Szilárdságtan

2009. 09. 21.

GEMET 202 BL

09. 21.
10. 12. P – 12-16 Hf. ki.
11. 09. → ZH (40 perc) – Hfbe

11. 24 SZ 13–17

előadások időpontjai

A házi beadása nem kötelező!

Szilárdságtan I. Kozák Imre

ZH – az első 2 alkalom anyagaiból

Matematikai ~~alap~~ bevezető

Mátrixok

– oszlop mátrix

pl. $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} ; \quad \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \underline{j} ; \underline{k} ; \ldots$$

– $\underline{v}^T = [v_x ; v_y ; v_z]$ – transzponált

– négyzetes mátrixok (3×3-as)

pl: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} ; \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Nevezetes mátrix

- egységmátrix: $\underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{I}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- szimmetrikus mátrix:

jele $\underline{\underline{A}}_{sz}$; def: $\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T}$

pl: $\underline{\underline{A}}_{sz} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- aszimmetrikus mátrix

jele: $\underline{\underline{A}}_{asz}$; def: $\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$

pl:

$\underline{\underline{A}}_{asz} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

Mátrix - vektor szorzása

pl:

$$\underline{w} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 - 1\cdot 5 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 3 + 2\cdot 5 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \underline{w}$$

Szilárdságtan

2007.09.21

$$\underline{u}\cdot(\underline{\underline{A}}\cdot\underline{v}) = \underline{v}\cdot(\underline{\underline{A}}^T\cdot\underline{u})$$

$$\underline{u}\cdot\underline{\underline{A}}_{sz}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot\underline{\underline{A}}_{sz}\cdot\underline{u}$$

$$\underline{u}\cdot\underline{\underline{A}}_{asz}\cdot\underline{u} = -\underline{u}\cdot\underline{\underline{A}}_{asz}\cdot\underline{u} = \emptyset$$

Tenzor: homogén, lineáris vektor – vektor függvény, illetve leképezés.

$$\underbrace{\vec{w}}_{\text{függő}} = f(\underbrace{\vec{v}}_{\text{független változó}})$$

homogén $\quad f(\vec{0}) = \vec{0}$

lineáris $\quad f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

$$\left.\begin{matrix} f(\vec{0}) = \vec{0} \\ f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \end{matrix}\right\} \boxed{\vec{w} = \underline{\underline{T}}\,\vec{v}}$$

pl.:

- skalárban $y = f(x)$

$$\left.\begin{matrix} f(0) = \emptyset \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{matrix}\right\} y = mx$$

Mátrixosan

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix}}_{[\underline{\underline{T}}] = \underline{\underline{T}}} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

pl. $\bar{v} = \bar{i}$

$$\bar{w} = \underline{\underline{T}} \cdot \bar{i} = \dots = \begin{bmatrix} t_{xx} \\ t_{yx} \\ t_{zx} \end{bmatrix}$$ – $\underline{\underline{T}}$ első oszlopa

$$\bar{i} \cdot \bar{w} = \underline{i} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{i} = t_{xx} \quad ; \quad \underline{j} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{i} = t_{yx}$$

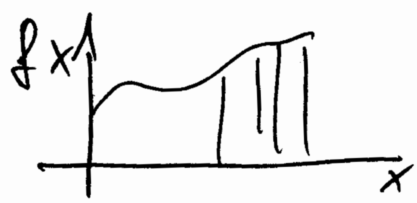
$$\underline{j} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{j} = t_{yy}$$

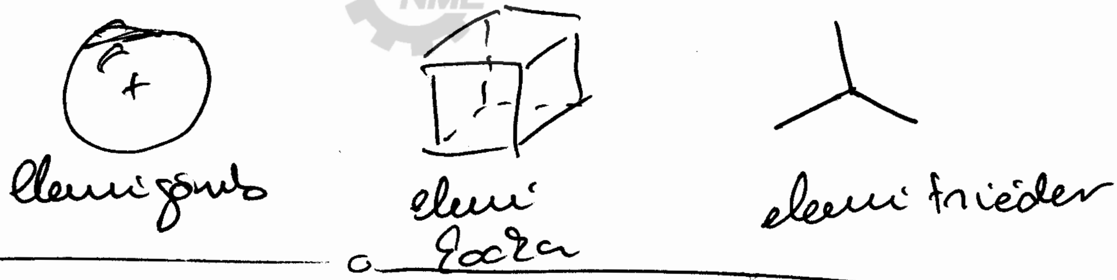
$$\underline{k} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{k} = t_{zz}$$

Szilárdságtan alapjai

Tárgya:
terhelés előtt és terhelés alatt is tartós nyugalomban lévő alakváltozásra képes test kinematikája és statikája.

- terhelés: quasi-statikus
- alakváltozás: geom. jell. (hossz., szög, ..) változása
- elemi környezet: a pont olyan kis környezete, amelyben
  - a mechanikai jellemzők véges számú adattal leírhatók
  - a mechanikai jellemzők változása legfeljebb lineáris.

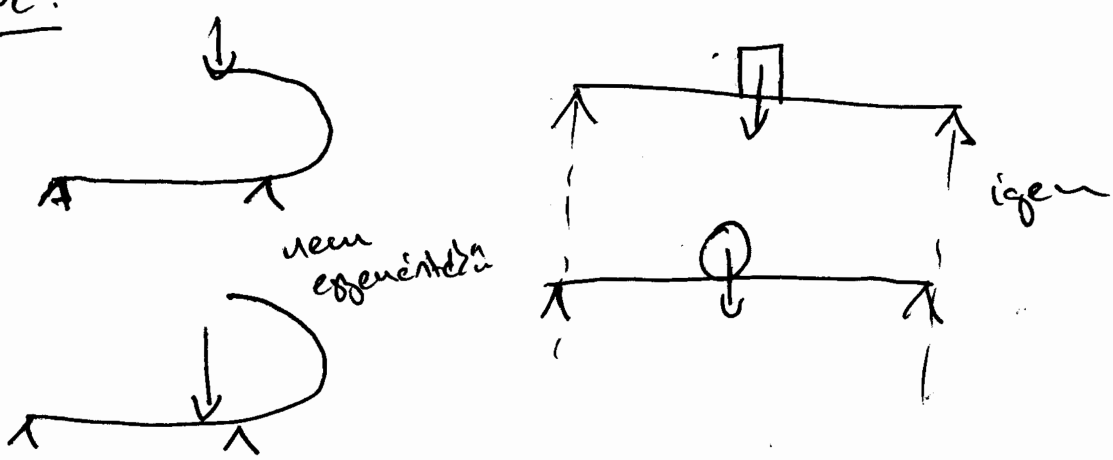




ER szilárdságtani egyenértékűség

Def.: Két ER szilárdságtanilag egyenértékű ha a test kis részétől eltekintve ugyanazt az alakváltozást hozzák létre.

pl.:



Feladat:

- elemi körny. állapota
- mechanika ált. tov.
- anyagegyenlet
- rudak. méretezés – ellenőrzés

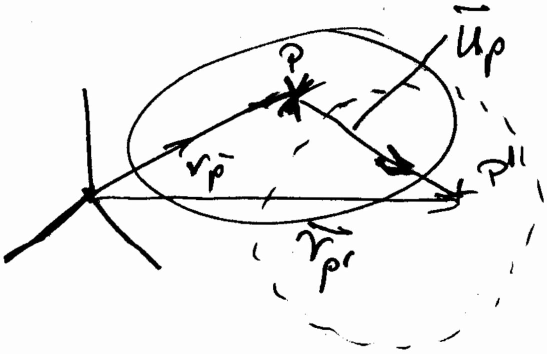
Feltételezés:

- kontinuum
- homogén, izotróp, lineáris anyag
- kis elmozdulás (elmozdulás << test méret)

- Kis alakváltozás

$$(\varepsilon, \gamma \ll 1) \sim 10^{-4} - 10^{-3}$$

Elmozdulás állapot



terh. — előtt: P, $\vec{r}_p$

— után: P', $\vec{r}_{p'}$

$$\vec{r}_{p'} = \vec{r}_p + \vec{u}_p$$

$$\vec{u}_p = \vec{u} = u \cdot \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y,z) \\ v &= v(\quad) \\ w &= w(\quad) \end{aligned}\right\} \text{elmozd. koord.}$$

Alakváltozás állapot

Mozgásfajták

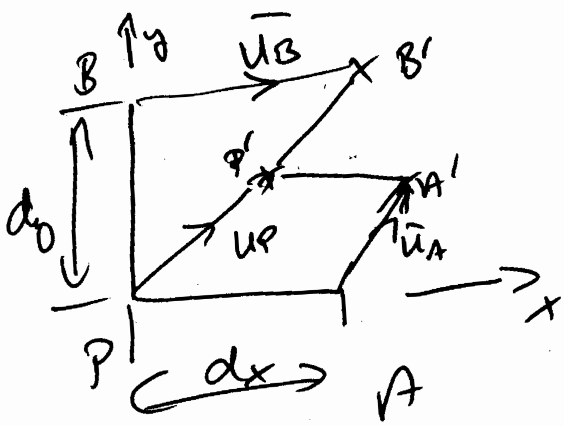
- merevtestszerű
  - párh. eltolás
  - forgás
- alakváltozási
  - hossz vált.
  - szög változás

2007.09.21

Szilárdságtan

P elemi környezetének mozgását

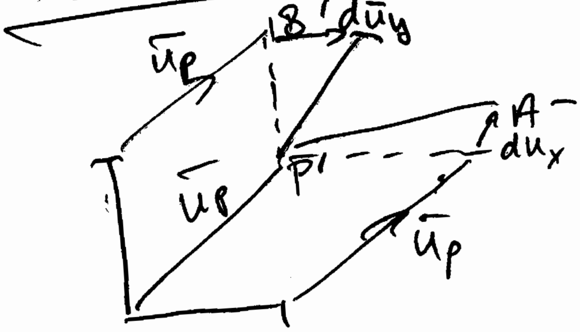
(x,y) síkban



$$\vec{u}_A = \vec{u}_P + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} d_x + (\cancel{\ \ })$$

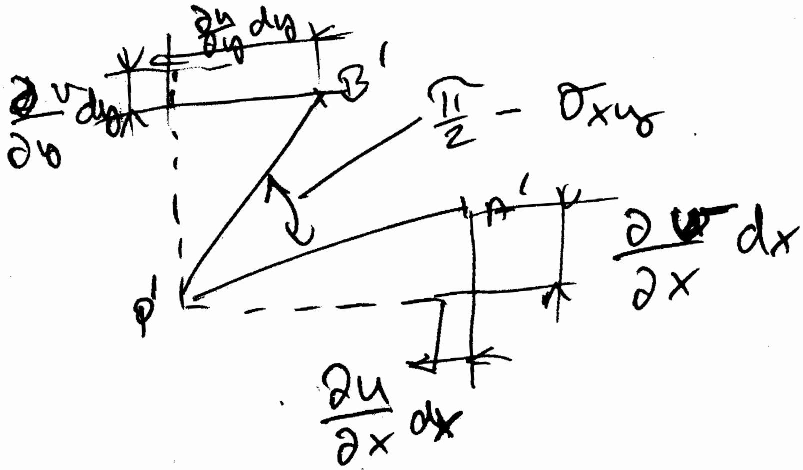
$$\vec{u}_B = \vec{u}_P + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} d_y + (\cancel{\ \ })$$

Relatív mozgás



$$d\bar{u}_x = \bar{u}_A - \bar{u}_P = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx$$

$$d\bar{u}_y = \bar{u}_B - \bar{u}_P = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy$$



Skaláris alakváltozási jellemzők

- fajlagos nyúlás $\quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l}$

$$\varepsilon_x = \frac{P'A' - d_x}{d_x}$$

$$d_x = PA$$

$$P'A' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} =$$

$$= dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} =$$

$$\cong dx\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{P'A'-dx}{dx} = \frac{dx\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}}$$

hasonlóan:

$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{P'B'-dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$P'B' = \sqrt{\left(dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2} \cong dy\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}}$$ – általánosítás

fajlagos szögtorzulás

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ (kezdetben $\frac{\pi}{2}$)

$$(\overrightarrow{P'A'})\cdot(\overrightarrow{P'B'}) = \underbrace{|P'A'|}_{dx(1+\varepsilon_x)}\,\underbrace{|P'B'|}_{dy(1+\varepsilon_y)}\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_{xy}\right)}_{\sin\gamma_{xy}\,\cong\,\gamma_{xy}}$$

$$P'A' = dx+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\varepsilon_x}dx = dx(1+\varepsilon_x)$$

$$dx\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial x}\vec{j}\right]dy\left[\frac{\partial u}{\partial y}\vec{i}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j}\right] =$$

$$dx\,dy\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}}_{\cong 0}\right] =$$

$$= dx\,dy\,\gamma_{xy} \qquad \boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Szilárdságtan

2007.09.21.

Általánosítás

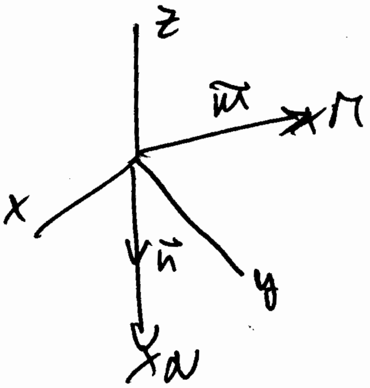
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$$



Általános eset.

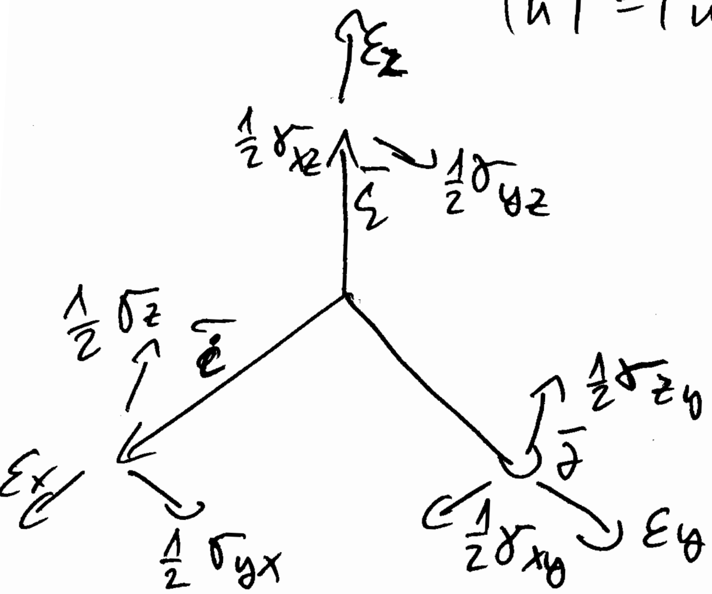
$$\varepsilon_n = \bar{n}\,\underline{\underline{A}}\,\bar{n}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{mn} = \bar{m}\,\underline{\underline{A}}\,\bar{n}$$

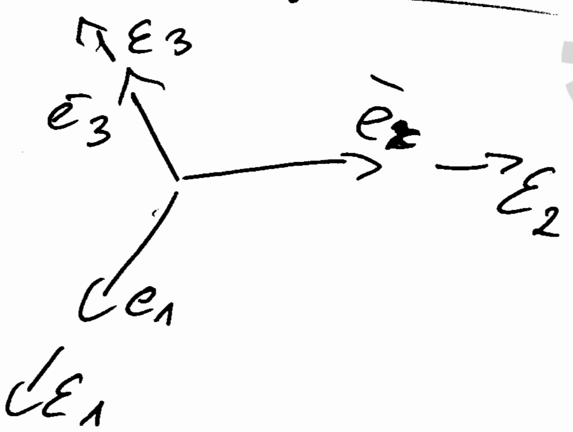
$$\bar{n} \cdot \bar{m} = 0$$

$$|\bar{n}| = |\bar{m}| = 1$$

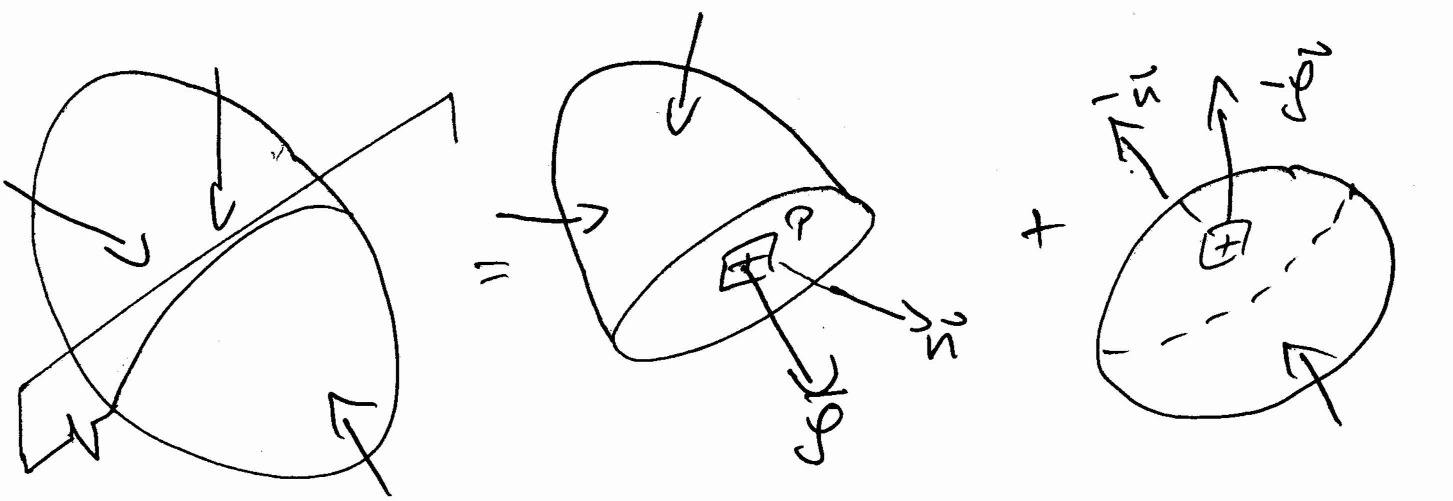
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



Főirány, főnyúlás



Feszültség állapot



$\bar{\rho}$: a felületelemen ébredő belső erő sűrűségvektora

$$SI: 1\frac{N}{m^2} = 1 Pa \ ; \ 1\frac{MN}{m^2} = 1\frac{N}{mm^2} = 1 MPa$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(P, \bar{n})$$

P-t rögzítve

$\bar{\rho} = \bar{\rho}_n$ P fesz állapota

Kölcsönhatás

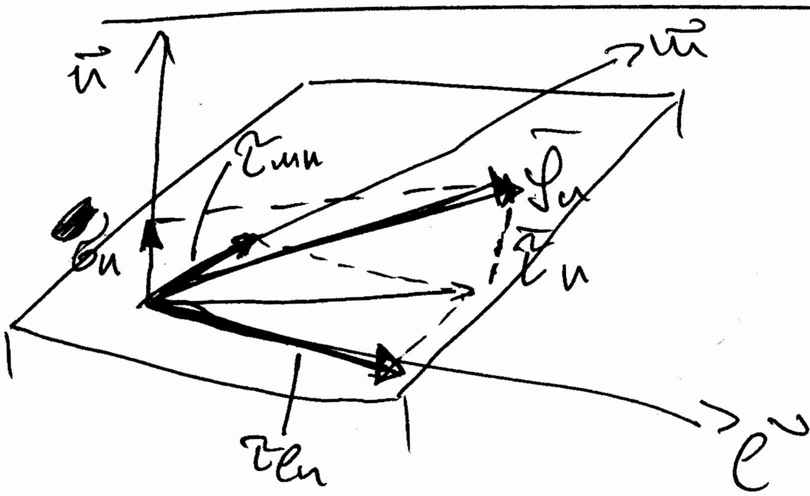
$$\bar{\rho}_{-n} = -\bar{\rho}_n$$

Cauchy-tétele

$$\boxed{\bar{\rho}_n = \underline{\underline{T}}\,\bar{n}}$$

$\underline{\underline{T}}$: fesz tenzor

Feszültség vektor felbontása



- normálfesz:

$$\sigma_n = \bar{n}\,\bar{\rho}_n = \bar{n}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\bar{n} \begin{cases} >0 & \text{húzó} \\ <0 & \text{nyomó} \end{cases}$$

- csúsztató v. nyíró feszültség

$$\vec{\tau}_n = \bar{\rho}_n - \bar{n}\,\sigma_n \quad \text{- vektor}$$

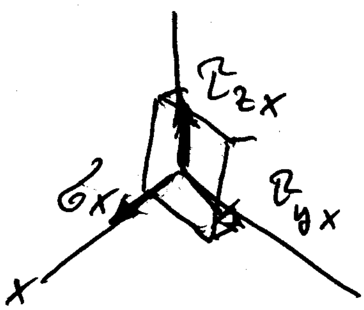
$$\tau_{mn} = \bar{m}\,\bar{\tau}_n = \bar{m}\,\bar{\rho}_n - \cancel{\bar{m}\,\bar{n}}\,\sigma_n = \bar{m}\,\bar{\rho}_n$$

$$\boxed{\tau_{mn} = \bar{m}\,\bar{\rho}_n = \bar{m}\,\underline{\underline{T}}\cdot\bar{n}}$$

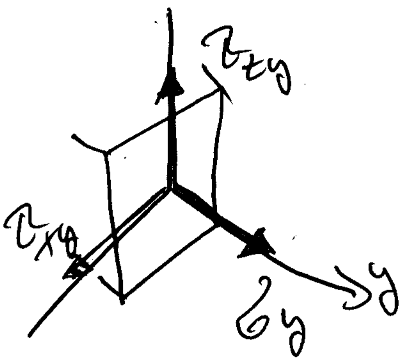
$$\bar{\rho}_n = \tau_{ln}\,\bar{l} + \tau_{mn}\,\bar{m} + \sigma_n\,\bar{n}$$

Alkalmazás (x, y, z) koordináta rendszerben

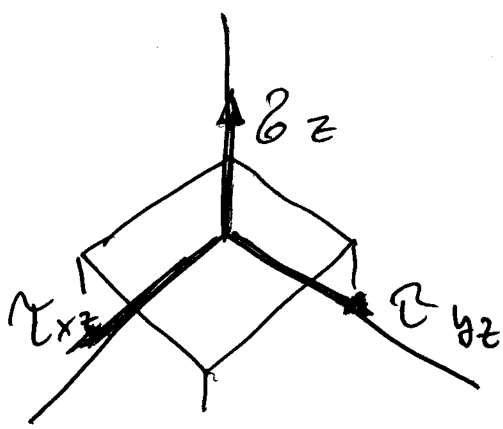
ha $\bar{n} = \bar{i}$: $\bar{\rho}_x = \sigma_x \bar{i} + \tau_{yx} \bar{j} + \tau_{zx} \bar{k}$



$\bar{n} = \bar{j}$: $\bar{\rho}_y = \tau_{xy} \bar{i} + \sigma_y \bar{j} + \tau_{zy} \bar{k}$



$\bar{n} = \bar{k}$: $\bar{\rho}_z = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j} + \sigma_z \bar{k}$

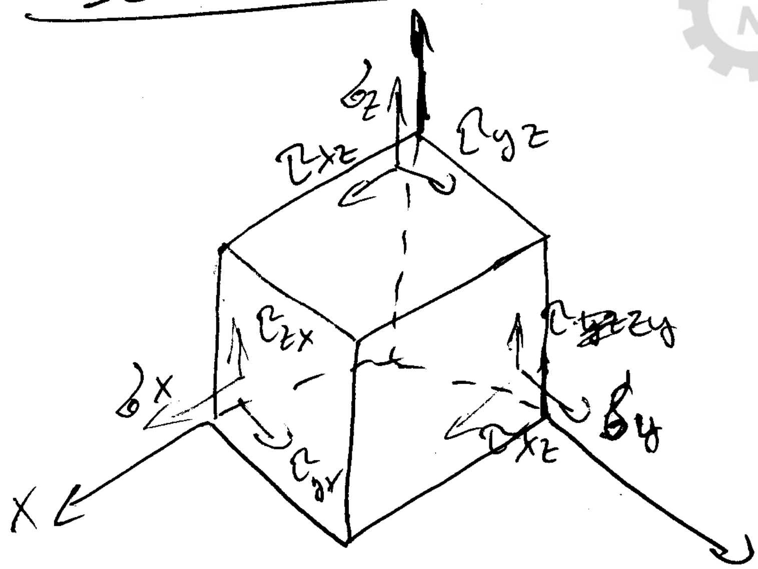


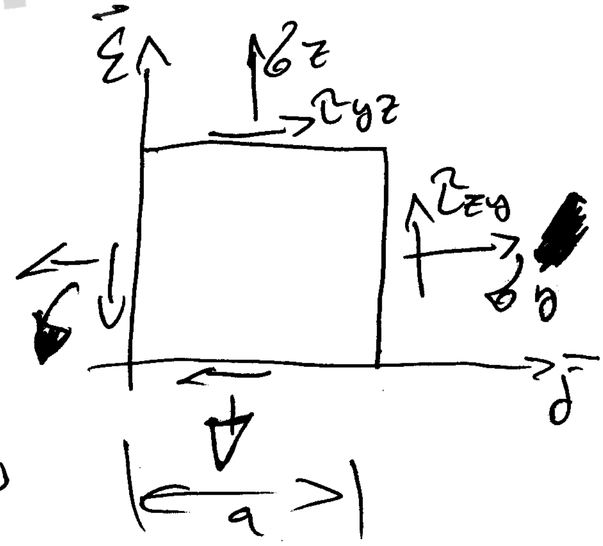
$\underline{\underline{T}}$ mátrix (x, y, z)-ben:

$\bar{\rho}_x = \underline{\underline{T}}\,\bar{i}$; $\bar{\rho}_y = \underline{\underline{T}}\,\bar{j}$; $\bar{\rho}_z = \underline{\underline{T}} \cdot \bar{k}$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Szemléltetés: elemi kocka





$$M_x = a\,\tau_{zy} - a\cdot\tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

általánosítás:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\to \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \text{ - szimm.}$$

$$\tau_{mn} = \bar{m}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\bar{n} = \bar{n}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\bar{m} = \tau_{nm}$$

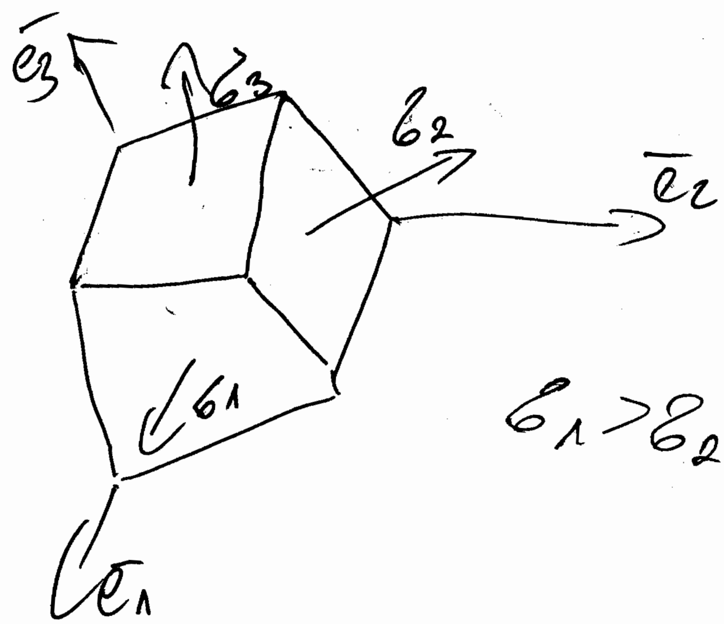
főirány, főfeszültség

$$\bar{\rho} = \underline{\underline{T}}\cdot\bar{e} = \sigma\cdot\bar{e} = \cancel{\ldots}\ ;\ \bar{\tau} = \bar{0}$$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - főirány

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - főfesz.

Szemléltetés



$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Energia állapot

$W_\varepsilon + W_b = \emptyset = E_2 - E_1$ nyugalom

$W_\varepsilon = -W_b$

$W_\varepsilon = U + W_d$

U : alakvált. energia

W_d : disszipatív energia

Rugalmas eset: $W_\varepsilon = U$