

Sz.2002.7. Adott az xyz koordinátarendszerben egy szilárd test $u(x, y, z)$ elmozdulásmezeje, valamint P pontjának r_P helyvektora:

$$u(x, y, z) = \underbrace{vzye_x}_{u_x} - \underbrace{vzx e_y}_{u_y} + \underbrace{0}_{u_z}$$

$$O = x_P = y_P \leftarrow r_P = \underline{-20e_x} \text{ [mm]} \quad v = 2 \cdot 10^{-3}$$

1. Számítsa ki betűkkel a

$$\vec{u}_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \{0, -vz, 0\} \quad (1)$$

$$\vec{u}_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \{vx, 0, 0\} \quad (1)$$

$$\vec{u}_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \{vy, -vx, 0\} \quad (2)$$

deriváltakat és a derivált tenzor mátrixát a P pontban (utóbbi esetben az r_P koordinátáit kell helyettesíteni!):

$$\underline{U}(x, y, z)|_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = \underline{U} = \begin{bmatrix} 0 & vx & vy \\ -vx & 0 & \cancel{vx} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Számítsa ki a forgató tenzor és az alakváltozási tenzor mátrixait a P pontban.

$$\underline{\Psi}(x, y, z)|_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & -0,02 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{A}(x, y, z)|_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{A} = \left(\frac{1}{2} (\underline{U} + \underline{U}^T) \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0,02 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Számítsa ki az $n = 0.6e_x + 0.8e_y$ és $m = -0.8e_x + 0.6e_y$ irányok közötti fajlagos szögtorzulást a P pontban.

$$\gamma_{mn} = 2 \cdot n \cdot \underline{A} \cdot m = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 10^{-3} (\phi) \quad (2)$$

Sz.2002.8. Ismeretes a szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa a lokális xyz koordinátarendszerben.

$$\underline{T} = \underline{T}_P = \begin{bmatrix} \vec{s}_x & \vec{s}_y & \vec{s}_z \\ 44 & 60 & 0 \\ 60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa} = \begin{bmatrix} 44 \cdot 0.6 + 60 \cdot 0.8 \\ 60 \cdot 0.6 - 20 \cdot 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Adja meg a P pontban az e_x , e_y és e_z normálisú elemi felületeken ébredő ρ_x , ρ_y és ρ_z feszültségvektorokat!

$$\vec{\rho}_x = \{44; 60; 0\}$$

$$\vec{\rho}_y = \{60; -20; 0\}$$

$$\vec{\rho}_z = \{0; 0; -12\}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

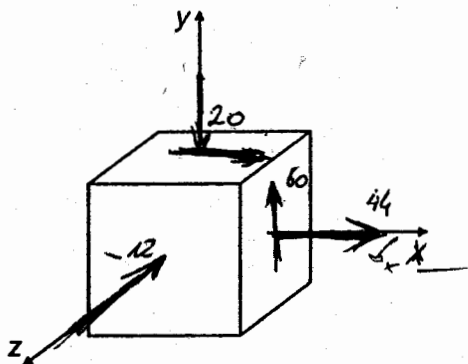
(1)

(1)

(1)

2. Írja fel a feszültségi tenzort diádok felhasználásával és szemléltesse a P pont feszültségi állapotát az elemi kocka segítségével.

$$\underline{T} = \underline{T}_P = \vec{s}_x \circ \vec{e}_x + \vec{s}_y \circ \vec{e}_y + \vec{s}_z \circ \vec{e}_z \quad (1)$$



(1)

3. Határozza meg a P pontban az n normálisú elemi felületen ébredő ρ_n feszültségvektort, a σ_n normál feszültséget valamint a τ_n nyírófeszültség vektort, ha

$$\underline{n} = 0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_y$$

$$\vec{\rho}_n = \underline{T} \cdot \underline{n}$$

$$\sigma_n = \underline{n} \cdot \vec{\rho}_n$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \cdot \underline{n}$$

$$\sigma \cdot \underline{n} = \{36; 48; 0\}$$

$$\vec{\rho}_n = \{76; 20; 0\} \quad (1)$$

$$\sigma_n = 44 \cdot 0.6 + 60 \cdot 0.8 = 60.64 \quad (1)$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n \cdot \underline{n} = \{38.4; 32; 0\} \quad (2)$$

2002-1b	Név:	Tk.:	Szilárdságtan
---------	------	------	---------------

Sz.2002.3. Adott az xyz koordinátarendszerben egy szilárd test P pontjának u_P elmozdulásvektora, valamint a derivált tenzor mátrixa:

$$u_P = 0.25e_x + 0.42e_y + 0.18e_z \text{ [mm]} \quad \underline{U}_P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad \vec{n} = \{0.6; 0.8; 0\}$$

1. Számítsa ki a forgató tenzor és az alakváltozási tenzor mátrixait a P pontban.

$$\underline{\Psi}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (2)$$

$$\underline{A}_P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^{-3} (1.44 - 1.28) \cdot 2 = 0.16 \cdot 10^{-3} \quad \epsilon_n$$

2. Legyen $\Delta r = r_{PQ} = e_x + 2e_y - 2e_z$ [mm] a P pont kis környezetében fekvő Q pont P pontra vonatkoztatott helyvektora. Mekkora a Q pont elmozdulásvektorának lineáris közelítéssel számolt értéke?

$$u_{n_4} = 2 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 10^{-3} (4 \cdot 0.48 - 2 \cdot 0.48) = 0.16 \cdot 10^{-3} \quad (3)$$

3. Írja fel az U_P derivált tenzor diádikus előállítását valamint a merevtestszerű szögelfordulás φ_P vektorát!

$$U_P = \quad (2)$$

$$\varphi_P = \quad (1)$$

Sz.2002.4. Ismeretes a szilárd test P pontjában a feszültségi tenzor diádikus alakja:

$$\mathbf{T}_P = 80\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + (40\mathbf{e}_y + 32\mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_y + (-32\mathbf{e}_y - 80\mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_z \quad [\text{MPa}].$$

1. Határozza meg a P pontban az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ normálisú elemi felületeken ébredő ρ_x , ρ_y és ρ_z feszültségvektorokat!

$$\rho_x = \{80; 0; 0\} \quad (1)$$

$$\rho_y = \{0; 40; -32\} \quad (1)$$

$$\rho_z = \{0; -32; -80\} \quad (1)$$

2. Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát az xyz koordinátarendszerben és szemléltesse a feszültségi állapotot az elemi kocka lapjain!

$$\mathbf{T}_P = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -32 \\ 0 & -32 & -80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad (1)$$

3. Határozza meg a P pontban az $\mathbf{n}$ normálisú elemi felületen ébredő ρ_n feszültségvektort, a σ_n normálfeszültséget valamint a τ_{mn} nyírófeszültséget, ha

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z) \quad \text{és} \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)!$$

$$\rho_n = \frac{1}{\sqrt{17}} \{0; 132; -48\} \quad (3)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{17} (768 + 48) = \frac{1}{17} (816) \quad (1)$$

$$\tau_{mn} = \frac{1}{17} (192 - 4 \cdot 48) \quad (1)$$

Műszaki Mechanika I ₂	Név:	Tk:	10.feladat-a/1
-------------------------------------	------	-----	----------------

102.08., Egy test P pontjában ismereteseek három egymásra merőleges síkhoz tartozó feszültségvektorok.

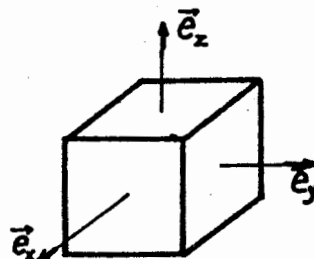
$$\vec{s}_x = 120\vec{e}_x - 80\vec{e}_y \text{ /MPa/}$$

$$\vec{s}_y = -80\vec{e}_x - 100\vec{e}_y + 40\vec{e}_z \text{ /MPa/}$$

$$\vec{s}_z = 40\vec{e}_y \text{ /MPa/}$$

1./ Irja fel a P pontbeli feszültségtenzor mátrixát, és szemléltesse a P pontbeli feszültségi állapotot az elemi kiskockán!

$$[\underline{T}_P] = \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right] \text{ MPa}$$



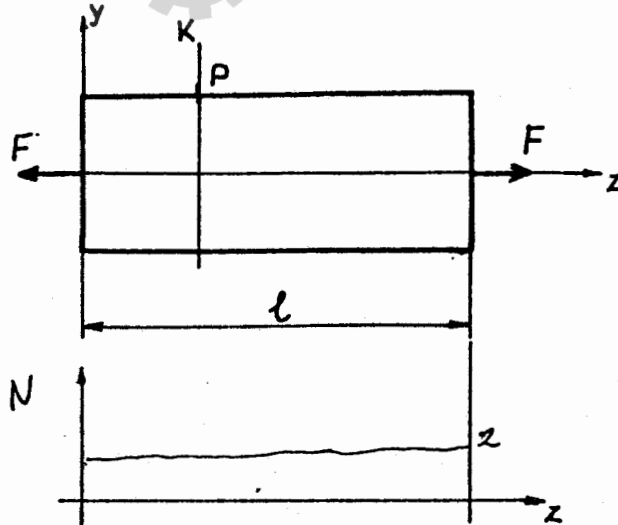
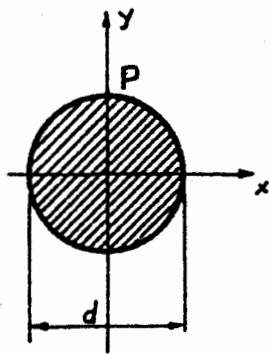
2+3/

2./ Számíts ki az $\vec{n} = \cos 60^\circ \vec{e}_x + \sin 60^\circ \vec{e}_y$ normálisú síkon ébredő $\vec{s}_n$ feszültségvektort!

$$\vec{s}_n =$$

4/

102.09. Ismert a vázolt körkeresztmetszetű rúd terhelése és geometriai méretei.



$$F = 2 \text{ kN} = 2 \cdot 10^3$$

$$l = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

$$d = 25 \text{ mm}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = \frac{1}{3}$$

1./ Rajzolja meg a rúd igénybevételi ábráját!

1/

2./ Számítsa ki a K jelű keresztmetszet P pontjában az xyz KR-ben a $[\underline{T}_P]$ feszültségi, illetve $[\underline{A}_P]$ alakváltozási mátrix koordinátáit!

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{2 \cdot 10^3}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot 25^2}{4}} \approx 490,6 \approx 4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = 0, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = 0, \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{4}{2 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$$

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_e - \nu \cdot \epsilon_z$$

$$\epsilon_z = \epsilon \cdot \epsilon_z =$$

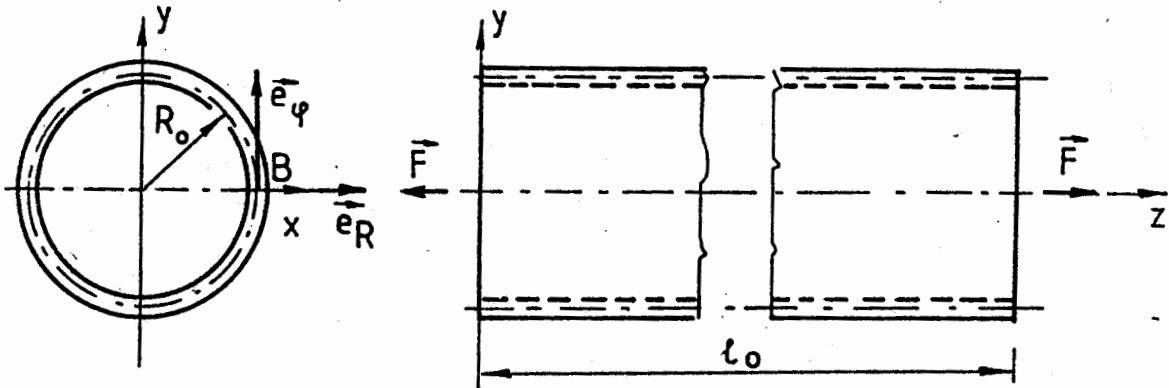
$$\frac{4}{2 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-5}$$

10/

Műszaki Mechanika II.	Név:	Tk:	2. feladat-a
--------------------------	------	-----	--------------

201. 5. Vékonyfalú csövet F erők húzásra terhelik.

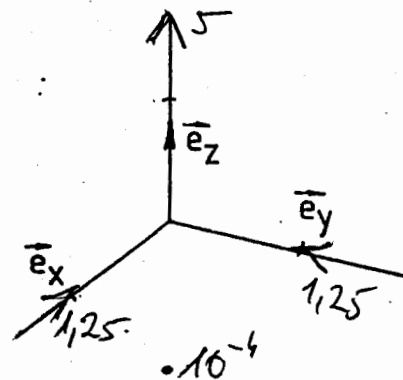
$D_o = 60$ mm a keresztmetszet $A = 200$ mm²; $l_o = 200$ mm; $\nu = 0,25$;
 $E = 2 \cdot 10^5$ MPa.



1/ Számítsa ki a z irányú ε_z fajlagos nyúlást, ha a terheletlen cső l_o hossza a terhelés hatására $l = 200,1$ mm hosszúra változik! Írja fel a B pontbeli $\underline{\underline{A}}_B$ alakváltozási tenzor mátrixát és szemléltesse azt elemi triéderen!

$$\varepsilon_z = \frac{0,1}{200} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{A}}_B = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1,25 & 0 & 0 \\ 0 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$



2/

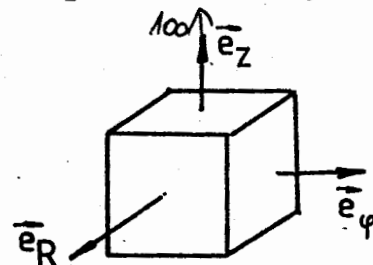
$$\varepsilon_z = \frac{\Delta d_o}{d_o} = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \left(\frac{N}{A} \right) \frac{1}{E} \Rightarrow N = \frac{\Delta d_o \cdot A \cdot E}{d_o \cdot (-\nu)}$$

2+1/

2/ Határozza meg a $\underline{\underline{T}}$ feszültségi tenzor mátrixát a B pontban, és szemléltesse a B pont feszültségi állapotát a környezetéből kivett kis kockán!

$$\underline{\underline{\sigma}}_z = E \cdot \varepsilon_z$$

$$\underline{\underline{T}}_B = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



1+1/

3/ Számítsa ki az F húzóerő értékét, ha a cső külső átmérője $\Delta D_o = -9 \cdot 10^{-4}$ mm-rel változik meg!

$$\Delta D_o = -\nu \frac{N \cdot d}{A \cdot E}$$

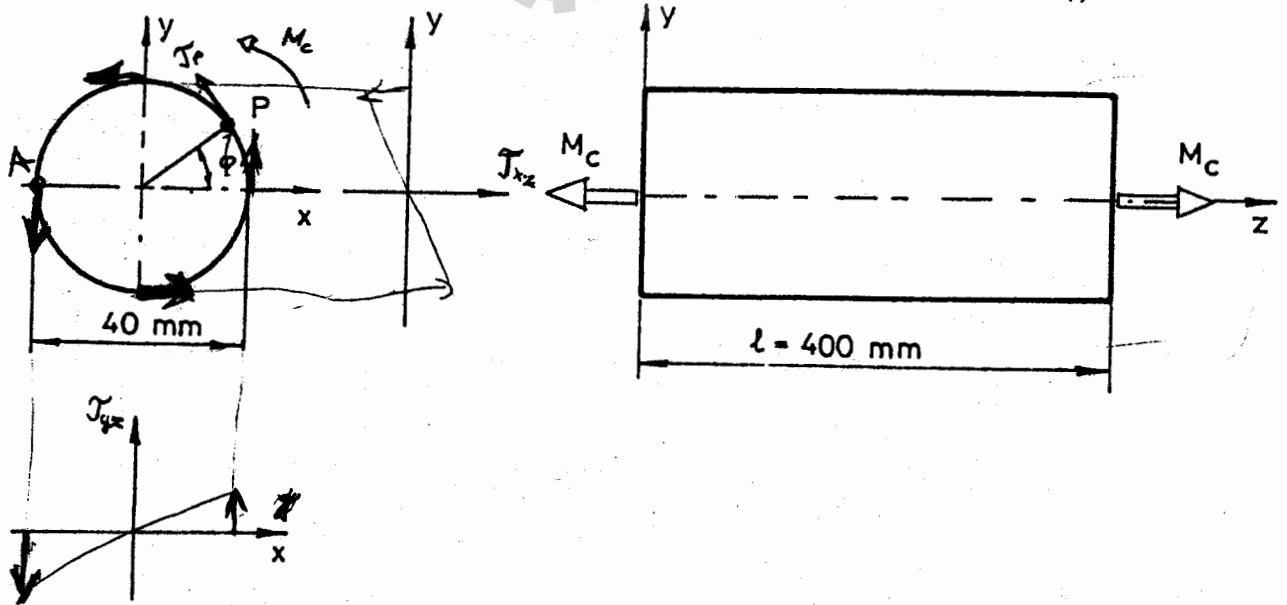
$$\frac{\Delta D_o}{D_o} = -\nu \frac{N}{A \cdot E} \Rightarrow N = \frac{\Delta D_o \cdot A \cdot E}{-\nu \cdot D_o}$$

3/

202.1. A körkeresztmetszetű rúd l hosszúságú szakaszát M_c csavarónyomaték terheli. $M_c = 0,5\pi \approx 1,57 \text{ kNm}$; $\cos \varphi = 0,8$; $\sin \varphi = 0,6$, $G = 80 \cdot 10^3 \text{ MPa}$.

$$\vec{n} = \vec{e}_z$$

$$\vec{n} = \vec{e}_x$$



1/ Rajzolja meg a csavarásból származó csúsztatófeszültségek eloszlását az x és y tengelyek mentén!

1+1/

2/ Határozza meg a P pontbeli feszültségállapot alábbi jellemzőit!

$$\tau_P = \frac{M_c}{I_p} \cdot \rho_P = \frac{0,5\pi}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} \cdot 10^4 \cdot \frac{d}{2} = \frac{0,5\pi \cdot 10^4 \cdot 16}{\pi \cdot 40^3} = \frac{500}{4} = 125$$

$$\tau_{Pxz} =$$

$$\tau_{Pyz} =$$

5/

3/ Írja fel a P pontbeli feszültségi tenzor mátrixát az xyz koordinátarendszerben!

$$\underline{\underline{\underline{\tau}}}_P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & -125 & \\ -125 & & \end{bmatrix}$$

1/

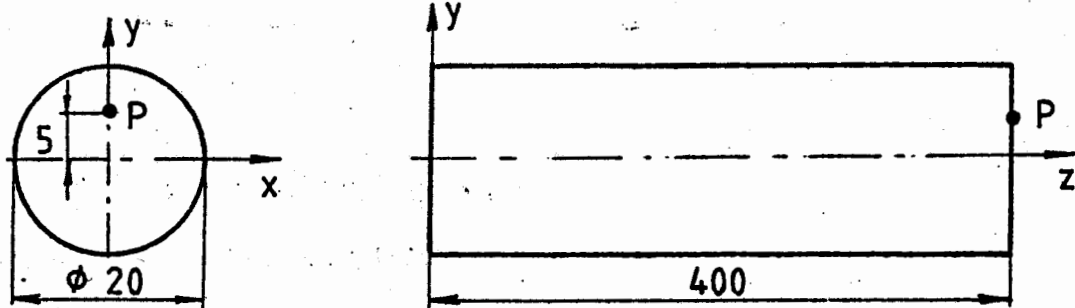
4/ Határozza meg a rúd szélső keresztmetszeteinek egymáshoz viszonyított ϕ_0 szögelfordulását!

$$\phi_0 = \frac{M_c \cdot l}{I_p \cdot G} = \frac{1,57 \cdot 10^4 \cdot 400}{\frac{\pi \cdot 40^4}{32} \cdot 80 \cdot 10^3}$$

2/

Szilárdságtan	Név:	Tk:	5. feladat-b
---------------	------	-----	--------------

202.4. Az ábrán vázolt körkeresztmetszetű prizmatikus rúd igénybevétele az egymást követő terhelések hatására húzás, majd hajlítás, végül csavarás. $E = 200 \text{ GPa}$; $G = 80 \text{ GPa}$; $N = 22 \text{ kN}$; $M_{hx} = 157 \text{ Nm}$; $M_c = 94,2 \text{ Nm}$.



1/ Határozza meg a P pontbeli feszültségi tenzor mátrixát az egyes igénybevételekre külön-külön!

húzás:

hajlítás:

csavarás:

$$\underline{\underline{\underline{T}}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{T}}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{T}}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_x \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} \quad \sigma_z = \frac{N}{A} = E \cdot \epsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{J_x} \cdot y = \frac{M_{hx}}{K_x} \cdot \frac{d^3 \pi}{32}$$

$$\tau_{yz} = \frac{M_c}{K_p}$$

2/ Számítsa ki a rúdban felhalmozódó alakváltozási energiát!

húzás: $U = \frac{N^2 \cdot L}{2 A \cdot E}$

hajlítás: $U = \frac{M_{hx}^2 \cdot L}{2 I_x \cdot E}$

csavarás: $U = \frac{M_c^2 \cdot L}{2 I_p \cdot G}$

6/

3/ Ellenőrizze a tartót húzásra, majd hajlításra, ha

$$\sigma_{jell.} = 120 \text{ MPa}; \quad n = 2!$$

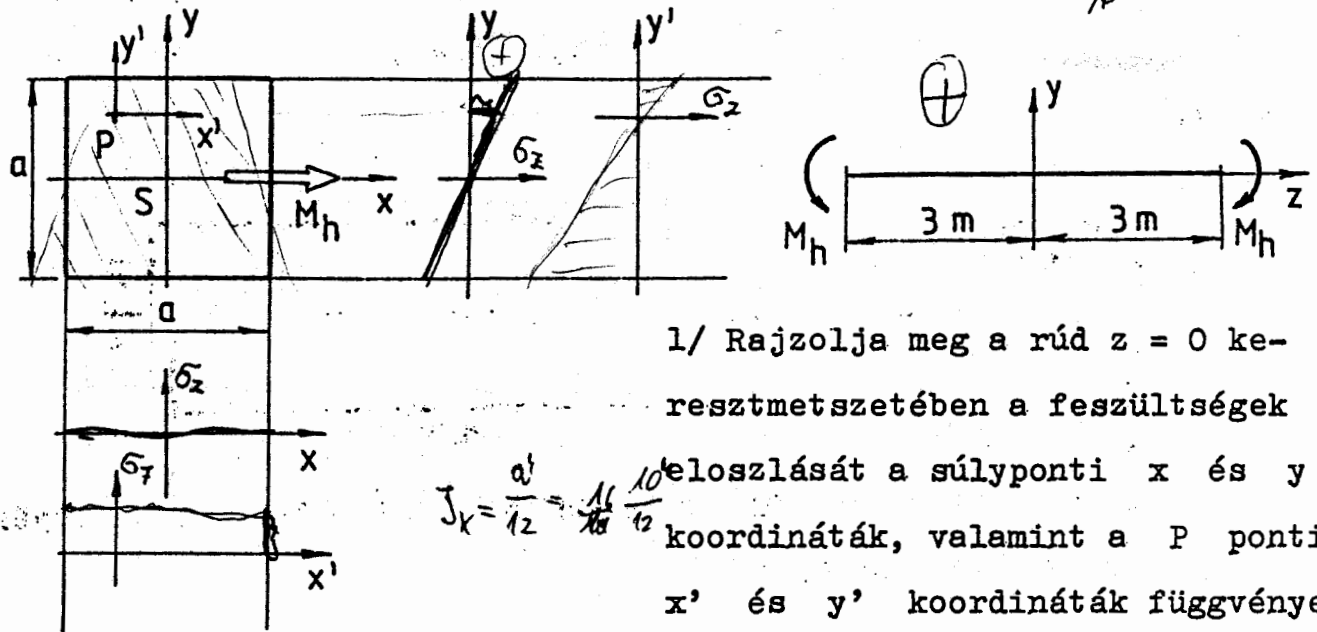
húzás: $\sigma_z \leq \sigma_{meg} \quad \sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{22 \cdot 10^3}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} \leq \sigma_{jell.} = \frac{120}{2} = 60$

hajlítás: $\sigma_{zmax} \leq \sigma_{meg} \quad \sigma_{zmax} = \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{157 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{\frac{\pi \cdot 20^4}{32}} = 196,25$

5/

202.5. A négyzetkeresztmetzetű prizmatikus rudat állandó M_h nyomatékú erőpárok hajlításra terhelik.

$M_h = 80 \text{ Nm}$; $E = 200 \text{ GPa}$; $\nu = 0,3$; $a = 20 \text{ mm}$; $\underline{r}_P^T = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ mm}$.



1/ Rajzolja meg a rúd $z = 0$ keresztmetszetében a feszültségek eloszlását a súlyponti x és y koordináták, valamint a P ponti x' és y' koordináták függvényeként!

$$\sigma_x = \frac{M_{hx}}{J_x} \cdot y = \frac{80 \cdot 10^3}{20^4 \cdot \frac{1}{12}} \cdot 6 = 36 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

2/ Számítsa ki a P pontban a feszültségi és alakváltozási tenzorok mátrixait!

$$\underline{T}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\underline{A}_P = \begin{bmatrix} -\nu \epsilon_2 & -0,54 \\ -0,54 & 1,8 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_x = \frac{36}{2 \cdot 10^5} = 1,8 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_x}{-\nu} = \frac{1,8 \cdot 10^{-4}}{-0,3} = -6 \cdot 10^{-5}$$

$$\sigma_2 = \frac{E \cdot \epsilon_2}{2 \cdot 10^5} = \frac{200 \cdot 10^9 \cdot (-6 \cdot 10^{-5})}{2 \cdot 10^5} = -0,54 \text{ MPa}$$

3/ Határozza meg a deformálódott súlyponti szál ρ görbületi sugarát!

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x \cdot E} = \frac{80 \cdot 10^3}{\frac{1}{12} \cdot 20^4 \cdot 200 \cdot 10^9} = \frac{4 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4} = 0,5$$

4/ Mekkora a keresztmetszet $y = 10 \text{ mm}$ koordinátájú a oldalának Δa megváltozása?

$$\Delta a =$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta a}{a} = -\nu \epsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_2}{E} = -\nu \frac{M_{hx}}{I_x \cdot E} \Rightarrow \Delta a = -\nu a \frac{M_{hx}}{I_x \cdot E}$$