jelű test  $B$  csappal érintkező felülete sima. A  $B$  csapról (1 jelű testről) a 2 jelű testre átvitt erő  $\alpha$  hatásvonalának át kell mennie a csap és 2 test érintkezési pontján és merőlegesnek kell lennie az érintkező felületekre (4.10.c ábra).

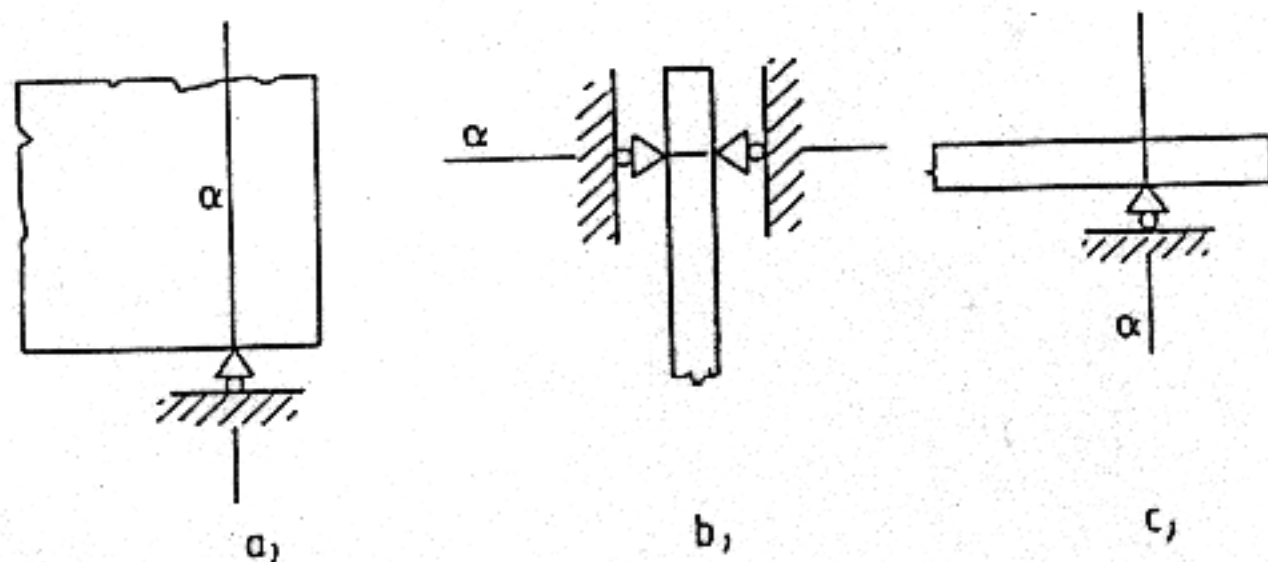


4.10 ábra

Mindkét típusú csúszkás megtámasztás (4.10.a-b ábra) esetén az átvitt erővektor meghatározása az erő hatásvonalának ismeretében egy skaláris erőkoordináta kiszámítását igényli.

d/ Görgő, mint mechanikai modell

A rudas (karos), a görgős és a csúszkás megtámasztásnak közös jellemzője, hogy ezeknél a megtámasztási módoknál ismert a támasztóerő hatásvonala és ezért a támasztóerő megadásához egy skaláris ismeretlen meghatározására van szükség.



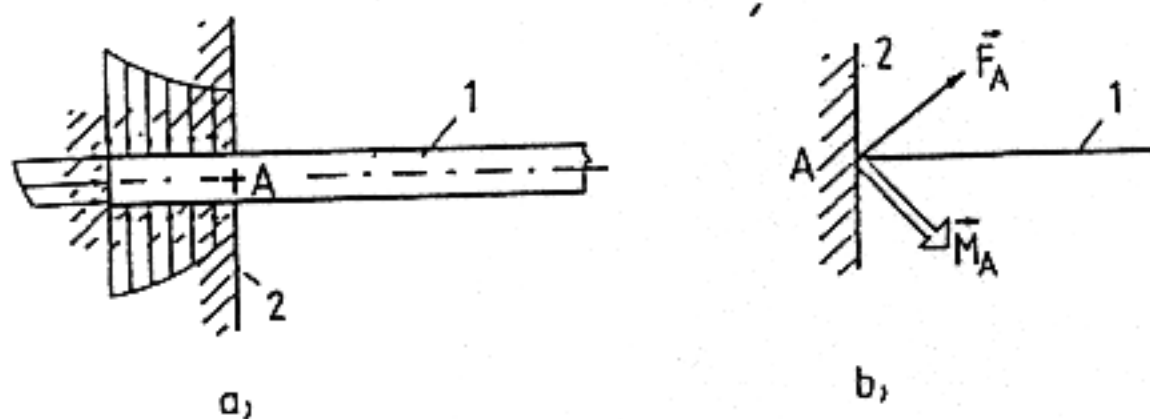
4.11 ábra

Ezek alapján a fenti megtámasztási módok mechanikai szempontból egységesen kezelhetők és görgő modellel írhatók le (4.11 ábra). A görgő modellt az egymáshoz kapcsolódó testek közé rajzolt egyenlő oldalú háromszöggel és kis átmérőjű körrel szokás jelölni. A görgős megtámasztásnál átvitt támasztóerő  $\alpha$  hatásvonala mindig merőleges a görgő síkjára és átmegy a csukló középpontján. A görgő modellel feltételezzük, hogy az egymáshoz kapcsolódó

testek között (még a 4.11.a és 4.11.c ábra esetén is) *kétoldali kapcsolat* van, ami azt jelenti, hogy a testek nem válhatnak el egymástól, vagy más megközelítésben a támasztóerő skaláris koordinátája pozitív és negatív előjelű is lehet.

### 4.5.3. Befalazás, befogás

A 4.12.a ábrán látható esetben az 1 megtámasztott test a 2 támasztó testhez felületi érintkezéssel mereven kapcsolódik. Ekkor az érintkező felületeken a 2 testről az 1 testre tetszőleges felületen megoszló erőrendszer adódik át. Ennek a megoszló erőrendszernek az 1 test  $A$  pontjába redukált eredő vektorkettőse  $\vec{F}_A$  és  $\vec{M}_A$  (4.12.b ábra).



4.12 ábra

Az  $A$  ponti támasztó erőrendszer  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{M}_A$  vektorkettősenek meghatározása

- térbeli esetben 6 skaláris koordináta (3 erőkoordináta és 3 nyomaték koordináta),
- síkbeli esetben 3 skaláris koordináta (2 erőkoordináta és 1 nyomaték koordináta)

kiszámítását igényli.

## 5. Összetett szerkezetek statikája

5.1. Az összetett szerkezet több, egymással megfelelő módon összekapcsolt merev testből építhető fel. Ha az egész szerkezet tartós nyugalomban van, az egyes merev testek is tartós nyugalomban vannak.

- Az összetett szerkezetek is lehetnek - a merev testre elmondottakhoz hasonlóan - statikailag határozottak, illetve labilisak.

Az  $n$  db testből álló összetett szerkezet egyensúlyának vizsgálatakor  $6 \times n$  (síkbeli erőrendszer esetén  $3 \times n$ ) független skaláris statikai egyenlet áll rendelkezésünkre.

Az összetett szerkezet csak akkor lehet tartósan nyugalomban, ha a rá ható külső erőrendszer (terhelő- és támasztóerőrendszer) egyensúlyi. Az egyes szerkezeti elemekre szintén egyensúlyi erőrendszer hat (az egész szerkezetet tekintve, ezek részben külső, részben belső erők).

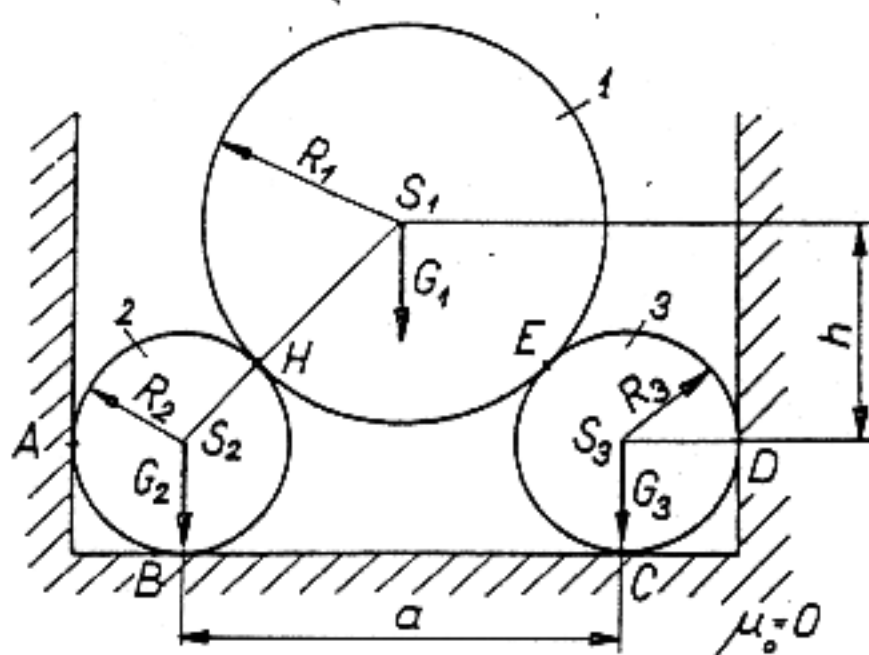
Az összetett szerkezet vizsgálatánál egyrészt a támasztóerőrendszer, másrészt a belső erők meghatározása a feladat. A számításoknál egyrészt az egész szerkezetre (mint egy merev testre), másrészt "szétszedve" a szerkezetet, annak egyes részeire írhatunk fel statikai egyenleteket. (Általában azonban a támasztóerőrendszer meghatározása is a szerkezet "szétbontását" igényli.)

Az összetett szerkezetek legfontosabb típusait a következő példákon keresztül ismerjük meg.

5.2. Példa Az 1.9. ábrán feltüntetett összetett szerkezet három hengerből áll, amelyek közül a 2 és 3 jelű sima felületeknek támaszkodik. Az egymással érintkező hengerfelületek is simák.

A külső erőrendszer a  $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$  súlyerőkből és az ismert hatásvonalu (támasztófelületekre merőleges)  $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C, \vec{F}_D$  támasztóerőkből áll. (1.10. ábra).





1.9. ábra

Részeire bontva a szerkezetet az 1.11. ábrán látható az egyes testekre ható külső és belső erőkből álló erőrendszer.

Határozzuk meg a támasztóerőrendszert és a belső erőket!

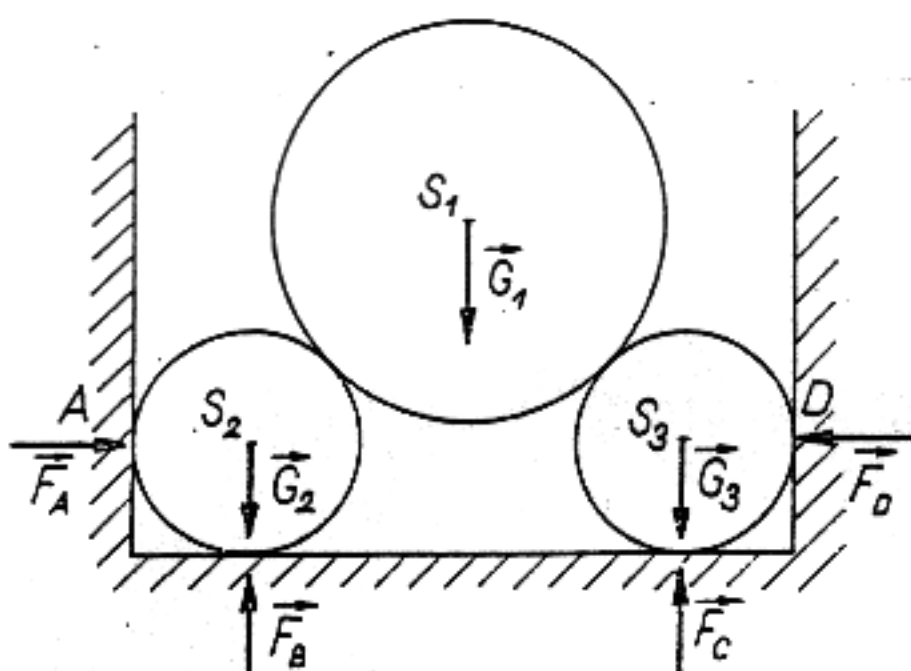
Szerkesztéssel végezve az egyensúly vizsgálatát, induljunk ki az 1 jelű hengerre ható erők egyensúlyából (az egyenletek előtti zárójelbe írt szám jelzi, hogy melyik testre (testekre) ható erők egyensúlyát vizsgáljuk)

$$(1) \vec{F} = \vec{0} = \vec{G}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

és a három erő hatásvonala egy pontban (a súlypontban) metsződik. A vektorsokszög az 1.12.b. ábrán látható.

$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$  felhasználásával vizsgálható a 2 jelű hengerre ható erők egyensúlya is

$$(2) \vec{F} = \vec{0} = \vec{G}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_A + \vec{F}_B$$



1.10. ábra

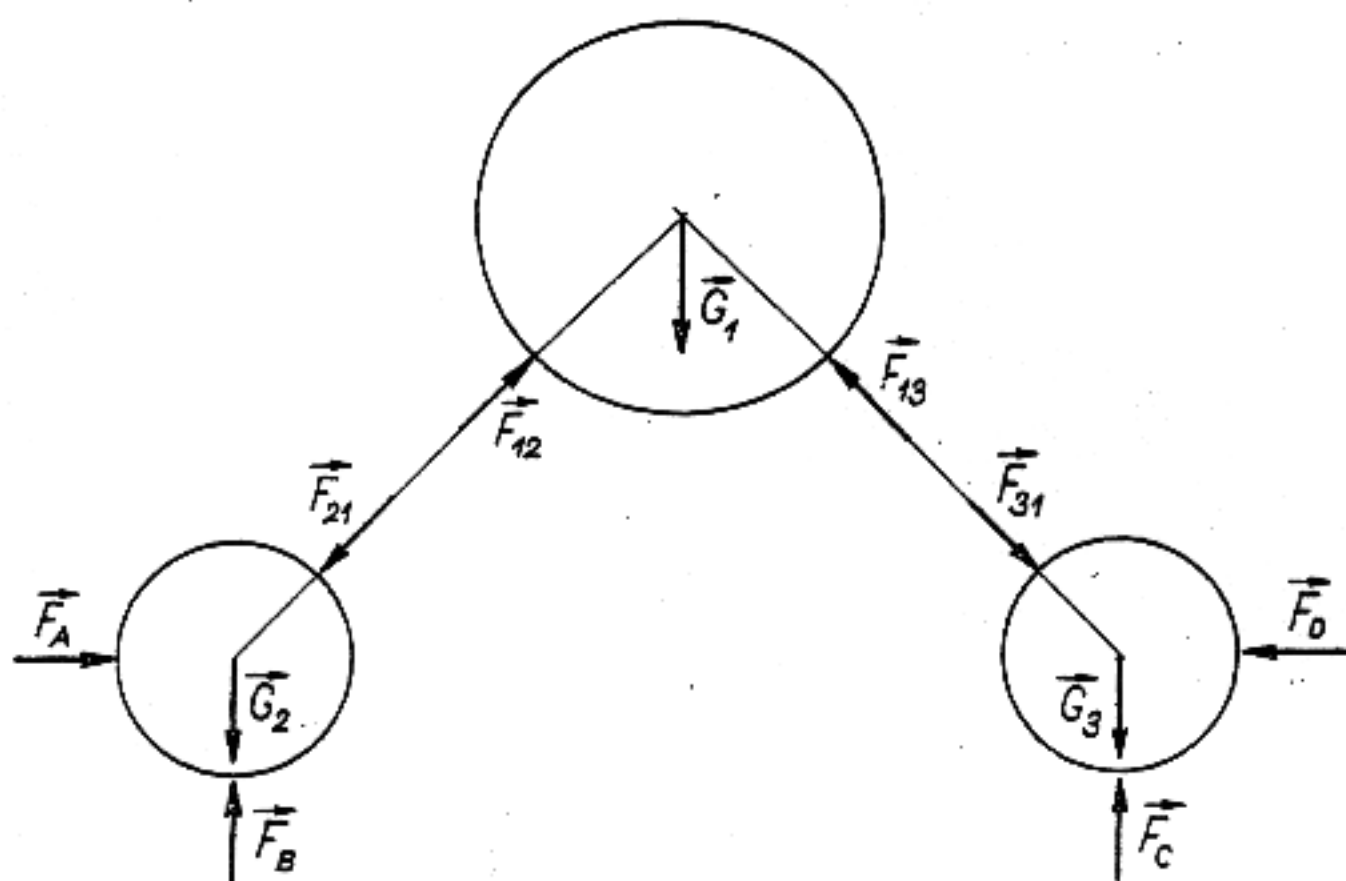
Ez a 4 erő is egy pontban (a súlypontban) metsződik. A vektorsokszög az 1.12.c. ábrán látható.

A 3 jelű testre ható erők egyensúlyának vizsgálatához felhasználjuk  $\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$  értékét. Az egyensúlyt kifejező vektoregyenlet

$$(3) \vec{F} = \vec{0} = \vec{G}_3 + \vec{F}_{31} + \vec{F}_C + \vec{F}_D;$$

a 4 erő hatásvonala itt is a súlypontban metsződik. A vektorsokszög az 1.12.a. ábrán látható.

A három vektorsokszög egyesíthető egy vektorábrába (1.13. ábra). Ebben az ábrában a belső erők értelmét a hatásvonalak mellé tett nyilakkal célszerű jelölni, mert 2-2 szomszédos vektorsokszögben azoknak iránya ellentétes.



1.11. ábra

Számítással hasonló sorrendben végezhetjük az ismeretlenek meghatározását.

Az 1. jelű hengerre ható erők egyensúlya (1.14. ábra). Írjunk fel nyomatéki egyenletet az  $S_3$  ponton átmenő,  $z$ -vel párhuzamos  $s_3$  tengelyre. Ha az  $\vec{F}_{12} = X_{12}\vec{i} + Y_{12}\vec{j}$  erőt hatásvonalán az  $S_2$  pontba toljuk el, és ott felbontjuk, az  $s_3$  tengelyre csak  $Y_{12}$  ad nyomatékot.

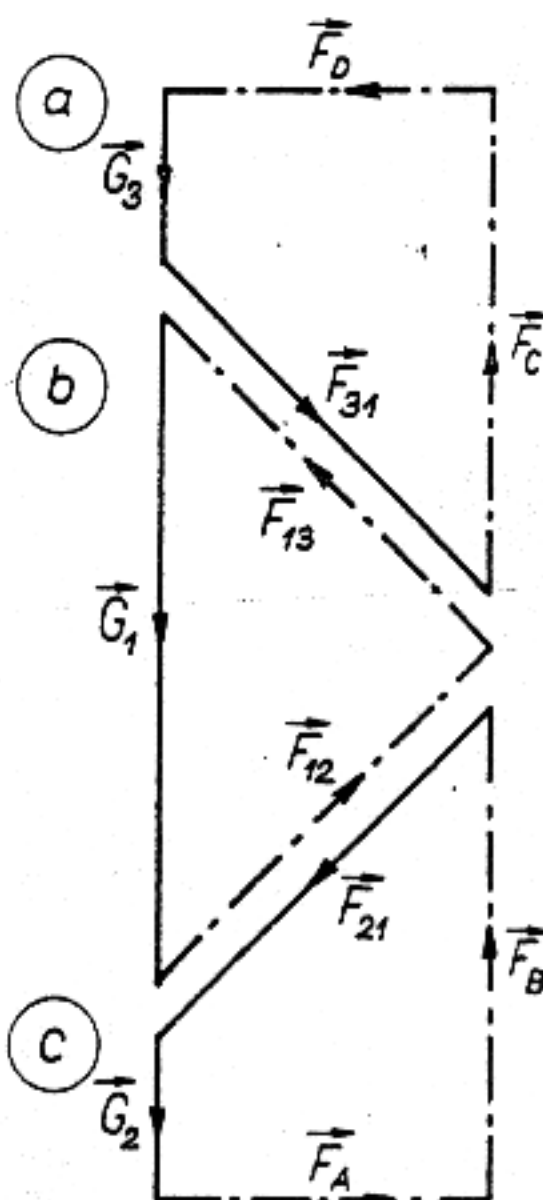
$$M_{s3} = 0 = G_1 \frac{a}{2} - Y_{12}a$$

$$Y_{12} = \frac{G_1}{2}$$

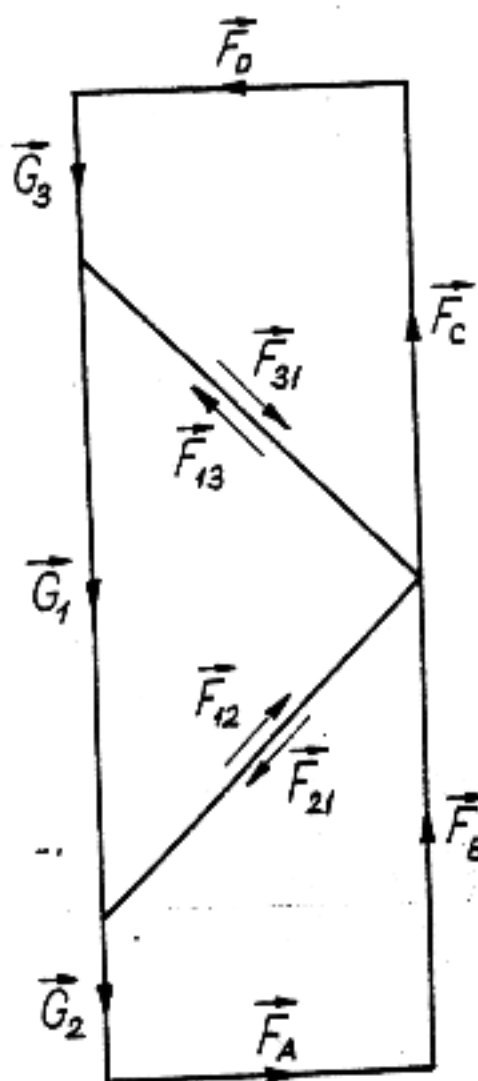
$\vec{F}_{12}$ -t  $O_1$ -be eítolva  $X_{12}$  számítható:

$$M_{s3} = 0 = G_1 \frac{a}{2} - 2 X_{12} h$$

$$X_{12} = G_1 \frac{a}{4h}$$



1.12. ábra



1.13. ábra

Ellenőrizzük, hogy  $X_{12}$  és  $Y_{12}$  eredője valóban  $\vec{F}_{12}$  irányu-e

$$\frac{Y_{12}}{X_{12}} = \frac{2h}{a} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Vetületi egyenlet x irányban

$$X = 0 = -X_{13} + G_1 \frac{a}{4h} .$$

$$X_{13} = G_1 \frac{a}{4h} .$$

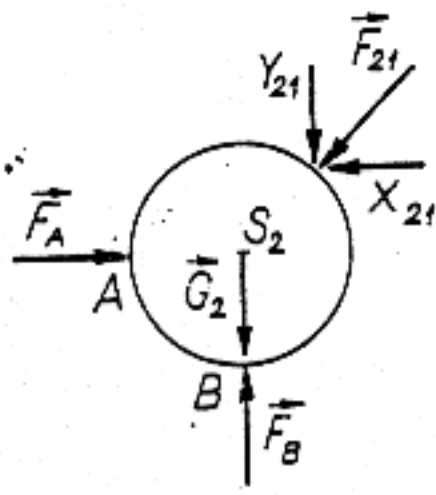
Vetületi egyenlet y irányban

$$Y = 0 = -G_1 + \frac{G_1}{2} + Y_{13}$$

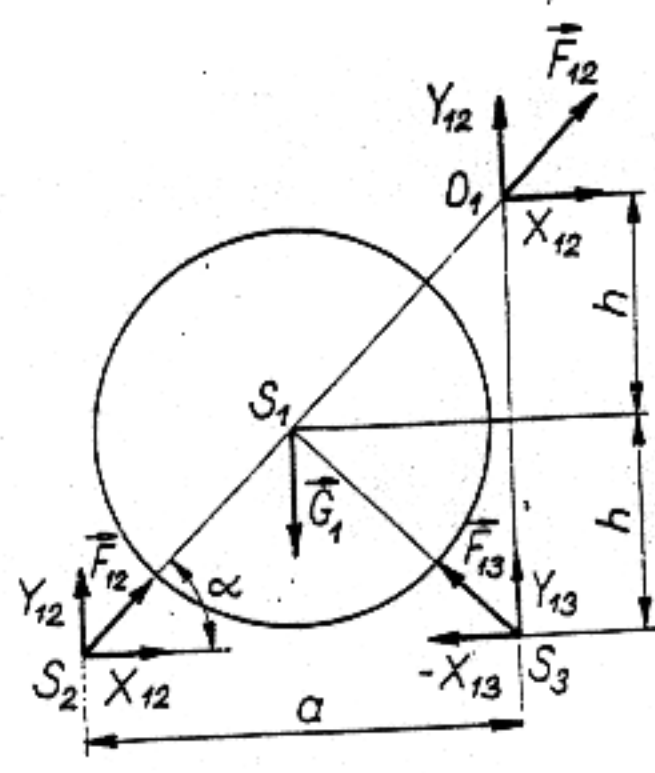
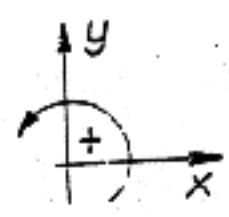
$$Y_{13} = \frac{G_1}{2}$$

( $Y_{13}$  és  $X_{13}$  függetlenül is számíthatók  $S_2$ -n átmenő, z-vel párhuzamos tengelyre írt nyomatéki egyenletekből).

A 2 jelű hengerre ható erők egyensúlya (1.15. ábra)



1.15. ábra



1.14. ábra

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -G_1 \frac{a}{4h} \vec{i} - \frac{G_1}{2} \vec{j} .$$

Vetületi egyenlet x irányban

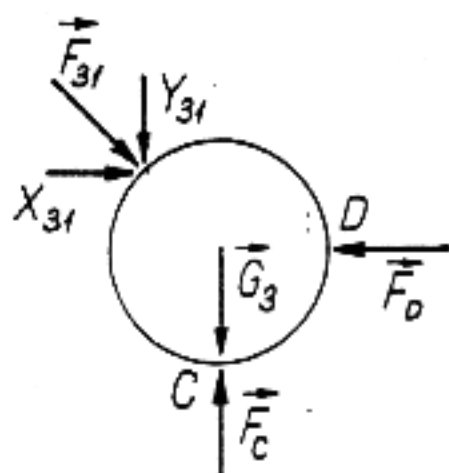
$$X = 0 = -G_1 \frac{a}{4h} + F_A$$

$$F_A = G_1 \frac{a}{4h}$$

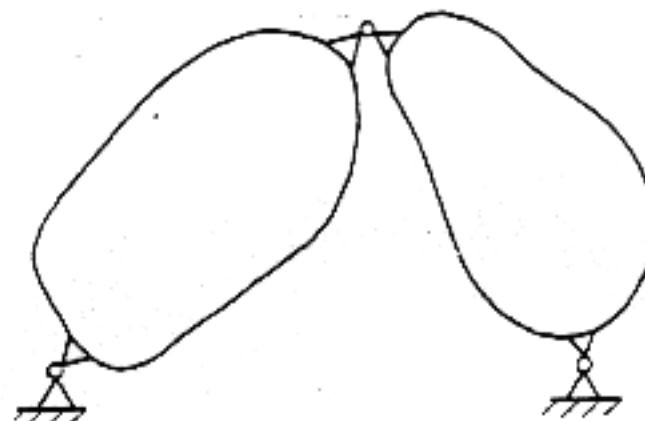
Vetületi egyenlet y irányban

$$Y = 0 = -G_2 - \frac{G_1}{2} + F_B$$

$$F_B = G_2 + \frac{G_1}{2}$$



1.16. ábra



1.17. ábra

A 3. jelű hengerra ható erők egyensúlyát teljesen hasonló módon vizsgálhatjuk (1.16. ábra). Az eredmények

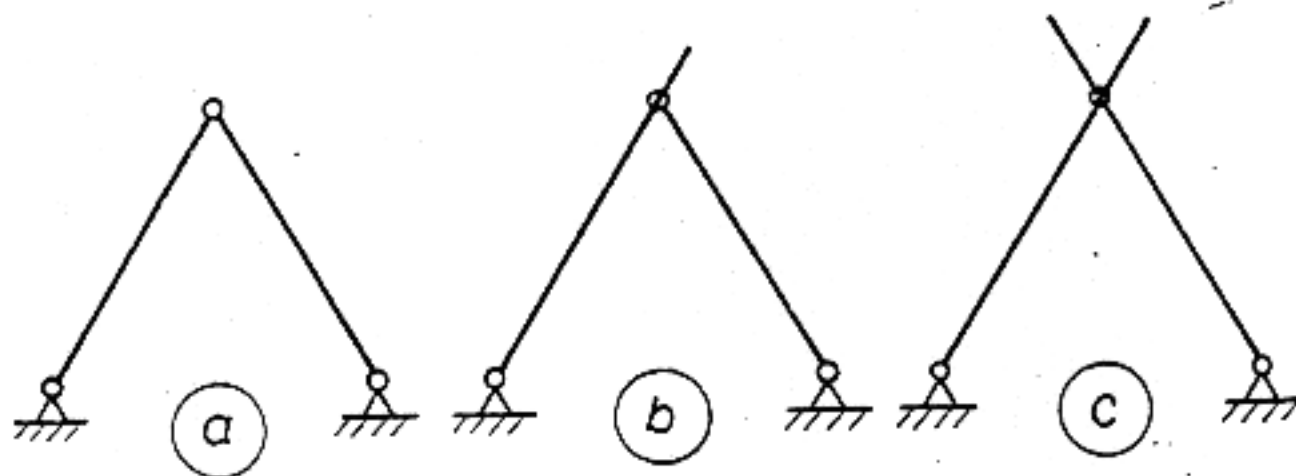
$$F_C = G_3 + \frac{G_1}{2}$$

$$F_D = -G_1 \frac{a}{4h}; (\vec{F}_D = -G_1 \frac{a}{4h} \vec{j}) \dots$$

A műszaki gyakorlatban jelentős szerepük van azoknak az összetett szerkezeteknek, amelyekben az egyes merev testeket csuklókkal kapcsoljuk össze. A továbbiakban ilyen szerkezeteket vizsgálunk.

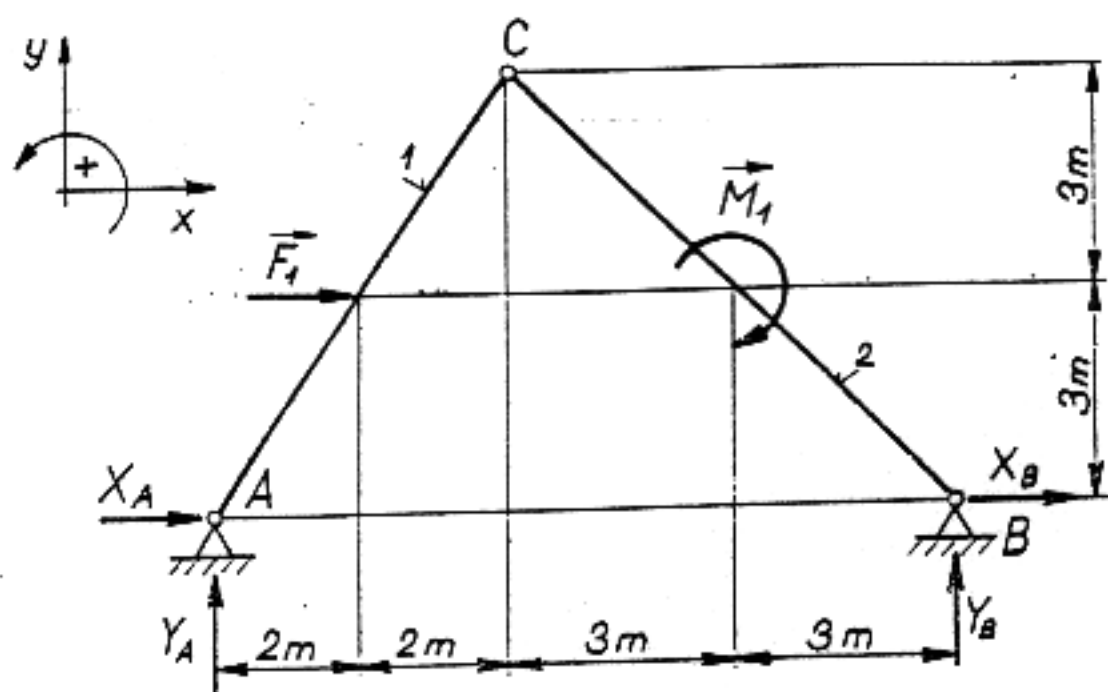
A háromcsuklós iv 2 merev testből áll, amelyeket egymással és a talajjal (állvánnyal) 1-1 csukló kapcsol össze (1.17. ábra). Szokás az egyes merev testeket rudakkal is ábrázolni, mert a merev test alakja nem befo-





1.18. ábra

lyásolja a vizsgálatot (1.18. ábra). A csukló elhelyezhető úgy is, hogy nem szakítja meg a rudat, csak egy másik rudat kapcsol csuklósan az előbbihez (jelölése az 1.18.b.c. ábra szerint).



1.19. ábra

5.3. Példa Határozzuk meg az 1.19. ábrán feltüntetett háromcsuklós iv támasztó- és belső erőit!

$$\vec{F}_1 = 3\vec{i} \text{ [kN]} :$$

$$\vec{M}_1 = -6\vec{k} \text{ [kN.m]} .$$

Az A és B pontokban ébredő támasztóerőket bontsuk fel  $x$  és  $y$  irányú összetevőkre. Az így nyert 4 skaláris ismeretlen közül  $Y_A$ ,  $Y_B$  az egész szerkezet vizsgálatából számítható.

Nyomatéki egyenlet az A-n átmenő,  $z$ -vel párhuzamos a tengelyre

$$(1 + 2) \quad M_a = 0 = -3 \cdot 3 - 6 + 10 Y_B$$

$$Y_B = 1,5 \text{ [kN]}.$$

Nyomatéki egyenlet a B-n átmenő, z-vel párhuzamos b tengelyre:

$$(1+2) \quad M_b = 0 = -10 Y_A - 3.3 - 6$$

$$Y_A = -1,5 \text{ [kN]}.$$

A további ismeretlenek meghatározása céljából a C csuklónál szét-szedve a szerkezetet, működtetve az ismeretlen belső erőt, vizsgáljuk valamelyik (pl. a 2. jelű) részre ható erők egyensúlyát (1.20. ábra). ( $Y_B$  kiszámított értékét fel kell használnunk!)



Nyomatéki egyenlet a  $C$  ponton átme-  
nő,  $z$ -vel párhuzamos  $c$  tengelyre

$$(2) \quad M_C = 0 = -6 + 6 \cdot 1,5 + 6 X_B$$

$$X_B = -0,5 \text{ [kN]}.$$

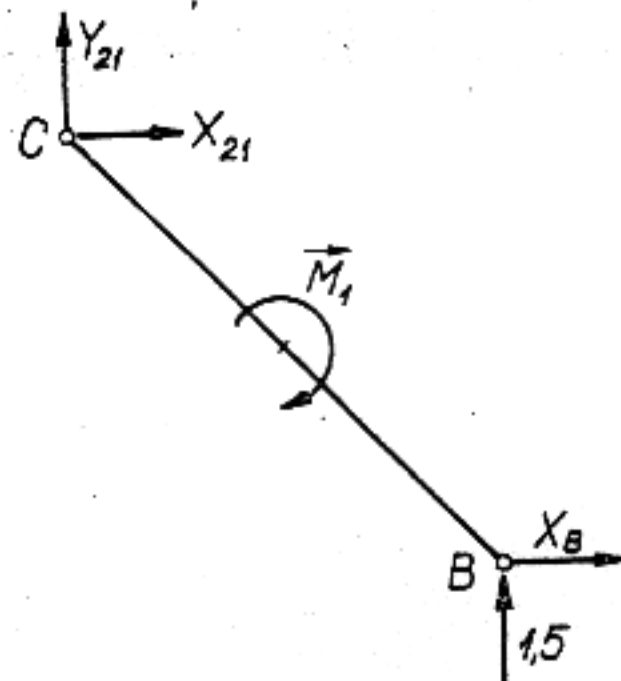
Vetületi egyenletek:

$$(2) \quad X = 0 = X_{21} - 0,5$$

$$X_{21} = 0,5 \text{ [kN]}$$

$$(2) \quad Y = 0 = Y_{21} + 1,5$$

$$Y_{21} = -1,5 \text{ [kN]}.$$

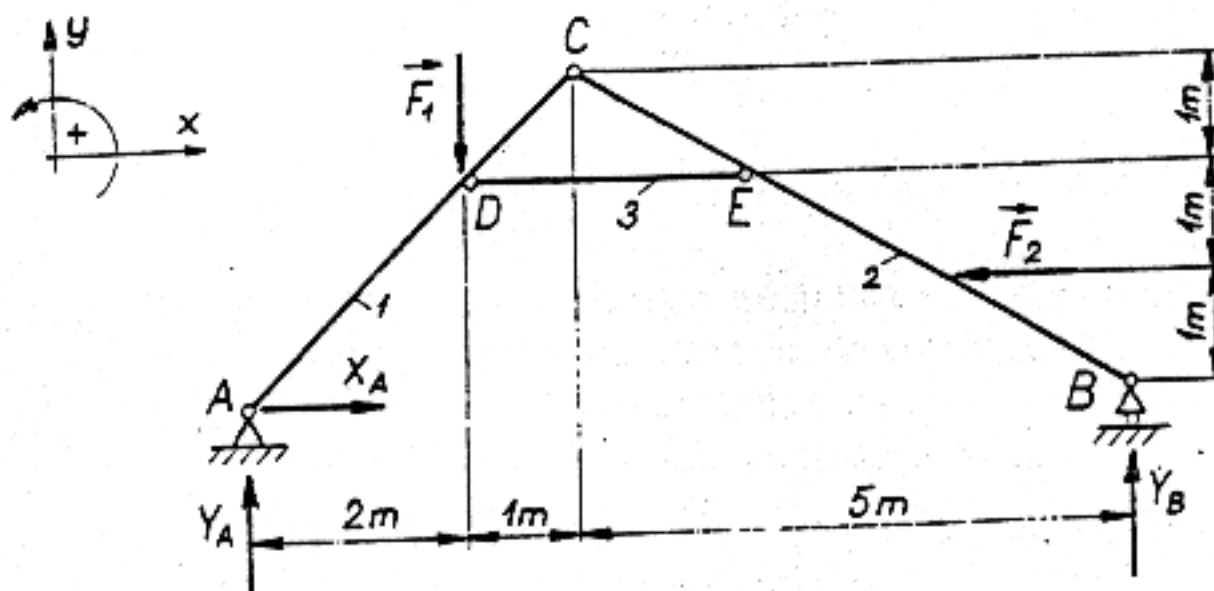


1.20. ábra

Végül az egész szerkezetre felírt vetületi egyenlet

$$(1+2) \quad X = 0 = X_A + 3 - 0,5$$

$$X_A = -2,5 \text{ [kN]}.$$



1.21. ábra

5.4. Példa A csuklós szerkezetek egy másik, lehetséges típusa az 1.21. ábrán látható. Ez a szerkezet három merev testből van felépítve. Az egyes testeket itt is rudakkal ábrázoljuk

$$\vec{F}_1 = -6\vec{j} \text{ [kN]} ; \quad \vec{F}_2 = -8\vec{i} \text{ [kN]} .$$

Határozzuk meg a támasztó- és belső erőket! Az egész szerkezet (mint egyetlen merev test) megtámasztása statikailag határozott, tehát az  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  támasztóerők az egész szerkezetre felírt statikai egyenletekből számíthatók.

Nyomatéki egyenlet az A-n átmenő, z-vel párhuzamos a tengelyre  
(1 + 2 + 3)  $M_a = 0 = -2.6 + 1.8 + 8 Y_B$

$$Y_B = 0.5 \text{ [kN]} .$$

Nyomatéki egyenlet B-n átmenő, z-vel párhuzamos b tengelyre

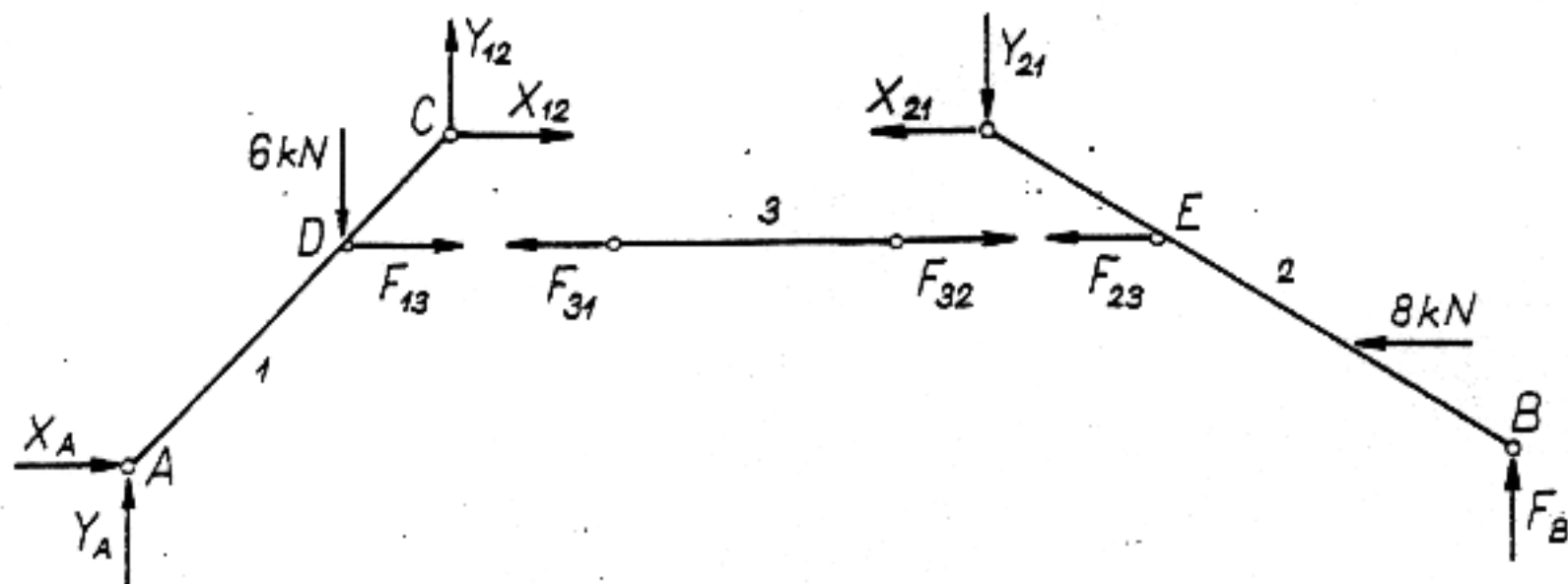
$$(1 + 2 + 3) \quad M_b = 0 = -8 Y_A + 6.6 + 1.8$$

$$Y_A = 5.5 \text{ [kN]} .$$

Vízszintes vetületi egyenlet

$$(1 + 2 + 3) \quad X = 0 = X_A - 8$$

$$X_A = 8 \text{ [kN]} .$$



1.22. ábra

A belső erők meghatározása céljából a szerkezetet részekre bontjuk (1.22. ábra). Mivel a 3 jelű rudra csak két végén (a D és E pontokban) hat egy-egy erő, és a rud egyensúlyban van, ezek az erők közös hatásvonalak. (Ez a hatásvonal egybeesik a 3 jelű ruddal).

Az 1 jelű rudra ható erők egyensúlya: nyomatéki egyenlet a C ponton átmenő, z-vel párhuzamos c tengelyre

$$(1) \quad M_c = 0 = 3,8 - 3,5,5 + 1,6 + 1 \cdot F_{13}$$

$$F_{13} = -13,5 \text{ [kN]}.$$

Függőleges vetületi egyenlet:

$$(1) \quad Y = 0 = 5,5 - 6 + Y_{12}$$

$$Y_{12} = 0,5 \text{ [kN]}.$$

Vízszintes vetületi egyenlet:

$$(1) \quad X = 0 = 8 - 13,5 + X_{12}$$

$$X_{12} = 5,5 \text{ [kN]}.$$

A további számításokat nem részletezve:

$$X_{21} = -X_{12}$$

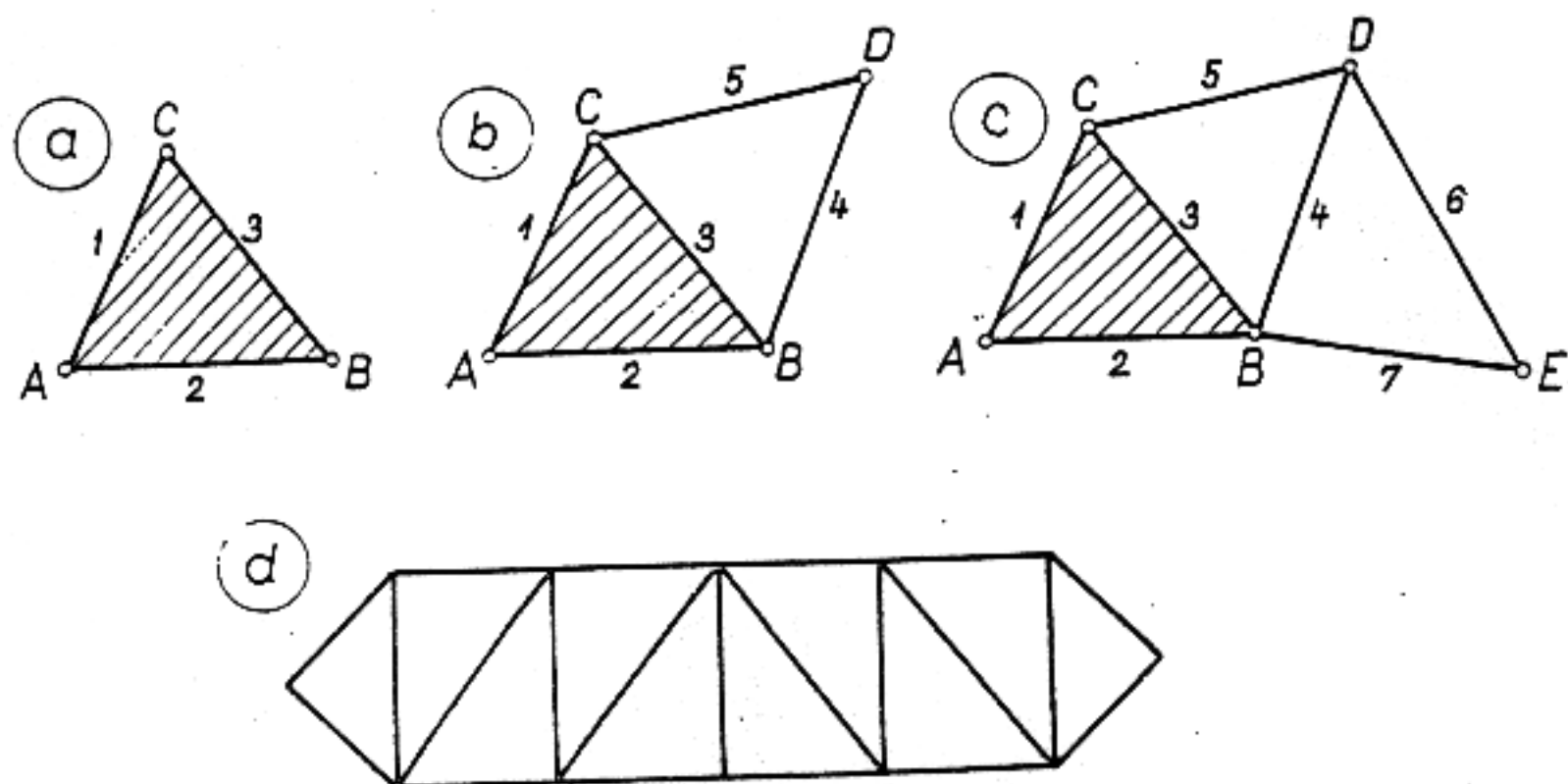
$$Y_{21} = -Y_{12}$$

$$\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13} = \vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}.$$

A rácsos szerkezet két végén csuklókkal egymáshoz kapcsolt rudakból felépített összetett szerkezet. Az 1.23. ábra néhány egyszerű síkbeli rácsos szerkezetet ábrázol. Ilyen síkbeli szerkezeteknél valamennyi rudnak és csuklónak közös síkja van. A legegyszerűbb ilyen szerkezetek - kiindulva pl. az 1.23/a. ábra ABC szerkezetéből - lépcsőről-lépésre 2 újabb rud hozzákapcsolásával építhetők fel, amelyek másik végeit egy újabb csuklóval kapcsoljuk össze. Így nyerhető előbb az 1.23/b., majd az 1.23/c. ábrán látható szerkezet. Ilyen felépítés mellett a szerkezetet a rudak csupa háromszögalaku mezőre osztják.

A rácsos szerkezetek ábrázolásánál a csuklókat jelző kis köröket nem szokás feltüntetni (1.23/d. ábra). A csuklókat szokás csomópontoknak is nevezni.

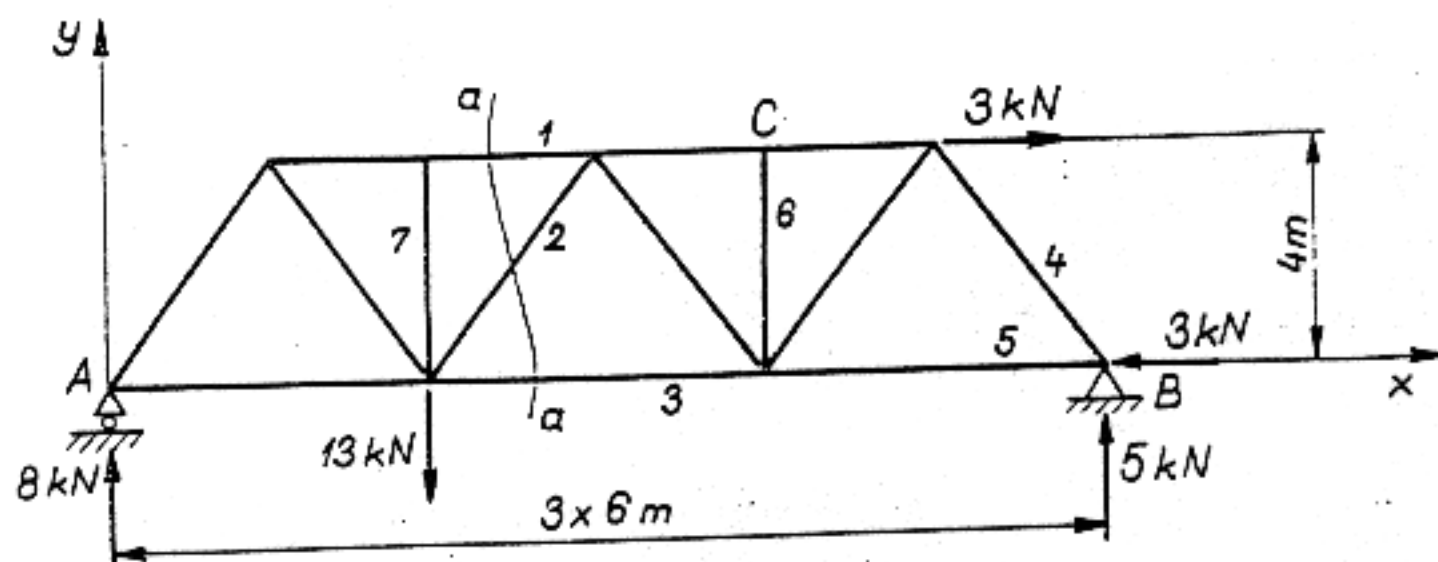




1.23. ábra

A rácsos szerkezetek vizsgálatakor a rudak önsúlyától eltekintünk. A szerkezeteket úgy szokás kialakítani, hogy a terhelések és a támasztóerők a csomópontokban hassanak. Ekkor minden egyes rudra csak a két végén hat 1-1 erő. Mivel minden rud nyugalomban van, ezek az erők rudirányúak (szokásos elnevezésük: ruđerők). Megállapodás szerint a ruđerő pozitív, ha a rudat húzza, negatív ha a rudat nyomja.

A rácsos szerkezetek vizsgálatánál az alapfeladat egyrészt a támasztóerők, másrészt a ruđerők meghatározása.



1.24. ábra

**5.5. Példa** Vizsgáljuk az 1.24. ábrán látható rácsos szerkezetet. (A támasztóerők meghatározását nem részletezzük; az egész szerkezetre ható erők egyensúlyából egyszerűen számíthatók.)

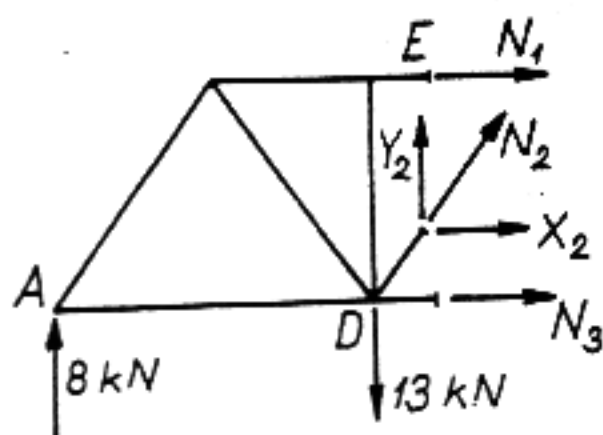
A ruđerők számításánál kétféle módszer szokásos:

a) az átmetsző módszernél a szerkezetet "átmetszéssel" két részre osztjuk, és az egyik részre ható erők egyensúlyát vizsgáljuk. Az átmetszések helyén működtetjük az ismeretlen ruderőket. (Célszerű ezeket minden esetben húzóerőknek feltételezni, így a számítások során előjelhelyesen kapjuk a ruderőket.) Az átmetszés olyan legyen, hogy legfeljebb három ismeretlen ruderő jelentkezzen, de ezek hatásvonalainak ne legyen közös metszéspontja.

Határozzuk meg átmetsző módszerrel az 1, 2, 3 jelű rudakban ébredő  $N_1$ ,

$N_2$ ,  $N_3$  ruderőket. A szerkezetet az a - a átmetszéssel két részre osztva, a baloldali részt vizsgáljuk (1.25. ábra).

$N_1$  meghatározására írjunk fel nyomatéki egyenletet a 2 és 3 jelű rudak D metszéspontján átmenő, z-vel párhuzamos d tengelyre:



1.25. ábra

$$M_d = 0 = -6.8 - 4 N_1$$

$$N_1 = -12 \text{ [kN]} \quad (\rightarrow \text{ — } \leftarrow)$$

(Szokás a húzást vagy nyomást a rudból kivett "elemi rudszakaszon" is feltüntetni).

Nyomatéki egyenlet az E-n átmenő, z-vel párhuzamos e tengelyre:

$$M_e = 0 = -9.8 + 3.13 + 4 N_3$$

$$N_3 = \frac{33}{4} = 8.25 \text{ [kN]} \quad (\leftarrow \text{ — } \rightarrow)$$

Függőleges vetületi egyenlet:

$$Y = 0 = 8 - 13 + Y_2$$

$$Y_2 = 5 \text{ [kN]}$$

és mivel  $N_2$  rudirányu, koordinátái nem függetlenek egymástól:

$$\frac{X_2}{Y_2} = \frac{3}{4}; \quad X_2 = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ [kN]}$$

$$N_2 = \sqrt{3,75^2 + 5^2} = 6,25 \text{ [kN]} \quad (\swarrow \quad \searrow)$$

b) a csomóponti módszernél a ruderők meghatározása céljából 1-1 csuklóban ható erők egyensúlyát vizsgáljuk.

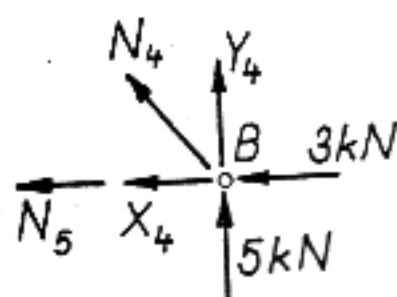
A 4 és 5 jelű rudakban ébredő ruderők számításához vizsgáljuk meg a B jelű csuklót (1.26. ábra). Függőleges vetületi egyenlet:

$$Y = 0 = 5 + Y_4$$

$$Y_4 = -5 \text{ [kN]}$$

$$\frac{X_4}{Y_4} = \frac{3}{4}; \quad X_4 = -3,75 \text{ [kN]}$$

$$N_4 = -6,25 \text{ kN} \quad (\swarrow \quad \searrow)$$



1.26. ábra

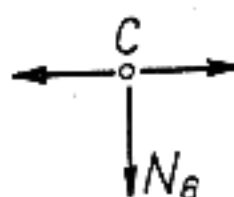
Vízszintes vetületi egyenlet:

$$X = 0 = -3 - 3,75 - N_5$$

$$N_5 = 6,75 \text{ [kN]} \quad (\leftarrow \quad \rightarrow)$$

Különösen alkalmas a csomóponti módszer a vakrudak megkeresésére. (Vakrudaknak nevezzük azokat a rudakat, amelyben a ruderő 0.)

Pl. a C csomópontra ható erőkegyensúlya (1.27. ábra)



1.27. ábra

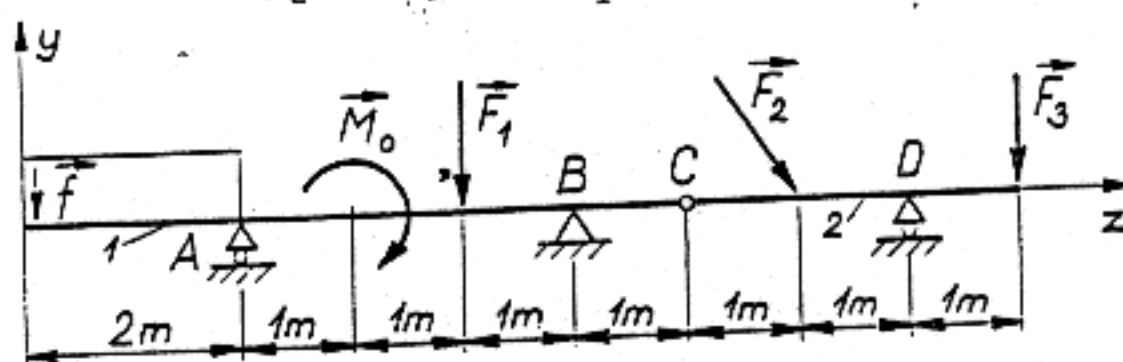
$$Y = 0 = N_6;$$

tehát a 6 jelű rud vakrud.

Hasonlóan mutatható ki, hogy  $N_7 = 0$ .

5.6. Példa Az 1.28. ábrán vázolt összetett szerkezet az ún. Gerbertartók egy típusa.

$$\vec{f} = -2\vec{j} \text{ [kN/m]}; \quad \vec{F}_1 = -4\vec{j} \text{ [kN]};$$



1.28. ábra

$$\vec{F}_2 = -2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ [kN]}; \quad \vec{F}_3 = -6\vec{j} \text{ [kN]}; \quad \vec{M}_0 = 7\vec{i} \text{ [kN.m]}.$$

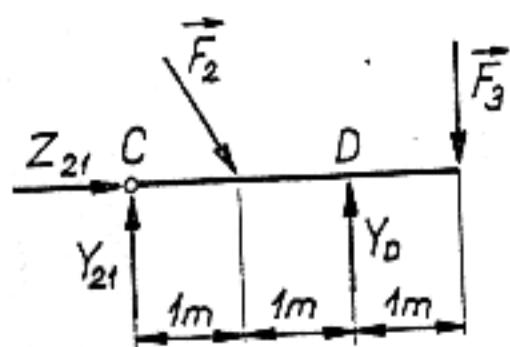
Határozzuk meg a támasztóerőket és a C csuklóban átadódó belső erőket!

Az  $\vec{F}_B = Y_B\vec{j} + Z_B\vec{k}$  támasztóerő  $Z_B$  koordinátája az egész szerkezetre felírt  $z$  irányú vetületi egyenletből számítható:

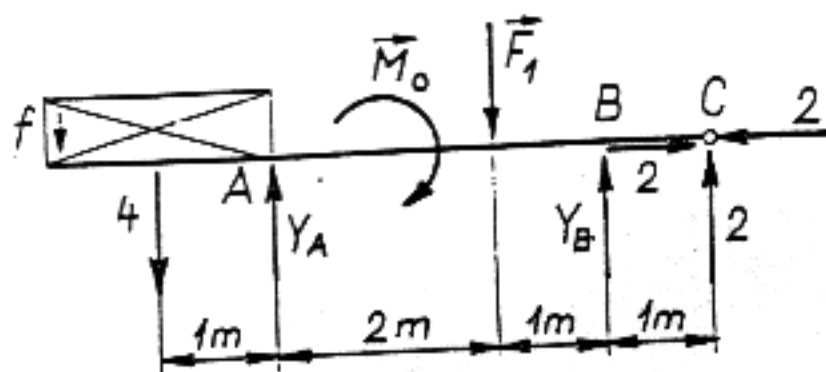
$$(1 + 2) \quad Z = 0 = Z_B + 2$$

$$Z_B = -2 \text{ [kN]}.$$

A támasztó erőrendszer ismeretlen függőleges koordinátáinak számításához a C csuklóban kettéválasztjuk a szerkezetet. A 2 jelű részre ható erők egyensúlyát vizsgáljuk (1.29. ábra).



1.29. ábra



1.30. ábra

Nyomatéki egyenlet a C-n átmenő,  $x$ -el párhuzamos  $c$  tengelyre, majd a D-n átmenő,  $x$ -el párhuzamos  $d$  tengelyre:

$$(2) \quad M_c = 0 = 1.2 - 2 Y_D + 3.6$$

$$Y_D = 10 \text{ [kN]};$$

$$(2) \quad M_d = 0 = 2 Y_{21} - 1.2 + 16$$

$$Y_{21} = -2 \text{ [kN]} = -Y_{21}.$$

Vízszintes vetületi egyenlet

$$(2) \quad Z = 0 = Z_{21} + 2$$



$$Z_{21} = -2 \text{ kN} = -Z_{12}.$$

Az 1 jelű testre ható erők egyensúlya ( $Y_{12}$ ,  $Z_{12}$  felhasználásával) (1.30. ábra).

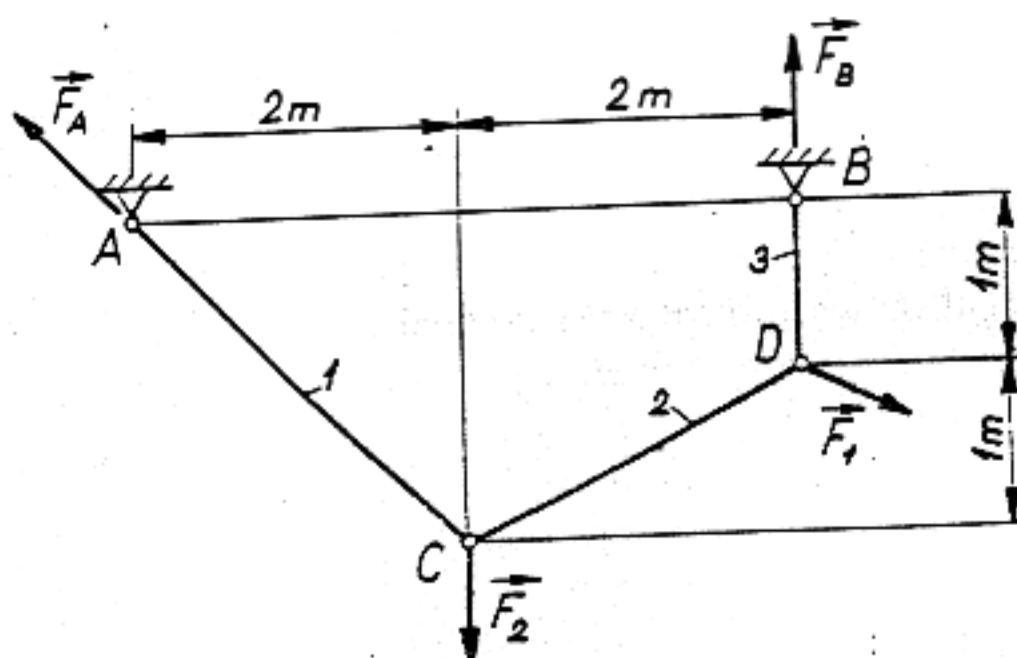
Nyomatéki egyenlet az A-n átmenő, x-el párhuzamos a, illetve a B-n átmenő, x-el párhuzamos b tengelyre:

$$(1) \quad M_a = 0 = -1.4 + 7 + 2.4 - 3 Y_B - 4.2$$

$$Y_B = 1 \text{ [kN]}$$

$$(1) \quad M_b = 0 = -4.4 + 3 Y_A + 7 - 1.4 - 1.2$$

$$Y_A = 5 \text{ [kN]}.$$



1.31. ábra

**5.7. Példa** Az eddig tárgyalt összetett szerkezetek stabilisak voltak, tehát bármely erőrendszerrel terhelve egyensúlyban voltak. A labilis szerkezetek csak bizonyos, különleges terhelő erőrendszer mellett lehetnek egyensúlyban. A labilis szerkezetek egyik igen egyszerű típusa a csuklós rudlanc, amelyben a rudak mindegyike csak két másik testhez kapcsolódik csuklók segítségével. Egy ilyen rudlancot szemléltet az 1.31. ábra.

$\vec{F}_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$  [kN]. Határozzuk meg az adott hatásvonalu  $\vec{F}_2$  erőt és a támasztóerőket!

Mivel mindhárom rud csak a két végén van terhelve, bennük csak rudirányu erők ébrednek. Az A pontban az  $\vec{F}_A$  támasztóerő hatásvonala az 1 jelű, a B pontban az  $\vec{F}_B$  támasztóerő hatásvonala a 3 jelű ruddal esik egybe.

Az egész szerkezetre

$$\vec{F} = \vec{0} = \vec{F}_A + \vec{F}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_B$$

és pl.  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_2$  eredője ( $\vec{F}_0$ ), amely átmegy C-n, át kell, hogy menjen D-n is, (3 erő egyensúlya) tehát hatásvonala a 2. rud.

Igy az egyensúly vektorsokszöge megszerkeszthető (1.32. ábra).

A szerkesztésből

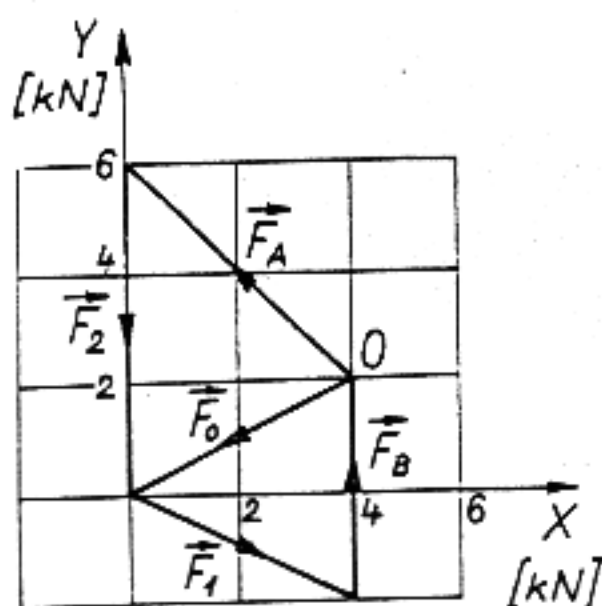
$$\vec{F}_A = -4\vec{i} - 4\vec{j} \text{ [kN]} ;$$

$$\vec{F}_B = 4\vec{j} \text{ [kN]} ;$$

$$\vec{F}_2 = -6\vec{j} \text{ [kN]} .$$

Az 1.32. ábra szerkesztése megegyezik az  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  erőkre 0 pólussal szerkesztett kötelsokszög szerkesztésével.

Általánosságban is kimutatható, hogy a csuklós rudláncot terhelő erőrendszerre mindig rajzolható olyan kötelsokszög, amely átmegy a szerkezet valamennyi csuklóján.



1.32. ábra

## 6. RUDAK IGÉNYBEVÉTELEI (BELSŐ ERŐI)

### 6.1 Rúderő, nyíróerő, hajlítónyomaték és csavarónyomaték értelmezése és számítása

6.1.1 Rud alatt olyan szilárd testet értünk, amelynél a testen belül kijelölhető egy vonalszakasz, hogy a vonalra merőleges bármelyik síkmetszet pontjainak távolsága kicsi a vonalszakasz hosszához képest és ugyanakkor a síkmetszetek nem metszenek egymásba. Ha az így kijelölt vonalszakasz a síkmetszetek súlypontjain megy át, a síkmetszeteket keresztmetszeteknek és a vonalat középvonalnak (vagy súlypontvonalnak) nevezzük. A rudat két szélső keresztmetszete és a palástja határolja.

Középvonala szerint megkülönböztetünk

- egyenes (pl. vasuti kocsik kerék-pár tengelye),
- síkbeli törtvonalu (pl. egyhengeres motorkerékpár főtengelye),
- síkgörbe (pl. ostornyél alakú lámpaoszlop),
- térbeli törtvonalu (pl. többhengeres gépjármű főtengelye),
- térgörbe (pl. hengeres csavarrugó)

rudat. Beszélhetünk továbbá

- állandó keresztmetszetű,
- változó keresztmetszetű

rudról.

A gyakran előforduló, állandó keresztmetszetű, egyenes középvonalu rudat prizmatikus rudnak szokás nevezni.

Az igénybevételek értelmezéséhez többnyire rudhoz kötött koordináta-rendszert választunk. Ennek kezdőpontja legtöbbször egyik szélső (általában bal oldali) keresztmetszetének a súlypontja. Egyenes rudaknál a középvonal mentén a  $z$  tengelyt vesszük fel, míg törtvonalu vagy görbe középvonalu rudak esetén a rudközépvonal mentén mért  $s$  ívkoordinátát használjuk.

A rudra ható – felületen, illetve térfogaton megoszló – erőrendszert a rud középvonalára redukáljuk (v. ö. Dr. Sályi István: Műszaki mechanika II. kötet 10. pont). Mozgó rudak esetén a járulékos (tehetetlenségi) erőrendszereket (l. Dr. Sályi István: Műszaki mechanika II. kötet 16. pont) is figyelembe kell vennünk.

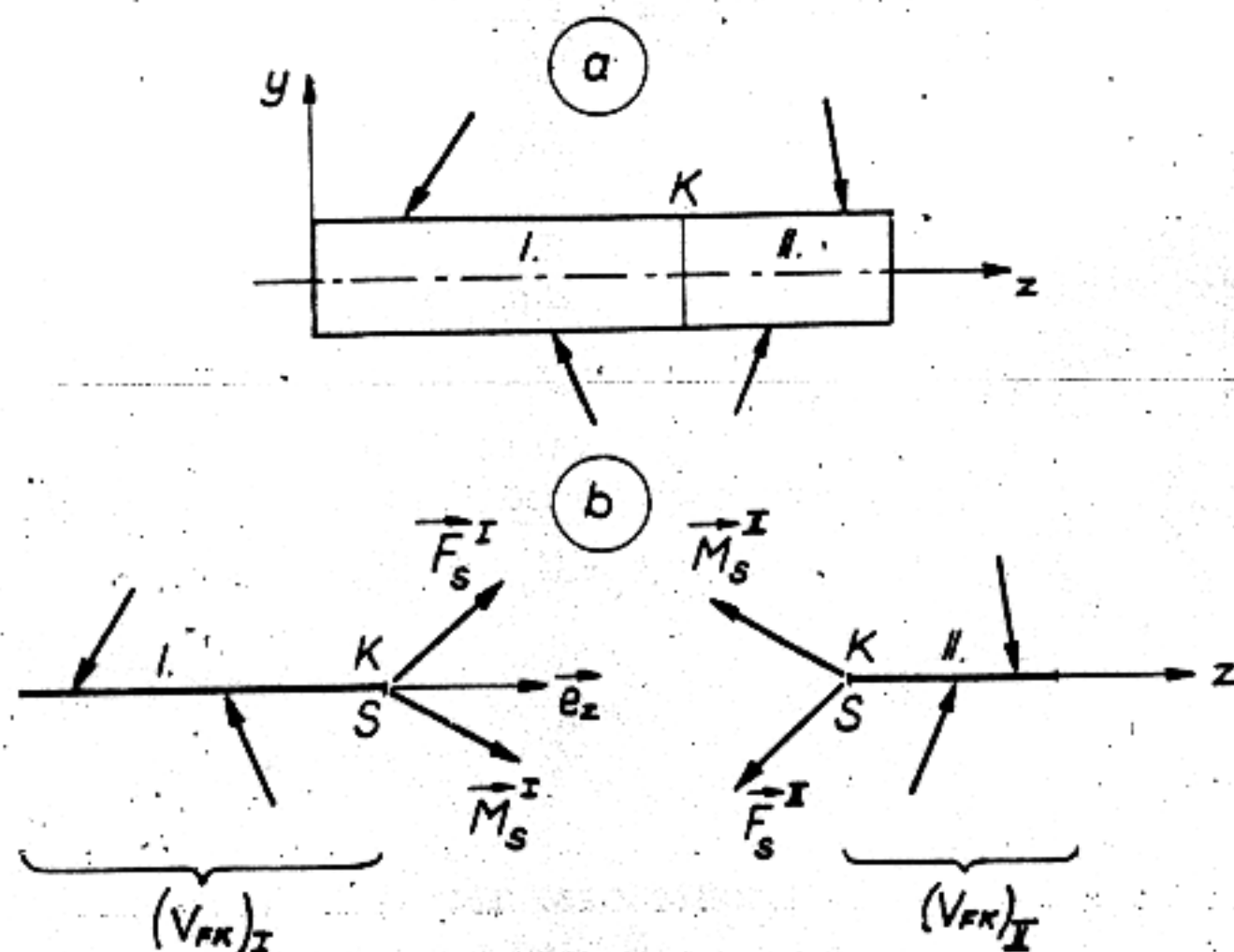
Az erőrendszer hatására a rud középvonala megváltoztatja alakját. Számításainkban ezt a hatást általában figyelmen kívül hagyjuk, vagyis a terheletlen középvonal alapján végezzük el a redukálást.

A 3.1-a ábra egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rudat ábrázol. A K keresztmetszet mentén gondolatban kétfelé vágott rud I (bal oldali) és II (jobb oldali) részét külön-külön a 3.1-b ábrán láthatjuk a középvonalra redukált külső erőkkel. Az elvágási keresztmetszet S súlypontjába berajzoltuk a keresztmetszet mentén ébredő  $\vec{\sigma}_z$ , ill.  $\vec{\sigma}_{-z}$  feszültségek redukálása folytán nyert  $\vec{F}_S^I$ , ill.  $\vec{F}_S^{II} = -\vec{F}_S^I$  feszültségi eredő erőt és  $\vec{M}_S^I$ , ill.  $\vec{M}_S^{II} = -\vec{M}_S^I$  feszültségi eredő erőpárt. Ezen mennyiségek az egyik rudrészre ható külső és belső erőrendszer mechanikai egyensúlyának feltételéből, a  $\vec{\sigma}_z$  ismerete nélkül meghatározhatók.

Ha az I (bal oldali) részre ható külső erőrendszernek  $(V_{FK})_I$ , a II (jobb oldali) részre ható  $(V_{FK})_{II}$ , az egész rudra ható erőrendszernek pedig  $(V_{FK})$  a jele, akkor az egész rud egyensúlyából következik, hogy

$$(V_{FK}) = (V_{FK})_I + (V_{FK})_{II} \stackrel{m}{=} (\vec{0}), \quad (3.1)$$

ahol  $(\vec{0})$  egyensúlyi erőrendszert jelent, és a  $\stackrel{m}{=}$  jelölés a nyomatéki térre vonatkozó egyenértékűséget fejezi ki.



3.1 ábra

Az egyes rudrészek a rájuk ható  $(V_{FK})_I$ , ill.  $(V_{FK})_{II}$  külső erőrendszer és az  $\vec{F}_S^I$ , ill.  $\vec{F}_S^{II}$  feszültségi eredő erő, valamint az  $\vec{M}_S^I$ , ill.  $\vec{M}_S^{II}$



feszültségi eredő erőpár hatására egyensúlyban vannak. Így

$$(V_{FK})_I + (\vec{F}_S^I; \vec{M}_S^I) \stackrel{m}{=} \vec{0} \quad (3.2)$$

és

$$(V_{FK})_{II} + (\vec{F}_S^{II}; \vec{M}_S^{II}) \stackrel{m}{=} \vec{0}. \quad (3.3)$$

A (3.1) és (3.2) alapján az I rudrész K keresztmetszetének súlypontjába redukált vektorkettős egyenértékű a II rudrészre ható külső erőrendszerrel (illetve ennek a K keresztmetszet súlypontjába redukált vektorkettősével):

$$(\vec{F}_S^I; \vec{M}_S^I) \stackrel{m}{=} (V_{FK})_{II} \quad (3.4)$$

Hasonlóképpen (3.1) és (3.3)-ból a II rudrész K keresztmetszetének súlypontjába redukált vektorkettős egyenértékű az I rudrészre ható külső erőrendszerrel:

$$(\vec{F}_S^{II}; \vec{M}_S^{II}) \stackrel{m}{=} (V_{FK})_I \quad (3.5)$$

Az esetek döntő többségében ez utóbbi két egyenletet használjuk fel a feszültségi eredő erő és feszültségi eredő erőpár meghatározására. Ezen vektorok összetevőit (3.2 ábra), illetve a később ismertetésre kerülő előjelszabály szerint vett skalár koordinátáit igénybevételeknek nevezzük.

Egyenes rudak esetén:

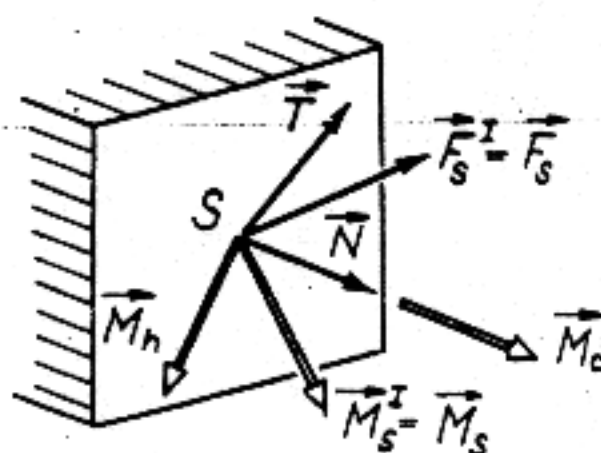
$$\vec{F}_S^I = \vec{F}_S = \vec{T} + \vec{N},$$

ahol a feszültségi eredő erő keresztmetszet síkjába eső  $\vec{T}$  összetevője a nyiróerő, a keresztmetszet síkjára merőleges  $\vec{N} = N \vec{e}_z$  összetevője pedig a ruderő;

$$\vec{M}_S^I = \vec{M}_S = \vec{M}_h + \vec{M}_c,$$

ahol a feszültségi eredő erőpár keresztmetszet síkjába eső  $\vec{M}_h$  összetevője a hajlítónyomaték,

a keresztmetszet síkjára merőleges  $\vec{M}_c = M_c \vec{e}_z$  összetevője pedig a csavarónyomaték, azaz



3.2 ábra

$$\vec{N} = \vec{e}_z N = \vec{e}_z (\vec{F}_S \cdot \vec{e}_z);$$

$$\vec{T} = \vec{e}_z \times (\vec{F}_S \times \vec{e}_z);$$

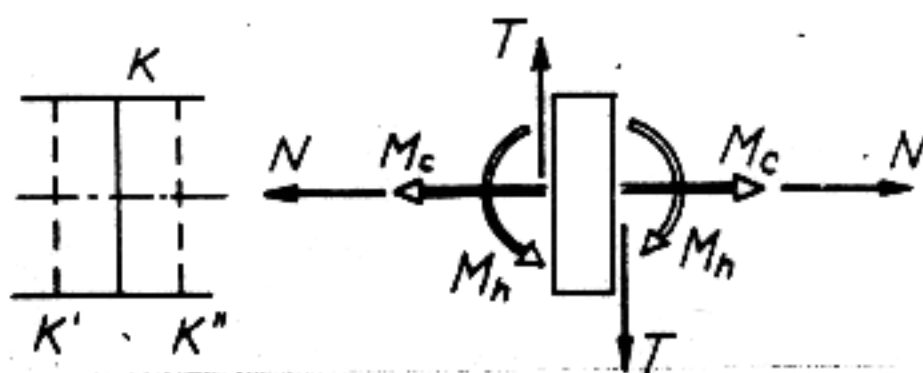
$$\vec{M}_c = \vec{e}_z M_c = \vec{e}_z (\vec{M}_S \cdot \vec{e}_z);$$

$$\vec{M}_h = \vec{e}_z \times (\vec{M}_S \times \vec{e}_z).$$

Megemlítjük azonban, hogy olyan keresztmetszetek esetében, amelyek nem rendelkeznek két szimmetriatengellyel, a fentiektől eltérő a csavarónyomaték értelmezése; erre a kérdésre majd a 9. fejezet 9.8.2 alpontjában térünk ki.

A feladatok nagy részénél választható olyan koordinátarendszer, amelynek alkalmazása esetén a nyíróerő minden keresztmetszetben párhuzamos az egyik koordinátatengellyel, a hajlítónyomaték pedig a másikkal. Ebben az esetben  $T$  nyíróerőről és  $M_h$  hajlítónyomatékról beszélünk.

Az igénybevételeket a  $K$  keresztmetszet közvetlen környezetében felvett  $K'$  és  $K''$  keresztmetszetekkel határolt elemi rudszakaszon szemléltethetjük (3.3 ábra). A  $K''$  keresztmetszeten az  $\vec{e}_z$  normális  $K$  keresztmetszethez tartozó  $\vec{F}_S^I = \vec{F}_S$  feszültségi eredő erő és  $\vec{M}_S^I = \vec{M}_S$  feszültségi eredő erőpár, míg a  $K'$  keresztmetszeten a  $-\vec{e}_z$  normális  $K$  keresztmetszethez tartozó  $\vec{F}_S^{II} = -\vec{F}_S$ , ill.  $\vec{M}_S^{II} = -\vec{M}_S$  vektorok komponenseit tűntetjük fel.



3.3 ábra

Az igénybevételek skalárkoordinátáira vonatkozó önkényesen választott előjelszabályt az elemi rudszakasz, és annak jelképes ábrázolásával, az alábbi táblázat adja: (lásd 49. oldalon).

A pozitív előjelű  $N$  ruderő a rudszakaszt huzásra, a negatív előjelű pedig nyomásra veszi igénybe.

Ha a vizsgált keresztmetszetben csak egyfajta igénybevétel – pl. csavarás – lép fel, akkor egyszerű igénybevételről beszélünk. Ellenkező esetben a keresztmetszet igénybevétele összetett.

Ezen előjelszabály értelemszerűen alkalmazható minden síkbeli törtvonalu rudra és síkgörbe rudra. Ebben az esetben a rud középvonala mentén felvett s ívkoordináta jellemzi az egyes keresztmetszetek helyét. Így a  $K$  keresztmetszet mentén kettévágott rud (3.4 ábra) esetén a "bal oldali" és "jobb oldali" résznek a

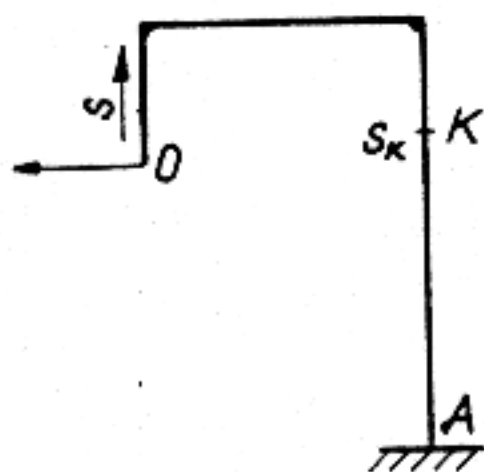
| Igénybevétel   |                      | Pozitív előjelű<br>(+) | Negatív előjelű<br>(-) |
|----------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| jele           | neve                 |                        |                        |
| N              | runderő              |                        |                        |
| T              | nyiróerő             |                        |                        |
| M <sub>c</sub> | csavaró-<br>nyomaték |                        |                        |
| M <sub>h</sub> | hajlító-<br>nyomaték |                        |                        |

$$0 \leq s \leq s_K,$$

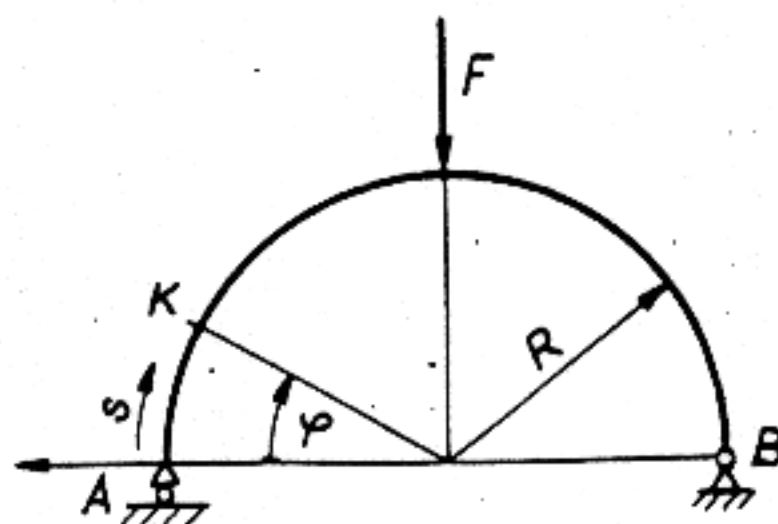
illetve

$$s_K < s \leq s_A$$

rudszakasz felel meg, ahol  $s_K$  a K keresztmetszet,  $s_A$  az A keresztmetszet ivkoordinátája. Ilyenkor az igénybevételek előjelét a 3.1 táblázat segítségével úgy dönthetjük el, hogy az elemi rudszakaszt – egyezőnek vett  $s$  és  $z$  irányokkal – gondolatban vízszintes helyzetbe forgatjuk.



3.4 ábra



3.5 ábra

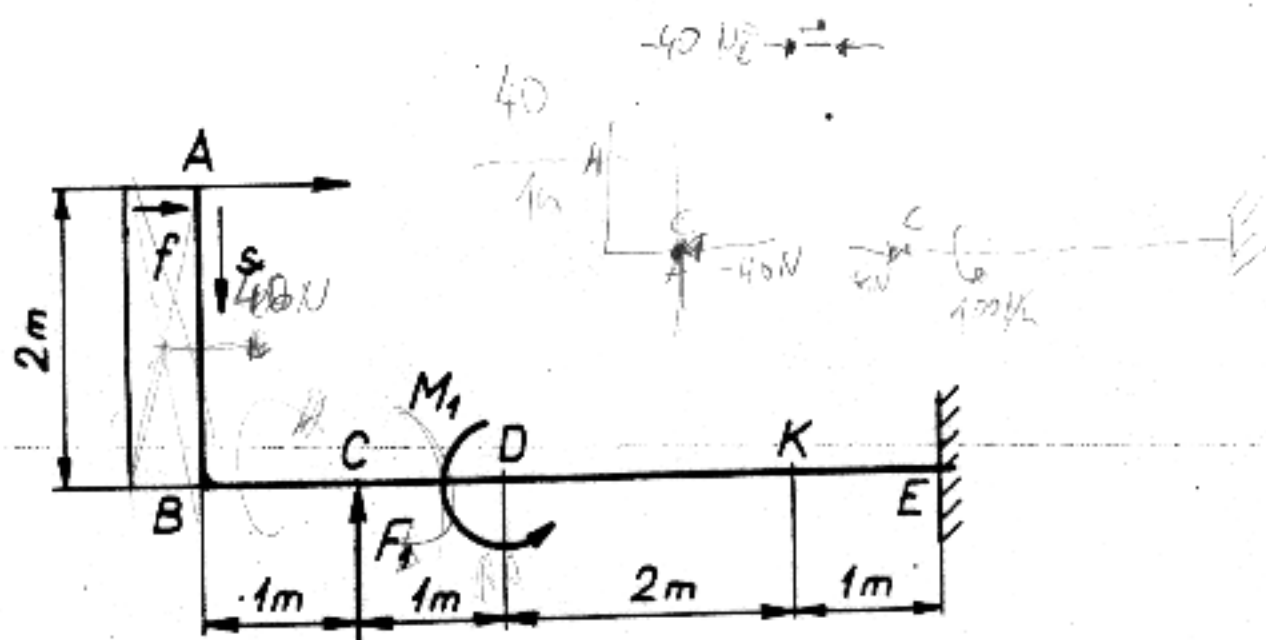
Hasonló a helyzet síkgörbe rudak esetén. Ilyenkor az elemi rudszakasz a középvonal érintőjének irányába esik. Körív alakú rudnál (3.5 ábra) a  $K$  keresztmetszetet az  $s$  ívkoordináta helyett a  $\varphi$  középponti szöggel is megadhatjuk.

Ha a rud középvonala síkgörbe és a külső erőrendszer a középvonal síkjában hat, akkor csavarónyomaték a rud egyik keresztmetszetét sem terheli. Ilyen esetben a hajlítónyomatékot  $M_h$  helyett  $M$ -mel is jelölhetjük.

Abban a  $K$  keresztmetszetben, amelyben koncentrált erő, illetve erőpár hat, nincs értelme igénybevételről beszélni. Ilyen esetben csak a koncentrált terhelést megelőző  $K^-$ , illetve követő  $K^+$  keresztmetszet vizsgálatának van értelme. Hasonló megfontolással élünk törtvonalu tartó töréspontja esetén, mert a töréspontnál nincs értelme a keresztmetszetnek. Ezekre a példák során kitérünk.

P.1 példa. Határozzuk meg a 3.6 ábrán látható síkbeli keretrud néhány keresztmetszetének igénybevételét.

A törtvonalu rudat az  $AB$  szakaszon  $f = 20 \text{ N/m}$  sűrűségű megoszló erőrendszer,  $F_1 = 60 \text{ N}$  koncentrált erő és  $M_1 = 100 \text{ N.m}$  nyomatéku koncentrált erőpár, valamint a befogásnál  $(E)$  ébredő támasztó erőrendszer terheli. A külső erőrendszer síkja egybeesik a rud középvonalának síkjával, így a csavarónyomaték minden keresztmetszetben zérus.



60N 3.6 ábra

Az ábrán bejelölt  $K$  keresztmetszet igénybevételét – a támasztó erőrendszer ismerete nélkül – meghatározhatjuk akár a "bal oldali" (ABCDK) rudrész egyensúlyából, akár a "bal oldali" rudrészre ható külső erőrendszernek a "jobb oldali" (KE) rudrész  $K$  keresztmetszete súlypontjába történő redukálásával.

Az első esetben az elemi rudrész jobb oldali végén, míg a második esetben a bal oldali végén fellépő erőket, ill. nyomatékokat kapjuk meg.

A támasztó erőrendszer ismeretében a  $K$  keresztmetszet igénybevételének meghatározására még két lehetőség van:



- a "jobb oldali" (KE) rudrész egyensúlyából az elemi rudrész bal oldalának súlypontjában ébredő vektorkettőshöz jutunk;
- míg a "jobb oldali" rudrészre ható külső erőrendszernek a "bal oldali" (ABCDK) rudrész K keresztmetszete súlypontjába történő redukálásával az elemi rudrész jobb oldalának súlypontjában ébredő vektorkettőt kapjuk meg.]

A "bal oldali" rudrész egyensúlyából számolva a K keresztmetszet S súlypontjában ébredő feszültségi eredő erő – figyelembe véve, hogy a megoszló erőrendszert centrális egyenesén  $\vec{F}_0 = 40 \vec{k}$  [N] erővel helyettesíthetjük –

$$\vec{F}_S = -60 \vec{j} - 40 \vec{k} \text{ [N]}.$$

A feszültségi eredő erőpár pedig

$$\vec{M}_S = (-1.40 - 3.60 + 100) \vec{i} = -120 \vec{i} \text{ [N} \cdot \text{m]}.$$

A "bal oldali" rudrészre ható külső és belső erőrendszert a 3.7-a ábrában rajzoltuk meg.

Az 1. táblázatbeli előjelszabályt alkalmazva – az elemi rudrész jobb oldalán fellépő mennyiségeket ismerve – a rud K keresztmetszetének igénybevétele

a ruderő:

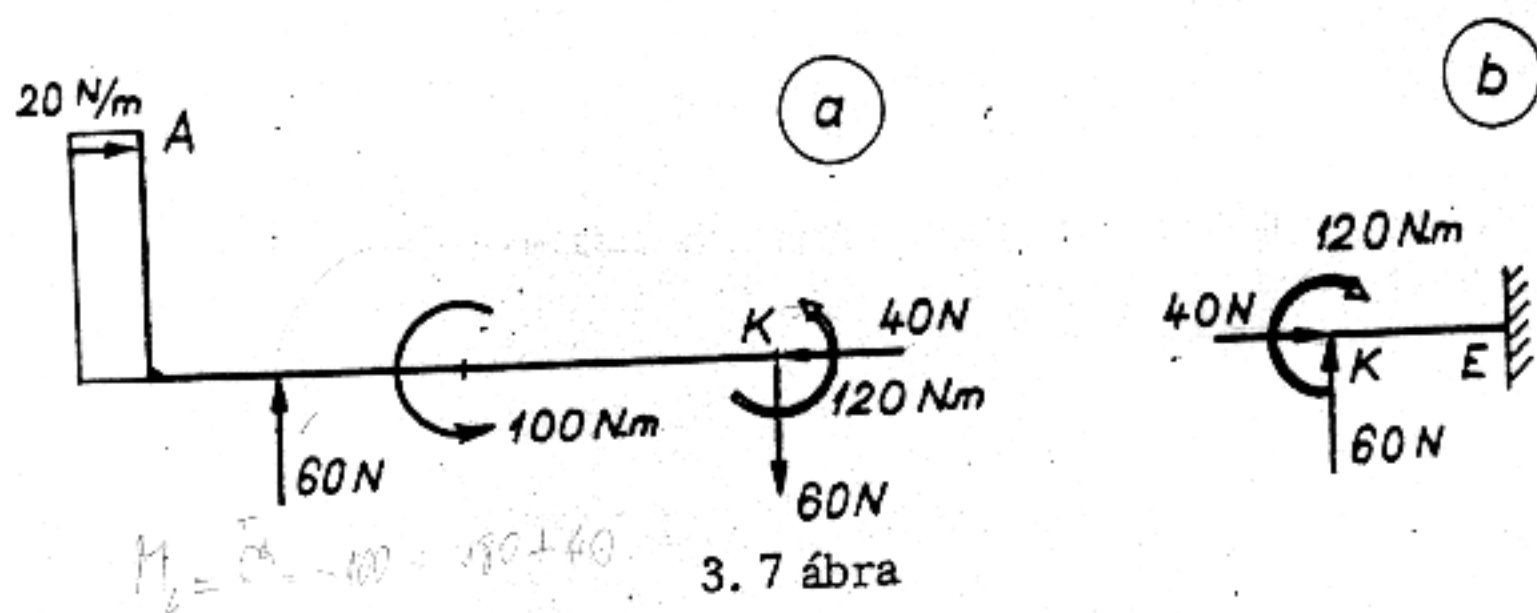
$$N_K = -40 \text{ N } (\rightarrow \leftarrow);$$

a nyíróerő:

$$T_K = 60 \text{ N } (\uparrow \downarrow);$$

a hajlítónyomaték:

$$M_{hK} = -120 \text{ N} \cdot \text{m } (\curvearrowright \curvearrowleft).$$



Célravezetőbb a K keresztmetszet igénybevételét a "bal oldali" részre ható külső erőrendszernek a "jobb oldali" rész K keresztmetszetének súlypontjába történő redukálásával meghatározni, mivel a bal oldali rudrészre ha

tó külső erőrendszer redukált vektorkettőssének komponensei közvetlenül – előjelváltoztatás nélkül – berajzolhatók.

A 3. 7-b ábrán tüntettük fel a redukált vektorkettőst, amely az elemi rudrész bal oldalán levő igénybevételeket szemlélteti. Ez összhangban van az előző módszerrel meghatározott eredményeinkkel.

Hasonló módon határozhatjuk meg a törtvonalu rud többi keresztmetszétének az igénybevételét. Például a  $C^-$  keresztmetszet igénybevétele – a "baloldali (elmaradó) részre ható külső erőrendszernek a redukálása alapján – (1. 3. 8-a ábra)

$$N_{C^-} = -40 \text{ N } (\rightarrow \leftarrow),$$

$$T_{C^-} = 0,$$

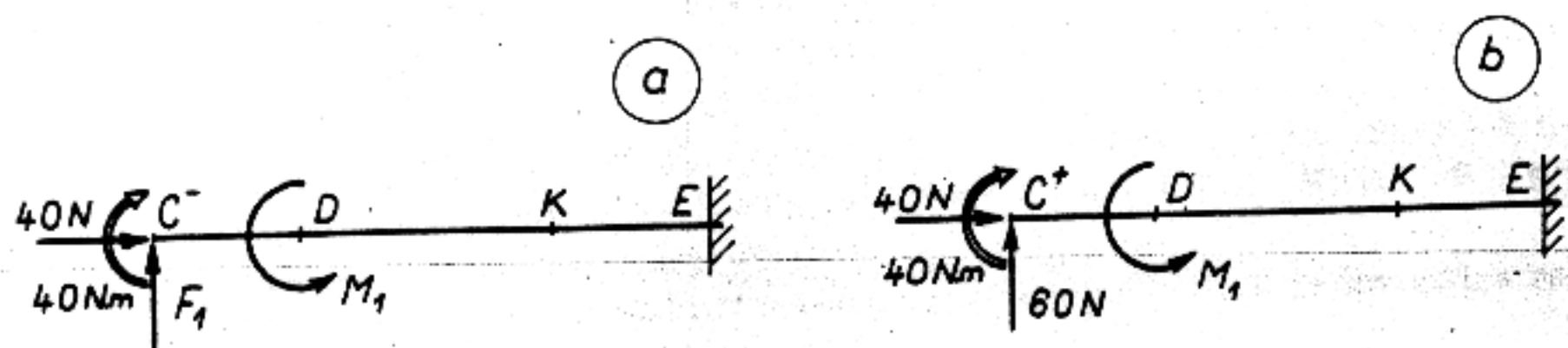
$$M_{hC^-} = -40 \text{ N.m } (\curvearrowright \curvearrowleft).$$

Míg a  $C^+$  keresztmetszet igénybevétele – hasonlóan számolva – (3. 8-b ábra)

$$N_{C^+} = -40 \text{ N } (\rightarrow \leftarrow),$$

$$T_{C^+} = 60 \text{ N } (\uparrow \downarrow),$$

$$M_{hC^+} = -40 \text{ N.m } (\curvearrowright \curvearrowleft).$$



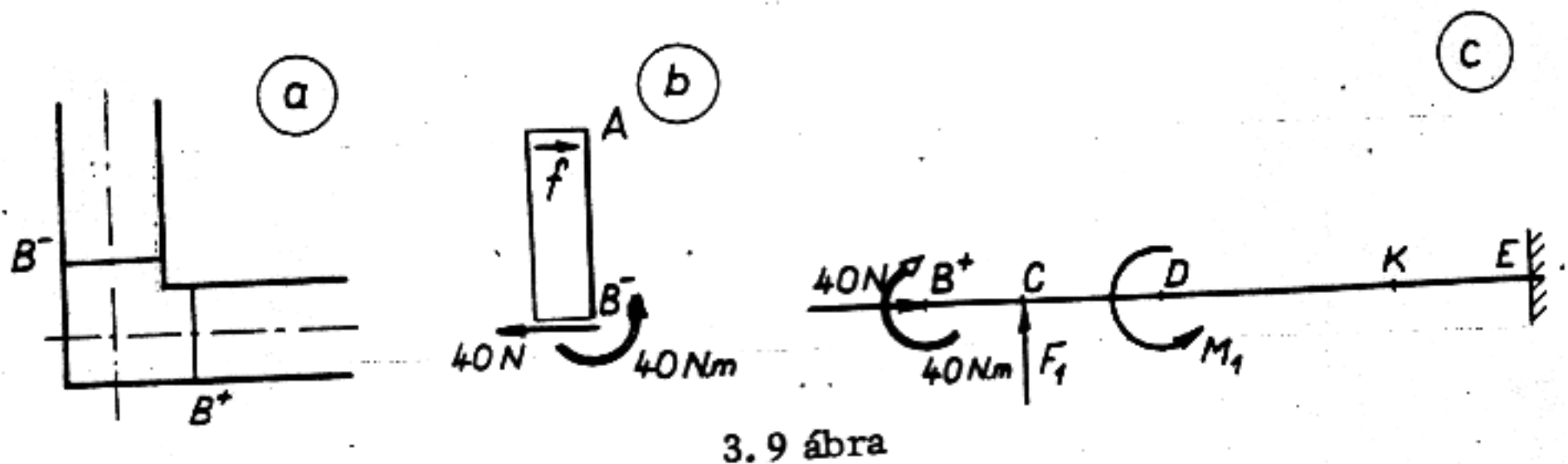
3. 8 ábra

A 3. 6 ábrán szereplő keretrud B keresztmetszete helyett – mivel ez a töréspontnál van – csak a  $B^-$ , ill.  $B^+$  (3. 9-a ábra) keresztmetszetek igénybevétele számítható ki. A 3. 9-b és 3. 9-c ábrák alapján – redukálással számolva – a  $B^-$ , ill.  $B^+$  keresztmetszet igénybevétele:

$$N_{B^-} = 0, \quad \text{ill.} \quad N_{B^+} = -40 \text{ N } (\rightarrow \leftarrow),$$

$$T_{B^-} = 40 \text{ N } (\uparrow \downarrow), \quad \text{ill.} \quad T_{B^+} = 0,$$

$$M_{hB^-} = -40 \text{ N.m } (\curvearrowright \curvearrowleft), \quad \text{ill.} \quad M_{hB^+} = -40 \text{ N.m } (\curvearrowright \curvearrowleft).$$



3.9 ábra

Megjegyezzük, hogy a  $B^-$  keresztmetszetet terhelő hajlítónyomaték közeli érték, hiszen a rudközépvonalak metszéspontjára számítottuk a nyomatékokot.

Mivel a keresztmetszet méretei a rud hosszirányu méretéhez képest kicsinyek, minden esetben így szokás eljárni.

## 6.2 Síkbeli terhelésű egyenes rudak és síkbeli törtvonalú tartók igénybevételi ábrái

Az igénybevételek általában keresztmetszetről-keresztmetszetre változnak. Ha az igénybevételeket a rud középvonala mentén egyenes rudak esetében a  $z$ , törtvonalu rud esetén az  $s$  ivkoordináta függvényeként ábrázoljuk, az igénybevételi ábrákat (belső erők ábráit) kapjuk.

A rud egyenes szakaszain a ruderőábra és a csavarónyomatéki ábra – az esetek többségében – állandó szakaszokból áll.

Kissé bonyolultabb már egyenes rudszakaszoknál is a rud középvonalra merőleges terhelésből adódó nyíróerő és hajlítónyomatéki ábra.

Az igénybevételi ábrák megrajzolását a 3.10 ábra kapcsán mutatjuk meg.

A befalazott rud terhelése: a tárcsák területén működő  $F_1$  és  $F_2$  erő, valamint a támasztóerőrendszer.

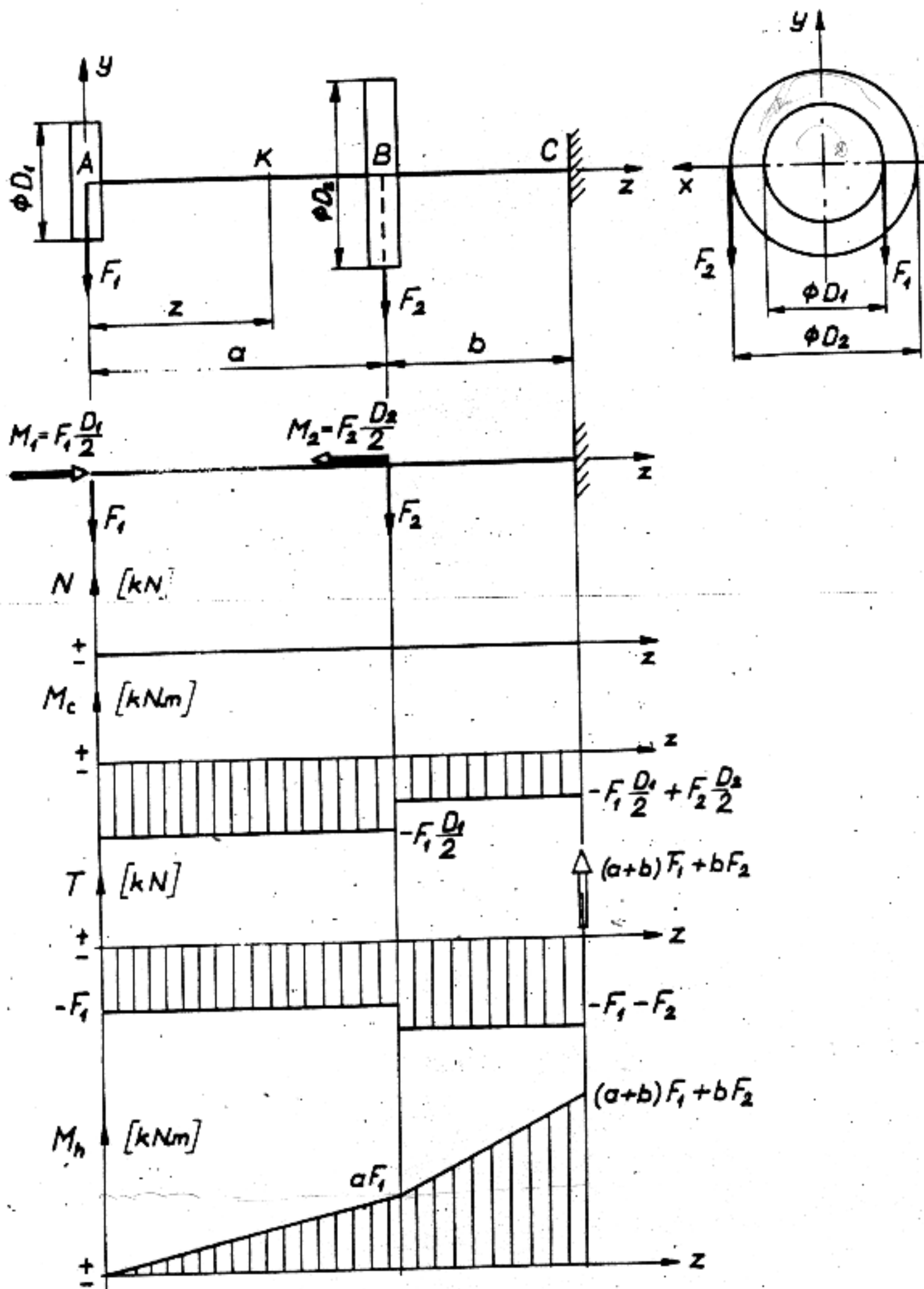
Első lépésben a tárcsák területén ébredő erőket a rudközépvonalba redukáljuk. Az  $F_1$  és  $F_2$  erőkn kívül az

$$M_1 = F_1 \frac{D_1}{2} \quad \text{és} \quad M_2 = F_2 \frac{D_2}{2}$$

nyomatéku erőpárokat is a rudközépvonalba rajzoltuk.

A rudra ható erőrendszerből következik, hogy a  $N = N(z)$  ruderő a tartó hossza mentén zérus. A csavarónyomaték szakaszonként állandó:

az AB szakaszon bárhol választott  $K$  keresztmetszetben



3.10 ábra

$$M_c = M_c(z) = -F_1 \frac{D_1}{2} ;$$

a BC szakaszon pedig

$$M_c = M_c(z) = -F_1 \frac{D_1}{2} + F_2 \frac{D_2}{2} .$$



Mivel a tartót az  $yz$  síkkal párhuzamos erőrendszer terheli, ezért  $T_x$  nyíróerő és  $M_{hy}$  hajlítónyomaték nem lép fel. Ilyen esetben  $T_y$  helyett  $T$ -vel, illetve  $M_{hx}$  helyett  $M_h$ -val szokás jelölni az igénybevételeket.

A nyíróerő – a csavarónyomatékhoz hasonlóan – szakaszonként állandó.  
Az  $AB$  szakaszon bárhol választott  $K$  keresztmetszetben

$$T = T(z) = -F_1,$$

a  $BC$  szakaszon pedig

$$T = T(z) = -F_1 - F_2 = -(F_1 + F_2).$$

Koncentrált erőkkel terhelt egyenes tartón a nyíróerő szakaszonkénti állandó. A koncentrált erők helyén az ábrában szakadás van. Az ugrás értéke a koncentrált erővel egyezik meg.

A hajlítónyomaték  $M_h(z)$  függvényének meghatározásához szintén külön-külön kell megvizsgálni a két tartószakaszt.

Az  $AB$  szakaszon választott  $K$  keresztmetszetben a hajlítónyomaték – az elmaradó bal oldali részre ható erőrendszernek a  $K$  keresztmetszet súlypontjába történő redukálásával –

$$M_h(z) = F_1 z,$$

míg a  $BC$  szakaszon

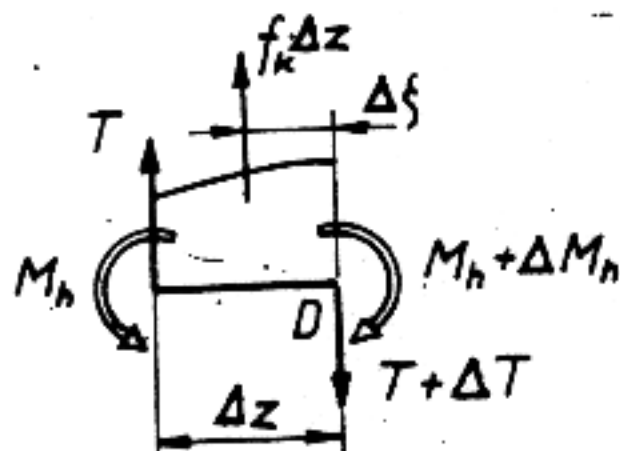
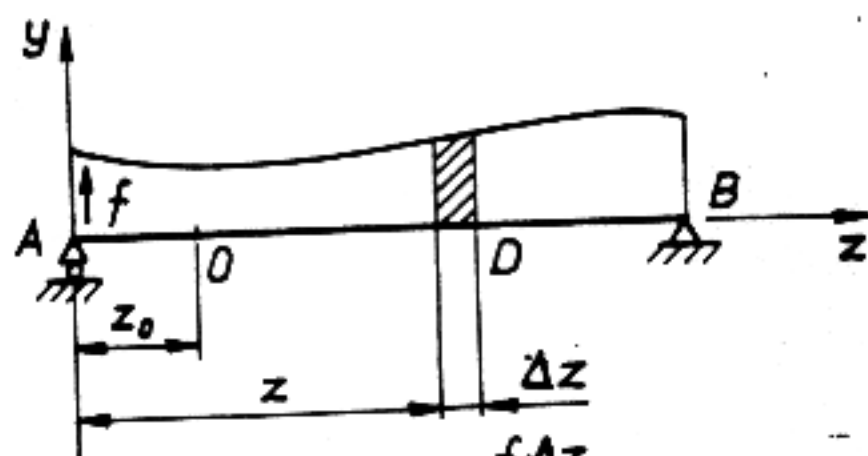
$$M_h(z) = F_1 z + F_2 (z - a).$$

Koncentrált erőkkel terhelt egyenes tartón a hajlítónyomatéki ábra egymáshoz kapcsolódó ferde egyenes szakaszokból áll. A koncentrált erők helyén az ábrában törés található. Az elmondottak szerint a terhelés, a nyíróerőábra és a hajlítónyomatéki ábra között szoros kapcsolat van.

A továbbiakban a 3.11 ábrán vázolt  $\vec{f}(z) = \vec{e}_y f(z)$  sűrűségű megoszló erőrendszerrel terhelt tartó esetén összefüggést keresünk a rudra mérőleges  $f(z)$  megoszló terhelés sűrűsége, a  $T(z)$  nyíróerő, valamint az  $M_h(z)$  hajlítónyomaték között.

A 3.11 ábrán megrajzolt rudból két közel fekvő keresztmetszettel kivágunk  $\Delta z$  hosszúságú rudelemet, és rárajzoltuk a külső megoszló terhelést, valamint az elvágás helyein a súlypontokba redukált belső erőrendszert.

A rudelem egyensúlya miatt (a megoszló terhelésnél  $f_k$  közepes sűrűséggel számolva) az  $y$  irányu vetületi egyenlet



3.11 ábra

$$Y = 0 = T - (T + \Delta T) + f_k \Delta z.$$

Ezen vetületi egyenletből

$$f_k = \frac{\Delta T}{\Delta z}.$$

A  $\Delta z \rightarrow 0$  határátmenet esetén

$$\frac{dT}{dz} = f(z), \quad (3.6)$$

azaz a nyíróerő  $z$  koordináta szerinti deriváltja egyenlő a megoszló erőrendszer sűrűségével.

A  $D$  ponton átmenő, a rajz síkjára merőleges  $d$  tengelyre felírt

$$M_d = 0 = M_h - (M_h + \Delta M_h) - T \Delta z - f_k \Delta z \Delta \xi$$

nyomatéki egyenletből

$$\Delta M_h = -T \Delta z - f_k \Delta z \Delta \xi,$$

azaz

$$\frac{\Delta M_h}{\Delta z} = -T - f_k \Delta \xi.$$

A  $\Delta z \rightarrow 0$  határátmenet esetén  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta \xi = 0$ , így

$$\frac{dM_h}{dz} = -T(z), \quad (3.7)$$

és

$$\frac{d^2 M_h}{dz^2} = -\frac{dT}{dz} = -f(z). \quad (3.8)$$

Azaz a hajlítónyomaték  $z$  koordináta szerinti deriváltja egyenlő a nyíróerő negatív értékével, illetve a hajlítónyomaték  $z$  koordináta szerinti második deriváltja egyenlő a megoszló erőrendszer sűrűségének ellentétes előjelű értékével.

A (3. 6) egyenletből

$$dT = f(z) dz.$$

A  $z_0$ - $z$  szakaszon elvégezve az integrálást,

$$T - T_0 = \int_{z_0}^z f(z) dz. \quad (3. 9)$$

Ebből

$$T = T_0 + \int_{z_0}^z f(z) dz. \quad (3. 10)$$

A (3. 7) egyenletből

$$dM_h = - T dz.$$

A  $z_0$ - $z$  szakaszon elvégezve az integrálást,

$$M_h - M_{h0} = - \int_{z_0}^z T(z) dz, \quad (3. 11)$$

amelyből

$$M_h = M_{h0} - \int_{z_0}^z T(z) dz. \quad (3. 12)$$

Azaz a rud  $z_0$  -  $z$  szakaszán az  $f(z)$  megoszló terhelésre területe a nyíróerő megváltozást, a  $T(z)$  nyíróerőre területe – ellenkező előjellel – a hajlítónyomaték megváltozását adja meg.

A (3. 9) és (3. 11) összefüggés – a kiinduló adatok ismeretében – módot ad a nyíróerőre, illetve a hajlítónyomatéki ábra megrajzolására.

Ez a módszer nemcsak megoszló erőrendszerrel terhelt tartók esetére használható. Koncentrált erő, ill. erőpár esetére az alábbi példák kapcsán bemutatott határátmenettel terjeszthető ki.

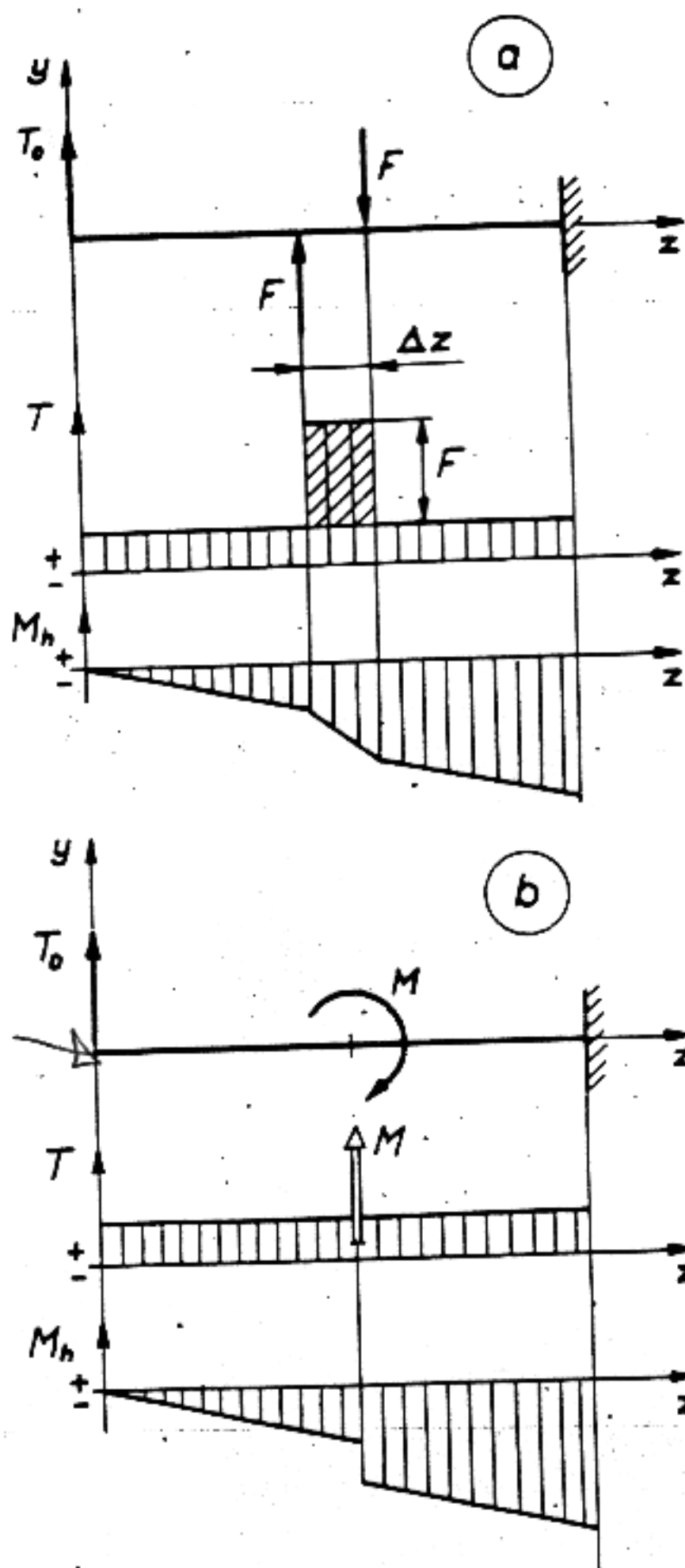
A 3. 12-a ábra egy befalazott rud terhelését, nyíróerőábráját és hajlítónyomatéki ábráját tartalmazza.

Az  $f$  sűrűségű megoszló terhelés  $\Delta z$  hosszon működik. Itt a nyíróerőre ferde egyenes, a hajlítónyomatéki ábra pedig másodfoku parabola.

Ha  $\Delta z$  kicsiny, határértékben az  $F = f\Delta z$  nagyságú erőt csak egy keresztmetszetre ható, a rudközépvonal ( $z$  tengely) egy pontját terhelő koncentrált erőnek foghatjuk fel, és a 3. 12-b ábrán vázolt módon ábrázolhatjuk.







3.13 ábra

bály szerint rajzoljuk be, vagyis, ha a koncentrált nyomaték az óra járásával megegyezően forgat: pozitív irányban (felfele), mivel az  $F\Delta z$  nyomatéku erőpár a 3.13-a ábrájában pozitív területet jelent (ferdén is vonalkázva van ez a terület). Ha ellenkező forgásértelmű, akkor – hasonló okok miatt – negatív irányban (lefele) jelöljük be.

A koncentrált nyomaték helyén a hajlítónyomatéki ábrában ugrás (szakadás) lesz.

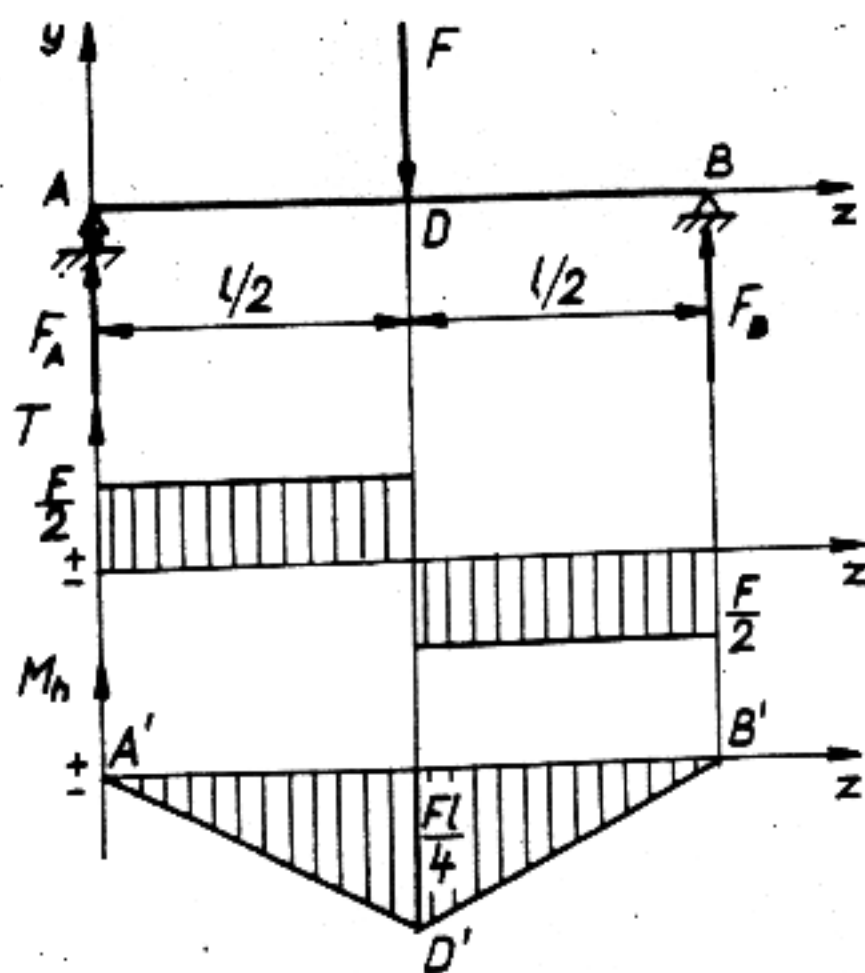
### Példák.

P. 2 példa. A 3. 14 ábrán vázolt  $l$  hosszúságú kéttámaszu tartót középen  $F$ , rudra merőleges irányu koncentrált erő terheli:  $F = 60 \text{ kN}$ ,  $l = 4 \text{ m}$ .

A támasztóerők szintén merőlegesek a rudközépvonalra és a szimmetria folytán egyenlők:

$$F_A = F_B = \frac{F}{2} = 30 \text{ kN},$$

ezért egyetlen keresztmetszetben sincs ruderő:  $N \equiv 0$ .



3. 14 ábra

A nyíróerőábra megrajzolását a rud bal oldali végétől kiindulva kezdhetjük. Az  $A^+$  és  $D^-$  közötti szakaszon a nyíróerő  $T = F_A = 30 \text{ kN}$ .

A  $D$  keresztmetszetben – a koncentrált erő miatt – ugrás van, amely a koncentrált erőnek megfelelő  $-60 \text{ kN}$  értékű. A  $D^+ - B^-$  közötti szakaszon ismét állandó

$$T = -30 \text{ kN} \quad (\downarrow \Rightarrow \uparrow)$$

a nyíróerő. A  $B^+$  keresztmetszetben az  $F_B$  támasztóerőt is figyelembe véve, a nyíróerő zérus.

A rudra ható külső erőrendszer olyan síkbeli erőrendszer, amelynek síkja a rudközépvonalat is tartalmazza. Így a rud egyetlen keresztmetszetét sem terheli csavarónyomaték:  $M_c \equiv 0$ .

A nyíróerőábrából a (3. 11) alapján könnyen megrajzolhatjuk – egyszerű területszámítással – a hajlítónyomatéki ábrát. Mivel a nyíróerő koncentrált erők között állandó, a hajlítónyomatéki ábra ferde egyenesekből áll.

Az A keresztmetszetben – mivel tőle balra nem esik erő – a nyomaték zérus. A D keresztmetszetben a hajlítónyomaték – a megfelelő nyíróerőábra területet  $A_T$ -vel jelölve –

$$M_D = M_A - \int_0^{\frac{\ell}{2}} T dz,$$

$$M_D = M_A - A_T \Big|_0^{\frac{\ell}{2}} = 0 - \frac{F\ell}{4}.$$

Tehát a D keresztmetszetben a hajlítónyomaték – mivel az induló érték zérus –

$$M_D = -60 \text{ kN.m} \left( \curvearrowright \rightarrow \leftarrow \right).$$

Ezen értéket a D keresztmetszetben negatív irányba lemérve, a ferde egyenes D' pontját kapjuk.

A DB szakaszon levő negatív előjellű, előbbi területtel azonos nagyságú nyíróerőábra területet a B keresztmetszet helyén D' pont vízszintesétől pozitív irányban felmérve, a zérusvonalon fekvő B' ponthoz jutunk:

$$M_B = M_D - \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} T dz,$$

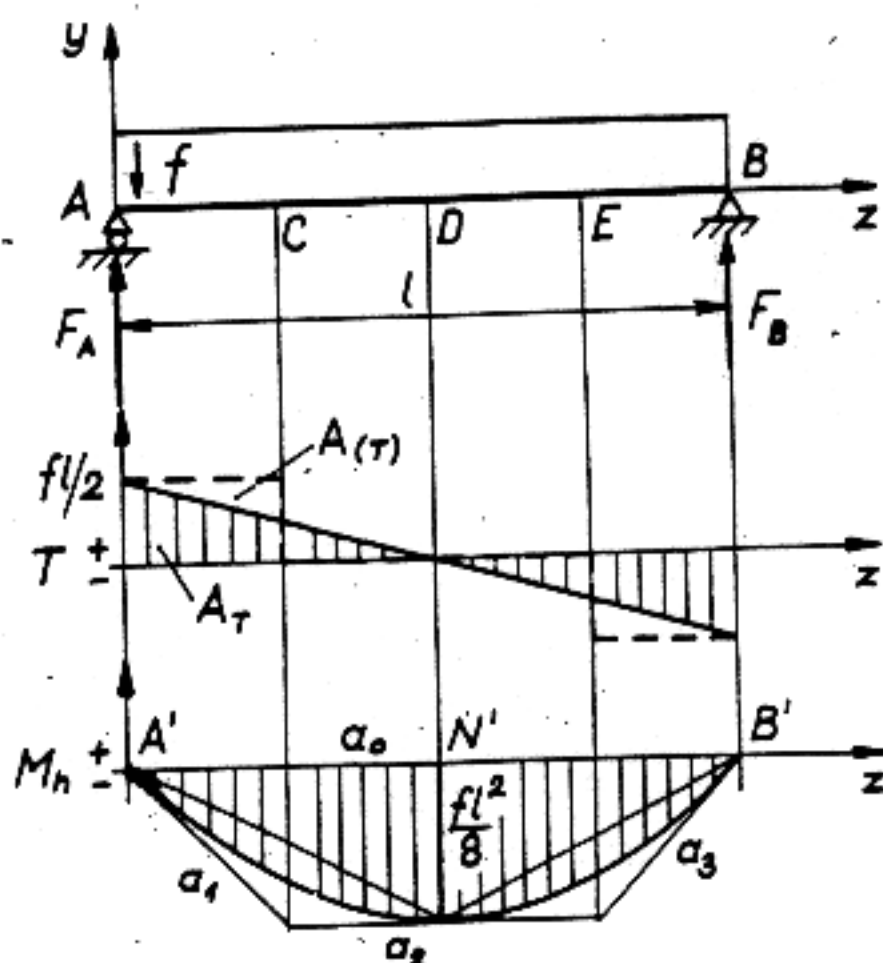
$$M_B = M_D - A_T \Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} = M_D - \left( -\frac{F\ell}{4} \right),$$

$$M_B = 0.$$

Az ábra alapján a legnagyobb hajlítónyomaték a D keresztmetszetben ébred:

$$M_D = \frac{-F\ell}{4} = -60 \text{ kN.m} \left( \curvearrowright \rightarrow \leftarrow \right).$$

P. 3 példa A 3.15 ábrán vázolt kéttámaszu,  $\ell$  hosszúságú tartót a rudra merőleges irányu, egyenletesen megoszló,  $f$  sűrűségű erőrendszer terheli.  $f = 20 \text{ kN/m}$ ,  $\ell = 6 \text{ m}$ . A támasztóerők – a feladat szimmetriájából következően – egyenlők:



3.15 ábra

$$F_A = F_B = \frac{f l}{2} = 60 \text{ kN.}$$

A nyíróerőábrát a (3.9) alapján rajzolhatjuk meg. Az induló nyíróerőérték az  $A^+$  keresztmetszetben

$$T_{A^+} = F_A = 60 \text{ kN} (\uparrow \rightarrow \downarrow) .$$

Az AB szakaszon (az  $A^+$  keresztmetszettől a  $B^-$  keresztmetszetig) lineárisan fog változni a nyíróerő, mert a megoszló terhelés sűrűsége állandó. A  $B^-$  keresztmetszetet terhelő nyíróerő

$$T_{B^-} = F_A - f l = -60 \text{ kN} (\downarrow \rightarrow \uparrow) ,$$

míg a  $B^+$  keresztmetszetben – mivel az egész rud a ráható egyensúlyi erőrendszerrel balra esik –

$$T_{B^+} = 0.$$

Szimmetria okokból a középső D keresztmetszetet

$$T_D = 0$$

nyíróerő terheli.



A hajlítónyomatéki ábra megrajzolásához a folytonos vonallal rajzolt nyíróerőábrát – grafikus integrálás módszere szerint – lépcsős ábrává alakítjuk át. Mivel a nyíróerőábra ferde egyenes, a (3.11) szerint a hajlítónyomatéki ábra másodfoku parabola lesz. A nyomatéki ábra megrajzolásához a 3.15 ábrán szaggatott vonallal bejelölt lépcsős ábrát használtuk fel.

Az előző példához hasonlóan az A és B keresztmetszetben a hajlítónyomaték zérus, így a hajlítónyomatéki ábra A' és B' pontjai az a zérus-vonalra esnek.

A D keresztmetszetben a hajlítónyomaték – a megfelelő nyíróerőábra területet  $A_T$ -vel jelölve –

$$M_D = M_A - \int_0^{\frac{\ell}{2}} T \, dz,$$

$$M_D = 0 - A_T \Big|_0^{\frac{\ell}{2}},$$

A területek azonosságán alapuló lépcsős ábrával számolva, ennek területét  $A_{(T)}$ -vel jelölve,

$$M_D = - A_{(T)} \Big|_0^{\frac{\ell}{2}} = - f \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{4} = - \frac{f \ell^2}{8},$$

azaz

$$M_D = - 90 \, \text{N.m} \quad (\curvearrowright)$$

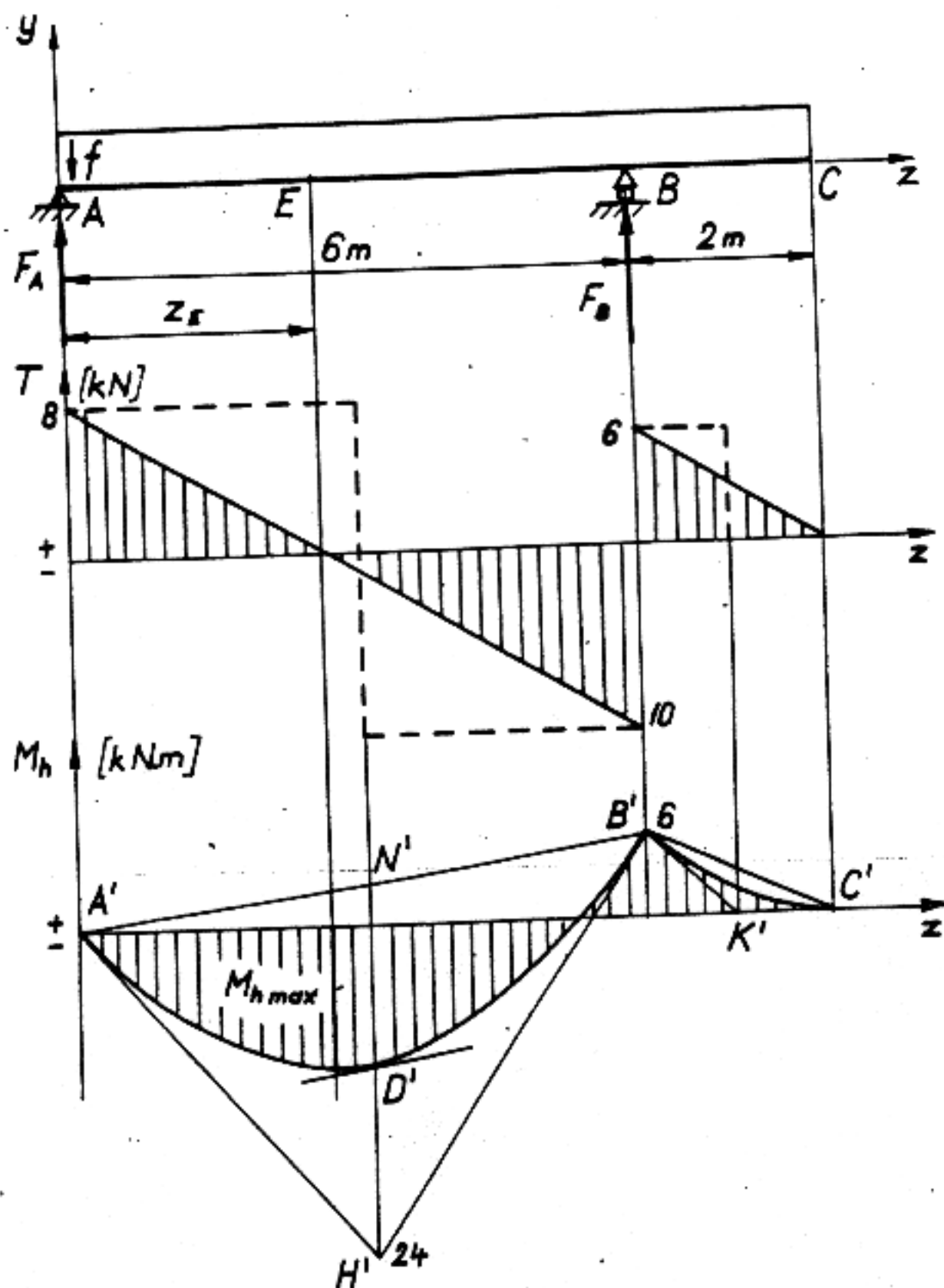
Itt a nyomatéki ábrának az  $a_2$  érintője vízszintes, mivel a CDE szakaszon a lépcsős ábra a tengelyen helyezkedik el. A DEB szakaszon a B' pontbeli  $a_3$  érintő az  $a_1$ -gyel megegyező szöget zár be a vízszintessel, mert – a szimmetria folytán – az  $A^+$  és  $B^-$  pontbeli nyíróerők abszolút értéke megegyezik.

P.4 példa. A 3.16 ábrán vázolt konzolos kéttámaszu tartót az  $f$  sűrűségű, egyenletesen megoszló függőleges erőrendszer terheli.  $f = 3 \, \text{kN/m}$ .

A támasztó erőrendszer – az egyensúlyi egyenletekből számolva –

$$F_A = 8 \, \text{kN} \uparrow, \quad F_B = 16 \, \text{kN} \uparrow.$$

A megoszló erőrendszer sűrűsége állandó, ezért a nyíróerőábra párhuzamos egyenes szakaszból áll a B keresztmetszetnél levő szakadással. A hajlítónyomatéki ábra két másodfoku parabolaiv lesz. Ennek megrajzolásához az AB, illetve BC keresztmetszetek közötti nyíróerőábrából lépcsős ábrát rajzolunk (az ábrán szaggatott vonallal jelöltük). Ebből – az előjelváltást figyelembe véve – az  $A'H'B'K'C'$  egyenes szakaszból álló nyomatéki ábrát kapjuk. Az  $A'$  és  $B'$ , ill.  $B'$  és  $C'$  pontok között a másodfoku parabolák megszerkesztésével a tényleges nyomatéki ábrához jutunk.



3.16 ábra

A hajlítónyomaték-függvénynek relatív szélső értékei azokon a helyeken lesznek, ahol a nyíróerő előjelet vált (E és B keresztmetszetek). A vázolt nyomatéki ábrából láthatóan a tartón az E keresztmetszetben lesz legnagyobb a hajlítónyomaték.

Az E keresztmetszet helyét megadó  $z_E$  távolságot abból a feltételből számítjuk, hogy  $T_E = 0$ , vagyis az E keresztmetszettől balra eső, rudra ható merőleges irányú erők összege zérus:

$$T_E = 0 = F_A - f z_E,$$

$$z_E = \frac{F_A}{f} = \frac{8}{3} \text{ m.}$$

Igy

$$M_{hmax} = M_E = -\frac{1}{2} F_A z_E = -\frac{1}{2} 8 \frac{8}{3} = -\frac{32}{3} \text{ kN} \cdot \text{m.}$$

P. 5 példa. A 3. 17 ábrán vázolt befalazott tartót egyenletesen (lineárisan) változó megoszló terhelés terheli;  $f_{max} = 4 \text{ kN/m}$ .

Az igénybevételi ábrákat a B befalazásnál ébredő támasztóerőrendszer kiszámítása nélkül is megrajzolhatjuk.

A lépcsőssé átalakított megoszló terhelés ábrából előbb az  $a_0 - a_1$  egyenesekből álló ábrát rajzoltuk meg. Az  $A'$  és  $B'$  pontok között szerkesztettük meg a tényleges nyíróerőábrát, amely másodfoku parabola.

A területek azonosságának biztosítása céljából harmadolással lépcsőssé alakított nyíróerőábrából integrálásnak megfelelő területszámítással rajzoltuk meg az  $a'_0$  és  $a'_1$  egyenesekből álló ábrát, majd az  $A''$  és  $B''$  között berajzoltuk a tényleges hajlítónyomatéki ábrát, amely harmadfoku parabola ( $a'_0$  az  $A''$  pontbeli,  $a'_1$  a  $B''$  pontbeli érintő).

A nyíróerőábrából kapott  $T_B$ , ill.  $M_{hB}$  metszék megadja a befalazási támasztóerőrendszer  $F_B$  támasztóerejét, ill.  $M_B$  támasztó erőpárját.

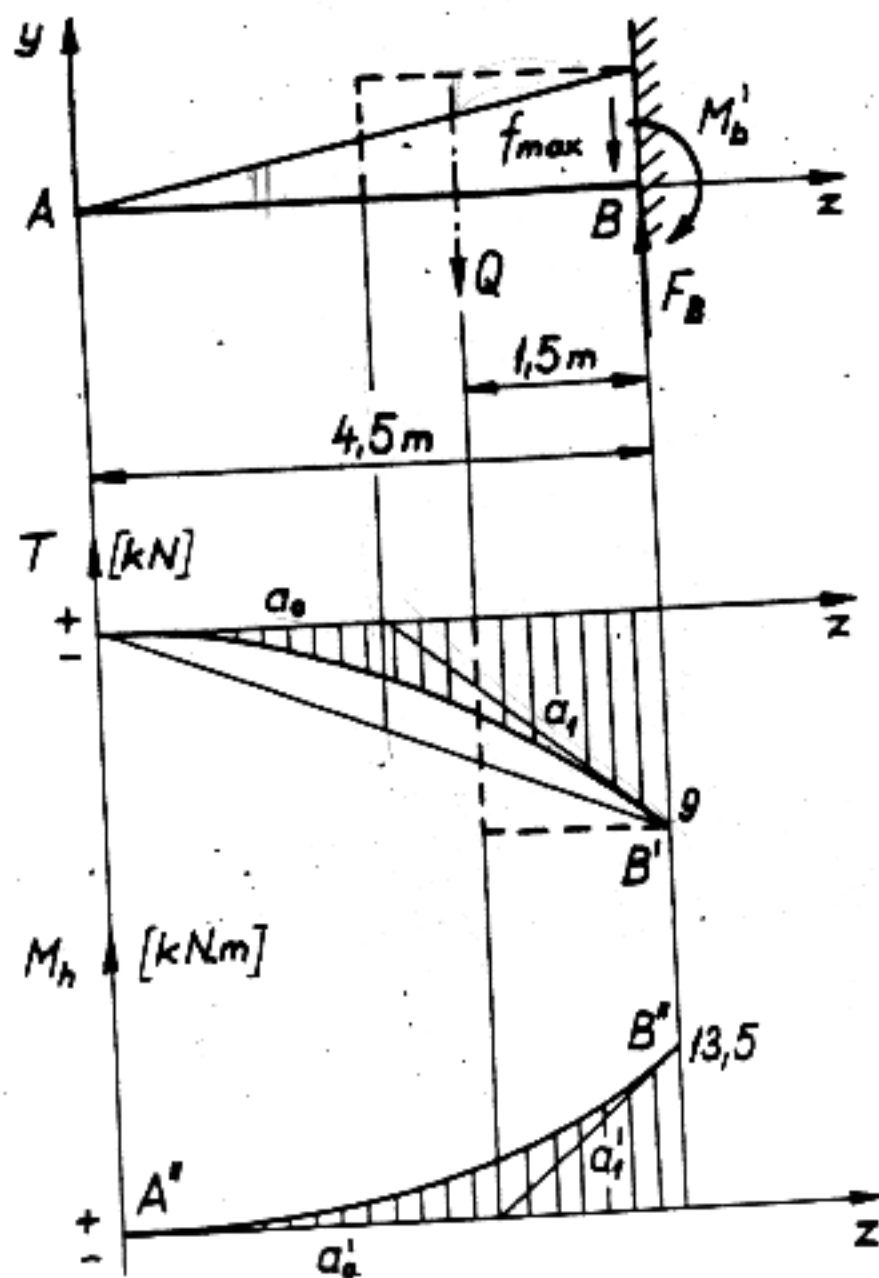
$$T_B = -9 \text{ kN} \left( \downarrow \right);$$

$$F_B = 9 \text{ kN} \uparrow;$$

$$M_{hB} = 13,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \left( \curvearrowright \right);$$

$$M_B = 13,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright.$$

A nyíróerőábrában az  $F_B$ , a hajlítónyomatéki ábrában az  $M_B$  felmérésével jutunk vissza a zérusvonalba.



3.17 ábra

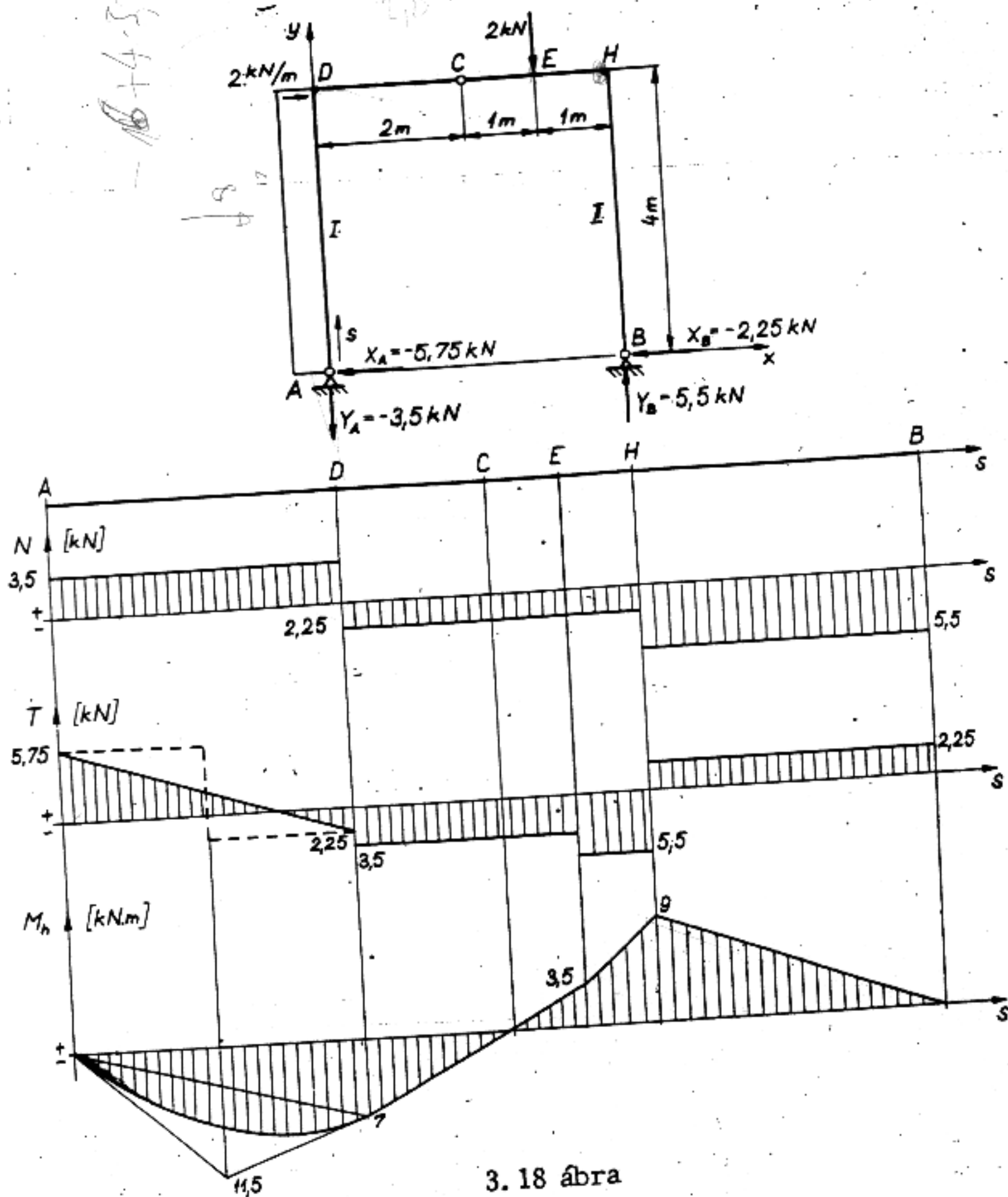
P. 6 példa. A 3.18 ábrán vázolt síkbeli csuklós törtvonalu tartót a síkjába eső erőrendszer terheli. Az egész szerkezet egyensúlyából számolva:  $Y_A = -3,5 \text{ kN}$ ,  $Y_B = 5,5 \text{ kN}$ . Az I jelű törtvonalu rud egyensúlyából  $X_A = -5,75 \text{ kN}$ , s végül az egész szerkezet egyensúlyából  $X_B = -2,25 \text{ kN}$ .

Az igénybevételi ábrákat az A pontból mért  $s$  ívkoordináta függvényében a  $T = T(s)$  és  $M = M(s)$  koordináta-rendszerben rajzoltuk meg balról jobbra haladva.

Az erők irányait, illetve az igénybevételeket az eredeti rudon nézzük és a  $T-s$ , illetve  $M-s$  koordinátarendszerben az előjelszabálynak megfelelően ábrázoljuk.

Törtvonalu tartók esetén a nyíróerő előjelszabályát szemléletesé tehetjük: az  $s$  irányába elindulva, az elmaradó részre ható erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába való redukálása után a balra mutató nyíróerő a pozitív, a jobbra mutató pedig a negatív.

A ruderőábrát és nyíróerőábrát minden egyenes szakaszon külön-külön kell megrajzolni, és ügyelni kell arra, hogy minden egyenes szakasz  $N$  és  $T$  ábrájának megrajzolásakor a szakasz elején – az előző szakasz végétől függetlenül – meg kell határozni az igénybevételeket.



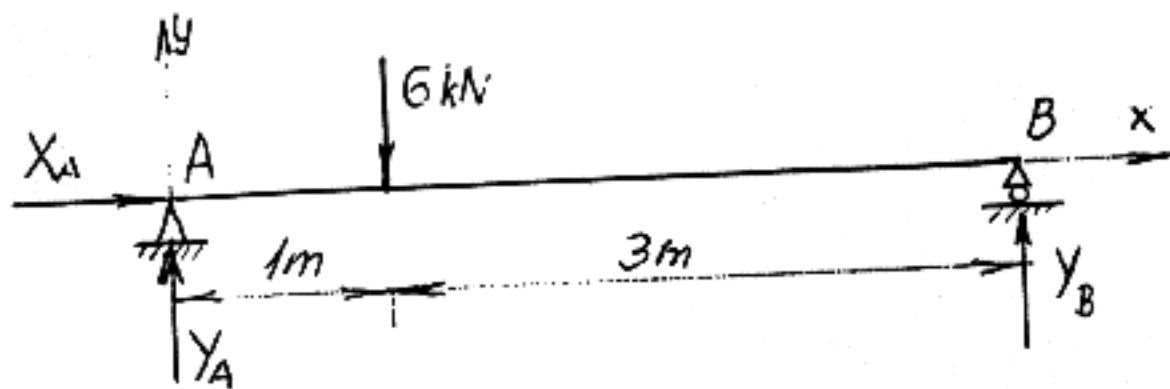
3. 18 ábra

A hajlítónyomatéki ábra a nyíróerőábra alapján készült. Mivel a C csuklóban csak belső erő ébred, nyomatékot nem vihet át, ott  $M_h = 0$ . A C csukló helyén – mivel terheletlen – az  $N$  és  $T$  ábrákban változás nincs, ezért az  $M_h$  ábrában törés sincs.

Egyes esetekben az igénybevételi ábrákat magára a tartóra rajzoljuk rá az előjelszabály figyelembevételével.



MP-I.5.5



$$\vec{F}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}$$

$$\vec{F}_B = Y_B \vec{j}$$

$$X = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

$$M_a = 0 = -1 \cdot 6 + 4 \cdot Y_B \Rightarrow Y_B = 1,5 \text{ kN}$$

$$M_b = 0 = 3 \cdot 6 - 4 \cdot Y_A \Rightarrow Y_A = 4,5 \text{ kN}$$

ellenőrzés:

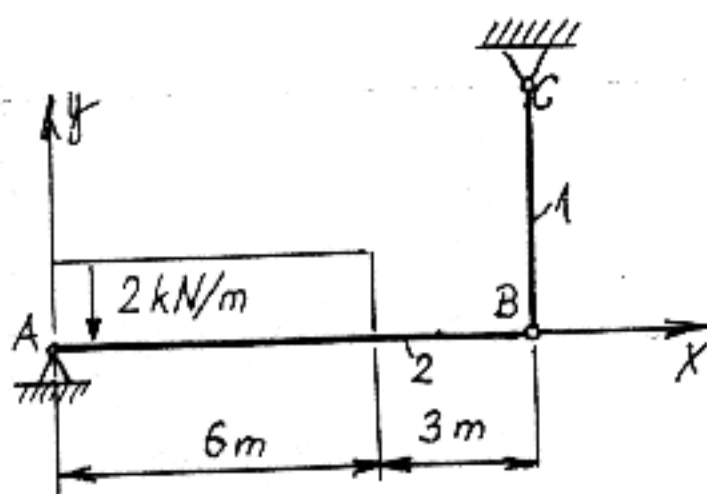
$$Y = 0 = 4,5 - 6 + 1,5$$

támasztóerők:

$$\vec{F}_A = (4,5 \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_B = (1,5 \vec{j}) \text{ kN}$$

MP-I.5.7



a/ a BC egyensúlyából következik, hogy a B ponton átadódó belső erő függőleges

b/ AB egyensúly

$$M_a = 0 = -12 \cdot 3 + 9 \cdot Y_{21}$$

$$Y_{21} = 4 \text{ kN}$$

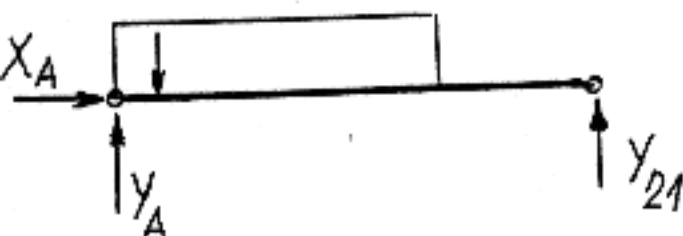
$$M_b = 0 = 12 \cdot 6 - 9 \cdot Y_A ;$$

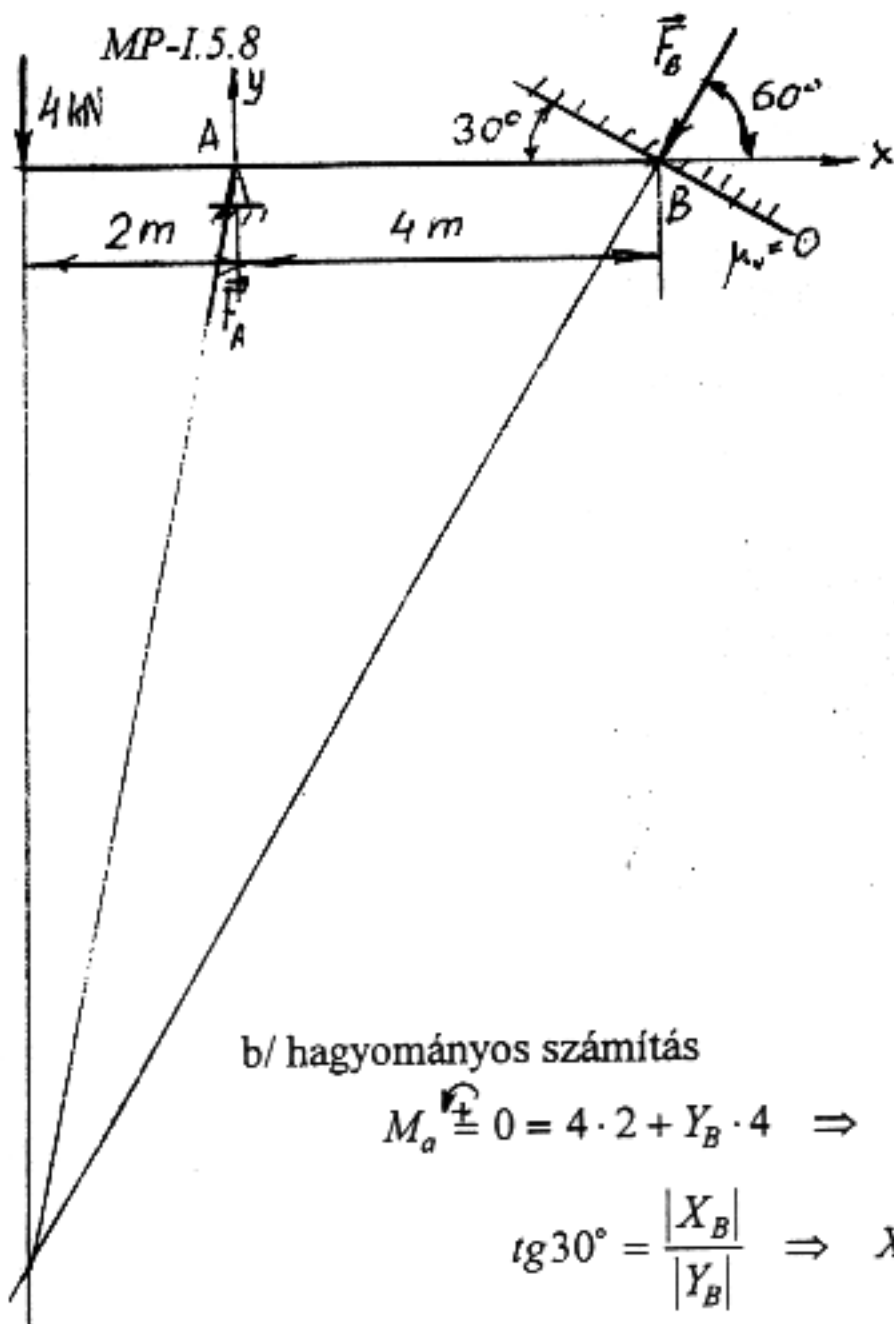
$$Y_A = 8 \text{ kN}$$

$$X = 0 \Rightarrow X_A = 0$$

ellenőrzés:

$$Y = 0 = -12 + 4 + 8$$



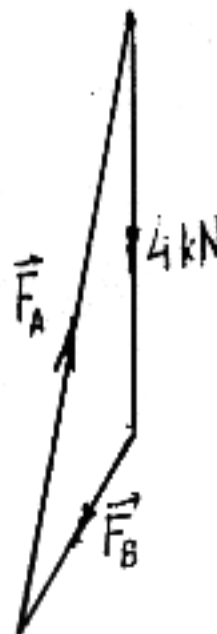


$$\vec{F}_A = ?$$

$$\vec{F}_B = ?$$

a/ szerkesztés

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B - 4\vec{j} = \vec{0}$$



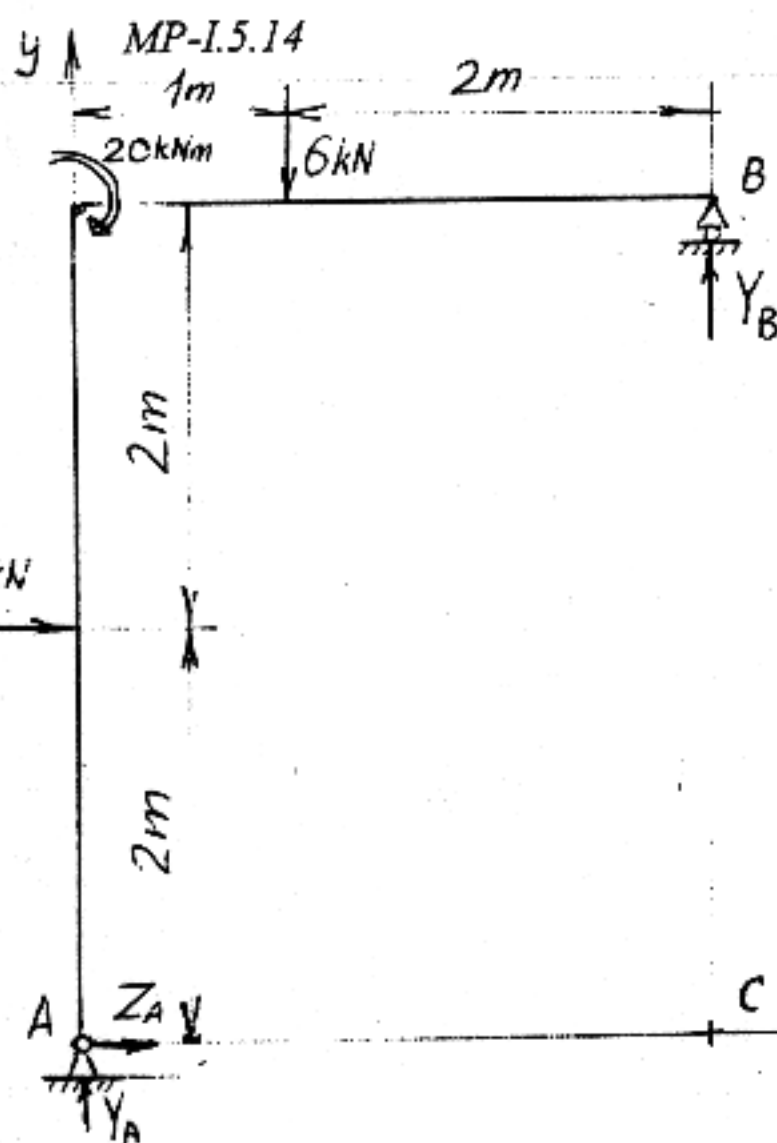
b/ hagyományos számítás

$$M_a \uparrow = 0 = 4 \cdot 2 + Y_B \cdot 4 \Rightarrow Y_B = -2 \text{ kN}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{|X_B|}{|Y_B|} \Rightarrow X_B = -|Y_B| \tan 30^\circ = -2 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ kN}$$

$$M_b = 0 = 6 \cdot 4 - 4Y_A \Rightarrow Y_A = 6 \text{ kN}$$

$$X = 0 = X_A - \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow X_A = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ kN}$$



a/ hagyományos számítás

$$M_a \uparrow = 0 = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 20 - 3Y_B$$

$$Y_B = \frac{42}{3} = 14 \text{ kN}$$

$$M_c = 0 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 6 + 20 + 3Y_A$$

$$Y_A = -\frac{24}{3} = -8 \text{ kN}$$

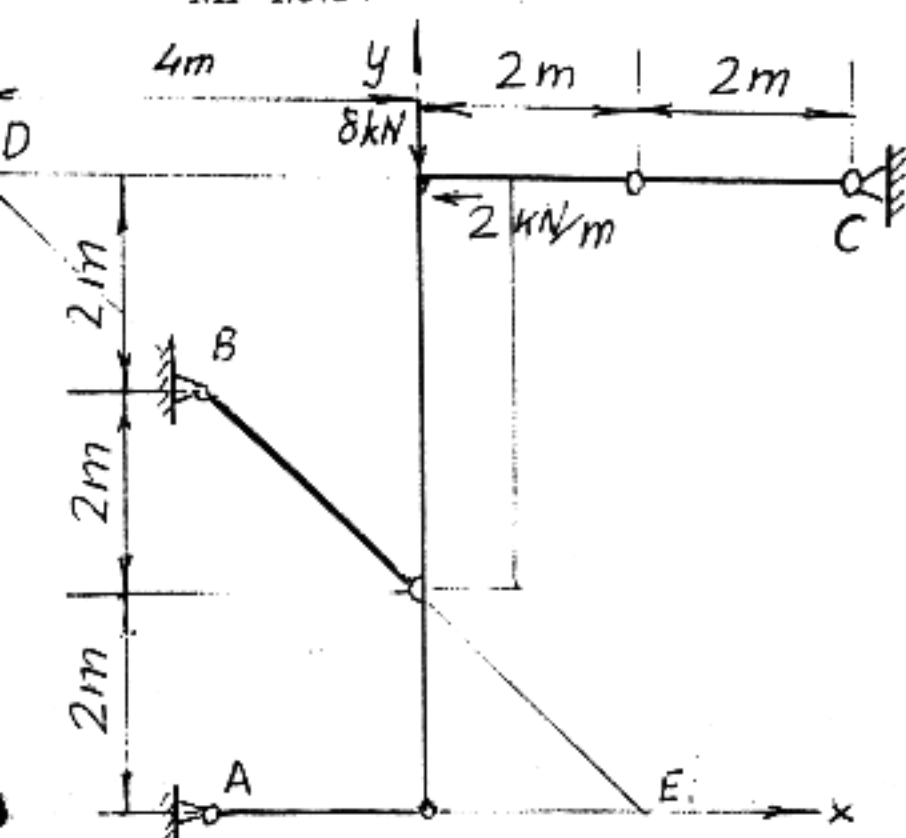
$$Z = 0 = Z_A + 8$$

$$Z_A = -8 \text{ kN}$$

ellenőrzés:

$$Y = 0 = 14 - 8 - 6$$

MP-I.5.34



a/ hagyományos számítás

(Ritter Számítás)

$$M_d^{\curvearrowright} = 0 = -4 \cdot 8 - 2 \cdot 8 + 6X_A$$

$$X_A = \frac{48}{6} = 8 \text{ kN}$$

$$M_e = 0 = 2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 - 6X_c$$

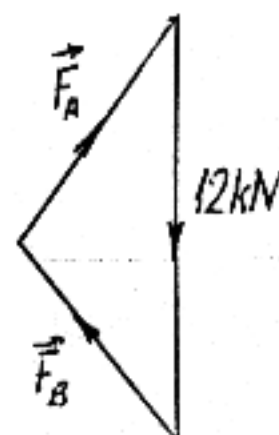
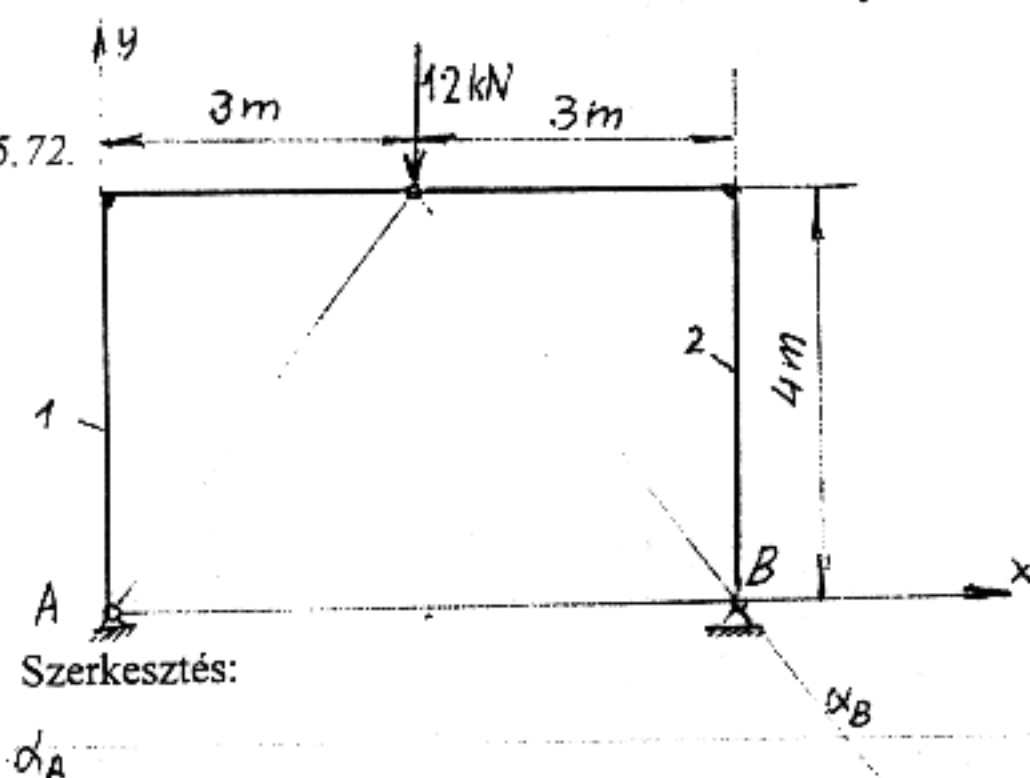
$$X_c = \frac{48}{6} = 8 \text{ kN}$$

$$Y = 0 = -8 + Y_B$$

$$Y_B = 8 \text{ kN}$$

A rúd irányából:  $X_B = -8 \text{ kN}$ .

MP-I.5.72.



Számítás:

$$(1+2) \quad M_a^{\curvearrowright} = 0 = 12 \cdot 3 - Y_B \cdot 6 \Rightarrow Y_B = 6 \text{ kN}$$

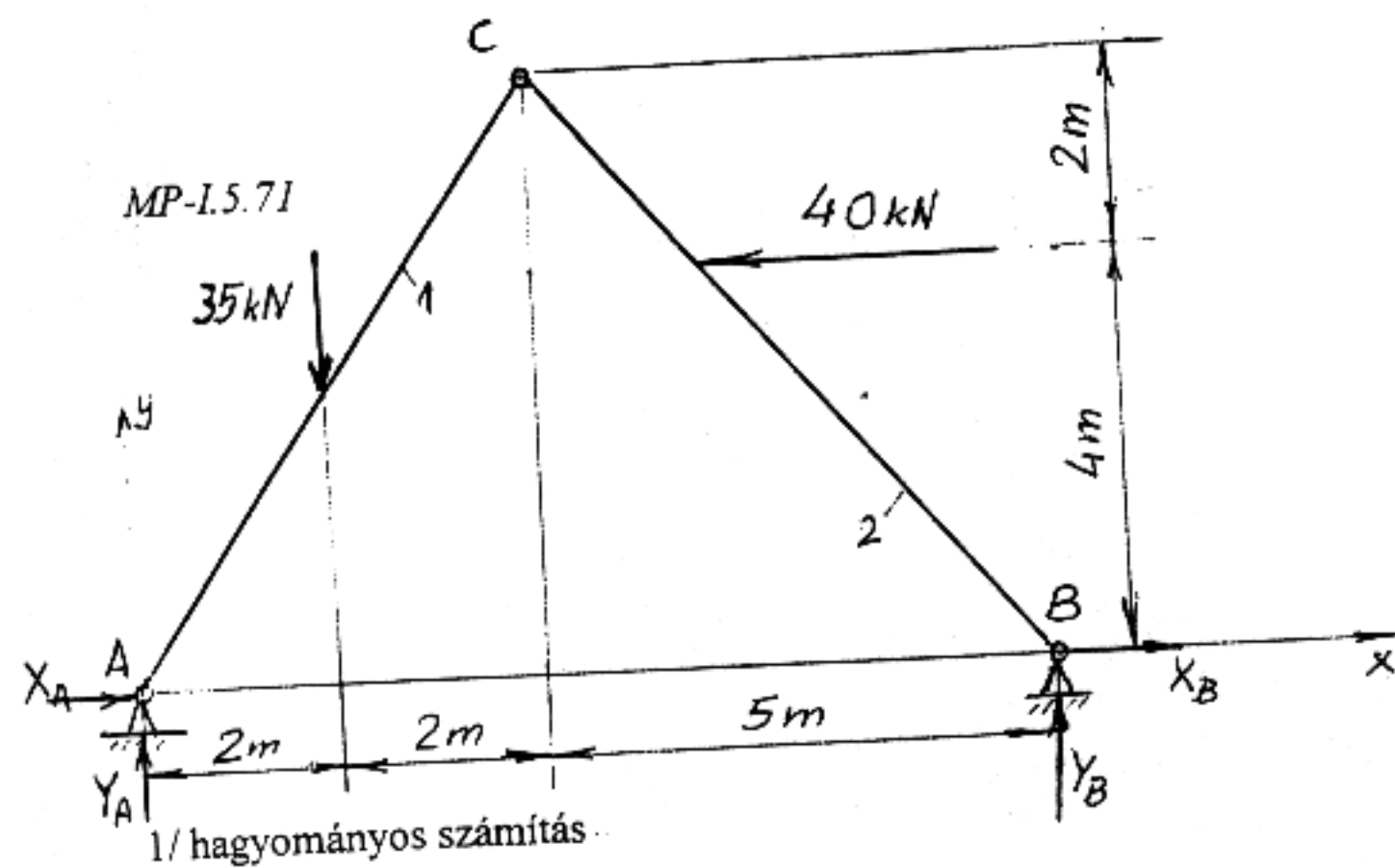
$$M_b = 0 = -12 \cdot 3 + Y_A \cdot 6 \Rightarrow Y_A = 6 \text{ kN}$$

$$(1) \quad \text{egyensúlyát megvizsgálva:} \quad \frac{|X_A|}{|Y_A|} = \frac{3}{4} \Rightarrow X_A = 4,5 \text{ kN}$$

$$(2) \quad \text{egyensúlyát megvizsgálva:} \quad \frac{|X_B|}{|Y_B|} = \frac{3}{4} \Rightarrow X_B = -4,5 \text{ kN}$$

Ellenőrzés:

megvizsgálni a C csukló egyensúlyát.



a/ (1+2)

$$M_a = 0 = -2 \cdot 35 + 4 \cdot 40 + 9 \cdot Y_B$$

$$Y_B = \frac{70 - 160}{9} = -10 \text{ kN}$$

$$M_b = 0 = -Y_A \cdot 9 + 7 \cdot 35 + 4 \cdot 40$$

$$Y_A = \frac{245 + 160}{9} = \frac{405}{9} = 45 \text{ kN}$$

b/ (1)

$$M_c = 0 = 6 \cdot X_A - 4 \cdot 45 + 2 \cdot 35$$

$$X_A = \frac{180 - 70}{6} = \frac{110}{6} = \frac{55}{3} \text{ kN}$$

(2)

$$M_c = 0 = 6X_B - 5 \cdot 10 - 2 \cdot 40$$

$$X_B = \frac{50 + 80}{6} = \frac{130}{6} = \frac{65}{3} \text{ kN}$$

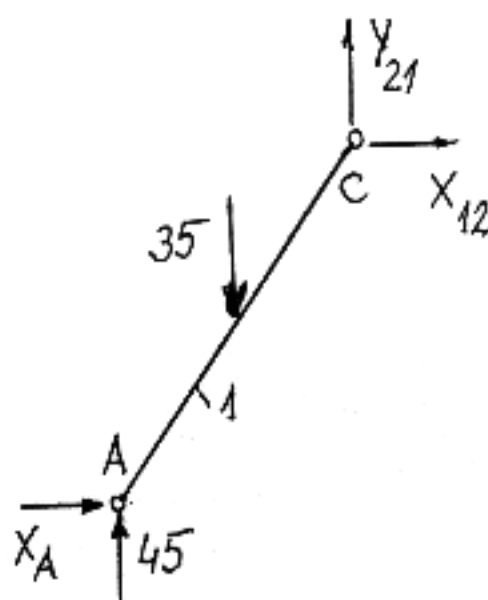
c/ (1)

$$X = 0 = X_{12} + \frac{55}{3}$$

$$X_{12} = -\frac{55}{3} \text{ kN}$$

$$Y = 0 = Y_{12} - 35 + 45$$

$$Y_{12} = -10 \text{ kN}$$

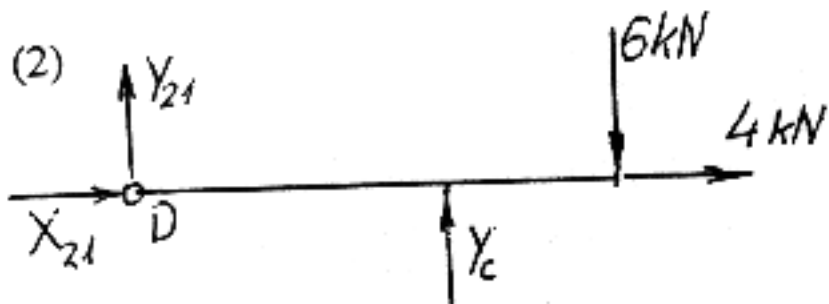
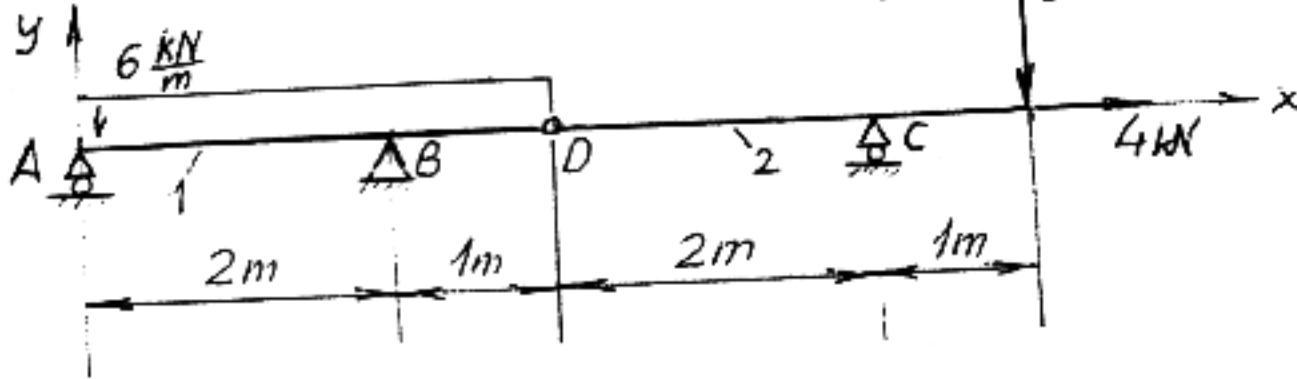


Ellenőrzés:

$$(1+2) \begin{cases} X = 0 = \dots \\ Y = 0 = \dots \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

MP-I.5.90



$$X = 0 = 4 + X_{21} \quad X_{21} = -4 kN$$

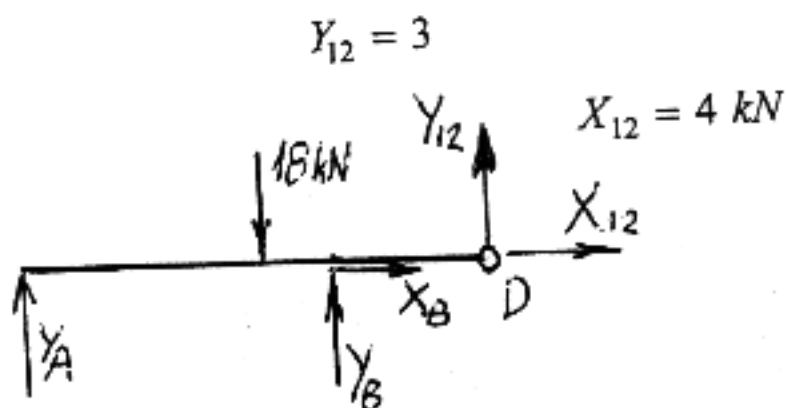
$$M_d = 0 = 2 \cdot Y_c - 3 \cdot 6$$

$$Y_c = 9 kN$$

$$M_c = 0 = -2Y_{21} - 6 \cdot 1$$

$$Y_{21} = -3 kN$$

(1)



$$X = 0 = 4 + X_B \quad X_B = -4 kN$$

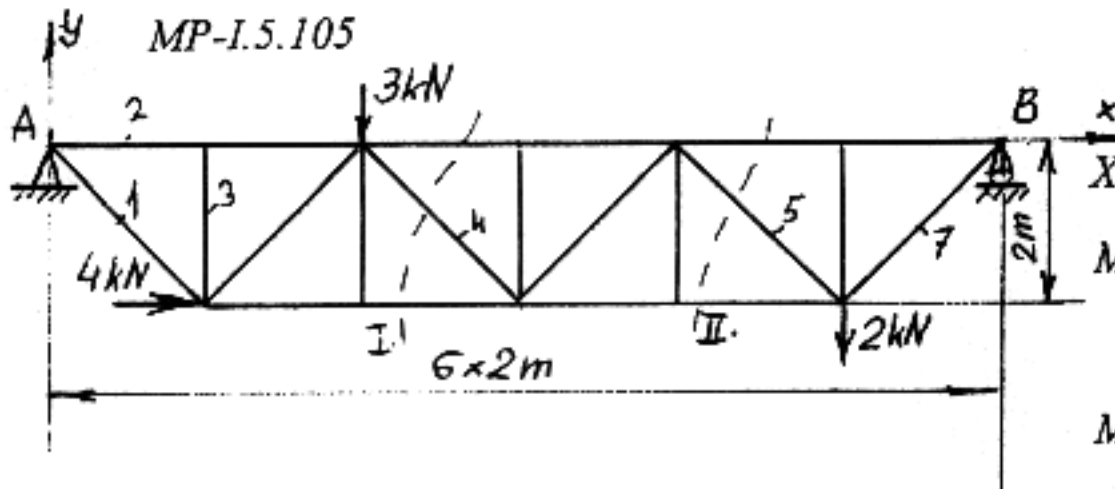
$$M_a = -18 \cdot 1.5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot Y_B$$

$$Y_B = 9 kN$$

$$Y = 0 = Y_A - 18 + 9 + 3$$

$$Y_A = 6 kN$$





támasztóerők

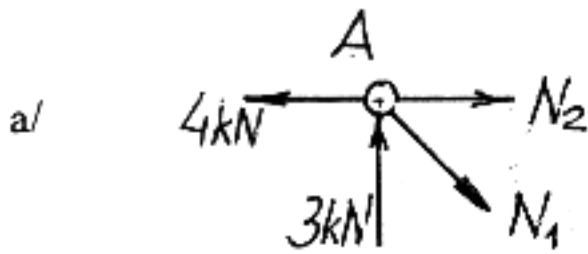
$$X = 0 = 4 + X_A \quad X_A = -4 \text{ kN}$$

$$M_a = 0 = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 12 Y_B$$

$$Y_B = 2 \text{ kN}$$

$$M_b = 0 = 2 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 12 Y_A$$

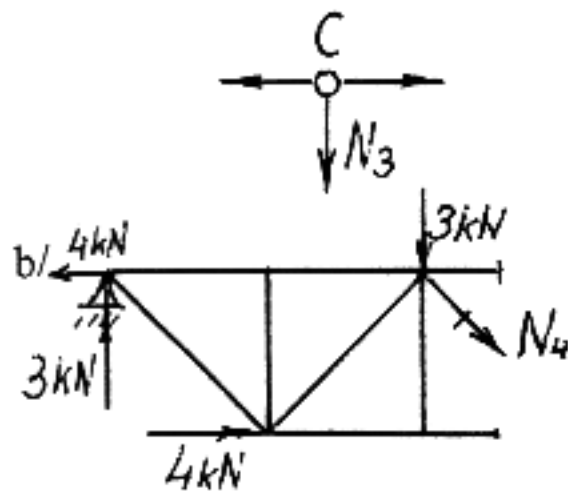
$$Y_A = 3 \text{ kN}$$



$$Y = 0 \Rightarrow N_{1y} = 3 \text{ kN}, \quad N_{1x} = 3 \text{ kN}$$

$$N_1 = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$X = 0 = -4 + 3 + N_2 \quad N_2 = 1 \text{ kN}$$



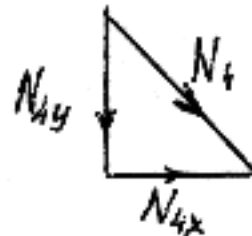
$$Y = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

$$Y = 0 = 3 - 3 + N_{4y}$$

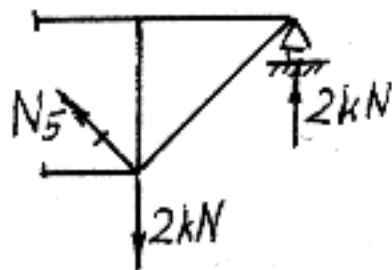
$$N_{4y} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$N_4 = 0$$



c/

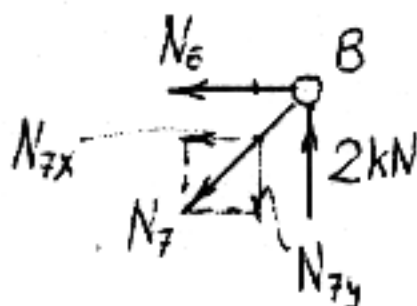


$$Y = 0 = 2 - 2 + N_{5y}$$

$$N_{5y} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$N_5 = 0$$



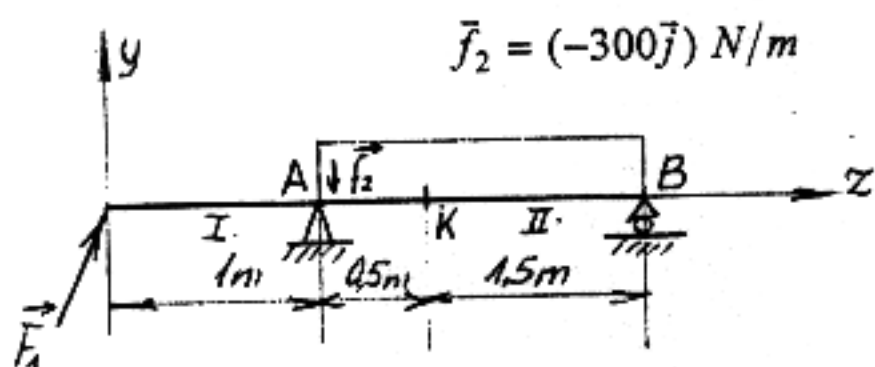
$$Y = 0 = 2 - N_{7y} \quad N_{7y} = 2 \text{ kN}$$

$$N_7 = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$X = 0 = -N_6 - 2$$

$$N_6 = -2 \text{ kN}$$

MP-II.1.3



$$\vec{F}_1 = (100\vec{j} + 40\vec{k}) \text{ N}$$

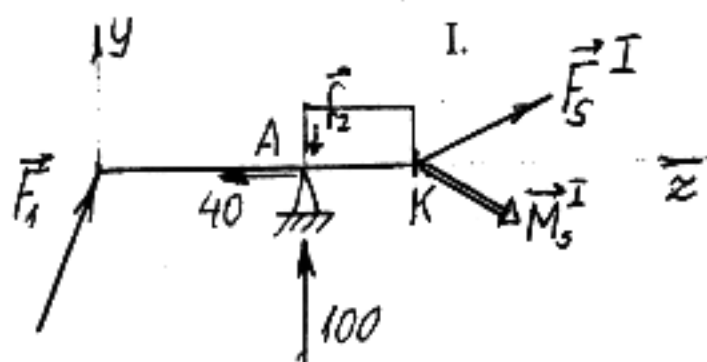
támasztóerők:

$$Z = 0 - 40 + Z_A \quad Z_A = -40 \text{ N}$$

$$M_a = 0 = 100 \cdot 1 + 600 \cdot 1 - 2 \cdot Y_B \quad Y_B = 350 \text{ N}$$

$$M_b = 0 = 100 \cdot 3 - 600 \cdot 1 + 2Y_A \quad Y_A = 150 \text{ N}$$

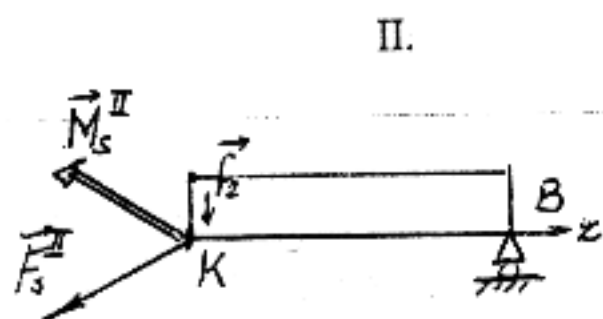
a/



$$\vec{F}_S^I = (-100\vec{j}) \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_S^I &= (0,75 \cdot 450 - 1,5 \cdot 350)\vec{i} \text{ N} \\ &= (-187,5\vec{i}) \text{ Nm} \end{aligned}$$

b/



$$\vec{F}_S^{II} = 100\vec{j} \text{ N}$$

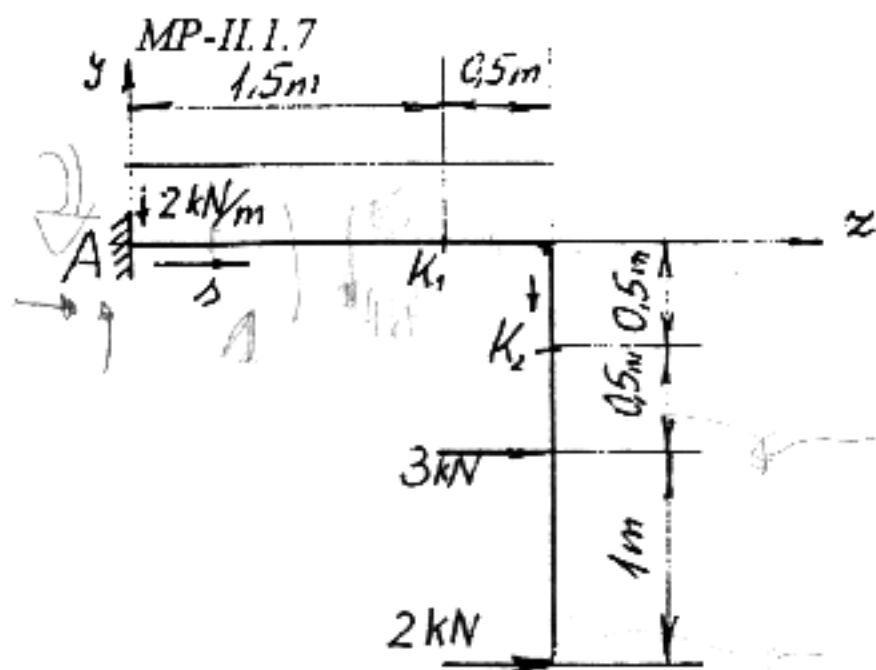
$$\begin{aligned} \vec{M}_S^{II} &= (100 \cdot 1,5 + 150 \cdot 0,5 - 150 \cdot 0,25)\vec{i} \\ &= (+187,5\vec{i}) \text{ Nm} \end{aligned}$$

c/

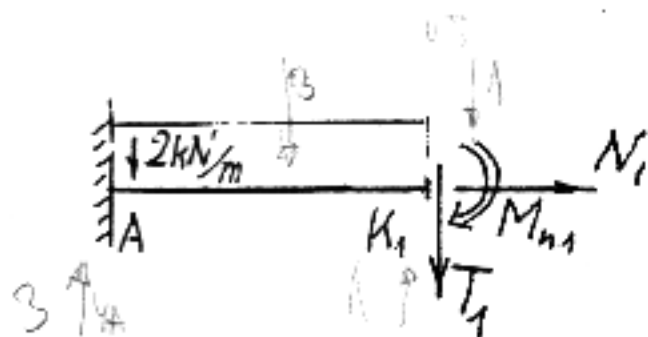
$$N_K = 0$$

$$T_K = 100 \text{ N} \quad \uparrow \leftarrow \downarrow$$

$$M_K = -187,5 \text{ Nm} \quad (\leftarrow \rightarrow)$$



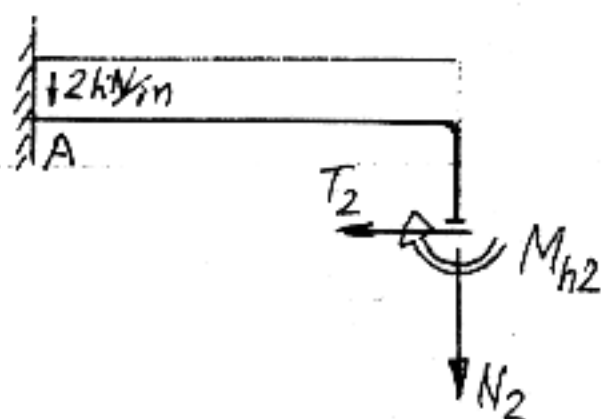
Feladat a  $K_1$  és  $K_2$  keresztmetszet igénybevételeinek meghatározása



$$N_1 = 5 \text{ kN} \quad \leftarrow \rightarrow$$

$$T_1 = 1 \text{ kN} \quad \uparrow \downarrow$$

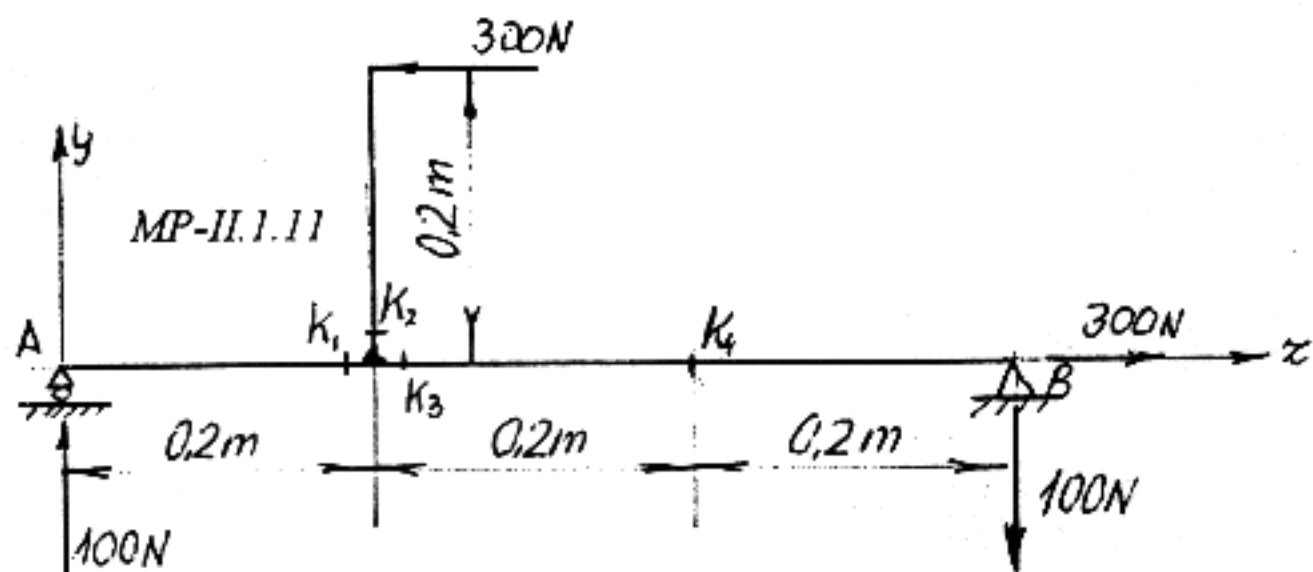
$$M_{h1} = 0,25 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -6,75 \text{ kNm} \quad (\curvearrowright)$$



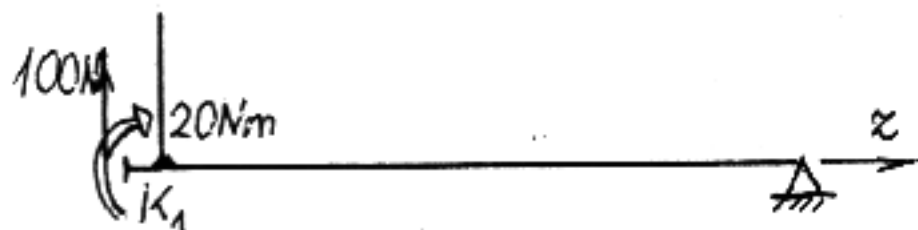
$$N_2 = 0$$

$$T_2 = -5 \text{ kN} \quad \overleftarrow{\quad}$$

$$M_{h2} = -0,5 \cdot 3 - 1,5 \cdot 2 = -4,5 \text{ kNm} \quad (\curvearrowright)$$



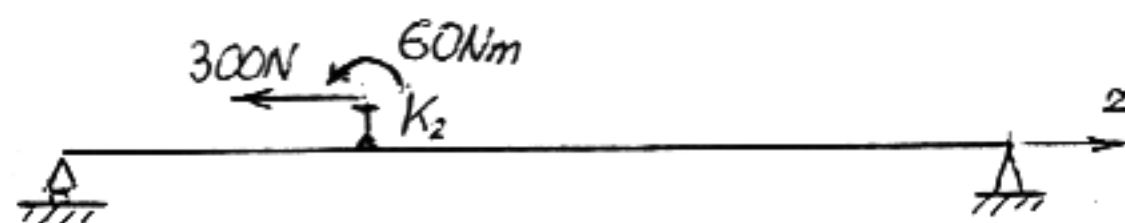
a/



$$N_{K1} = 0$$

$$T_{K1} = 100 \text{ N} \quad \uparrow \leftarrow \downarrow$$

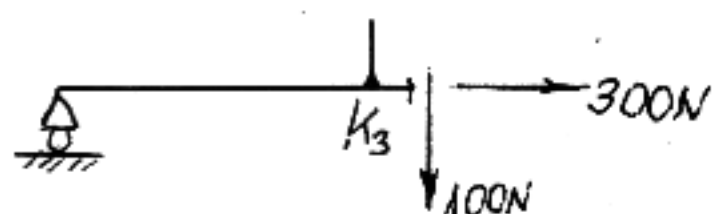
$$M_{hK1} = -20 \text{ Nm} \quad \curvearrowright \leftarrow \curvearrowleft$$



$$N_{K2} = 0$$

$$T_{K2} = -300 \text{ N} \quad \uparrow \leftarrow \downarrow$$

$$M_{hK2} = -60 \text{ Nm} \quad \curvearrowright \leftarrow \curvearrowleft$$



$$N_{K3} = 300 \text{ N} \quad \leftarrow \leftarrow \rightarrow$$

$$T_{K3} = 100 \text{ N} \quad \uparrow \leftarrow \downarrow$$

$$M_{hK3} = 40 \text{ Nm} \quad \curvearrowright \leftarrow \curvearrowleft$$

b/



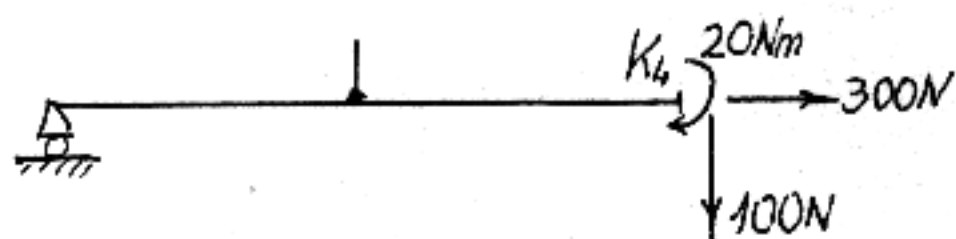
$$Z = 0 = 300 - 300$$

$$Y = 0 = 100 - 100$$

$$M_z' = 0 = 20 - 60 + 40$$

az egyensúly teljesül

c/



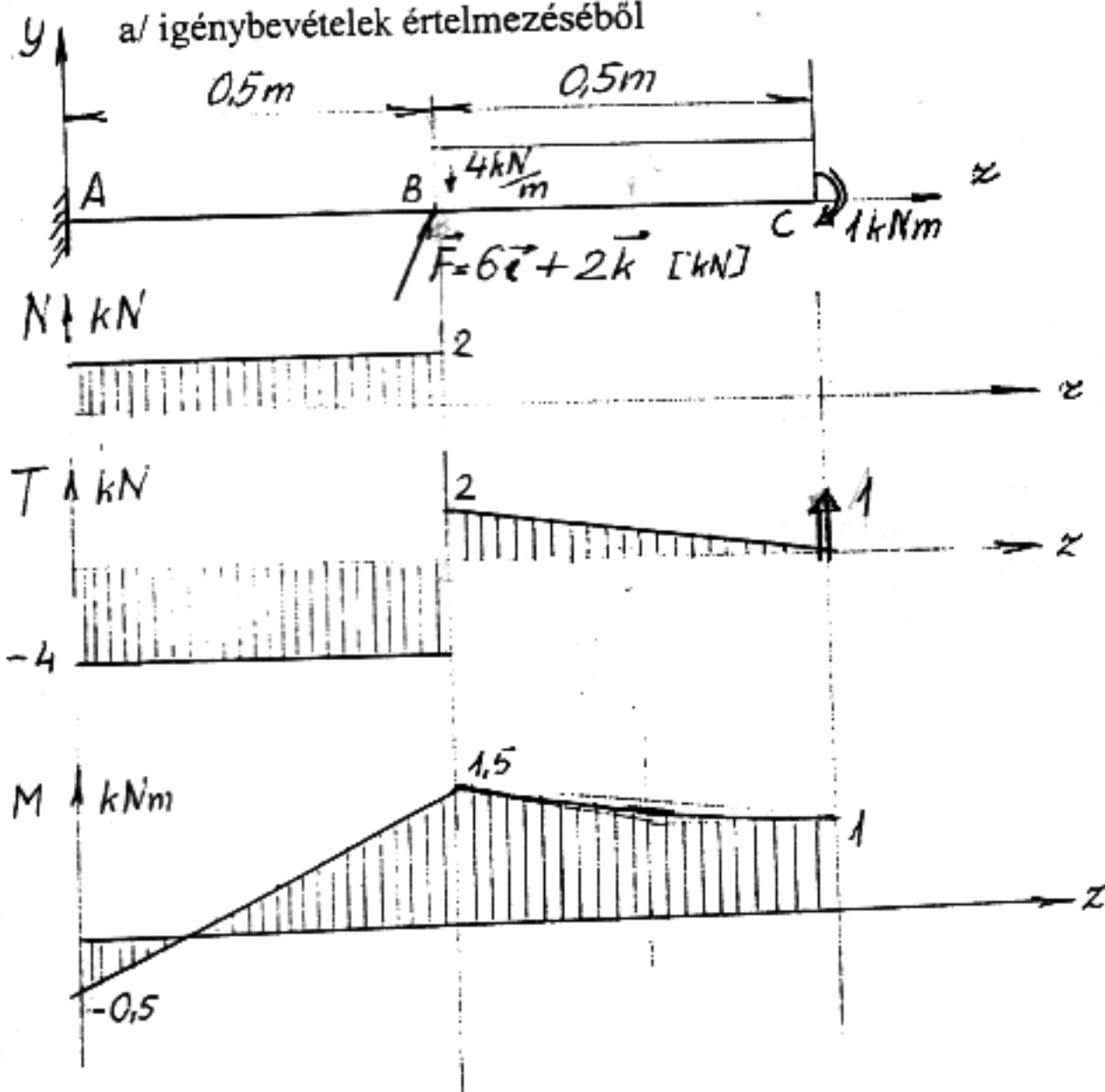
$$N_{K4} = 300 \text{ N} \quad \leftarrow \leftarrow \rightarrow$$

$$T_{K4} = 100 \text{ N} \quad \uparrow \leftarrow \downarrow$$

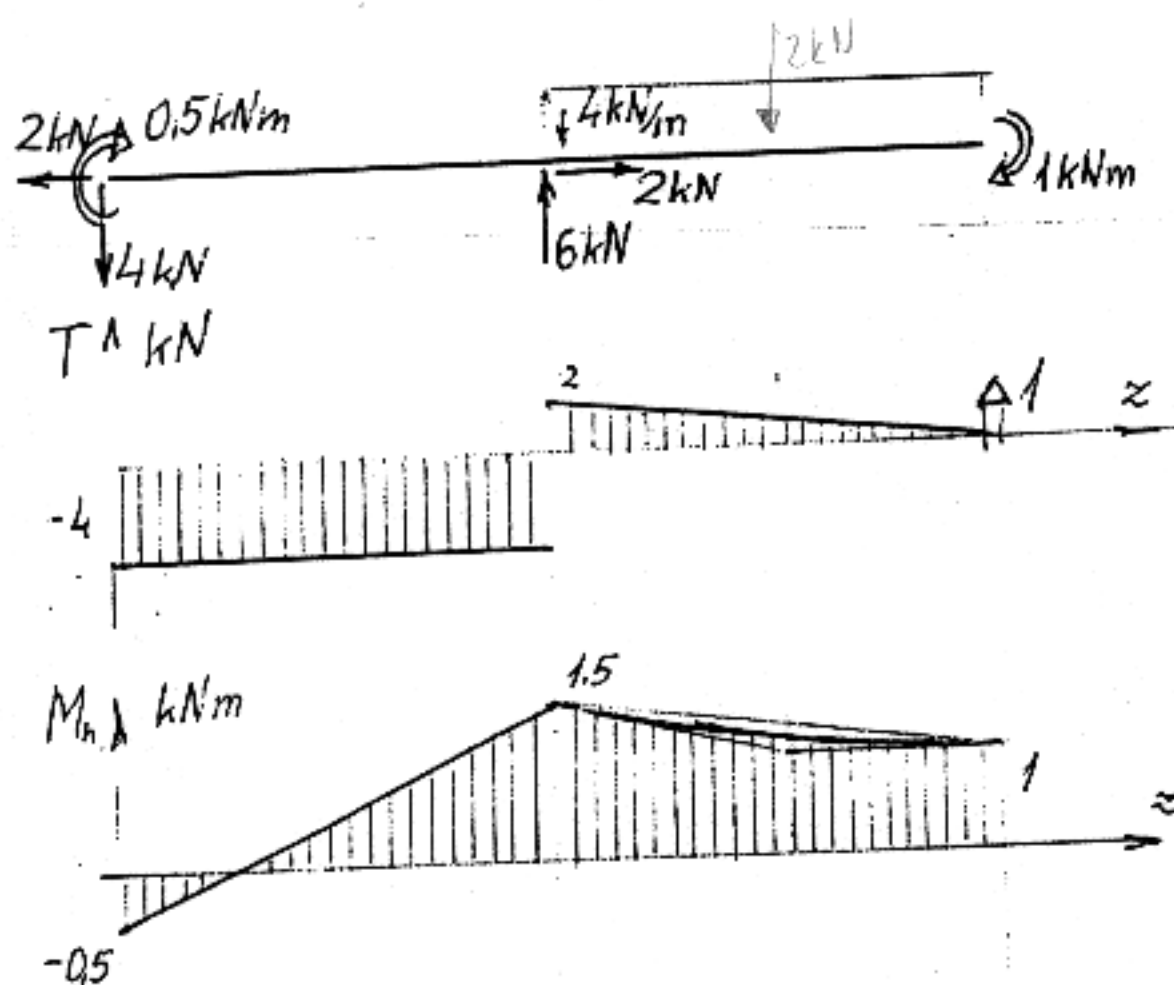
$$M_{hK4} = 20 \text{ Nm} \quad \curvearrowright \leftarrow \curvearrowleft$$

MP-II.1-30

a/ igénybevételek értelmezéséből



b/ egyensúly alapján



támasztóerők:

$$Z_A = -2 \text{ kN}$$

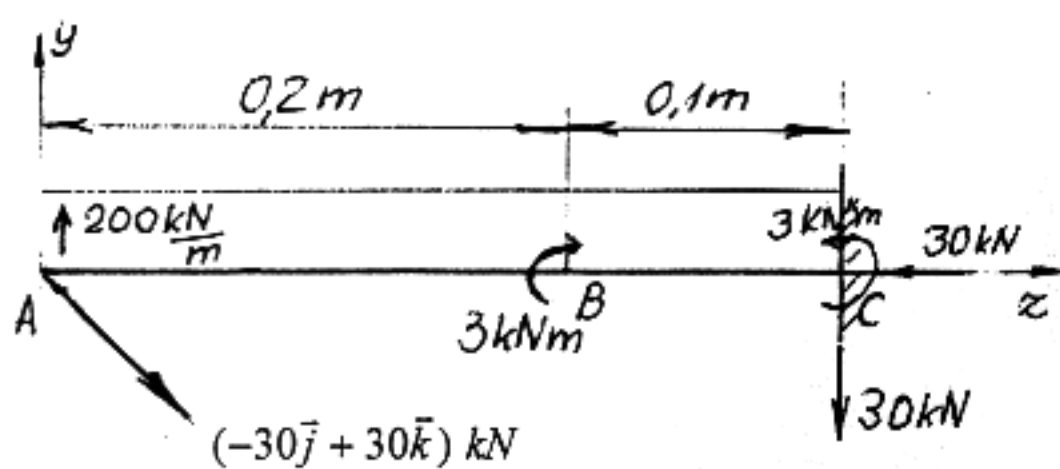
$$Y_C = 1 \text{ kN}$$

$$M_A = -1 - 1.5 + 3 = 0.5 \text{ kNm}$$

$$T = T_0 + \int_0^z f dz$$

$$M = M_0 - \int_0^z T dz$$





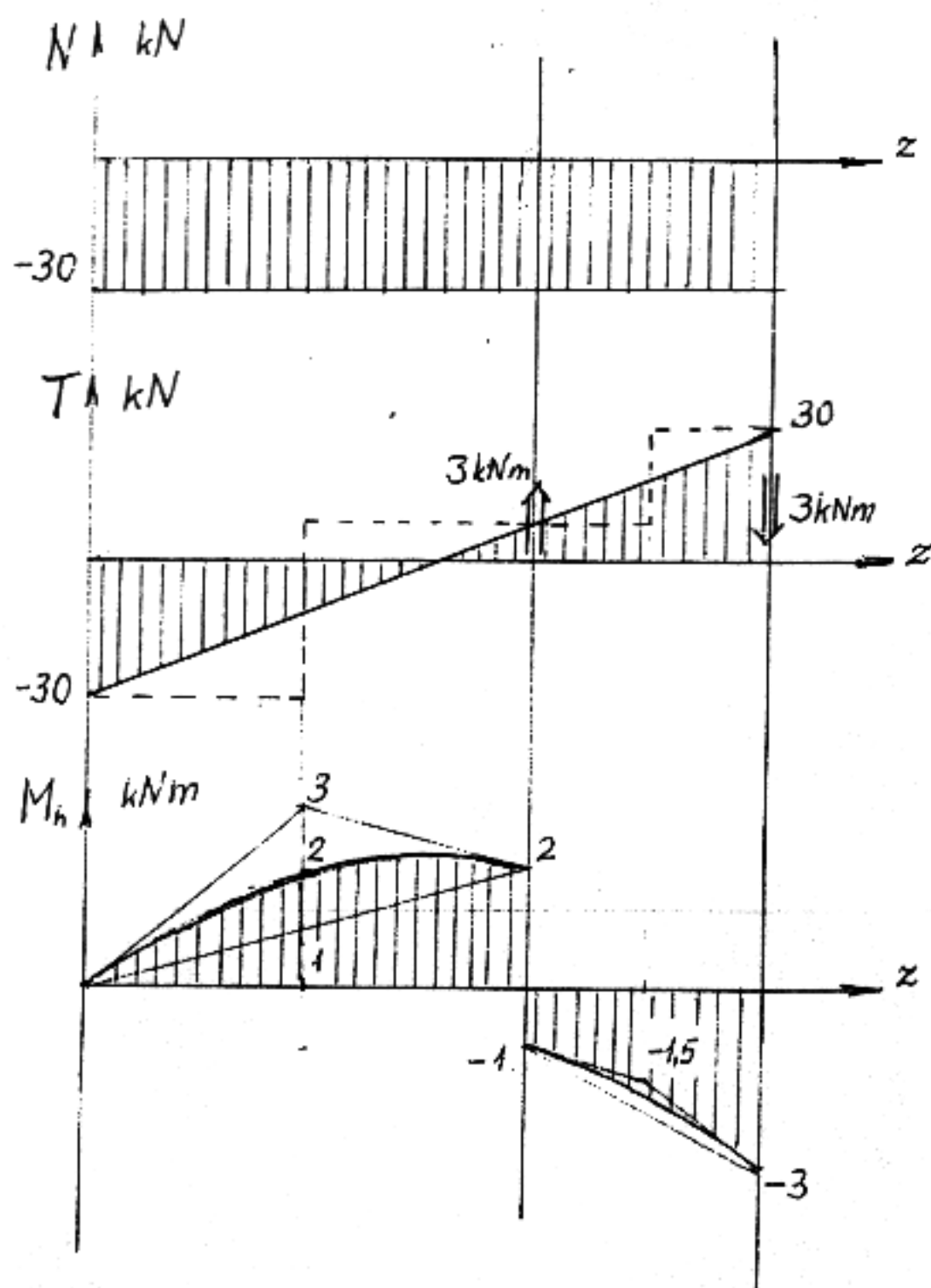
Támasztó erőrendszer:

$$\vec{F}_C = 30\vec{j} - 30\vec{k} - 60\vec{j}$$

$$= (-30\vec{j} - 30\vec{k}) \text{ kN}$$

$$Y_C = -30 \text{ kN}$$

$$Z_C = -30 \text{ kN}$$



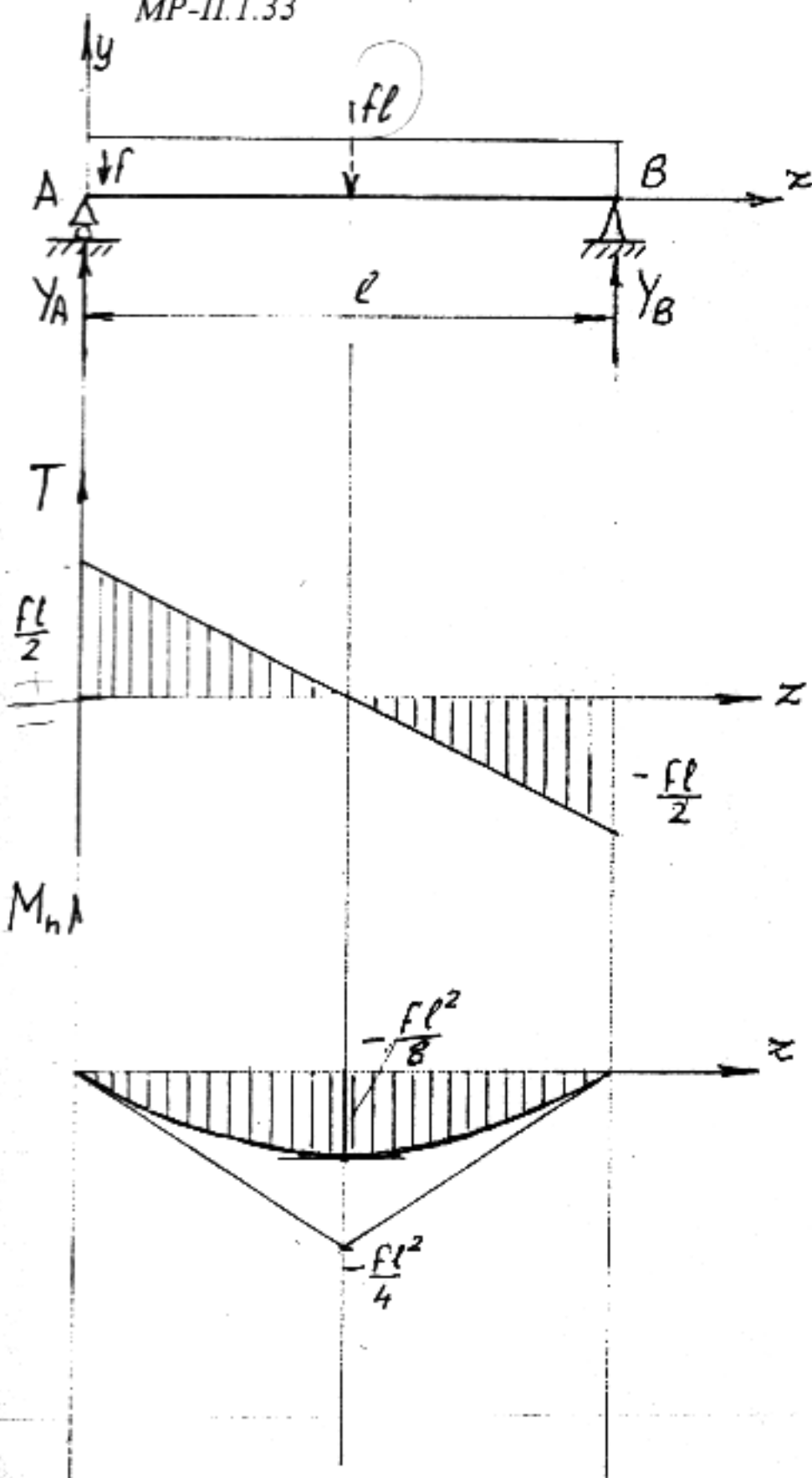
$$\vec{M}_C = \vec{i}(30 \cdot 0,3 - 60 \cdot 0,15 - 3) =$$

$$= (9 - 9 - 3)\vec{i}$$

$$\vec{M}_C = (-3\vec{i}) \text{ kN}$$

MP-II.1.33

$\overline{F} =$



$$M_a = 0 \rightarrow Y_B = \frac{fl}{2}$$

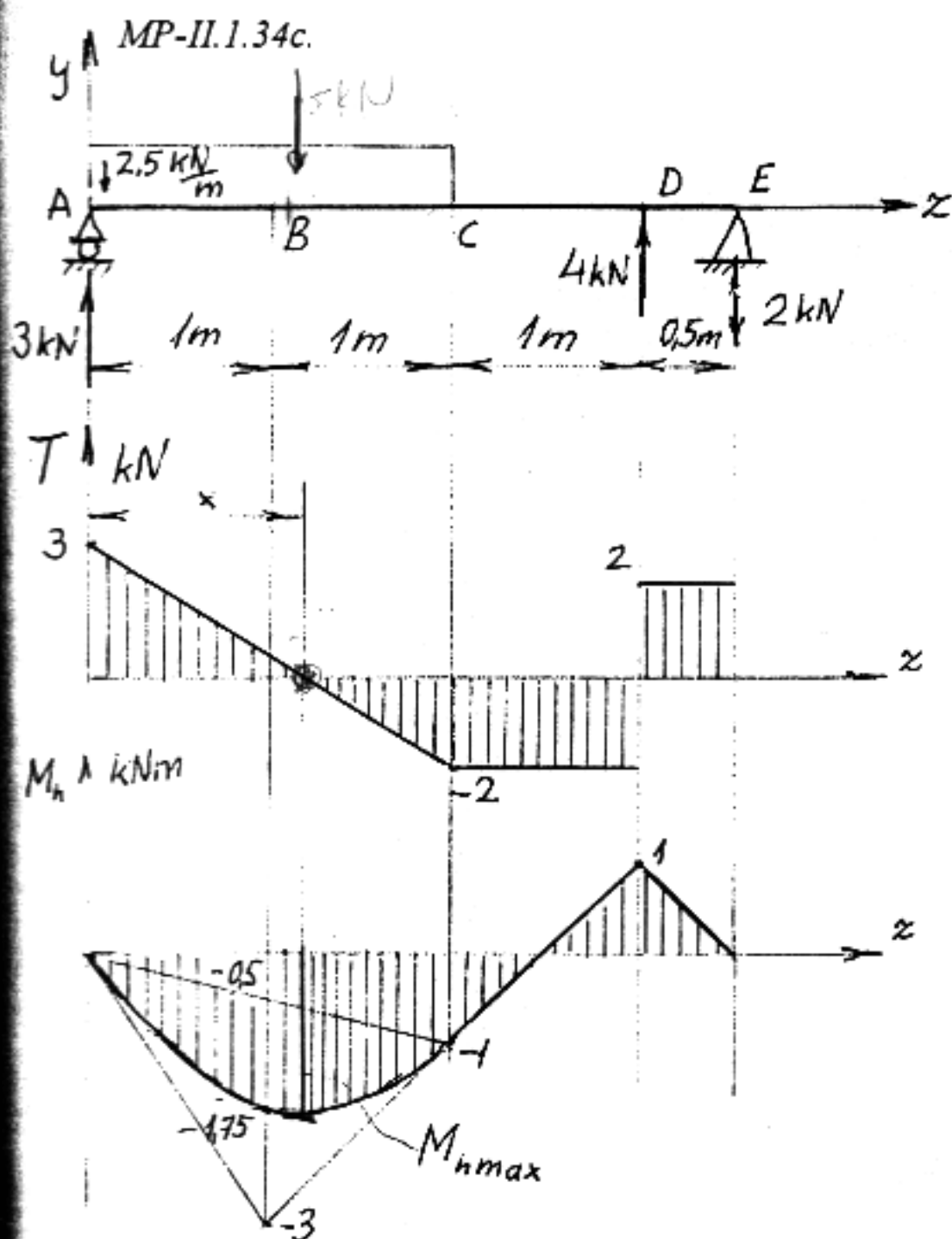
$$M_b = 0 \rightarrow Y_A = \frac{fl}{2}$$

$$T(z) = T_0 + \int_{z=0}^z f_y dz$$

$$M_h(z) = M_0 - \int_{z=0}^z T dz$$

$$M_{\max} = \frac{fl^2}{8}$$

$\frac{fl}{2} \cdot \frac{l}{2}$   
 $\frac{fl^2}{8}$



$$T - T_0 = \int_{z=z_0}^z f_y dz$$

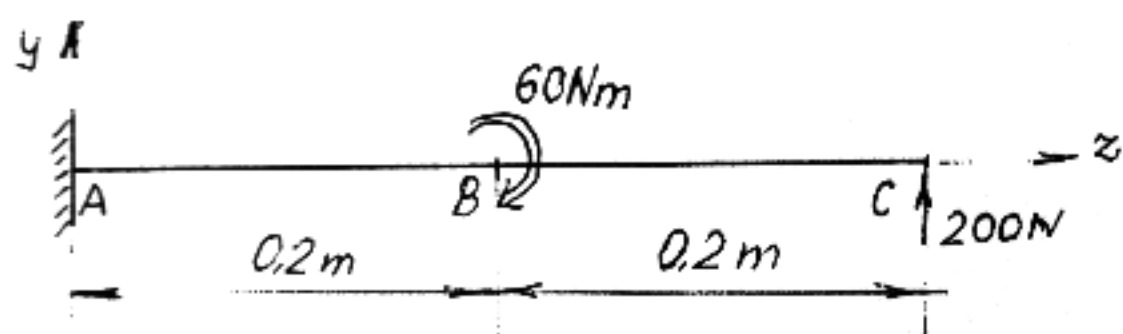
$$M - M_0 = - \int_{\zeta=z_0}^z T d\zeta$$

$$T_{max} = |T_A| = 3 \text{ kN}$$

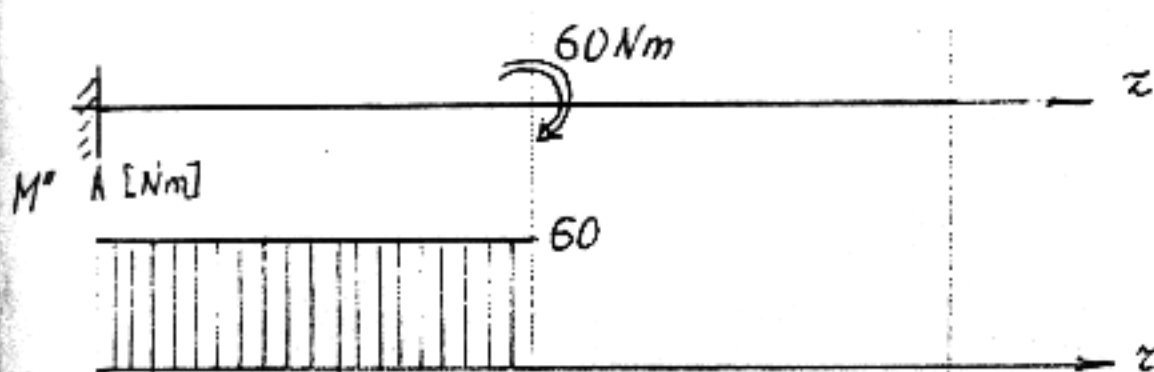
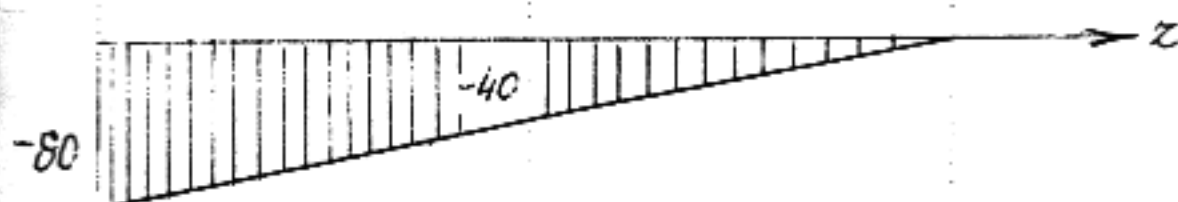
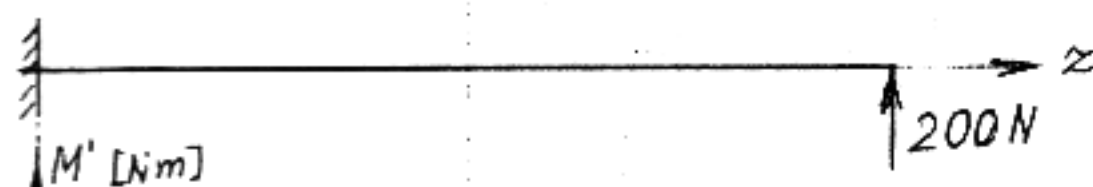
$$M_{hmax} \quad \text{helye} \quad T = 0 \quad 3 : x = 5 : 2 \rightarrow x = 1,2 \text{ m}$$

$$M_{hmax} = -3 \cdot 1,2 + 2,5 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -3,6 + 1,5 \cdot 1,2 = -3,6 + 1,8$$

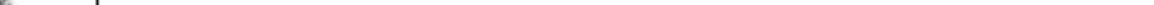
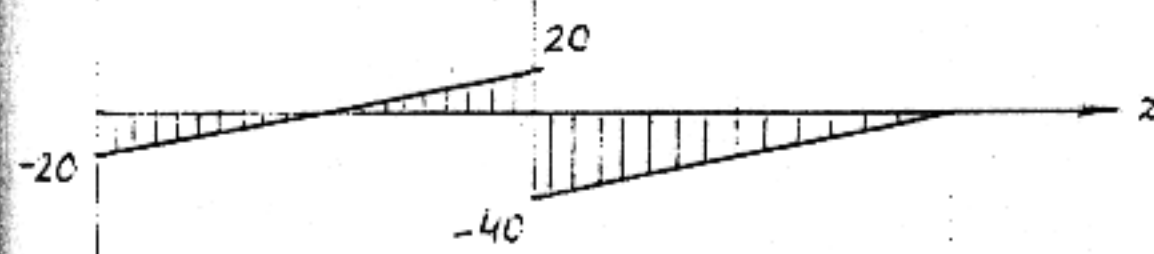
$$M_{hmax} = -1,8 \text{ kNm}$$

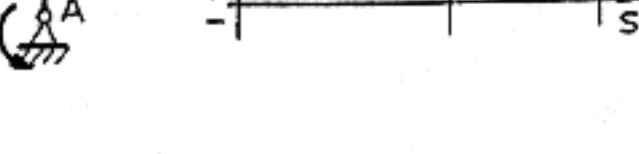
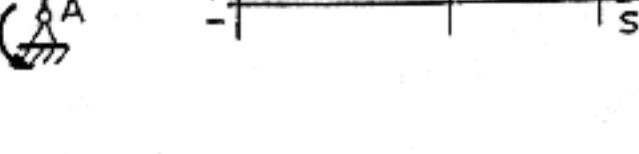
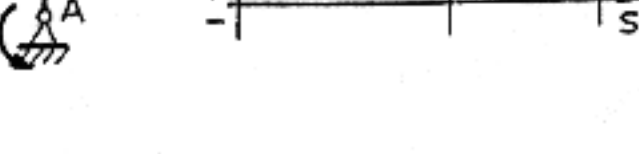
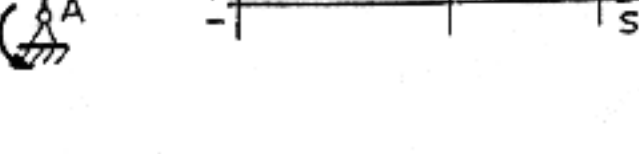
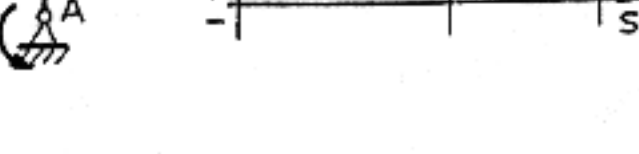
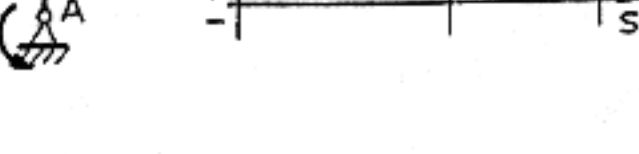
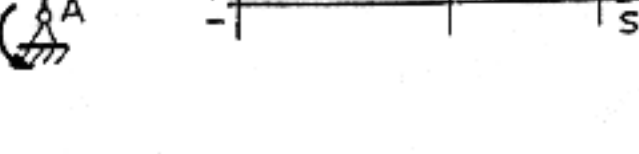
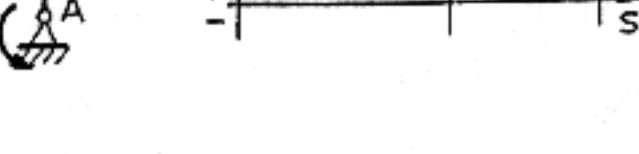
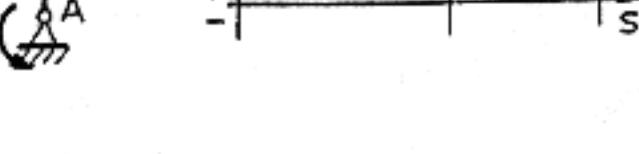
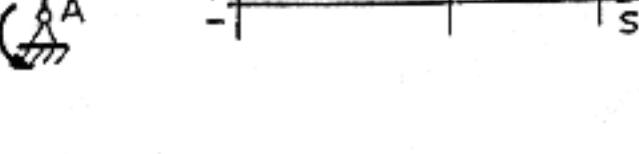
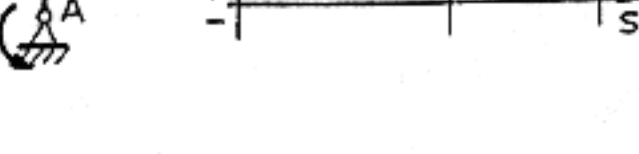
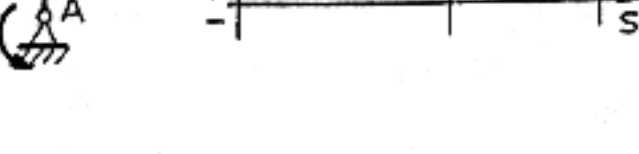
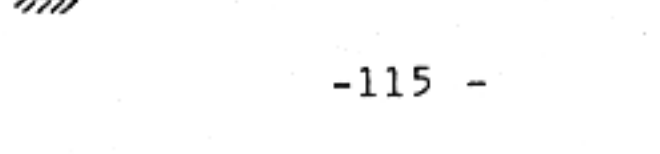
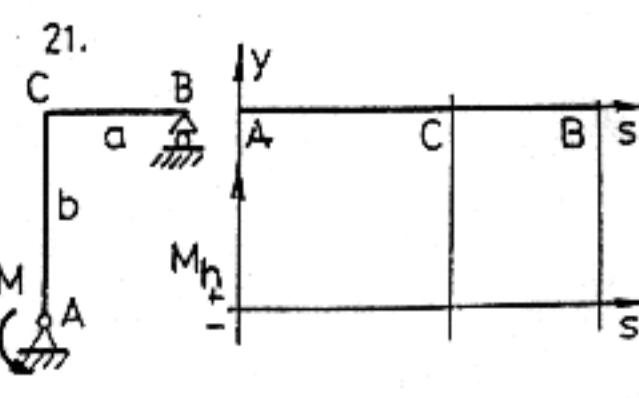
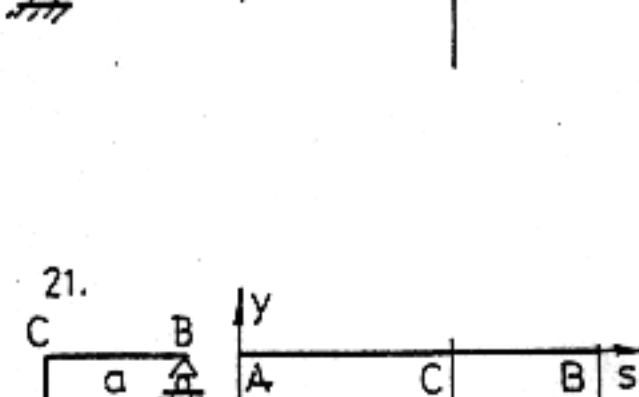
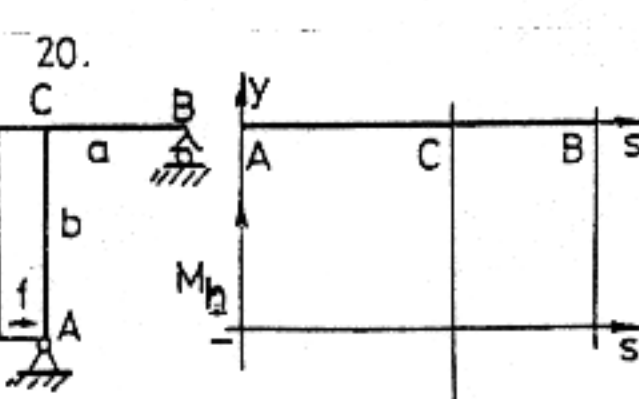
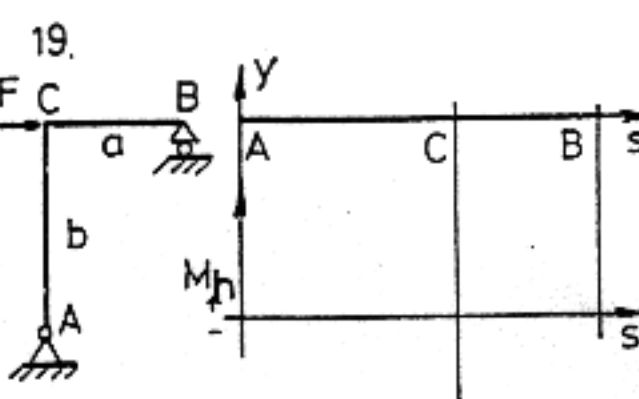
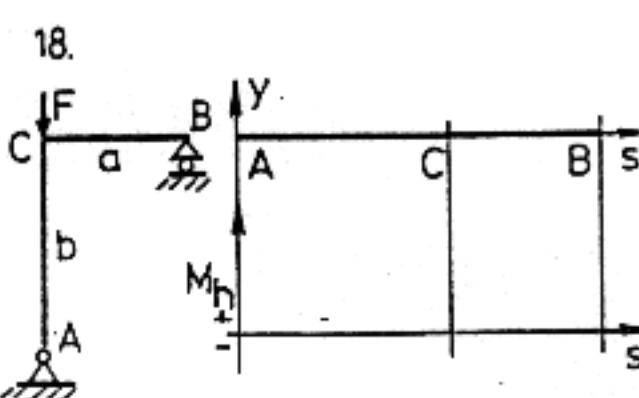
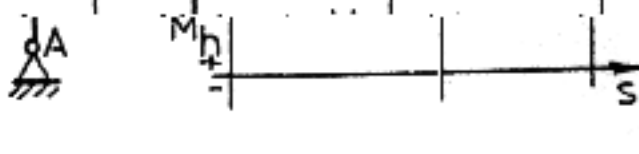
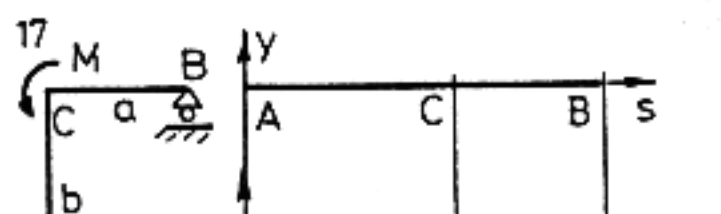


Szuperpozíció!

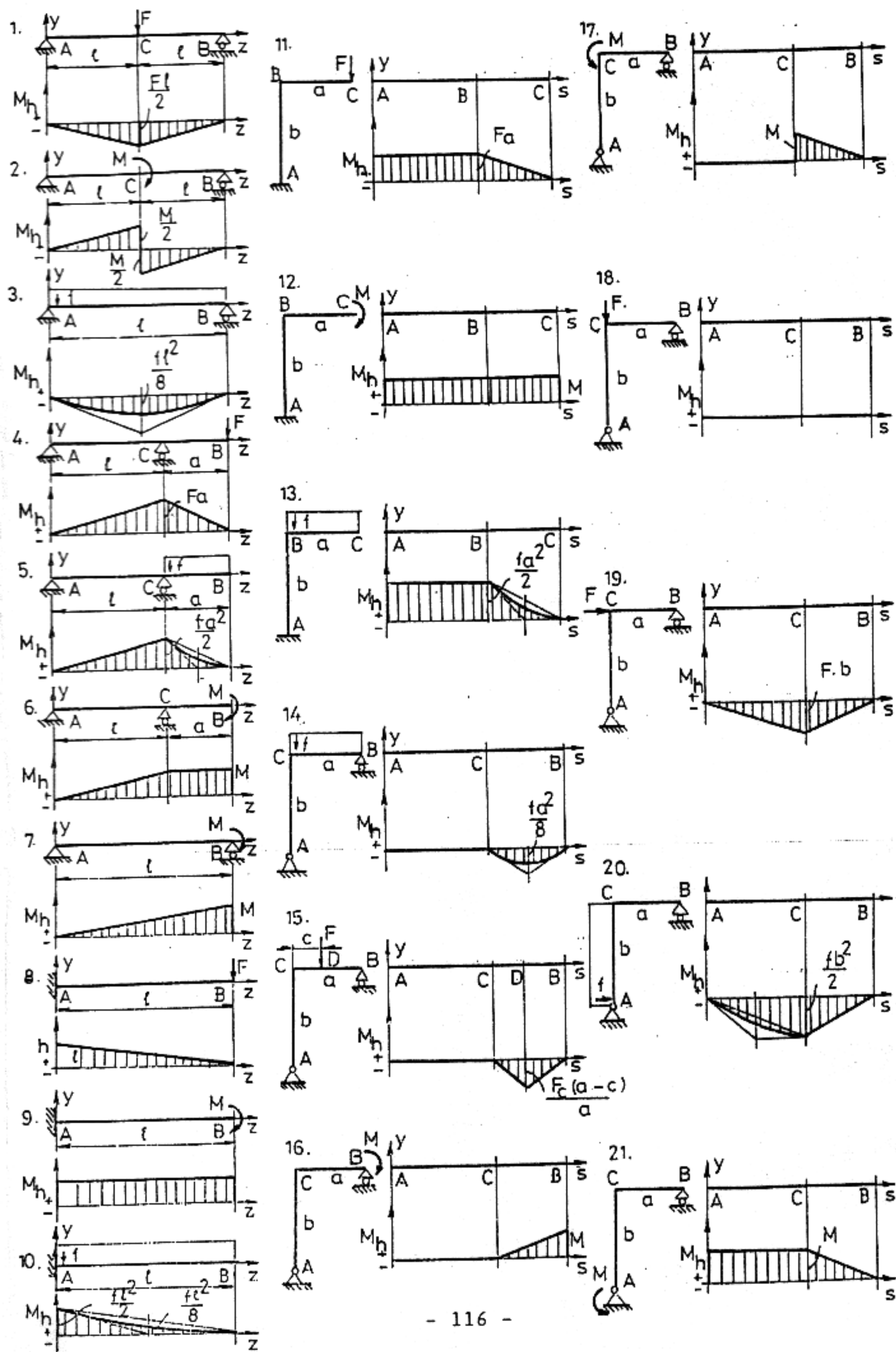


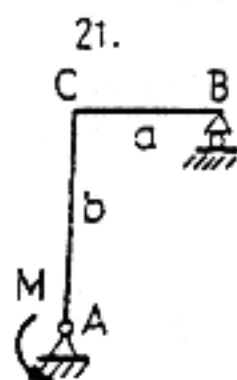
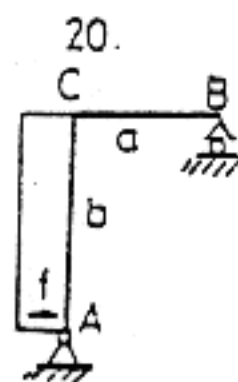
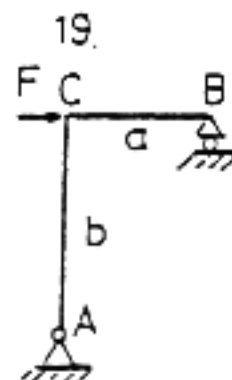
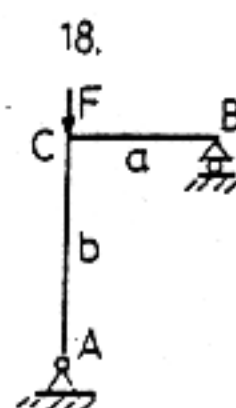
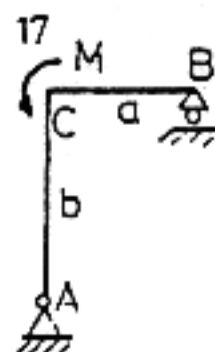
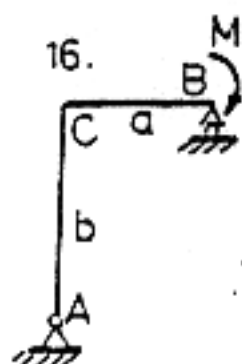
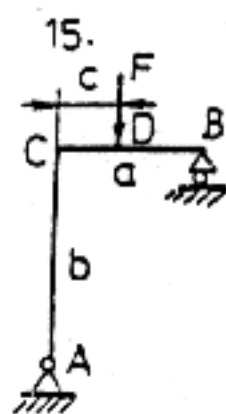
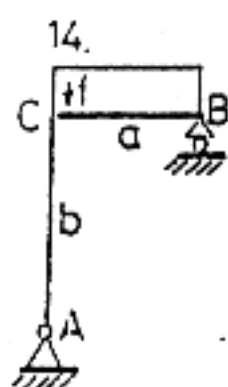
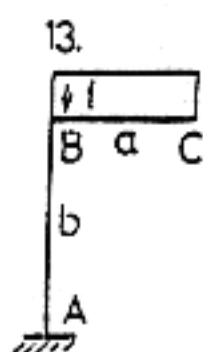
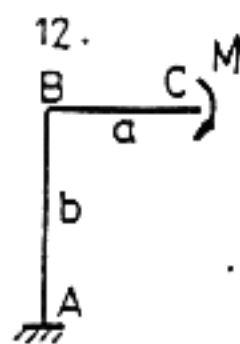
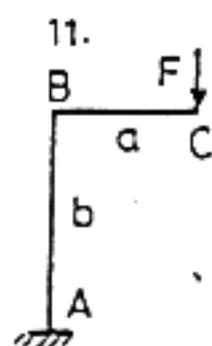
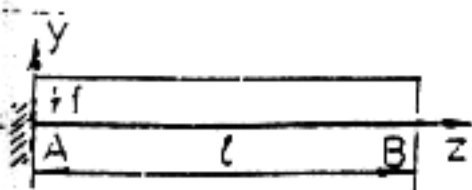
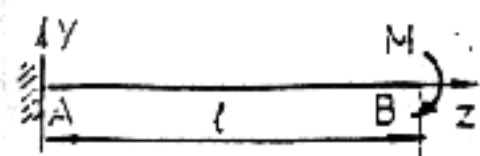
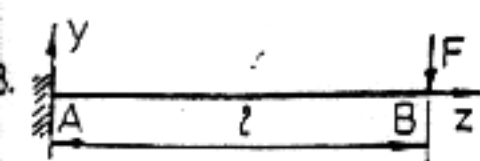
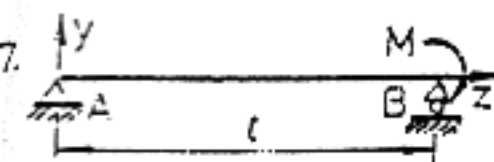
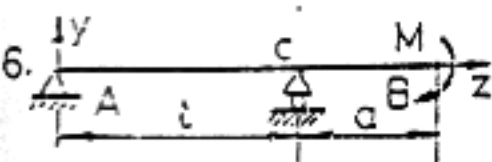
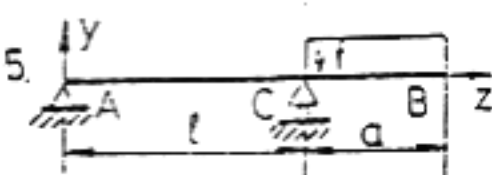
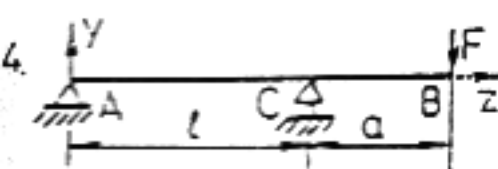
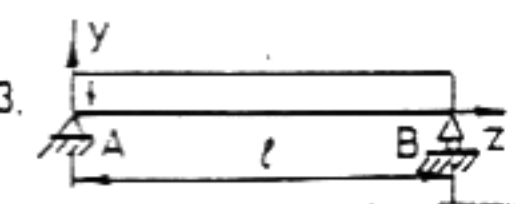
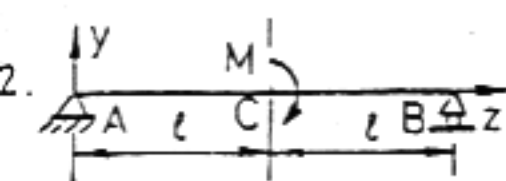
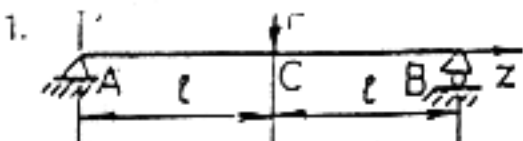
$M = M' + M''$

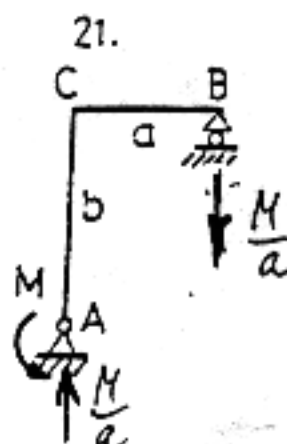
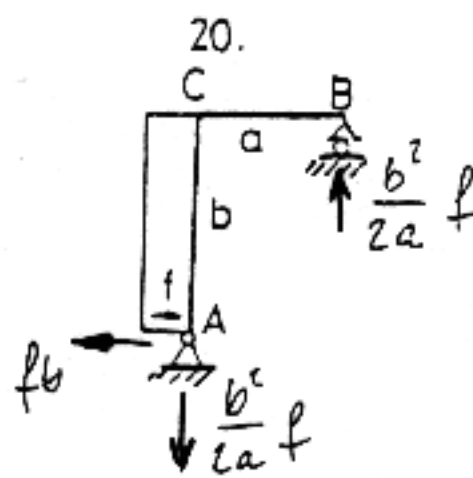
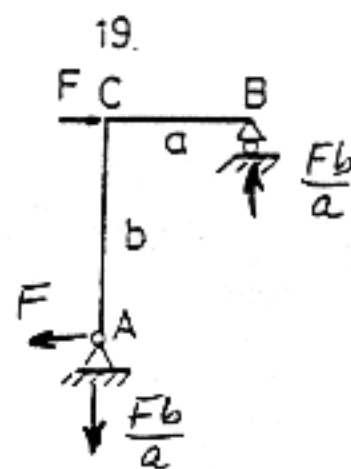
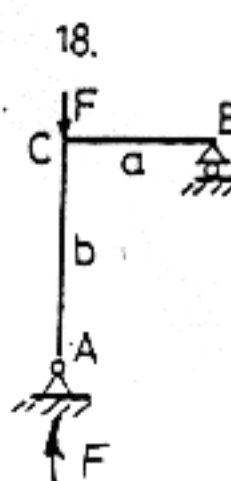
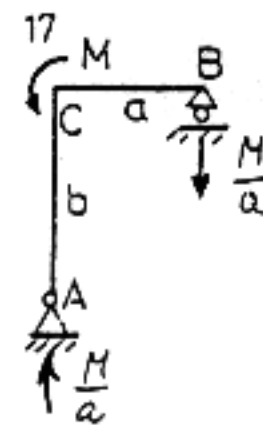
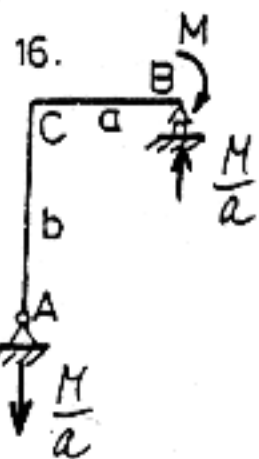
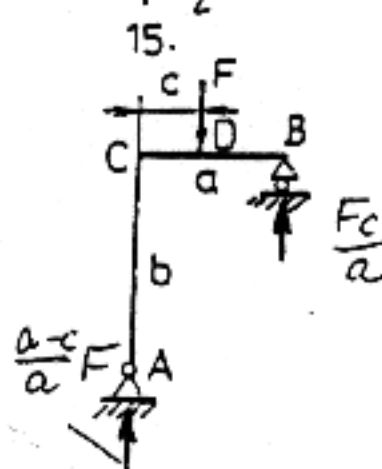
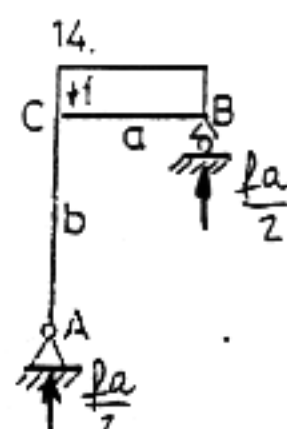
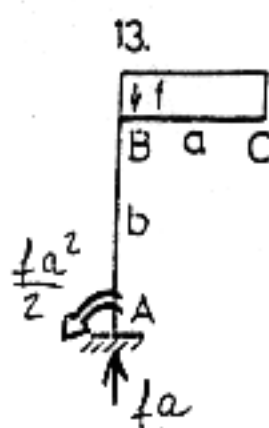
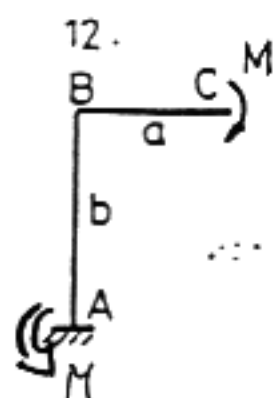
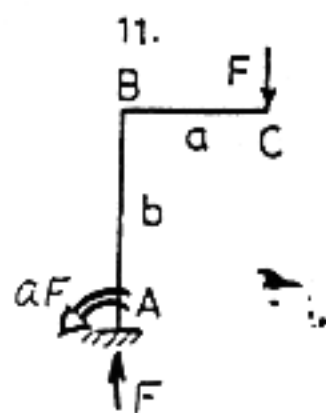
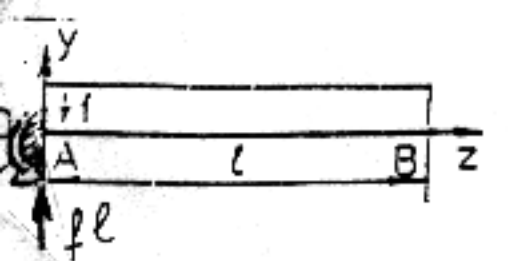
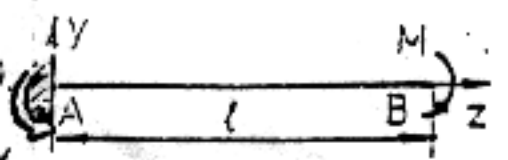
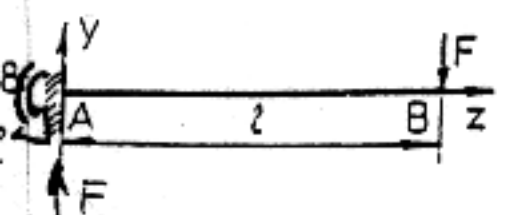
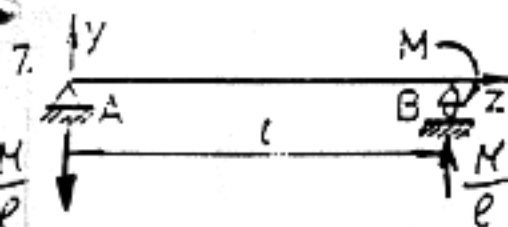
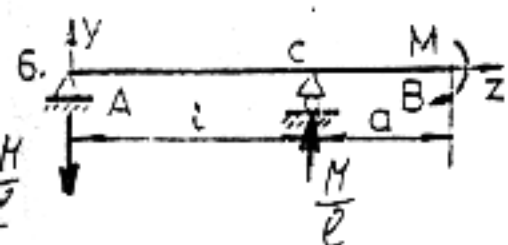
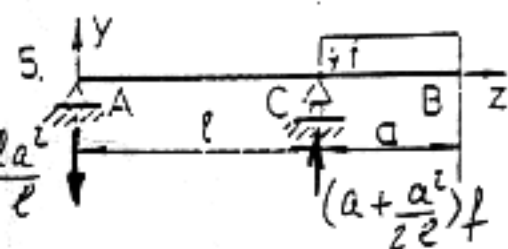
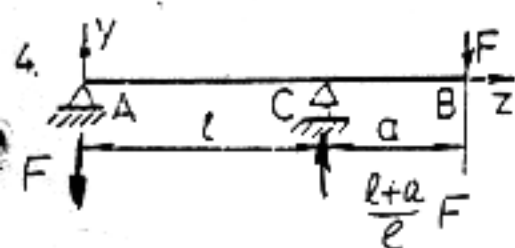
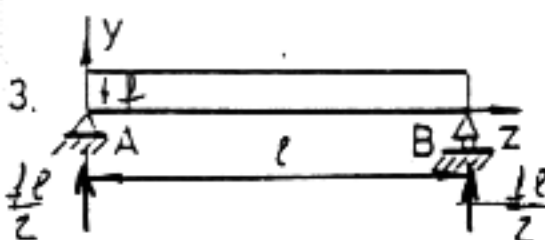
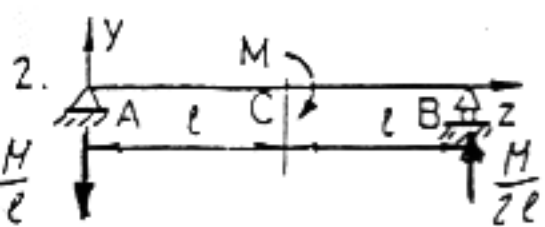
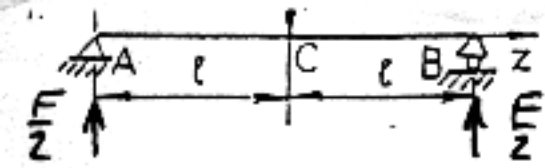












# TARTALOMJEGYZÉK

|                                                                                                  | old. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>1. BEVEZETÉS, ALAPFOGALMAK</b>                                                                | 1    |
| <b>2. KONCENTRÁLT ERŐ</b>                                                                        | 4    |
| 2.1 A koncentrált erő értelmezése és megadása                                                    | 4    |
| 2.2 Példák testek kölcsönhatására                                                                | 5    |
| 2.3 Példák erők összegezésére és felbontására                                                    | 7    |
| 2.4 A kötött erővektor                                                                           | 10   |
| 2.5 Kötött erővektor pontra számított nyomatéka                                                  | 11   |
| 2.6 Összefüggés erő két pontra számított nyomatéka között                                        | 12   |
| 2.7 Kötött erővektor tengelyre számított nyomatéka                                               | 13   |
| 2.7.1 Tengely értelmezése és egyenletének Plücker-vektoros alakja                                | 13   |
| 2.7.2 Tengelyre számított nyomaték értelmezése és kiszámítása Plücker-vektorok felhasználásával  | 14   |
| 2.8 Nyomatéki vektortér                                                                          | 15   |
| <b>3. KONCENTRÁLT ERŐKBŐL ÁLLÓ ERŐRENDSZER</b>                                                   | 17   |
| 3.1 Koncentrált erőrendszerek jellemzői                                                          | 17   |
| 3.1.1 Erőpár, koncentrált nyomaték                                                               | 17   |
| 3.1.2 Általános, szétszórt erőrendszer                                                           | 18   |
| 3.1.3 Erőrendszer redukált (eredő) vektorkettőse                                                 | 19   |
| 3.2 Erőrendszerek egyenértékűsége                                                                | 20   |
| 3.2.1 Az egyenértékűség értelmezése                                                              | 20   |
| 3.2.2 Az egyenértékűség kritériumai (feltételei)                                                 | 20   |
| 3.2.3 Az egyenértékűség kritériumainak bizonyítása                                               | 21   |
| 3.2.4 A statikai egyenletek jellege                                                              | 23   |
| 3.3 Erőrendszer egyensúlya                                                                       | 24   |
| 3.3.1 Az egyensúly értelmezése                                                                   | 24   |
| 3.3.2 Az egyensúly kritériumai (feltételei)                                                      | 24   |
| 3.4 Erőrendszer centrális egyenes                                                                | 25   |
| 3.4.1 A centrális egyenes értelmezése                                                            | 25   |
| 3.4.2 A centrális egyenes egyenlete                                                              | 25   |
| 3.4.3 A centrális egyenes pontjaira számított nyomaték                                           | 27   |
| 3.5 Erőrendszerek osztályozása redukált (eredő) vektorkettősük alapján                           | 28   |
| 3.6 Erőrendszerek osztályozása az erők térbeli elhelyezkedése alapján -- Speciális erőrendszerek | 28   |
| 3.6.1 Közös ponton támadó erőrendszer                                                            | 29   |
| 3.6.2 Párhuzamos erőrendszer                                                                     | 31   |
| 3.6.2.1 Párhuzamos erőrendszer középpontja                                                       | 31   |
| 3.6.2.2 Súlypont értelmezése                                                                     | 32   |
| 3.6.2.3 Példák párhuzamos erőrendszerekre                                                        | 32   |
| 3.6.3 Szétszórt erőrendszer                                                                      | 34   |
| 3.6.4 Síkbeli erőrendszer                                                                        | 34   |
| 3.7 Síkbeli erőrendszer eredőjének meghatározása szerkesztéssel                                  | 35   |
| 3.7.1 Szétszórt síkbeli erőrendszer                                                              | 35   |
| 3.7.1.1 Részeredő sokszög szerkesztés                                                            | 35   |
| 3.7.1.2 Kötélsokszög szerkesztés                                                                 | 37   |
| 3.7.2 Párhuzamos síkbeli erőrendszer                                                             | 38   |
| 3.7.3 Közös ponton támadó síkbeli erőrendszer                                                    | 39   |
| 3.8 Helyhez kötött megoszló vektorrendszerek                                                     | 40   |
| 3.9 Statikai nyomaték. Súlypont. Tömegközéppont                                                  | 46   |

|                                                                                                           | old.      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. ANYAGI PONTOKBÓL, MEREV TESTEKBŐL ÁLLÓ RENDSZEREK EGYENSÚLYA</b>                                    | <b>51</b> |
| 4.1 A statika főtétele                                                                                    | 51        |
| 4.2 A statika feladatának általános megfogalmazása                                                        | 51        |
| 4.3 A rendszer megtámasztása, a Coulomb-féle surlódási törvény                                            | 52        |
| 4.4 A surlódási törvény általánosítása                                                                    | 55        |
| 4.5 Testek leggyakrabban előforduló megtámasztási és kapcsolódási módjai                                  | 57        |
| 4.5.1 Megtámasztás, kapcsolódás előírt ponton – csukló                                                    | 57        |
| 4.5.2 Megtámasztás, kapcsolódás előírt hatásvonalon – görgő                                               | 59        |
| 4.5.3 Befalazás, befogás                                                                                  | 62        |
| <b>5. ÖSSZETETT SZERKEZETEK STATIKÁJA</b>                                                                 | <b>63</b> |
| [Egymásra támaszkodó merev testek, háromcsuklós ív, rácsos szerkezet, Gerber-tartók, labilis szerkezetek] |           |
| <b>6. RUDAK IGÉNYBEVÉTELEI (BELSŐ ERŐI)</b>                                                               | <b>78</b> |
| 6.1 Rúderő, nyíróerő, hajlítónyomaték és csavarónyomaték értelmezése és számítása                         | 78        |
| 6.2 Síkbeli terhelésű egyenes rudak és síkbeli törtvonalú tartók igénybevételi ábrái                      | 86        |
| 6.3 Példák                                                                                                | 93        |