

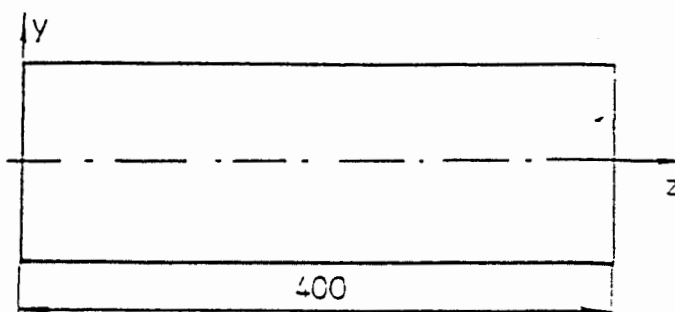
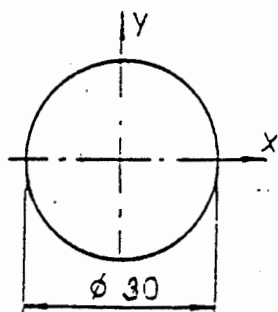
MISKOLCI EGYETEM
Gépészmérnöki Kar

SZILÁRDSÁGTAN
című tantárgy előadási anyaga
II. éves BSc levelezős hallgatók részére

Összeállította: Dr. Nándori Frigyes

Mechanika	feladat	Név:	Tk:	$a =$ $x_p =$	$b =$ $y_p =$
-----------	---------	------	-----	------------------	------------------

Szt.29 Az ábrán vázolt körkeresztmetszetű prizmatikus rúd igénybevétele az egymást követő terhelések hatására húzás, majd hajlítás, végül csavarás. $E = 200 \text{ GPa}$; $G = 80 \text{ GPa}$; $N = 3 \text{ kN}$; $M_{hx} = 5 \text{ kNm}$; $M_c = 4 \text{ Nm}$.



1/ Határozza meg a P pontbeli feszültségi tenzor mátrixát az egyes igénybevételekre külön-külön! $P(x_p, y_p, 0) \text{ mm}$

húzás:

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}_P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

hajlítás:

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}_P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

csavarás:

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}_P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

/ 5

/ Ellenőrizze a tartót ha

$$\sigma_{jell} = 120 \text{ MPa}; \quad \tau_{jell} = 100 \text{ MPa}; \quad n = 2 !$$

hajlítás:

csavarás:

/ 4

MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

Mátrixok: számok sorba/oszlopba rendezett halmaza

- **oszlopmátrix:**

pl. vektor mátrixa: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \text{pl.: egységvektor} \quad \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

transzponált mátrix: $\underline{v}^T = [v_x \ v_y \ v_z] = [2 \ 3 \ 5]$

- **négyzetes mátrix:** pl.: 3x3-as (3 sor, 3 oszlop)

$$\text{pl. } \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad - \text{ transzponált}$$

nevezetes mátrixok:

szimmetrikus mátrix: ha $\underline{A} = \underline{A}^T$, jele: $\underline{A}_{sz}$

aszimmetrikus mátrix: ha $\underline{A} = -\underline{A}^T$, jele: $\underline{A}_{asz}$

Minden mátrix felbontható szimmetrikus és aszimmetrikus mátrix összegére:

$$\underline{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{A}^T)}_{\underline{A}_{sz}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{A}^T)}_{\underline{A}_{asz}}$$

pl. a fenti $\underline{A}$ -ra vonatkozóan

$$\underline{A}_{sz} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_{asz} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása vektorral: sor-oszlop kombináció

pl.

$$\underline{A}\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A négyzetes és oszlopmátrix szorzata oszlopmátrix.

Mátrix és a KR egységvektorainak szorzata a mátrix megfelelő oszlopát adja

pl.

$$\underline{v} = \underline{i}, \quad \underline{A}\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Mátrix kétoldali szorzása a KR egységvektoraival a mátrix megfelelő elemét adja:

pl. $\underline{u} = \underline{i}, \quad \underline{v} = \underline{i}: \quad \underline{u}\underline{A}\underline{v} = \underline{i}\underline{A}\underline{i} = 1$
 $\underline{u} = \underline{j}, \quad \underline{v} = \underline{i}: \quad \underline{u}\underline{A}\underline{v} = \underline{j}\underline{A}\underline{i} = 2$

Tenzor fogalma:

Def.: homogén, lineáris vektor-vektor függvény

- skálárban: $y = f(x)$ homogén, ha $y(0) = f(0) = 0$
 lineáris, ha $y(\lambda x) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$ csak $y = mx$ lehet

- vektorok körében: (x, y, z) KR-ben

$$\left. \begin{aligned} \underline{v} &= v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k} && \text{független vektorok} \\ \underline{w} &= w_x \underline{i} + w_y \underline{j} + w_z \underline{k} && \text{függő vektorok} \end{aligned} \right\} \quad \boxed{\underline{w} = \underline{T}\underline{v}}$$

homogén-lineáris, ha

$$\left. \begin{aligned} w_x &= t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z \\ w_y &= t_{yx}v_x + t_{yy}v_y + t_{yz}v_z \\ w_z &= t_{zx}v_x + t_{zy}v_y + t_{zz}v_z \end{aligned} \right\} \text{skaláris alak}$$

tömörebb írás: $\underline{w} = \underline{\bar{i}}_x v_x + \underline{\bar{i}}_y v_y + \underline{\bar{i}}_z v_z$ vektoros alak

$\underline{\bar{i}}_x, \underline{\bar{i}}_y, \underline{\bar{i}}_z$ az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységvektorok leképezettje

pl. $\underline{v} = \underline{i}$ esetén $v_x = 1, v_y = 0, v_z = 0$ és $\underline{w} = \underline{\bar{i}}_x$

$\underline{v} = \underline{j}$ esetén $v_x = 0, v_y = 1, v_z = 0$ és $\underline{w} = \underline{\bar{i}}_y$

mátrix-vektor szorzást alkalmazva:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{T}} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \leftrightarrow \underline{w} = \underline{T}\underline{v}$$

$\underline{T}$: tenzor mátrixa

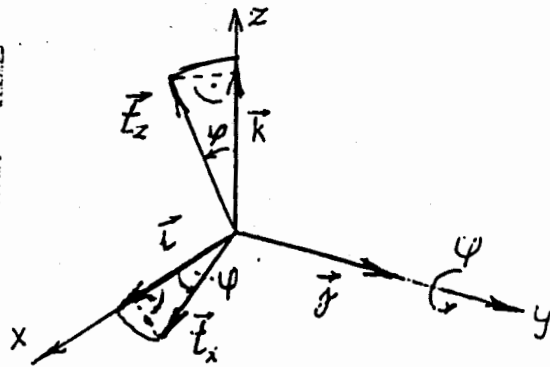
$$\underline{T} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} \text{ -- mátrixos alak } \quad \text{vagy} \quad \underline{T} = [\underline{\bar{i}}_x \mid \underline{\bar{i}}_y \mid \underline{\bar{i}}_z].$$

A tenzor mindig megadható az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ egységvektorok $\underline{\bar{i}}_x, \underline{\bar{i}}_y, \underline{\bar{i}}_z$ leképezettjével.

Példa: forgatás y -körül φ szöggel:

$\vec{v} = \vec{r}$ helyvektor

$\vec{w}$ elforgatott helyvektor



Ábráról:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_x &= \cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{k} \\ \vec{i}_y &= \vec{j} \\ \vec{i}_z &= \sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{k} \end{aligned} \right\} T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Szilárdságtan alapjai

Tárgya: terhelés előtt és terhelés után is tartós **nyugalomban** lévő alakváltozásra képes testek kinematikája és dinamikája.

A terhelési folyamat egyensúlyi helyzeteken keresztül történik (quazistatikus terhelés)

- kinematikai: a mozgás és alakváltozás leírása
- dinamikai: a belső erőrendszer

Valóságos testek helyett testmodelleket használunk.

Szilárd test

Rugalmas test

: Képlékeny test

lineárisan
rugalmas

nemlineárisan
rugalmas



$$v = cF$$

$$v = f(F)$$



a terhelés elvétele után van maradó alakváltozása

Terhelés hatására:

- elmozdulás
- alakváltozás (geometriai jellemzők):

hossz
 szög
 terület
 térfogat

} megváltozása.

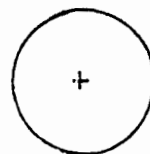
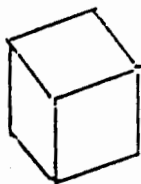
Elemi környezet: egy pont olyan kis környezete amelyben a mechanikai állapot

- a hely lineáris függvénye
- egy ponthoz kötött véges számú mennyiséggel leírható

Pl. elemi kocka,

elemi triéder,

elemi gömb

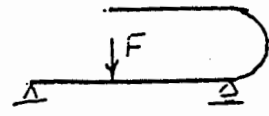
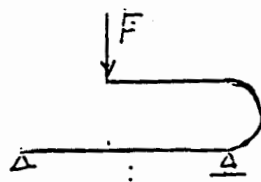
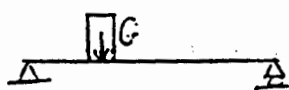
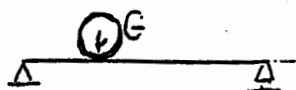


Erőrendszerek: szilárdságtani egyenértékűsége:

Két ER szilárdságtanilag egyenértékű, ha a test kis részétől eltekintve ugyanazt az alakváltozást hozza létre.

Egyenértékű:

Nem egyenértékű:



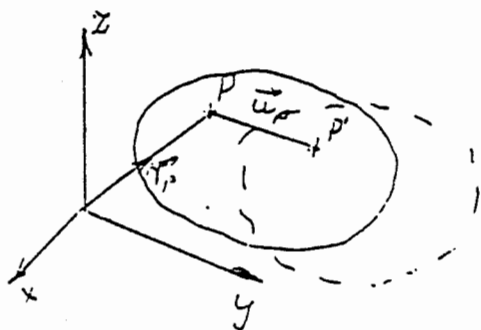
Feladat :

- elemi környezet szilárdságtani állapotának leírása,
- a mechanika általános elveinek alkalmazása,
- anyagtörvény tisztázása,
- méretezés - ellenőrzés általános elvei.

Feltételezések:

- a szilárd test: kontinuum (folytonos fgv-ek)
- anyaga homogén (nem függ a helytől) és izotróp (nincs kitüntetett irány)
- elmozdulások, alakváltozások kicsik (elmozdulás $\ll$ test mérete; fajlagos nyúlás $\ll 1$).

Elmozdulásállapot



$$\text{terhelés} \begin{cases} \text{előtt: } P; \bar{r}_p \\ \text{utána: } P'; \bar{r}_p' = \bar{r}_p + \bar{u}_p \end{cases}$$

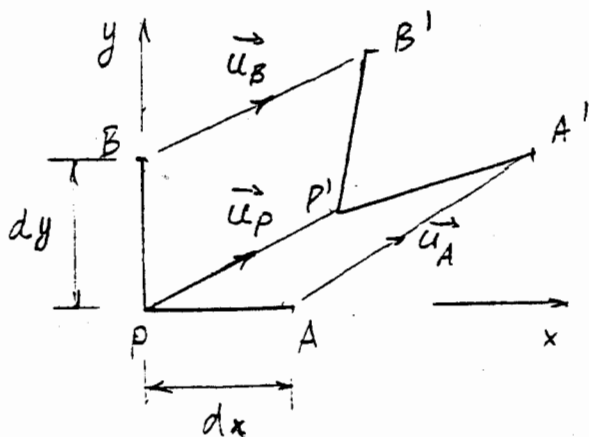
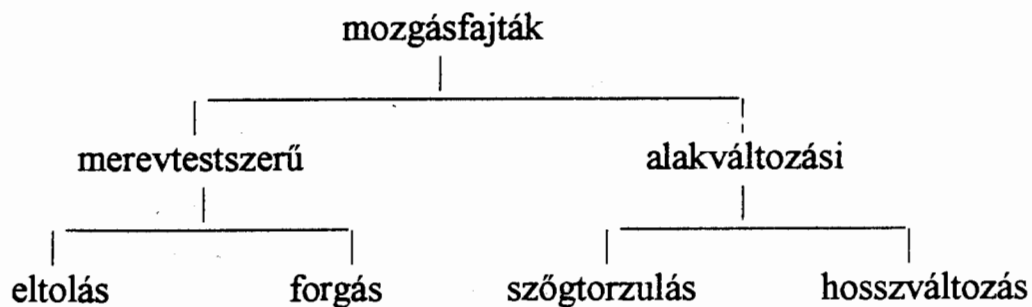
elmozdulásmező:

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\bar{i} + v(x, y, z)\bar{j} + w(x, y, z)\bar{k}$$

u, v, w : elmozdulás koordináták

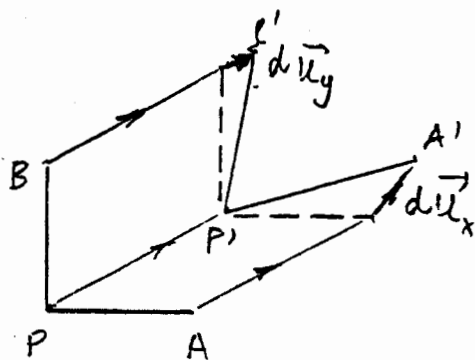
Alakváltozási állapot

P pont környezetében az x, y síkban kijelölt elemi felület mozgása :



$$\bar{u}_A \cong \bar{u}_P + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx$$

$$\bar{u}_B \cong \bar{u}_P + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy$$



$$d\bar{u}_x = \bar{u}_A - \bar{u}_P = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx$$

$$d\bar{u}_y = \bar{u}_B - \bar{u}_P = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy$$

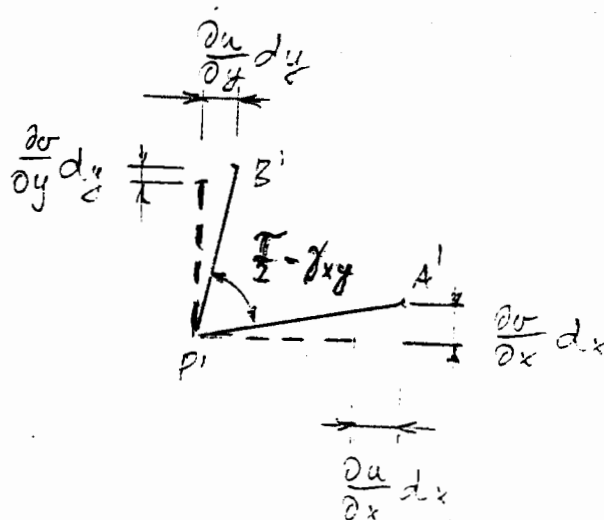
Alakváltozási jellemzők:

Fajlagos nyúlások

$$\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{\ell}$$

$$\varepsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{P'A' - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{P'B' - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$



$$P'A' = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (dx)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} \cong \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

$$P'B' = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy^2} \cong \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

Szögtorzulás:

$$(\overline{P'A'}) (\overline{P'B'}) = (1 + \varepsilon_x) (1 + \varepsilon_y) dx dy \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right)$$

$$(dx\vec{i} + d\bar{u}_x)(dy\vec{j} + d\bar{u}_y) \cong dx dy \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \ll 1$$

$$\left(\vec{i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) \left(\vec{j} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = \gamma_{xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

Általánosítás:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

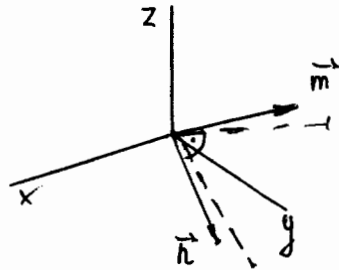
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}}$

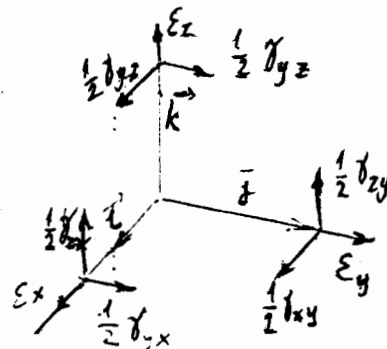
$$\varepsilon_n = \underline{\underline{\bar{n}}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\bar{n}}} \quad , \quad \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \underline{\underline{\bar{m}}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\bar{n}}}$$



Általánosítás: (x,y,z) koord. tengelyekre

Szemléltetés:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



Elmozdulással kifejezve:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \text{szimm.} & & \end{bmatrix}$$

Alakváltozási főirányok: $\bar{e}_i$

$$\underline{\underline{A}} \bar{e}_i = \varepsilon_i \bar{e}_i$$

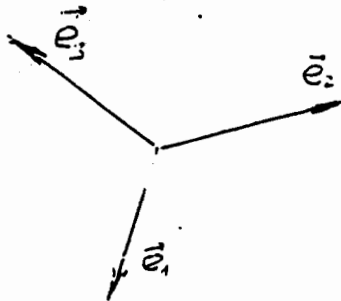
Van legalább három megoldása:

ε_1 - főnyúlás,

$\bar{e}_1$ - főirány,

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - kölcsönösen merőlegesek.

Főirányok KR-ében,

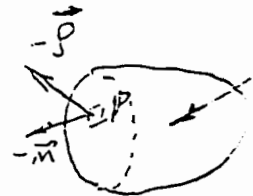
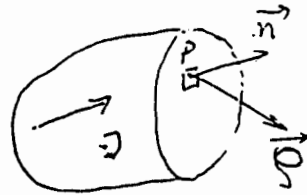
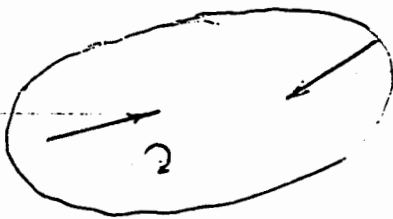


$$\underline{\underline{A}}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Szokás: $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Feszültségi állapot, belső erőrendszer

Részekre bontott test egyensúlya



Belső erőrendszer: a testet átmetsző összes lehetséges felületen (felületepáron) megoszló erőrendszer.

Feszültségvektor: a belső erőrendszer sűrűségvektora: $\bar{\rho}$

mértékegysége: $1\text{N}/\text{m}^2 = 1\text{Pa}$

$1\text{N}/\text{mm}^2 = 1\text{MN}/\text{m}^2 = 1\text{MPa}$

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{r}_p, \bar{n})$$

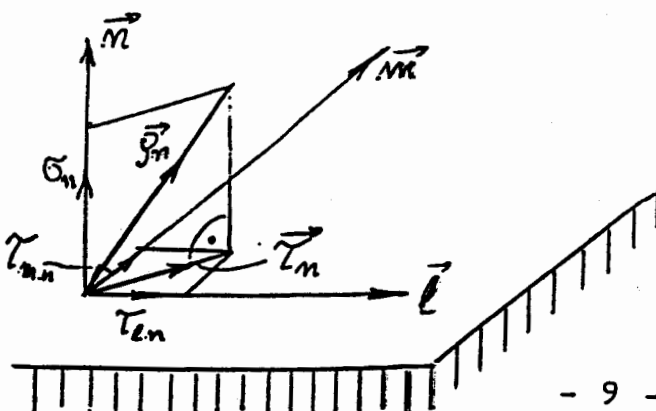
P -t rögzítve: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{n}) = \bar{\rho}_n$

A kölcsönhatás miatt: $\bar{\rho}_n = -\bar{\rho}_{-n}$

P pontbeli feszültségi állapot: a P pontra illeszkedő összes elemi felületen ható feszültségvektorok összessége.

Feszültségvektor felbontása

a felülethez viszonyítjuk



- normál feszültség:

$$\sigma_n = \bar{n} \bar{\rho}_n > 0 \text{ húzó}$$

$$= 0$$

$$< 0 \text{ nyomó}$$

- csúsztatófeszültség: (nyírófesz.)

$$\bar{\tau}_n = \bar{\rho}_n - \bar{n} \sigma_n \text{ - komponens}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{mn} &= \bar{m} \bar{\tau}_n = \bar{m} \bar{\rho}_n \\ \tau_{ln} &= \bar{l} \bar{\tau}_n = \bar{l} \bar{\rho}_n \end{aligned} \right\} - \text{koordináta.}$$

Tehát:

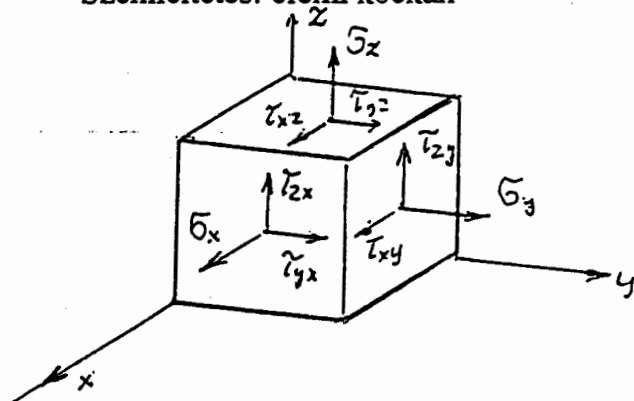
$$\bar{\rho}_n = \sigma_n \bar{n} + \tau_{mn} \bar{m} + \tau_{ln} \bar{l}.$$

Feszültségi tenzor $\bar{\rho}_n(\bar{n})$: bizonyíthatóan $\bar{n}$ -nek homogén, lineáris függvénye, ezért

$$\boxed{\bar{\rho}_n = \underline{T} \bar{n}} \quad ; \quad \underline{T} = \underline{T}^T$$

azaz: $\bar{\rho}_x = \underline{T} \bar{i}, \quad \bar{\rho}_y = \underline{T} \bar{j}, \quad \bar{\rho}_z = \underline{T} \bar{k}.$

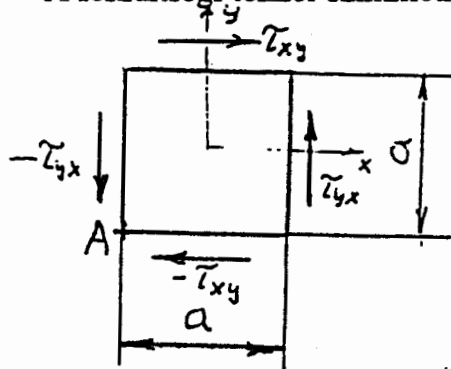
Szemléltetés: elemi kockán



$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_x &= \sigma_x \bar{i} + \tau_{yx} \bar{j} + \tau_{zx} \bar{k} \\ \bar{\rho}_y &= \tau_{xy} \bar{i} + \sigma_y \bar{j} + \tau_{zy} \bar{k} \\ \bar{\rho}_z &= \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j} + \sigma_z \bar{k} \end{aligned} \right\}$$

⊕ előjelek

A feszültségi tenzor szimmetrikus



$$M_a = 0 = a \tau_{xy} - a \tau_{yx} \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

által. : $\tau_{mn} = \tau_{nm}$

Mátrix:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Normálfeszültség:

$$\sigma_n = \bar{n} \bar{\rho}_n = \bar{n} \underline{T} \bar{n}$$

Csúsztatófeszültség:

$$\tau_{mn} = \bar{m} \bar{\rho}_n = \bar{m} \underline{T} \bar{n}$$

Főfeszültségek:

$$\sigma_i$$

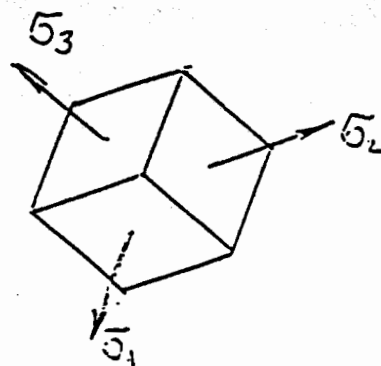
$$\bar{\rho}_i = \underline{T} \bar{e}_i = \sigma_i \bar{e}_i,$$

$\bar{\tau}_i = \bar{0}$ - az $\bar{e}_i$ normálisú felületen csak σ_i feszültség ébred.

$\bar{e}_i$: főirány

Legalább 3 kölcsönösen merőleges főirány létezik.

Főirányok KR-ében:



$$\underline{T}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Ahány σ_i nem zérus, annyi tengelyű a feszültségállapot.

Első skalár invariáns:

$$T_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Energetikai állapot

Kvázistatikus terhelés: statikus (nyugalmi) állapotokon keresztesül

$$W_K + W_B = 0 : \quad \text{külső és belső erők munkája}$$

$$W_K = \begin{cases} U & - \text{alakváltozási energia} \\ W_d & - \text{hővé alakul} \end{cases}$$

Rugalmas testeknél a külső munka teljes egészében visszanyerhető ($W_d = 0$).

$$U \text{ fajlagos értéke: } u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Példák: (H.f: 3.2; 3.7; 3.9; 3.13; 3.20)

1/ Alakváltozás származtatása, szemléltetése, skalár-jellemzés

$$\text{Adott: } \bar{u} = Cxy^2\bar{i} + Cyz^2\bar{j} + Cxz^2\bar{k} \quad C = 10^{-4} \text{ 1/mm}^2$$

$$\bar{r}_p = \bar{i} + 3\bar{k} \text{ mm.}$$

Feladat:

$$a/ \quad u, \sigma, w : ?$$

$$u = Cxy^2, \quad \sigma = Cyz^2, \quad w = Cxz^2$$

$$b, \quad \underline{A}(x, y, z) = ?$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C y^2 \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C z^2 \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = C x^2$$

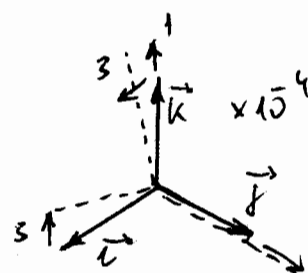
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2Cxy \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2Czx$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2Cyz$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} y^2 & xy & zx \\ xy & z^2 & yz \\ zx & yz & x^2 \end{bmatrix} \cdot C$$

$$c, \quad \underline{A}_p = ? \quad , \quad \text{szorzáscsoklás}$$

$$\underline{A}_p = \underline{A}(x_p=1, y_p=0, z_p=3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4}$$



$$d, \quad \varepsilon_n, \gamma_{mn} = ?$$

$$\vec{n} = 0,5 \vec{i} + 0,5 \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{m} = -0,5 \vec{i} - 0,5 \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$$

$$\varepsilon_n = \vec{n} \underline{A} \vec{n} = 10^{-4} \left(3 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4,87 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{mn} = \vec{m} \underline{A} \vec{n} = 10^{-4} \left(3 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 9 \cdot 0,5^2 - 3 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1,75 \cdot 10^{-4}$$

Szorzási séma:

$$\begin{array}{cc} \underline{A} & \vec{n} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4} & \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad \begin{array}{cc} \underline{A} & \vec{n} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4} & \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\vec{n}: [0,5 \ 0,5 \ \sqrt{2}/2]$$

$$\vec{m}: [-0,5 \ -0,5 \ \sqrt{2}/2]$$

2/ Feszültségállapot

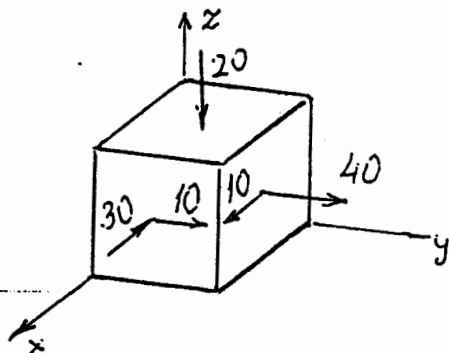
Adott:

$$\bar{\rho}_x = -30\bar{i} + 10\bar{j} \quad MPa; \quad \bar{n} = 0,8\bar{i} + 0,6\bar{j}$$

$$\bar{\rho}_y = 10\bar{i} + 40\bar{j} \quad MPa; \quad \bar{m} = -0,6\bar{i} + 0,8\bar{j}$$

$$\bar{\rho}_z = -20\bar{k} \quad MPa$$

Szemléltetés:



$\underline{\underline{T}}$ tenzor

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -30 & 10 & 0 \\ 10 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} MPa \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\rho}_n = \underline{\underline{T}} \bar{n} = \begin{bmatrix} -24 + 6 \\ 8 + 24 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\rho}_n = -18\bar{i} + 32\bar{j} \quad MPa$$

$$\sigma_n = \bar{n} \bar{\rho}_n = \bar{n} \underline{\underline{T}} \bar{n} = \begin{bmatrix} -30 & 10 & 0 \\ 10 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{n}: [0,8 \quad 0,6 \quad 0]$$

$$-30 \cdot 0,8^2 + 10 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 40 \cdot 0,6^2 = 4,8 \quad MPa$$

$$\tau_{mn} = \bar{m} \underline{\underline{T}} \bar{n} = \begin{bmatrix} -30 & 10 & 0 \\ 10 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{m}: [-0,6 \quad 0,8 \quad 0]$$

$$= 30 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,8^2 - 10 \cdot 0,6^2 + 40 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 18 \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 + 24 \cdot 0,8$$

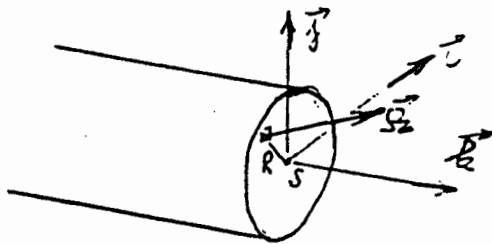
$$= 0 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 = 40 - 3,6 = 36,4 \quad MPa.$$

RUDAK SZILÁRDSÁGTANA

- Szilárdságtan alapkísérleteinek célja:

- $\underline{U}, \underline{A}, \underline{\Psi}$ -- megfigyelés alapján
- terhelés, egyensúly alapján $\underline{T}$ felépítése
- próbatesten végzett kísérlet alapján: $\underline{T} = \underline{T}(\underline{A})$ anyagegyenlet előállítása
- általánosítás.

- Rúdkeresztmetszet feszültségi eredője:

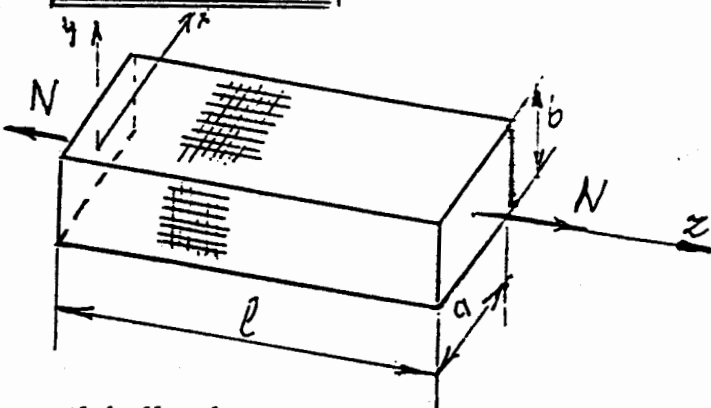


$$\bar{F}_S = \int_A \bar{p}_z dA = -T_x \bar{i} - T_y \bar{j} + N \bar{k}$$

$$\bar{M}_S = \int \bar{R} \times \bar{p}_z dA = M_{hx} \bar{i} - M_{hy} \bar{j} + M_c \bar{k}$$

Az egyes igénybevételekhez tartozó szilárdságtani állapotokat külön-külön vizsgáljuk:

Húzott-nyomott rúd

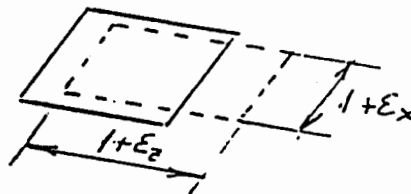


Tapasztalat:

- felületi négyzetrácsból téglalap rács lesz: nyúlás van, szögtorzulás nincs;
- alakváltozás független a helytől.

Alakváltozás:

pl. felső lapon



fajlagos nyúlásai

hosszirányban:

$$\varepsilon_z = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}; \quad \text{keresztirányban:}$$

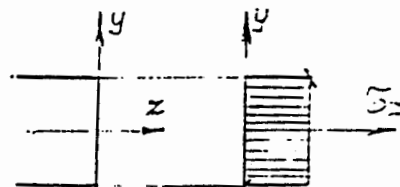
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{a' - a}{a} = \frac{\Delta a}{a} \\ \varepsilon_y = \frac{b' - b}{b} = \frac{\Delta b}{b} \end{cases}$$

Mérés alapján:

$$\begin{cases} \varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y \\ \varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z \end{cases}$$

ε_k : keresztirányú nyúlás; ν Poisson tényező.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix}$$



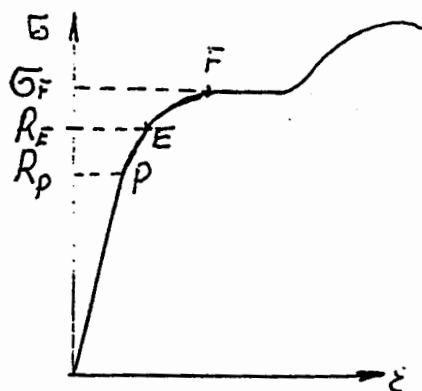
Feszültség:

$$\bar{\rho}_x = \bar{\rho}_y = \bar{0} \quad - \text{a perem terheletlen}$$

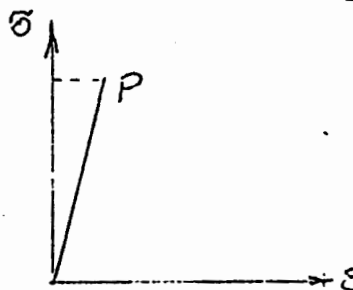
$$\bar{F}_S = N \bar{e}_z = \int \bar{\rho}_z dA = \bar{\rho}_z A \rightarrow \bar{\rho}_z = \frac{N}{A} \bar{e}_z;$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

Szakító diagram:



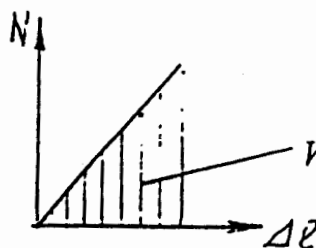
Lineárisan rugalmas test-modell:



$$\sigma_z = E \varepsilon_z$$

Hooke-törvény

Alakváltozási energia: U



$$W_k = \frac{1}{2} N \Delta l \quad - \text{külső erő munkája}$$

$$U = W_k = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{1}{2} N l \varepsilon_z = \frac{1}{2} N l \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE}$$

Jellemző alakváltozás: Δl nyúlás

$$\Delta l = l \varepsilon_z = l \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N l}{AE}$$

Méretezés-ellenőrzés kérdései:

Fogalmak:

- tönkremenetelre jellemző feszültség:

$$\sigma_{jell}$$

- megengedett feszültség:

$$\sigma_{meg}$$

- ébredő (tényleges) feszültség:

$$\sigma_z$$

- előírt biztonsági tényező:

$$n = \frac{\sigma_{jell}}{\sigma_{meg}}$$

- tényleges biztonsági tényező:

$$n_t = \frac{\sigma_{jell}}{|\sigma_z|}$$

A rúd szilárdságtanilag *megfelel*, ha

$$n_t \geq n \quad \text{azaz}$$

$$\frac{\sigma_{jell}}{|\sigma_z|} \geq \frac{\sigma_{jell}}{\sigma_{meg}} \rightarrow$$

$$|\sigma_z| \leq \sigma_{meg}$$

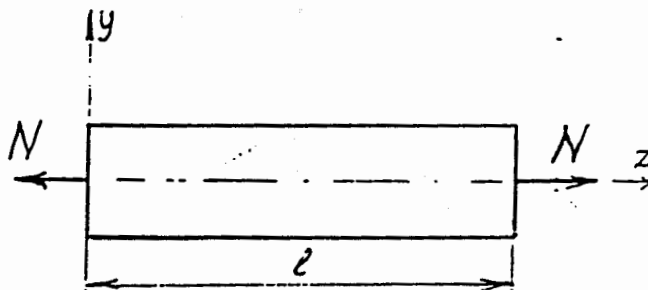
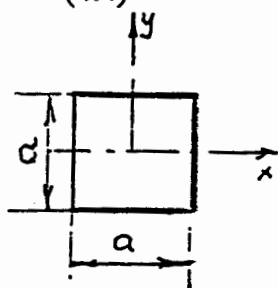
A rúd szilárdságtanilag *nem felel meg*, ha

$$n_t < n \rightarrow$$

$$|\sigma_z| > \sigma_{meg}$$

Példa:

(4.4)



Adatok:

$$l = 200 \text{ mm},$$

$$\Delta l = 20 \text{ }\mu\text{m},$$

$$a = 20 \text{ mm},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$\nu = 0,3.$$

(Hf:4.2, 4.3)

$$\text{a/} \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\Delta l}{l} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 10^{-4} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -0,3 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0,3 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$\text{b/} \quad \sigma_z = E \varepsilon_z = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 20 \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{c/} \quad \Delta a = -4,5 \text{ }\mu\text{m} \quad \text{esetén} \quad N = ?$$

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta a}{a} = -\frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{20} = -\frac{4,5}{2} 10^{-4} \rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_k}{\nu} = \frac{4,5}{2 \cdot 0,3} 10^{-4} = 7,5 \cdot 10^{-4}$$

$$N = A\sigma_z = AE\varepsilon_z = 20 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7,5 \cdot 10^{-4} = 60 \cdot 10^3 \text{ N} = 60 \text{ kN}$$

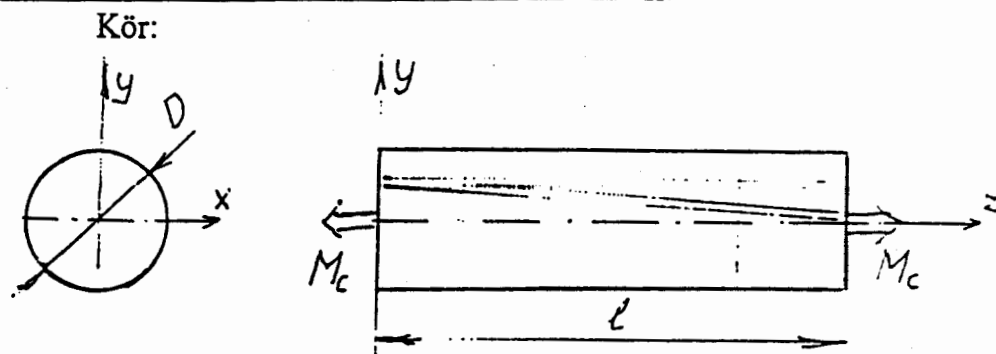
d/ $\sigma_{jell} = 120 \text{ MPa}$, $n = 2$ megfelel-e? a b/, c/ terheléseknél

$$\sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n} = 60 \text{ MPa}$$

b/ eset: $\sigma_z = 20 < \sigma_{meg} = 60$ - megfelel!

c/ eset: $\sigma_z = E\varepsilon_z = 150 > 60$ - nem felel meg!

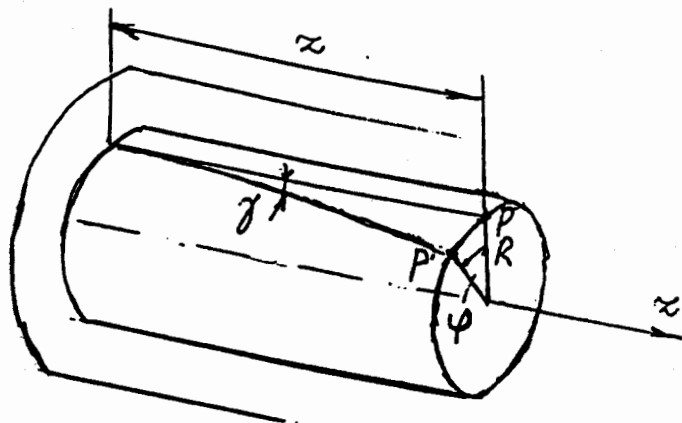
Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása



Kísérleti eredmény:

- a méretek nem változnak $l = l'$, $D = D'$
- a keresztmetszetek síkok maradnak, de elfordulnak egymáshoz képest: a szögelfordulás ϕ
- a szögelfordulás arányos z -vel: $\phi = \vartheta z$; ahol ϑ : fajlagos szögelfordulás ($z = 0$ véglap megfogott $\phi_0 = 0$)
- alkotók csavarvonallá torzulnak, a csavarvonal emelkedési szöge a szögtorzulás: γ

Szemléltetés tetszőleges r sugaron (általánosítás)

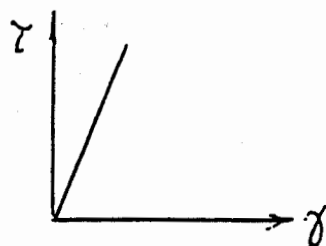


R sugarú henger P pontjának mozgása

$$\overline{PP'} = z\gamma = R\phi = R\vartheta z$$

ezért: $\gamma = \vartheta R$

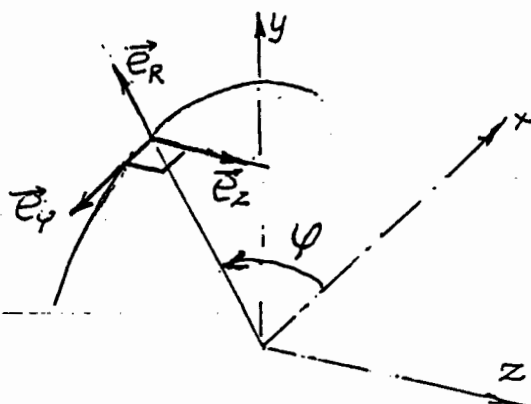
Csavaró diagram:



$$\tau = G\gamma$$

G : csúsztató rugalmassági modulus

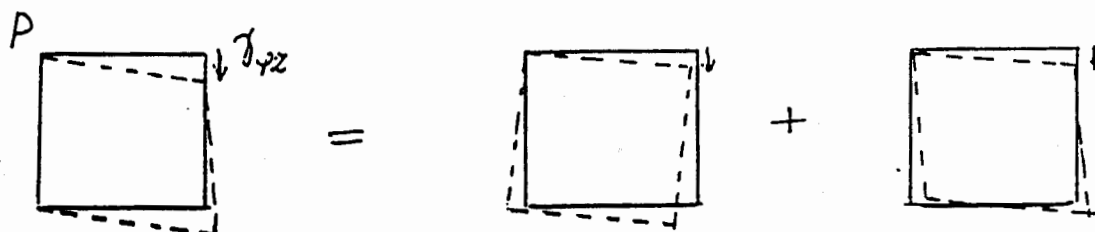
Henger-koordinátarendszert célszerű használni:



A szögtorzulás az $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ vektorok között van

$$\gamma = \gamma_{\varphi z}, \quad \tau = \tau_{\varphi z}$$

Egy négyzetrács mozgása:



- Alakváltozási állapot

$$\underline{\underline{A}}_{(R,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} & 0 \end{bmatrix}$$

- Feszültségi állapot

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\rho}_R = \bar{0} - \text{palást törhetetlen} \\ \sigma_\varphi = \sigma_z = 0 - \text{egyensúly miatt} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{T}}_{(R,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{\varphi z} & 0 \end{bmatrix}$$

- Kapcsolat a nyomatékkal:

$$\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z} = G\vartheta R$$

$$M_c = \int_A \tau_{\varphi z} R dA = G\vartheta \int R^2 dA = G\vartheta I_p \rightarrow \vartheta = \frac{M_c}{I_p G}$$

$$I_p = \int R^2 dA \quad - \text{a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka}$$

körre:

$$I_p = \int_{R=0}^{D/2} \underbrace{R^2 2\pi R dR}_{dA} = 2\pi \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^{D/2} = \frac{D^4 \pi}{32}$$

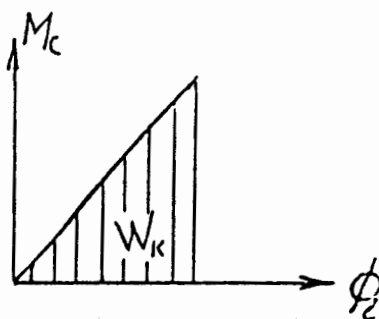
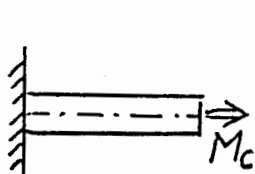
Tehát:

$$\tau_{\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R$$

- Jellemző alakváltozás: szélső keresztmetszetek szögelfordulása

$$\phi_l = \vartheta l = \frac{M_c l}{I_p G}$$

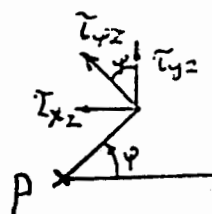
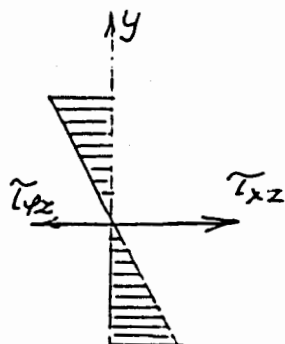
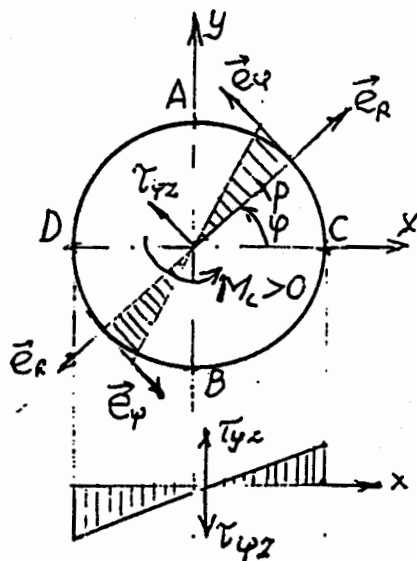
- Alakváltozási energia:



$$U = W_k = \frac{1}{2} M_c \phi_l$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_c^2 l}{I_p G}$$

- Feszültségeloszlás (R, φ, z) és (x, y, z) KR-ekben:



A: $\tau_{xz} = -\tau_{\varphi}$

B: $\tau_{xz} = \tau_{\varphi}$

C: $\tau_{yz} = \tau_{\varphi}$

D: $\tau_{yz} = -\tau_{\varphi}$

P: $\tau_{xz} = -\tau_{\varphi} \sin \varphi$

$\tau_{yz} = +\tau_{\varphi} \cos \varphi$

- Maximális feszültség:

$$\tau_{\max} = \|\tau_{\varphi}\|_{R_{\max}} = \frac{M_c}{I_p} R_{\max} = \frac{M_c}{K_p}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_c}{K_p} ; \quad K_p = \frac{I_p}{R_{\max}} = \frac{I_p}{D/2} = \frac{D^3 \pi}{16}$$

Méretezés - ellenőrzés:

- tönkremenetelre jellemző fesz.: τ_{jell}

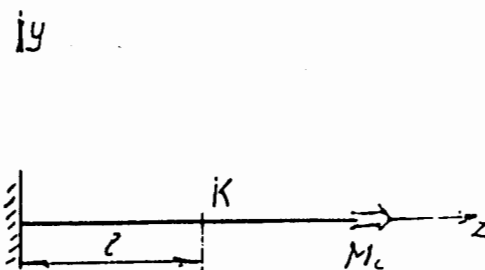
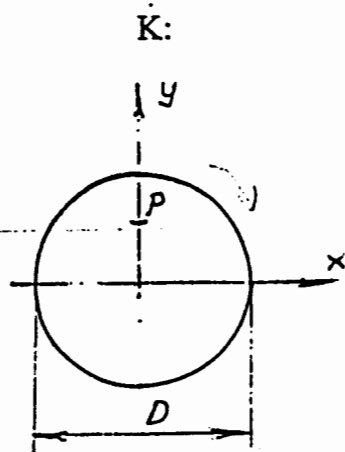
- megengedett feszültség: τ_{meg}

A rúd szilárdságtanilag megfelel, ha

$$\tau_{max} \leq \tau_{meg} = \frac{\tau_{jell}}{n}$$

n : előírt biztonsági tényező.

Példa: (4.79; 4.80; 4.81)



Adatok:

$$M_c = 40 \text{ Nm}$$

$$l = 200 \text{ mm}$$

$$D = 20 \text{ mm}$$

$$R_p = 5 \text{ mm}$$

$$G = 80000 \text{ MPa}$$

Feladat:

a/ $\underline{T}_p, \underline{T}'_p = ?$
(R, \varphi, z) (x, y, z)

$$\tau_{\varphi}|_p = \frac{M_c}{I_p} R_p = \frac{40 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{2} \cdot 10^4} 5 = \frac{40}{\pi} = 12,7 \text{ MPa}$$

$$I_p = \frac{D^4 \pi}{32} = \frac{20^4 \cdot \pi}{32} = \frac{16 \cdot 10^4 \pi}{32} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^4$$

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,7 \\ 0 & 12,7 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{T}'_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12,7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b/ $\underline{A}_p = ? \quad \gamma_{\varphi} = \frac{\tau_{\varphi}}{G} = \frac{12,7}{80000} = 1,6 \cdot 10^{-4}$
(x, y, z)

$$\underline{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

c/ $\phi_l = ?$

$$\phi_l = \frac{M_c l}{I_p G} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 200}{\frac{\pi}{2} \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^4} = \frac{8 \cdot 10^6}{\frac{\pi}{2} \cdot 8 \cdot 10^8} = \frac{2}{\pi} 10^{-2} = 0,064 \text{ rad}$$

$$\phi_l = 0,064 \cdot \frac{180}{\pi} = 3,6 \text{ fok}$$

d/ $U = \frac{1}{2} \frac{M_c^2 l}{I_p G} = \frac{16 \cdot 10^8 \cdot 200}{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^4} = \frac{32 \cdot 10^{10}}{8\pi \cdot 10^8} = \frac{4}{\pi} 10^2 = 127 \text{ Nmm} = 0,127 \text{ Nm}$

e/ Mekkora átmérőre van szükség, ha $M_c = 60 \text{ Nm}$ és $\tau_{meg} = 40 \text{ MPa}$

$$\tau_{max} = \frac{M_c}{K_p} \leq \tau_{meg}$$

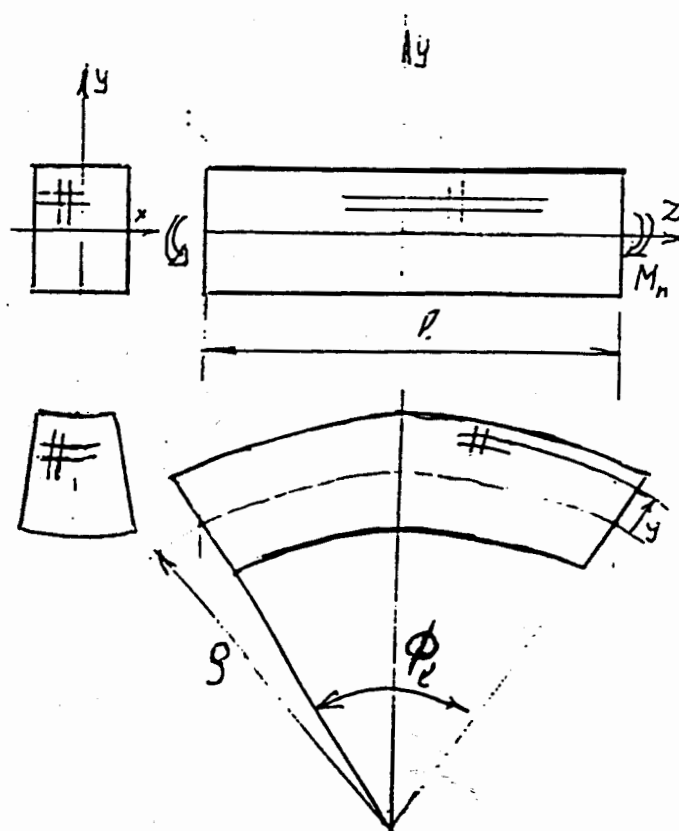
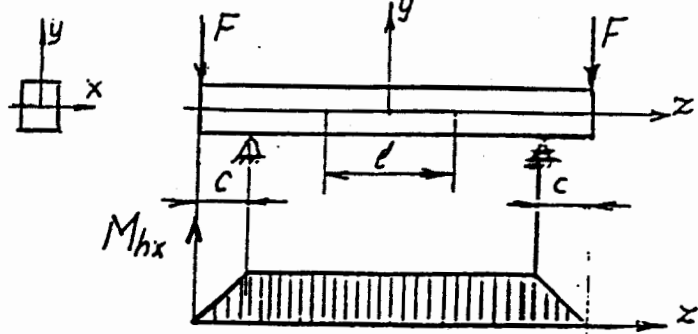
$$K_p \geq \frac{M_c}{\tau_{meg}} = \frac{60 \cdot 10^3}{40} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = K_{p \text{ szűks.}}$$

$$K_p = \frac{D^3 \pi}{16} \geq 1,5 \cdot 10^3 \rightarrow D \geq 10 \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot 16}{\pi}} = 28,8 \text{ mm}$$

A $28,8 \text{ mm}$ -es átmérő szükséges. Ennél nagyobb biztonság jó! pl. 30 mm .

Prizmatikus rudak hajlítása

y szimmetria tengely, és $M_h = M_{hx}$



Hajlító kísérlet tapasztalata:

- súlyponti szál körívvé torzul, hossza nem változik $l = \rho \phi$
- keresztmetszet eltorzul, de merőleges marad a középvonalra

- négyzetrács nem torzul: $\gamma = 0$

- hosszanti szál: $\begin{cases} y > 0 & \text{- nyúlik} \\ y < 0 & \text{- zsugorodik} \end{cases}$

- keresztirányú szál: $\begin{cases} y > 0 & \text{- zsugorodik} \\ y < 0 & \text{- nyúlik} \end{cases}$

Alakváltozás:

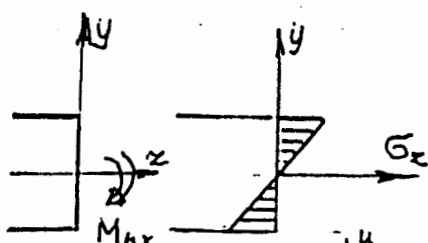
$$\varepsilon_z = \frac{l' - l}{l} = \frac{(\rho + y)\phi_l - \rho\phi_l}{\rho\phi_l} = \frac{y}{\rho}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

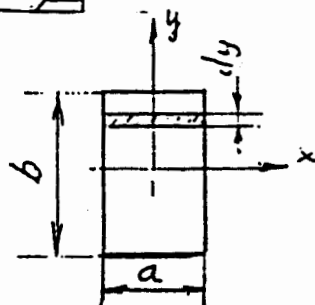
Feszültség:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = \frac{E}{\rho}y$$



$$M_{hx} = \int y \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int y^2 dA}_{I_x} = \frac{I_x E}{\rho}$$

I_x : a keresztmetszet x -tengelyekre számított másodrendű nyomatéka



$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} a y^2 dy = a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{ab^3}{12}$$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- maximális feszültség:

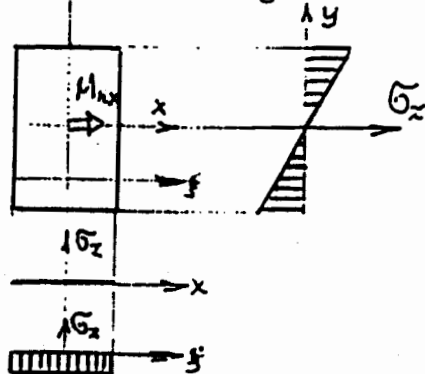
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} y_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$$

$$K_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$$

x -re számított kereszt-

metszeti tényező

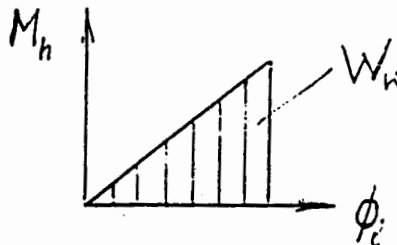
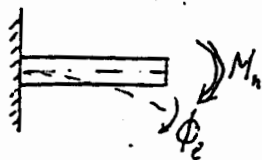
y - feszültségeloszlás



- jellemző alakváltozás: ϕ_l

$$\phi_l = \frac{l}{\rho} = \frac{M_{hx} l}{I_x E}$$

- Alakváltozási energia



$$W_k = U = \frac{1}{2} M_h \phi_l$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2 l}{I_x E}$$

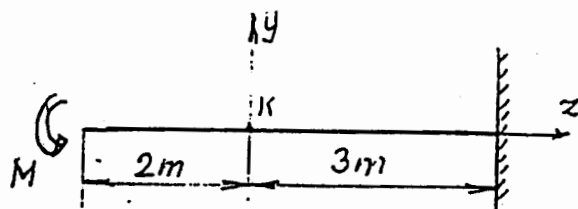
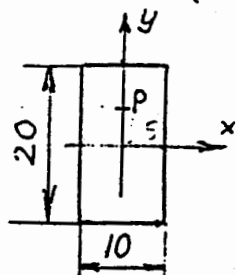
- Méretezés - ellenőrzés:

mint húzásnál, de itt

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_h}{K_x} \right|$$

Ha M_h függ a helytől, akkor $M_{h\max}$ -ot kell behelyettesíteni. Ez a veszélyes keresztmetszetet jelenti.

Példa: (4.53), (Hf.: 4.54; 4.56)



Adatok:

$$M = 80 \text{ Nm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

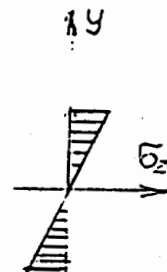
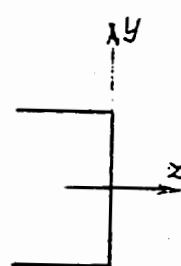
$$\nu = 0.3$$

$$P(0, 5, 0) \text{ mm}$$

a/ $\sigma_z(y) = ?$

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y = \frac{80 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} \cdot 10^4} y = 12y$$

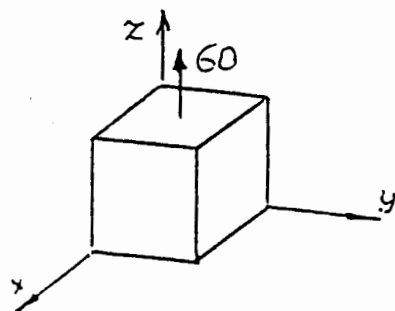
$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



b/ $\underline{T}_P = ?$

$\sigma_{zP} = \sigma_z(5) = 60 \text{ MPa} ;$

$\underline{T}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$



c/ $\underline{A}_P = ?$

$\varepsilon_{zP} = \frac{\sigma_{zP}}{E} = \frac{60}{2 \cdot 10^5} = 3 \cdot 10^{-4} ;$

$\varepsilon_{xP} = \varepsilon_{yP} = -\nu \varepsilon_{zP} = -0,9 \cdot 10^{-4}$

$\underline{A}_P = \begin{bmatrix} -0,9 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} 10^{-4}$

d/ $\rho = ?$

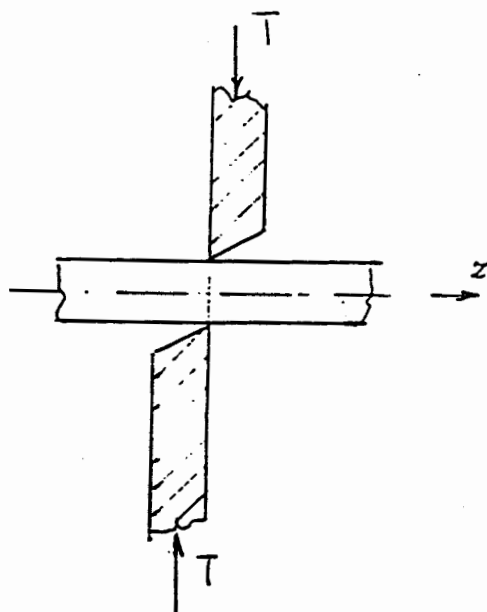
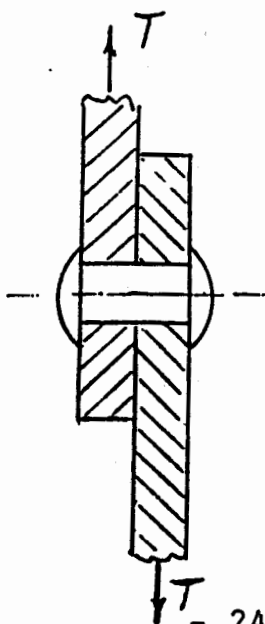
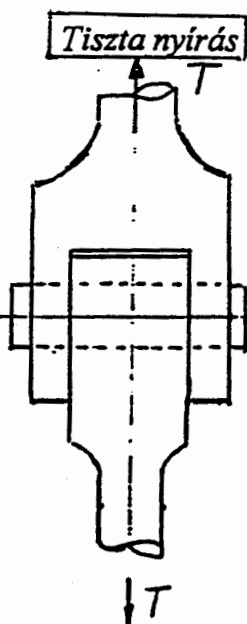
$\frac{1}{\rho} = \frac{\phi_l}{l} = \frac{M_h}{I_x E} = \frac{80 \cdot 10^3}{\frac{2}{3} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^5} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/mm.} \quad \rho = \frac{10^5}{6} \text{ mm} = 16,6 \text{ m}$

e/ $U = ?$

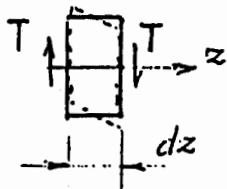
$U = \frac{1}{2} \frac{M_h^2 l}{I_x E} = \frac{64 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^3}{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^5} = \frac{64 \cdot 5 \cdot 10^{11}}{\frac{8}{3} \cdot 10^9} = 120 \cdot 10^2 \text{ Nmm} = 12 \text{ Nm.}$

f/ $\sigma_{jell} = 200 \text{ MPa}, n = 2$ esetén a tartó szilárdságtanilag megfelel-e?

$\left. \begin{aligned} \sigma_{z\max} &= \frac{M_h}{K_x} = \sigma_x(10) = 120 \\ \sigma_{meg} &= \frac{\sigma_{jell}}{h} = 100 \end{aligned} \right\} 120 > 100 \quad \text{nem felel meg!}$



A keresztmetszet kis környezetét vizsgálva.



$$\gamma_{yz} = \text{áll} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad - \text{Hooke-törvény}$$

Egyensúlyi feltételek:

$$-T = \int \tau_{yz} dA = A\tau_{yz}$$

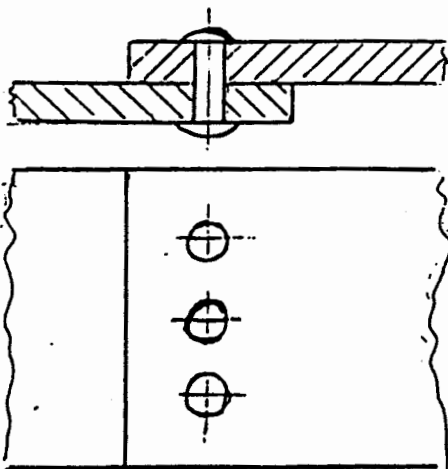
$$\tau_{yz} = \frac{-T}{A}$$

Itt a - előjel biztosítja, hogy $\bar{T}$ és $\bar{\tau}$ iránya azonos.

Méretezés - ellenőrzés:

$$\tau_{\max} = \frac{|T|}{A} \leq \tau_{\text{meg}}$$

Alkalmazás: szegecskapcsolatok:



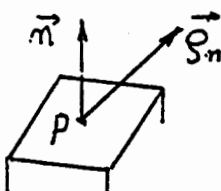
n : szegecsok száma

$$\tau_{\max} = \frac{T}{nA} = \frac{T}{n \frac{d^2 \pi}{4}} \leq \tau_{\text{meg}}$$

$$n \geq \frac{T}{\tau_{\text{meg}} \frac{d^2 \pi}{4}}$$

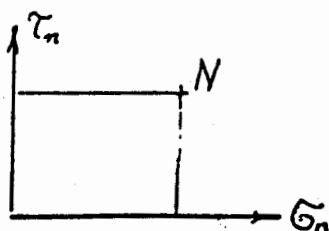
Feszültségi főtengetyek meghatározása egy főtengety ismeretében:

Mohr-féle feszültségi kördiagram:



$$\bar{\rho}_n = \sigma_n \bar{n} + \bar{\tau}_n \quad \tau_n = |\bar{\tau}_n|$$

ábrázolás:

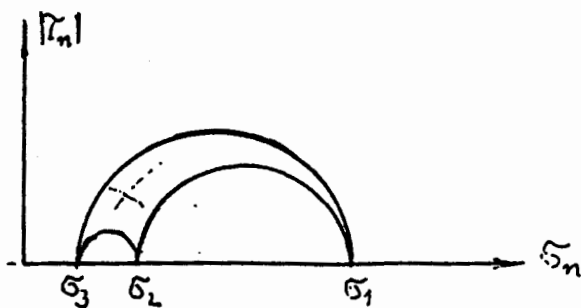


$$\bar{\rho}_{-n} = -\bar{\rho}_n = \sigma_n (-\bar{n}) - \bar{\tau}_n;$$

tehát $\bar{n}$ és $-\bar{n}$ normálisokhoz ugyanazon N pont tartozik.

$\bar{n}$ képzeletben végisúrolja a teret, N pedig a kördiagramot.

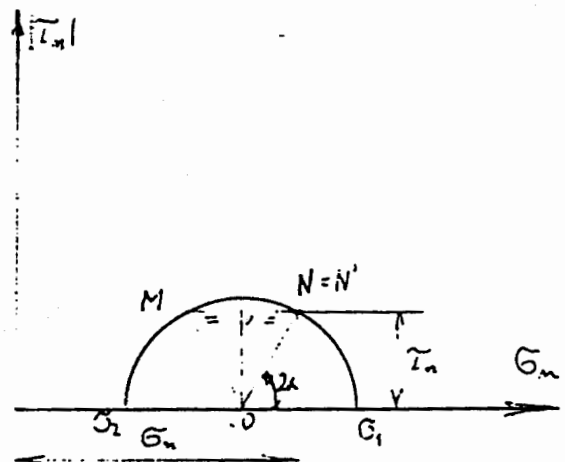
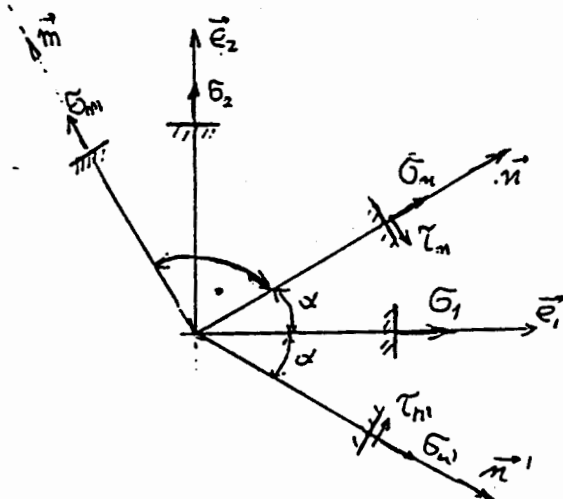
Kördiagram jellemzői:



- körívháromszög: a főfeszültségeket félkörök kötik össze,
- ha $\bar{n}$ fő síkban van, akkor N félkörön van,
- ha $\bar{n}$ általános helyzetű, akkor N a körívháromszög belsejében van.

Egy fő sík (főkör) jellemzői:

pl. $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ fő tengelyek síkja



- ha $\bar{n} \bar{e}_1 \angle \alpha$ akkor N, σ_1 körív központi szöge $N\sigma_1 \angle 2\alpha$,
- ha $\bar{n}' \bar{e}_1 \angle \alpha$ akkor $N = N'$, de $\bar{\tau}$ mindig a σ növekedésének irányába mutat,
- ha $\bar{m} \perp \bar{n}$, akkor MN szakasz felezőmerőlegese átmegy a főkör O középpontján.

Alkalmazás: fő tengelyek, főfeszültségek meghatározása egy fő tengely ismeretében:

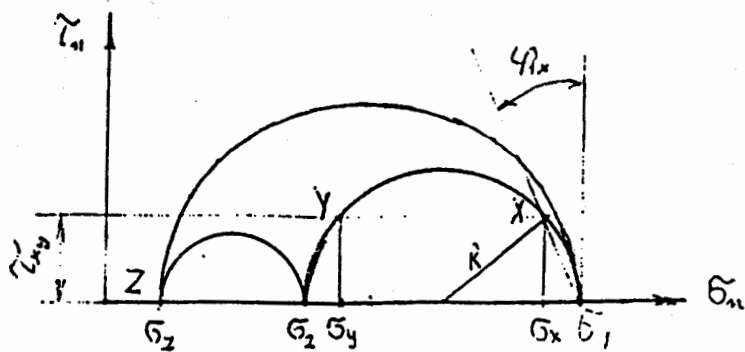
pl. $\bar{e}_z$ fő tengely

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z > 0, \tau_{xy} > 0$ esetben

Szerkesztés menete

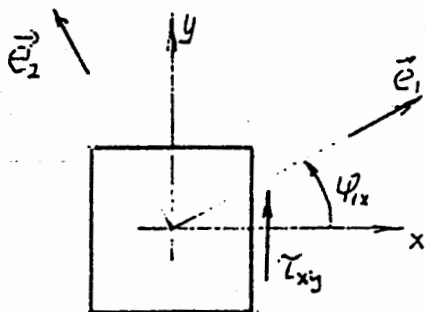
- a/ $\bar{n} = \bar{e}_x \rightarrow N = X$
 $\bar{m} = \bar{e}_y \rightarrow M = Y$



b/ X, Y szakaszfelvezőmerőleges kimetszi 0 -t, a kör pedig a két hiányzó főfeszültséget.

c/ Z pont felvétele: főkörök képe

d/ $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ főtengely helye:



- Az x tengelytől φ_{1x} -re van az 1-es főtengely, és τ_{xy} irányában, mert $\sigma_1 > \sigma_x$

- $\bar{e}_2$ merőleges $\bar{e}_1$ -re

Főfeszültségek:

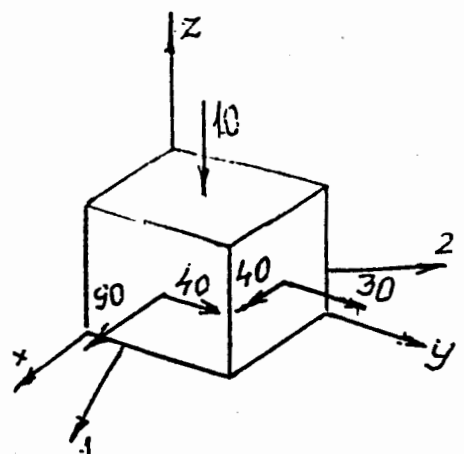
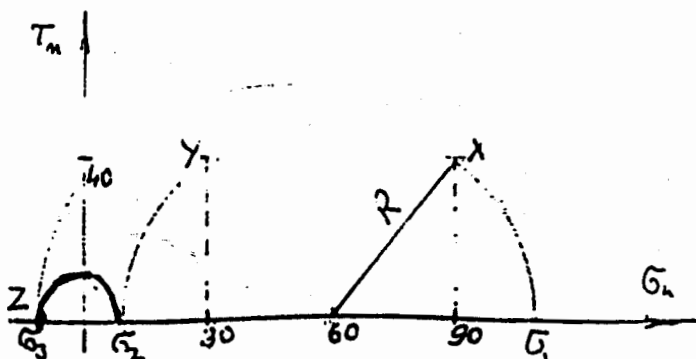
0 pont: $\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ $\sigma_1 = \sigma_o + R$

sugár: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ $\sigma_2 = \sigma_o - R$

$(\sigma_3 = \sigma_z)$

számpélda:

$$T = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_1 = \sigma_o + R = 60 + 50 = 110$$

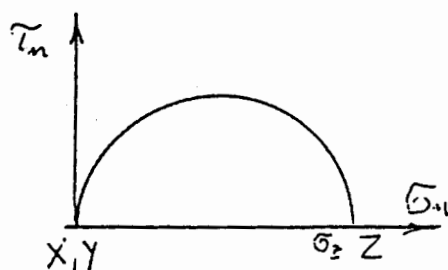
$$\sigma_2 = \sigma_o - R = 60 - 50 = 10$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -10$$

- Húzás-hajlítás esete:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

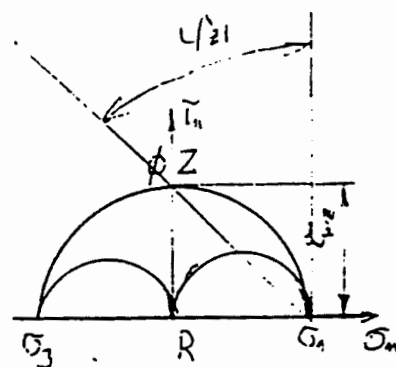
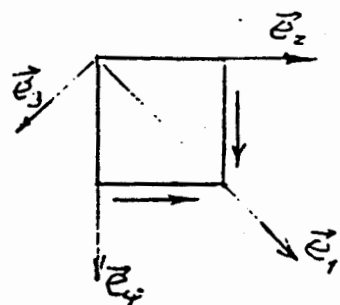
→



Az X, Y -on átmenő kör ponttá zsugorodott.

- Csavarás esete (R, φ, z):

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi} \\ 0 & \tau_{\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$



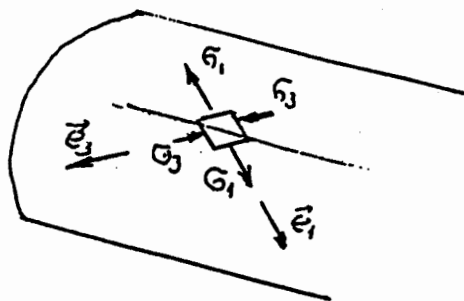
főfeszültségek:

$$\sigma_1 = \tau_{\varphi}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{\varphi}$$

főirányok:

$$\varphi_{z1} = 45^\circ, \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_R.$$

Csavarás a főtengely KR-ben



$$\underline{T}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \tau_{\varphi}$$

$$\sigma_3 = -\tau_{\varphi}$$

Alakváltozás:

pl:

$$\varepsilon_1 = \bar{e}_1 \underline{\underline{A}} \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\gamma_{\varphi} = \frac{\tau_{\varphi}}{2G}$$

Másrészt ε_1 számítható a σ_1 húzás és σ_3 nyomás alapján is (szuperpozíció):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{\varphi}$$

Azonos ε_1 adódik, ha

$$\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E}$$

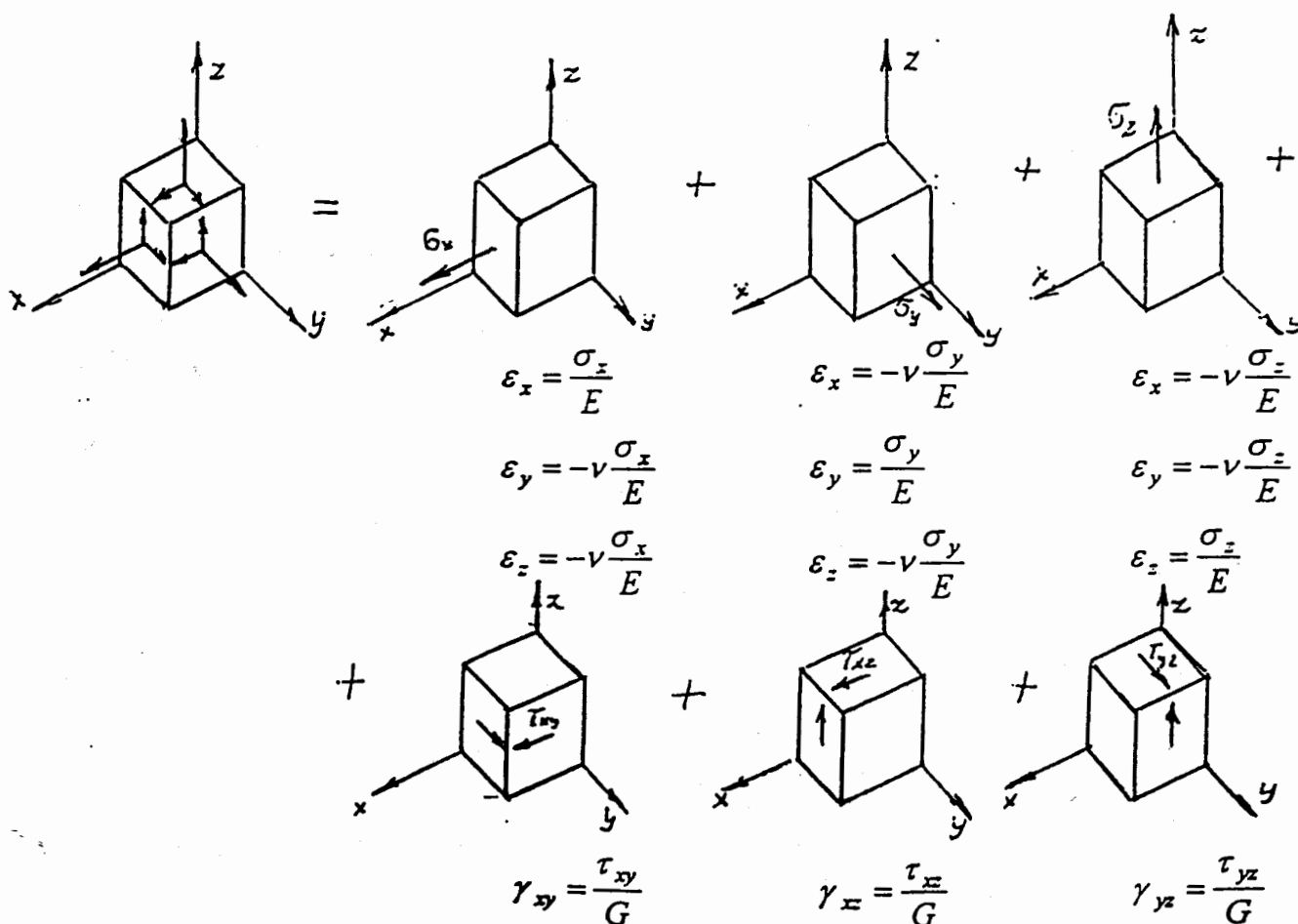
Tehát csak két anyagjellemző független.

Általánosított Hooke-törvény

Izotróp, lineárisan rugalmas test esete.

Izotróp: E, ν független az iránytól

Lineáris: érvényes a szuperpozíció, azaz tetszőleges feszültségállapot 3 húzás és 3 csavarsás összege



Összegezve:

Tömör formában

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right.$$

$$\varepsilon_n = \frac{1+\nu}{E} \sigma_n - \frac{\nu}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{\tau_I}$$

$$\gamma_{mn} = \frac{\tau_{mn}}{G}$$

Szokásos tenzorikus alak:

$$\underline{\underline{T}} = 2G \left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{I}} \right)$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{T}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \underline{\underline{I}} \right)$$

itt

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

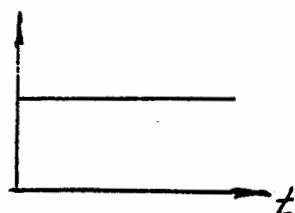
Méretezés ellenőrzés kérdései

Cél: a szerkezet rendeltetésszerű használatával együtt járó terhelést meghatározott ideig, előírt biztonsággal, tönkremenetel nélkül elviselje.

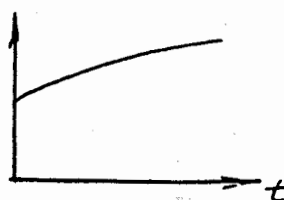
Figyelembe kell venni:

- szerkezet: geometriáját, anyagát
- terhelés: nagyságát, időfüggvényét, koncentráltságát.

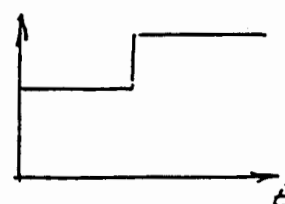
Időfüggvény:



statikus



lassan változó



ütésszerű

Szemlélet

- lokális (pontbeli)
 - globális (szerkezeti)
- } jellemző alapján.

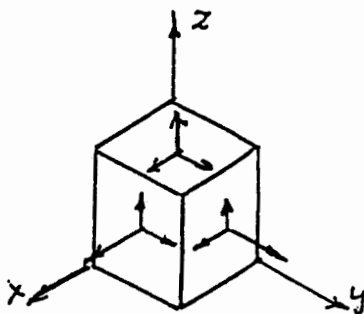
Statikus terhelésnél lokális jellemző alapján történik a
Feszültségcsúcsra való méretezés-ellenőrzés

Cél: a veszélyes pontban sem lehet a feszültség nagyobb mint a $\sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$ megengedett feszültség.

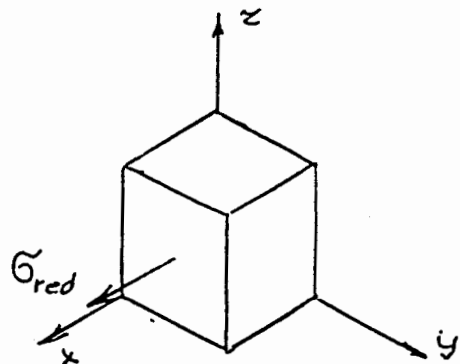
A feszültség állapot: többtengelyű

A tönkremenetelre jellemző feszültség: egytengelyű (legtöbbször a húzó diagram alapján)

Redukált feszültség: a többtengelyű feszültségállapottal azonos veszélyességű (egyenértékű) egytengelyű húzófeszültség



veszély
=

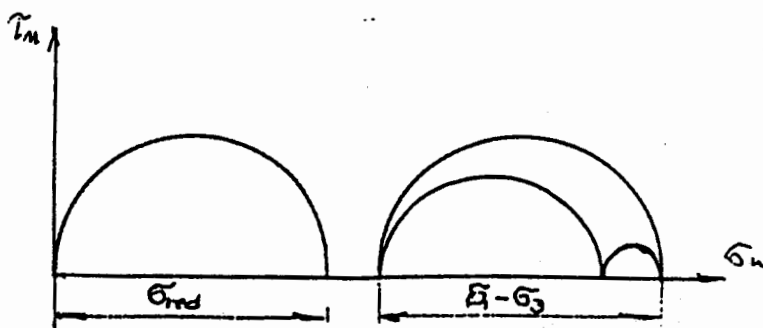


Alapformula:

$$\sigma_{red \max} \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_{jell}}{n}$$

Redukált feszültség számítása

Mohr-elmélet: két feszültségállapot egyformán veszélyes, ha a legnagyobb Mohr-kör átmérője azonos



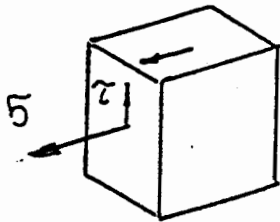
$$\sigma_{red}^M = \sigma_1 - \sigma_3$$

Huiber-Mises-Hencky elmélet: két feszültségállapot egyformán veszélyes, ha a torzítás alakváltozási energiájuk megegyezik. Ekkor

$$\sigma_{red}^{FMH} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Példa: H.f.3.19

Speciális feszültségi állapot:



$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \beta \tau^2}; \quad \beta = \begin{cases} 3 & \text{HMH} \\ 4 & \text{Mohr} \end{cases}$$

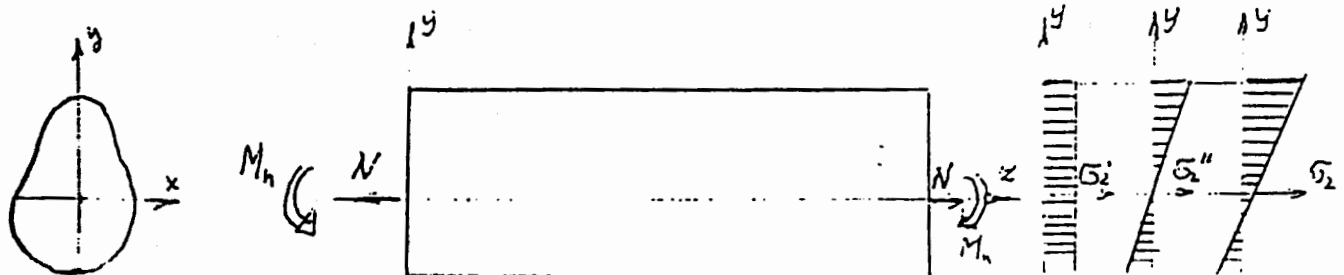
Prizmatikus rudak összetett igénybevétele

Linearitás miatt szuperpozíció: több terhelés egyidejű működésekor a szilárdságtani állapotok összegződnek

$$\left. \begin{array}{l} \bar{F}': \underline{\underline{A'}}, \underline{\underline{T'}} \\ \bar{F}'': \underline{\underline{A''}}, \underline{\underline{T''}} \end{array} \right\} \bar{F}' + \bar{F}'': \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A'}} + \underline{\underline{A''}}; \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T'}} + \underline{\underline{T''}}.$$

Egytengelyű feszültségállapotok:

Húzás+hajlítás



$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y \quad - \text{zérusvonal eltolódik}$$

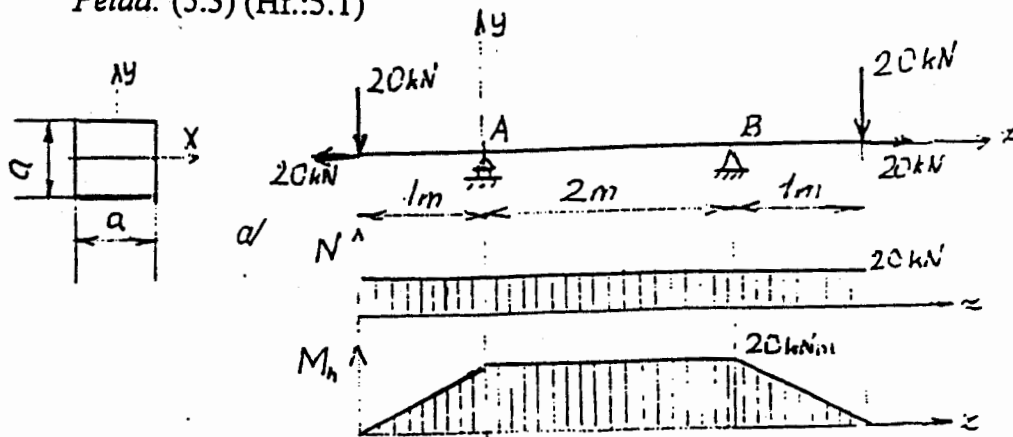
$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z \end{array}$$

$$\sigma_{red} = |\sigma_z|; \quad \sigma_{red \max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_h|}{K_x}$$

ellenőrzés: $\sigma_{red \max} \leq \sigma_{mvg}$ - teljesül-e?

méretezés: M_h -ra és ellenőrzés $N + M_h$ -ra

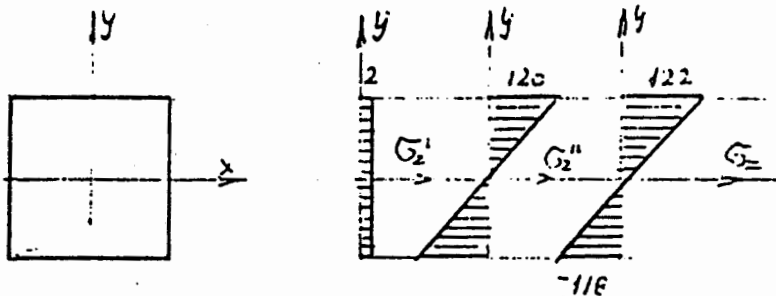
Példa: (5.3) (Hf.:5.1)



$$a = 100 \text{ mm}$$

b/ veszélyes keresztmetszet :
A-B szakasz

c/ A keresztmetszet feszültségeloszlása



$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{I_x} y$$

$$A = 10^4 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \frac{a^4}{12} = \frac{10^8}{12} \text{ mm}^4$$

$$\sigma_z = \frac{20 \cdot 10^3}{10^4} + \frac{20 \cdot 10^6}{10^8/12} = 2 + 2,4y;$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_z(50) = 2 + 120 = 122 \text{ MPa}$$

d/ veszélyes pontok: $y = 50 \text{ mm}$

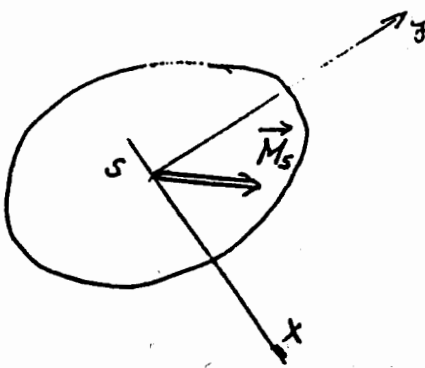
$$\text{e/ zérusvonal: } \sigma_z = 0 = 2 + 2,4y \rightarrow y = -\frac{2}{2,4}$$

$$\text{f/ } \sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa: ellenőrzés } \quad \underline{\sigma_{\max} = 122 \geq 100 = \sigma_{\text{meg}}}$$

nem felel meg!

Ferd ehajlítás

Minden keresztmetszet esetén van 2 olyan súlyponti tengely amely ú.n. tehetetlenségi főtengely. Ez lesz a továbbiakban (x, y) .



(x, y) főtengelyke, ha:

$$\underline{I_{xy} = \int xy dA = 0}$$

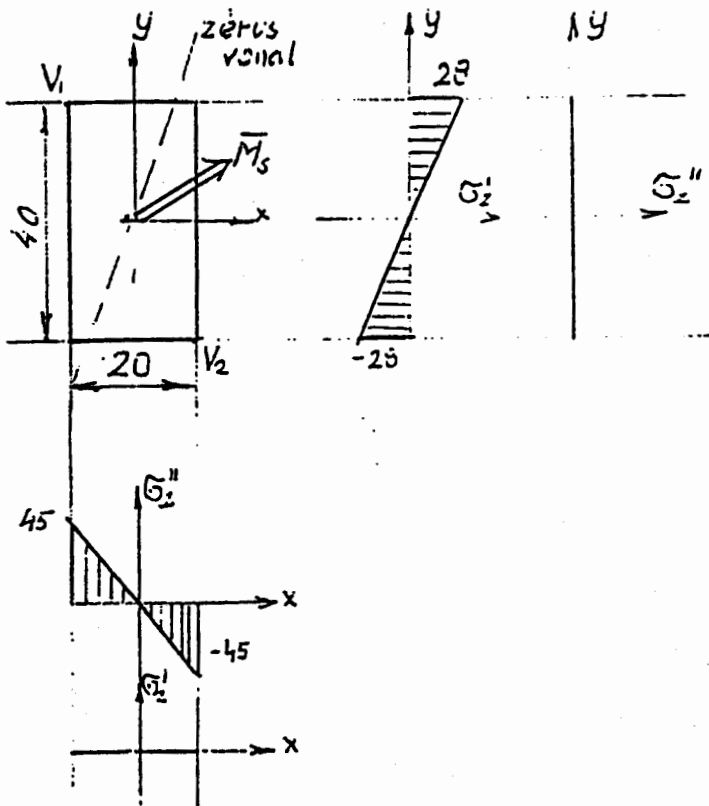
A szimmetriatengely mindig főtengely. Ha $\bar{M}_S$ nem párhuzamos x vagy y tengellyel, akkor ferde hajlításról beszélünk. Ez az x és y tengelyek körüli egyenes hajlítások szuperpozíciója:

$$\bar{M}_S = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} = M_{hx} \vec{i} - M_{hy} \vec{j} \quad - \text{hajlítás előjel miatt}$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

zérusvonal elfordul: húzott és nyomott oldalakat választjuk-e.

Példa: (5.10)



$$a/ \quad \bar{M}_S = 150 \vec{i} + 120 \vec{j} \text{ Nm}$$

$$M_{hx} = 150 \text{ Nm}$$

$$= 150 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$I_x = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = \frac{32}{3} 10^4 \text{ mm}^4$$

$$M_{hy} = -120 \text{ Nm}$$

$$I_y = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = \frac{8}{3} 10^4 \text{ mm}^4$$

$$b/ \quad \sigma_z = \frac{150 \cdot 10^3}{\frac{32}{3} \cdot 10^4} y - \frac{120 \cdot 10^3}{\frac{8}{3} 10^4} x$$

$$= \frac{45}{32} y - \frac{36}{8} x$$

$$\sigma_z = 1,4y - 4,5x$$

$$c/ \quad \text{zérusvonal: } \sigma_z = 0$$

$$y = \frac{4,5}{1,4} x = 3,2x = (\tan \varphi) x$$

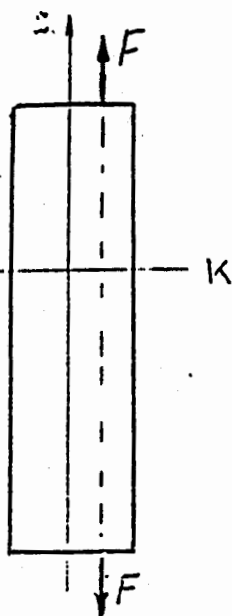
d/ veszélyes pontok: a zérusvonalától legtávolabbi V_1, V_2

$$e/ \quad \sigma_{red \max} = \sigma_z(V_1) = -\sigma_z(V_2) = 28 + 45 = 73 \text{ MPa.}$$

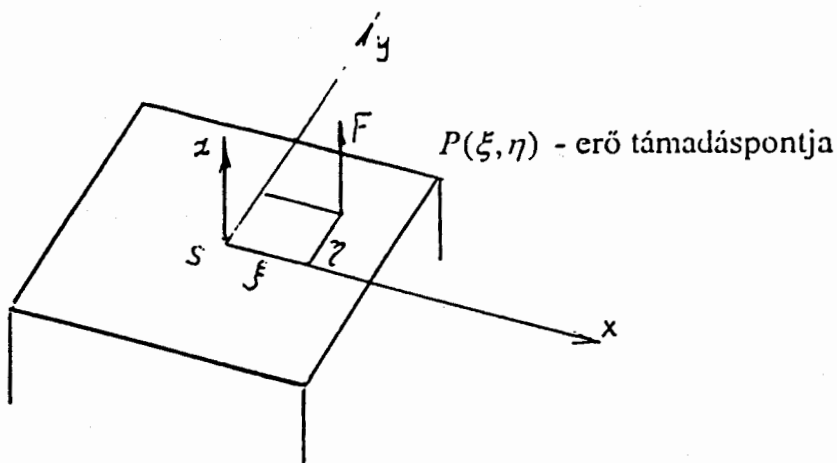
Kör és négyzet keresztmetszet esetén $I_x = I_y$, ezért a zérusvonal párhuzamos $\bar{M}_S$ -el. Ez valójában egyenes hajlítás.

Excentrikus húzás-nyomás

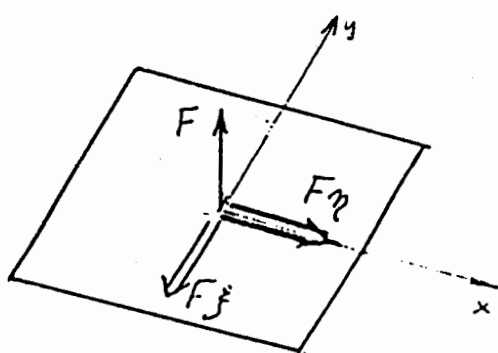
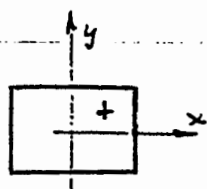
A húzó vagy nyomóerő a súlyponti szálon kívül hat:



K keresztmetszet igénybevétele:



Redukálás S-be: húzás + ferde hajlítás



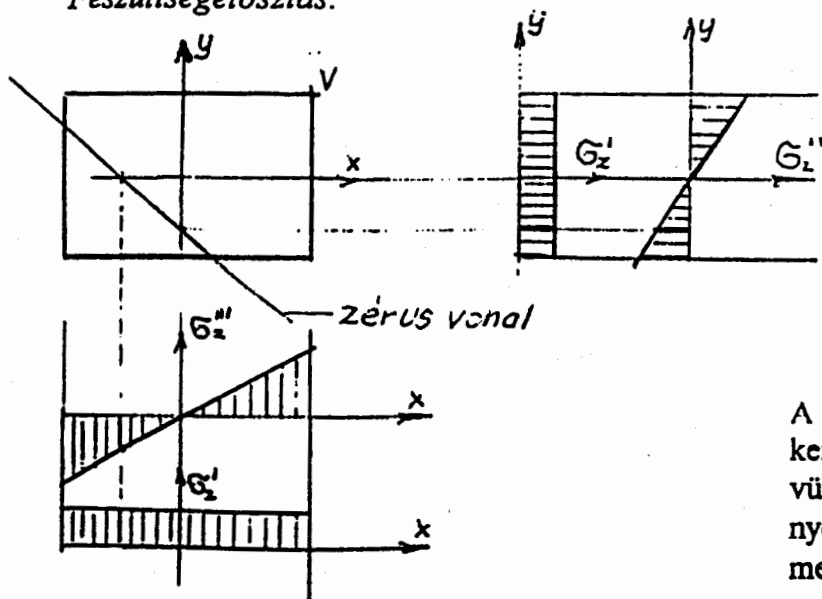
$$\begin{aligned} N &= F \\ M_{hx} &= F \cdot \eta \\ M_{hy} &= F \cdot \xi \end{aligned}$$

feszültség:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot \eta}{I_x} y + \frac{F \cdot \xi}{I_y} x = \sigma'_z + \sigma''_z + \sigma'''_z$$

A zérusvonal független az F erő nagyságától.

Feszültségeloszlás:



V: veszélyes pont: a zérusvonalától legtávolabbi pont

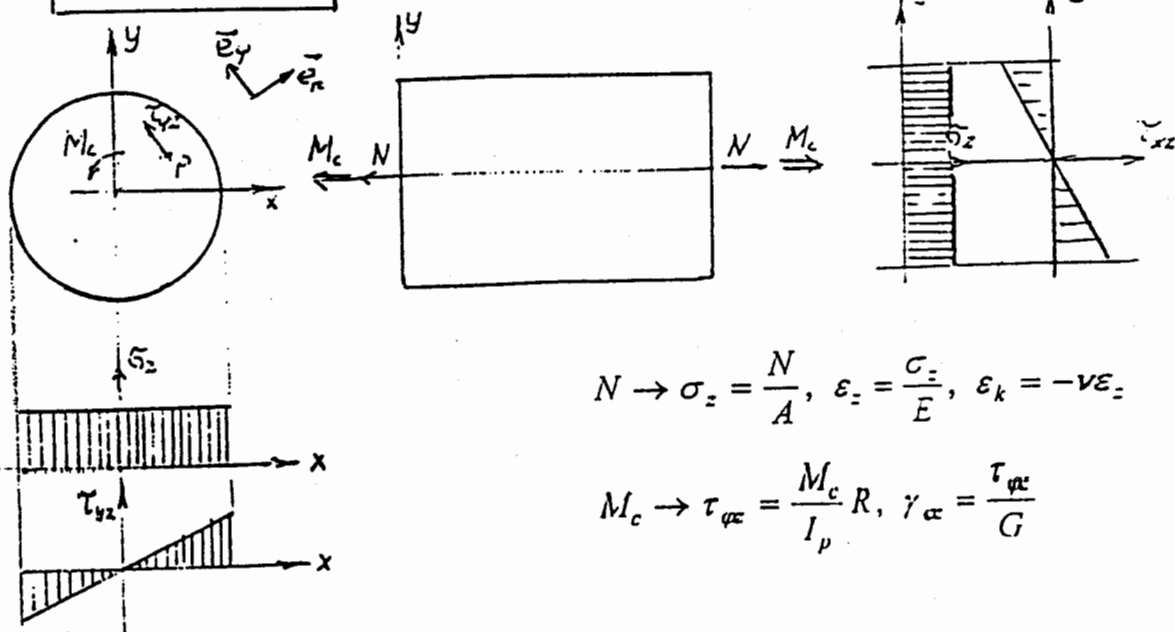
A zérusvonal eltolódik és elfordul. Ha a keresztmetszet határára, vagy azon kívül esik, akkor egynemű (húzó, vagy nyomó) a feszültség az egész keresztmetszeten

Példa: Hf.5.20

Kéttengelyű feszültségállapotok

Kör- vagy körgyűrű keresztmetszetű rúd lehet a csavarás miatt.

Húzás + csavarás



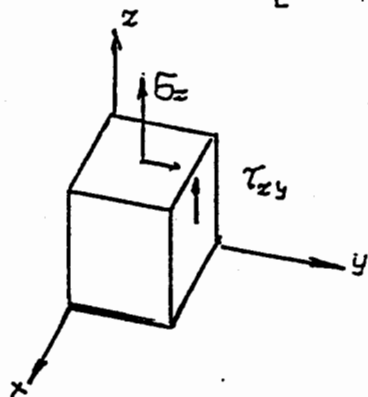
$$N \rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z$$

$$M_c \rightarrow \tau_{\varphi\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R, \quad \gamma_{\varphi} = \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{G}$$

Henger KR-ben:

$$\underline{T}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi\varphi} \\ 0 & \tau_{\varphi\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix};$$

$$\underline{A}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi}^2}$$

Méretezés, ellenőrzés

Veszélyes pontok a peremen vannak. Itt

$$\sigma_z = \frac{N}{A}; \quad \tau_{\varphi\varphi} = \frac{M_c}{K_p}; \quad A = \frac{d^2 \pi}{4}; \quad K_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{d^3 \pi}{16}$$

- Ellenőrzéskor:

$$\sigma_{red \max} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} \leq \sigma_{meg}$$

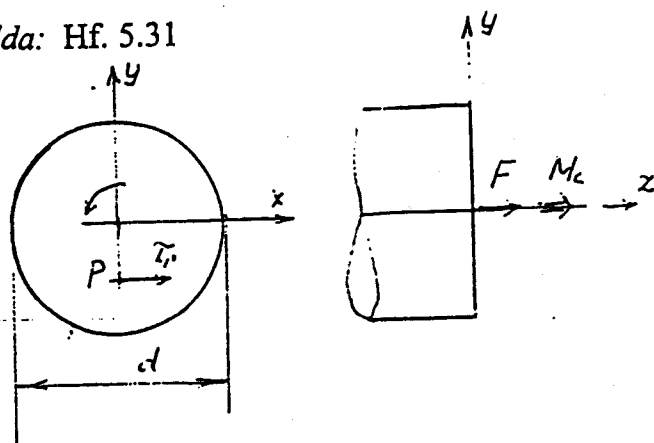
- Méretezés: két lépésben

$$1. \text{ csak } M_c\text{-re: } \sigma_{red \max} = \sqrt{\beta} \frac{|M_c|}{K_p} = \sigma_{meg} \rightarrow K_p \dots$$

d - felfelé kerekítjük, majd

2. ellenőrzés N, M_c - re (mint fent).

Példa: Hf. 5.31



$$\bar{F} = 50 \bar{k} \text{ kN}$$

$$\bar{M}_S = 5 \bar{k} \text{ kNm}$$

$$d = 80 \text{ mm}$$

$$P(0, -20, 0)$$

a/ $T_P = ?$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{8^2 \cdot 10^2 \pi}{4} = 16\pi \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{50 \cdot 10^3}{16\pi \cdot 10^2} = \frac{500}{16\pi} = 9,95 \text{ MPa}$$

$$\tau_P = \frac{M_c}{I_P} R_P = \frac{5 \cdot 10^6}{128\pi \cdot 10^4} \cdot 20 = \frac{10^4}{128\pi} = 24,4 \text{ MPa}$$

$$I_P = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{8^4 \cdot 10^4 \pi}{32} = 128\pi \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

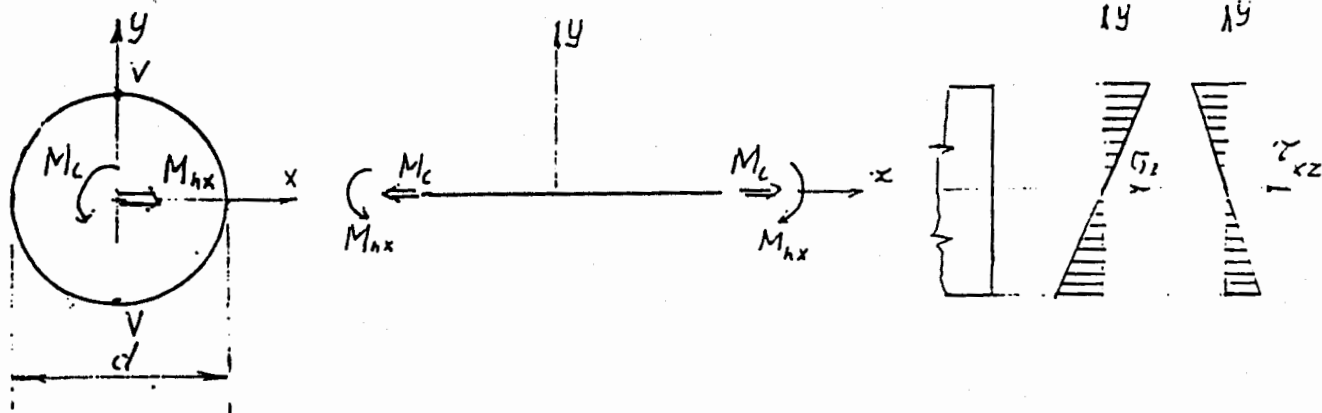
$$T_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24,4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24,4 & 0 & 9,95 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

b/ Ellenőrzés, ha $\sigma_{meg} = 120 \text{ MPa}$ (Mohr-szerint)

$$K_P = \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{8^3 \cdot 10^3 \pi}{16} = 32\pi \cdot 10^3 \text{ mm}^3, \quad \tau_{\max} = \frac{M_c}{K_P} = \frac{5 \cdot 10^6}{32\pi \cdot 10^3} \approx 50$$

$$\sigma_{red \max} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\max}^2} \approx \sqrt{10^2 + 4 \cdot 50^2} = 10\sqrt{1+100} \approx 100 < 120 \text{ megfelel!}$$

B/Hajlítás + csavarás



Az x tengely essen egybe $\bar{M}_h$ -val, ekkor a veszélyes pontok az y tengelyre esnek (V).

$$M_h \rightarrow \sigma_x = \frac{M_{hx}}{I_x} y; \quad T \text{ és } A \text{ ugyanolyan mint az előbb (A eset).}$$

$$M_c \rightarrow \tau_{\varphi x} = \frac{M_c}{I_p} R$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \beta \tau_{\varphi x}^2}$$

$$\sigma_{red \max} = \sigma_{red}(V) = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2}$$

de

$$K_x = \frac{I_x}{d/2}, \quad K_p = \frac{I_p}{d/2} \quad \text{és} \quad 2 \cdot I_x = I_p \quad \therefore \text{ezért} \quad \underline{2K_x = K_p}$$

$$\sigma_{red \max} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{2K_x}\right)^2} = \frac{1}{K_x} \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

Redukált nyomaték

$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

$$\beta \rightarrow \begin{matrix} 3 & \text{HMH} \\ 4 & \text{Mohr} \end{matrix}$$

$$\sigma_{red \max} = \frac{M_{red}}{K_x}$$

- mintha csak hajlítás lenne, de M_{red} nyomatékkal

Méretezés - ellenőrzés:

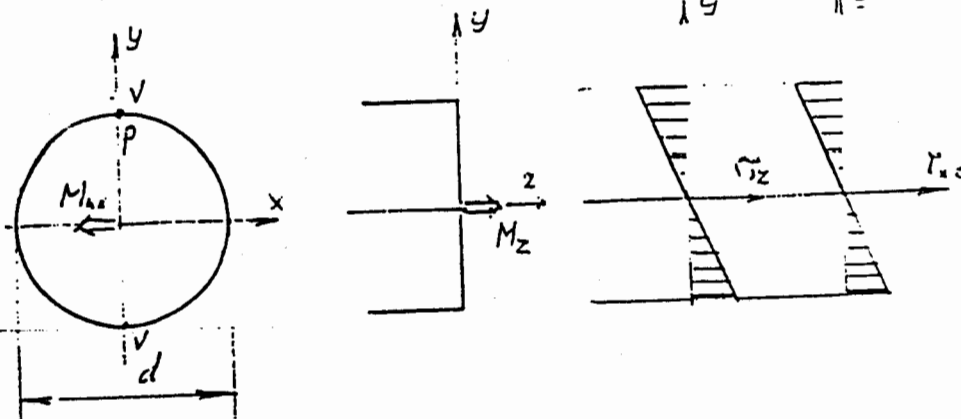
- veszélyes keresztmetszet: $M_{red \max}$

$$\sigma_{red\ max} = \frac{M_{red\ max}}{K_x} \leq \sigma_{meg}, \quad K_x \geq \frac{M_{red\ max}}{\sigma_{meg}}$$

méretezéskor

$$\frac{d^3 \pi}{32} \geq \frac{M_{red\ max}}{\sigma_{meg}} \rightarrow d \geq \dots$$

Példa:



a/ feszültségeloszlás

$$M_x = -100\ Nm \rightarrow M_{hx} = -100\ Nm \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

$$M_z = 150\ Nm \rightarrow M_c = 150\ Nm \rightarrow \tau_{xz} = \frac{M_c}{I_p} R$$

$$d = 50\ mm$$

b/ veszélyes pont: V

c/ $P(0, \frac{d}{2})$ pontban $\underline{T} = ?$

$$\sigma_{zp} = \frac{M_{hx}}{I_x} \frac{d}{2} = \frac{M_{hx}}{K_x} = -\frac{100 \cdot 10^3}{12,25 \cdot 10^3} = -8,1\ MPa$$

$$\tau_{xp} = -\frac{M_c}{I_p} \frac{d}{2} = -\frac{M_c}{K_p} = \frac{-150 \cdot 10^3}{24,5 \cdot 10^3} = -6,1\ MPa$$

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6,1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6,1 & 0 & -8,1 \end{bmatrix}$$

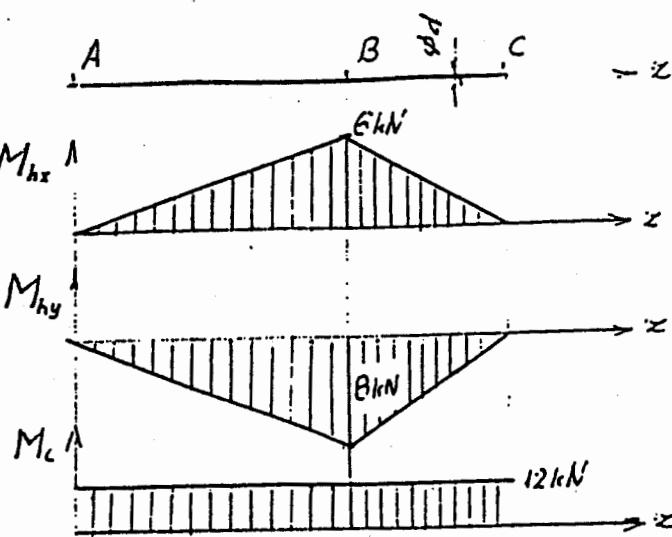
$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{50^3 \pi}{16} = \frac{125 \cdot \pi}{16} 10^3 = 24,5 \cdot 10^3\ mm^3$$

$$K_x = \frac{K_p}{2} = 12,25 \cdot 10^3\ mm^3$$

d/ σ_{redP} Mohr szerint

$$\sigma_{redP}^M = \sqrt{\sigma_{xp}^2 + 4\tau_p^2} = \sqrt{8,1^2 + 4 \cdot 6,1^2} = 14,6\ MPa$$

Pl: (5.49)



$$\sigma_{red} = 120 \text{ MPa}$$

Méretezés (Mohr szerint)

$$M_h = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2}$$

$$M_{h \max} = M_{hB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ kNm}$$

$$M_{red} = \sqrt{M_h^2 + M_c^2}$$

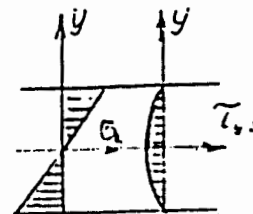
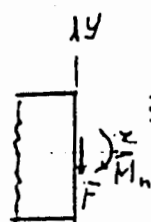
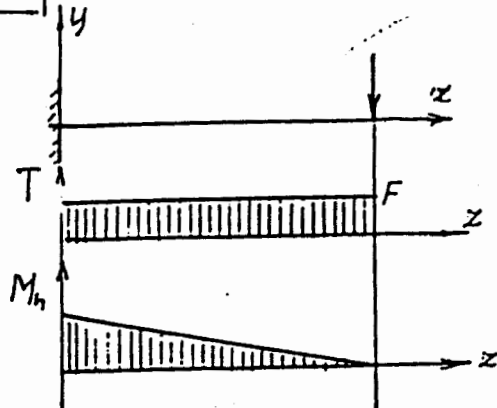
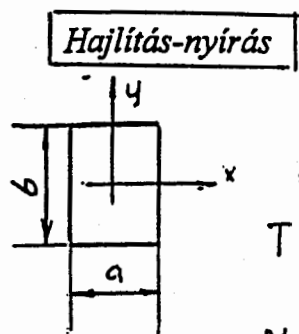
$$M_{red \max} = M_{redB} = \sqrt{10^2 + 12^2} = 15,6 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{red \max} = \frac{M_{red \max}}{K_x} \leq \sigma_{meg} \rightarrow K_x \geq \frac{M_{red \max}}{\sigma_{meg}} = \frac{15,6 \cdot 10^6}{120} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ (mm}^3\text{)}$$

$$K_x = \frac{d^3 \pi}{32} \geq 1,3 \cdot 10^5$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,3 \cdot 10^5}{\pi}} = 10^2 \sqrt[3]{\frac{3,2 \cdot 1,3}{\pi}} = 10^2 \sqrt[3]{1,32} = 109 \text{ (mm)}.$$

Legyen $d = 110 \text{ mm}$.



Az $y = \pm \frac{b}{2}$ perem terheletlen, ezért ott $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$.

A $\tau_{yz}(y)$ függvény parabola, maximumát az $y = 0$ helyen vesz fel, amely

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \left| \frac{T}{A} \right| = \frac{3}{2} \frac{F}{ab}.$$

A veszélyes pont vagy az $y = \pm \frac{b}{2}$ perem, vagy az x tengely pontja.

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x, y, z) = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$$

$$u = -vxy/R$$

$$v = (vx^2 - vy^2 - z^2)/2R$$

$$w = yz/R$$

$$R = 10 \text{ m}; \quad v = 0,25; \quad \vec{r}_p = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ mm}$$

a/

$$\underline{\underline{U}} = \vec{u} \circ \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{R}y & -\frac{v}{R}x & 0 \\ \frac{v}{R}x & -\frac{v}{R}y & -\frac{v}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & \frac{1}{R}y \end{bmatrix}$$

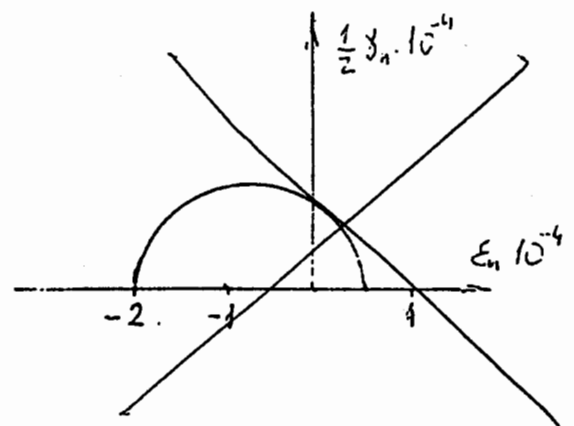
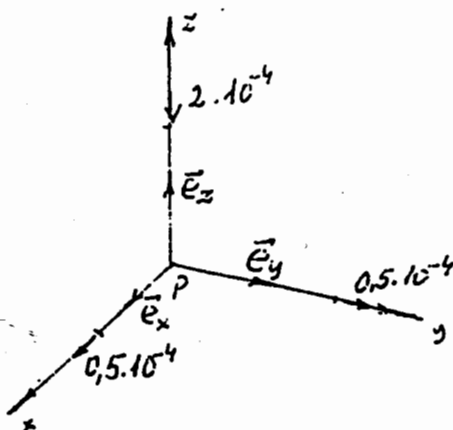
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) = \begin{bmatrix} -\frac{v}{R}y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v}{R}y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{R}x & 0 \\ \frac{v}{R}x & 0 & -\frac{1}{R}z \\ 0 & \frac{1}{R}z & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{A}} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

b/

$$\underline{\underline{A}}_p = \underline{\underline{A}}(\vec{r}_p) \text{ személtelise;}$$



$$\bar{u} = \bar{e}_x Cxy^2 + \bar{e}_y Cyz^2 + \bar{e}_z Cz x^2 ; \quad C = 10^{-5} \text{ mm}^{-2}$$

$$\bar{r}_P = (-20\bar{e}_x + 30\bar{e}_y + 40\bar{e}_z) \text{ mm}$$

a/

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} u &= Cxy^2 & x_P &= -20 \text{ mm} \\ v &= Cyz^2 & y_P &= 30 \text{ mm} \\ w &= Cz x^2 & z_P &= 40 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{U}}(x,y,z) = \begin{bmatrix} Cy^2 & 2Cxy & 0 \\ 0 & Cz^2 & 2Cyz \\ 2Czx & 0 & Cx^2 \end{bmatrix}$$

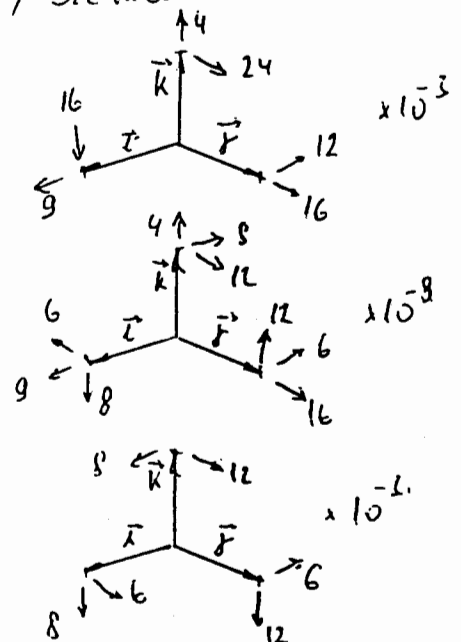
b/

$$\underline{\underline{U}}_P = \underline{\underline{U}}(x_P, y_P, z_P) = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & 24 \\ -16 & 0 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{A}}_P = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}}_P + \underline{\underline{U}}_P^T) = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -8 \\ -6 & 16 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

$$\underline{\underline{\Psi}}_P = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}}_P - \underline{\underline{U}}_P^T) = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 6 & 0 & 12 \\ -8 & -12 & 0 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

c/ Szemléltetés:



$$\begin{bmatrix} T \\ \underline{=P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -500 & 0 \\ -500 & 0 & 500 \\ 0 & 500 & -500 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \quad \text{MPa} = \text{N/mm}^2$$

a/

$$\bar{\rho}_x = (400\bar{e}_x - 500\bar{e}_y) \text{ MPa}$$

$$\bar{\rho}_y = (-500\bar{e}_x + 500\bar{e}_z) \text{ MPa}$$

$$\bar{\rho}_z = (500\bar{e}_y - 500\bar{e}_z) \text{ MPa}$$

b/

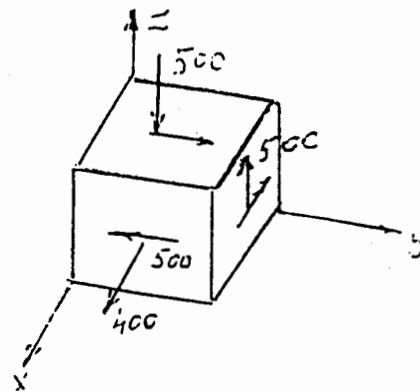
$$\bar{n} = 0,8\bar{e}_y + 0,6\bar{e}_z$$

$$\bar{\rho}_n = \underline{T} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 400 & -500 & 0 \\ -500 & 0 & 500 \\ 0 & 500 & -500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_n = \bar{n} \cdot \bar{\rho}_n = 240 + 60 = 300 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_n = \bar{\rho}_n - \sigma_n \bar{n} = \begin{bmatrix} -400 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix} - 300 \begin{bmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400 \\ 60 \\ -80 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\tau_n(-400\bar{e}_x + 60\bar{e}_y - 80\bar{e}_z) \text{ MPa}.$$



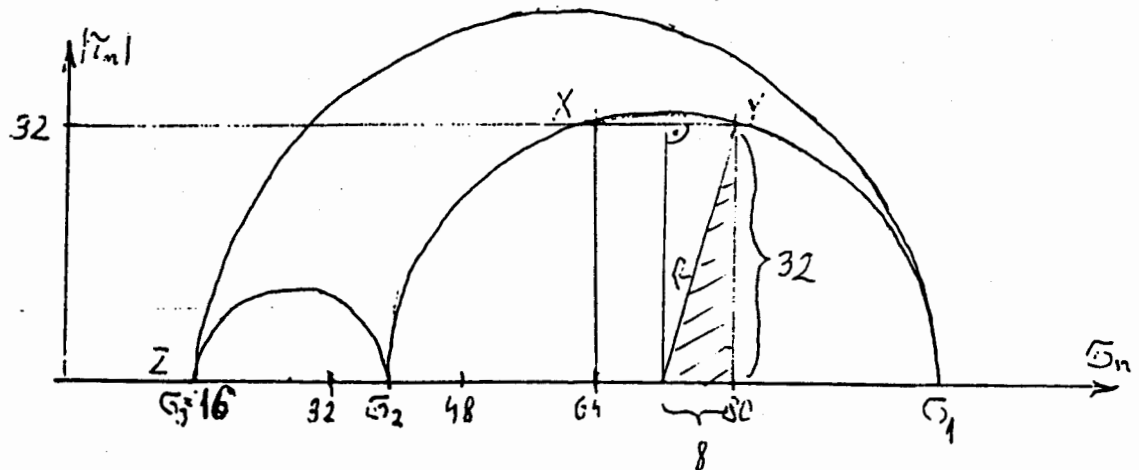
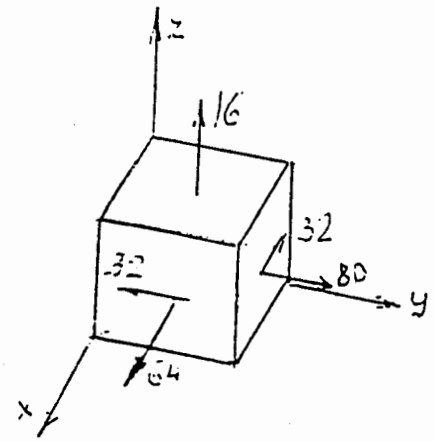
$$\bar{\rho}_x = (64\bar{e}_x - 32\bar{e}_y) \text{ MPa}.$$

a/

$$\bar{\rho}_y = (-32\bar{e}_x + 80\bar{e}_y) \text{ MPa}.$$

$$\bar{\rho}_z = (16\bar{e}_z) \text{ MPa}.$$

b/



c/

$$\begin{bmatrix} T \\ =P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -32 & 0 \\ -32 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

d/

$$\sigma_{red} = (\text{Mohr}) = (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\sigma_{red}(H-M-H) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

$$\sigma_{red} = (HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

$$\text{főfeszültségek: (kördiagram alapján): } R^2 = 8^2 + 32^2 = 1088 \rightarrow R = 33$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 72 + 33 = 105 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 - R = 72 - 33 = 39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}(\text{Mohr}) = \sigma_1 - \sigma_3 = 105 - 16 = \underline{89 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{red}(HMH) = \sqrt{\frac{1}{2}(66^2 + 23^2 + 89^2)} = \sqrt{6403} \cong \underline{80 \text{ MPa}}$$

$$\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3}$$

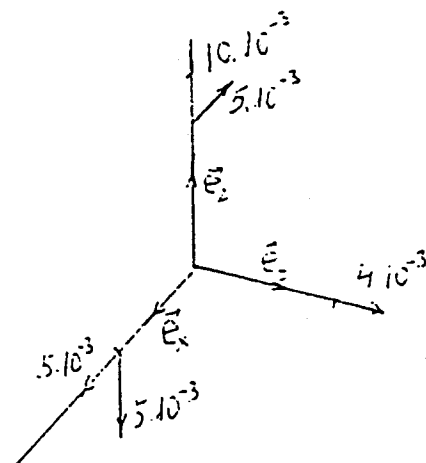
$$\varepsilon_z = 10^{-2} = 10 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = -10^{-2} = -10 \cdot 10^{-3}$$

a/

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$



b/

$$\varepsilon_n = ? \quad \gamma_{yn} = ?$$

$$\bar{e}_n = 0,8\bar{e}_x + 0,6\bar{e}_z$$

$$\bar{\alpha}_n = \underline{A} \cdot \bar{e}_n = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 4-3 \\ 0 \\ -4+6 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_n = \bar{e}_n \cdot \bar{\alpha}_n = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} 10^{-3} = (0,8 + 1,2) 10^{-3} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\gamma_{yn} = 2\bar{e}_y \cdot \bar{\alpha}_n = 0.$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_z \quad |\bar{e}_n| = 1$$

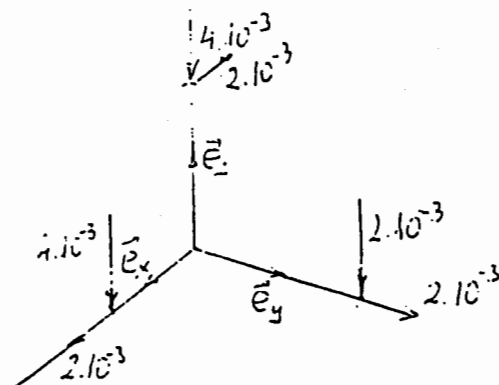
$$\bar{e}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_z \quad |\bar{e}_m| = 1$$

a/ Relatív elmozdulásállapot szemléltetése

$$\bar{u}_x = (2\bar{e}_x - 4\bar{e}_z) \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{u}_y = (2\bar{e}_y - 2\bar{e}_z) \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{u}_z = (-2\bar{e}_x - 4\bar{e}_z) \cdot 10^{-3}$$

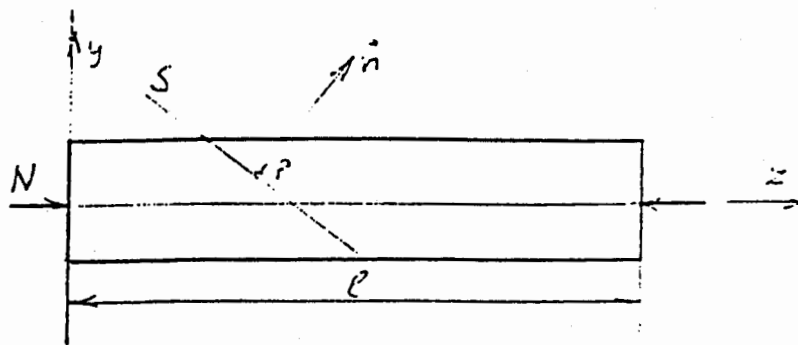
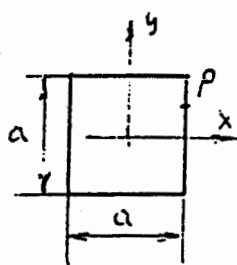


b/

$$\bar{u}_n = \underline{U} \cdot \bar{e}_n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + \sqrt{2} \\ 0 + \sqrt{2} + 0 \\ 0 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_m = \underline{U} \cdot \bar{e}_m = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 - \sqrt{2} \\ 0 + \sqrt{2} + 0 \\ 0 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

MP-II. 4.2.

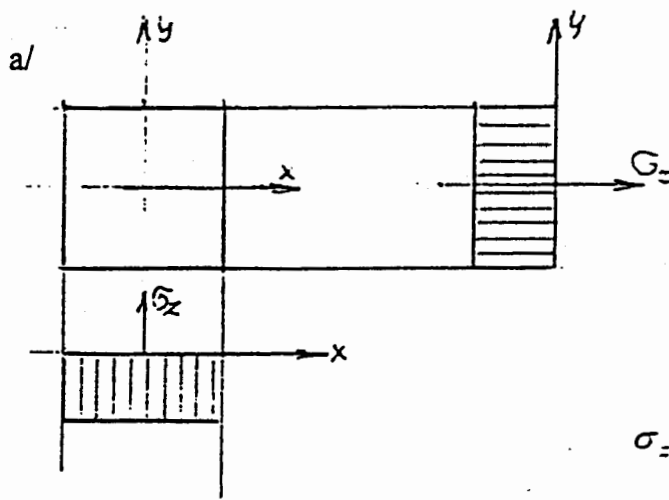


$$N = -600 \text{ kN}$$

$$a = 50 \text{ mm}$$

$$\bar{n} = 0,6\bar{e}_y + 0,8\bar{e}_z$$

$$l = 100 \text{ mm}$$



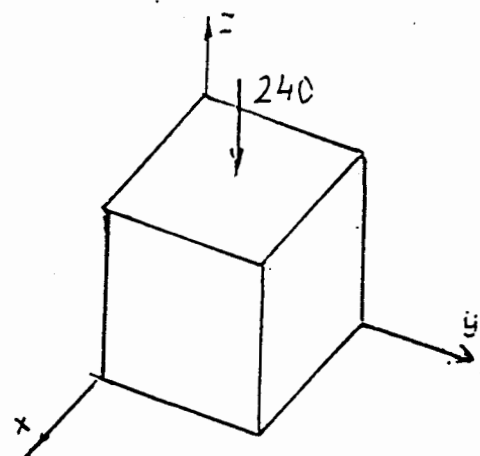
$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = -\frac{6 \cdot 10^5}{2,5 \cdot 10^3} = -240 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_z = \text{const}$$

b/

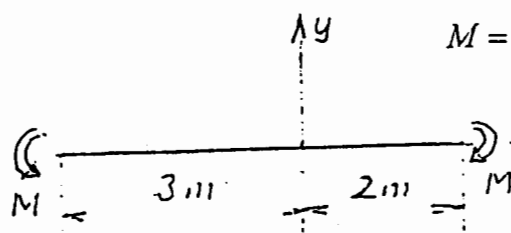
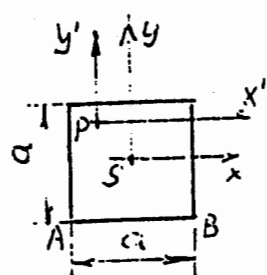
$$[T_P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -240 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$



c/

$$\bar{p}_n = T \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -192 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \bar{p}_n \cdot \bar{n} = -153,6 \text{ N/mm}^2.$$



$$M = 120 \text{ Nm} \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,25$$

$$a = 20 \text{ mm}$$

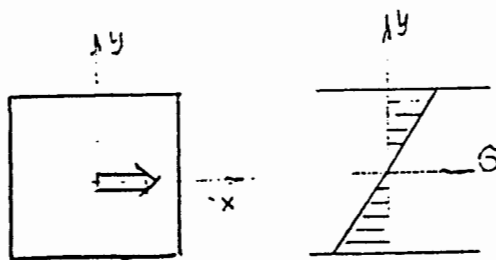
$$\vec{n} = \sqrt{0,4}\vec{e}_x + \sqrt{0,2}\vec{e}_y + \sqrt{0,4}\vec{e}_z$$

a/

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \frac{M_h}{I_x} y$$

$$I_x = \frac{a^4}{12} = \frac{16 \cdot 10^4}{12} = \frac{4}{3} \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



b/

$$P(-6, 6, 0)$$

$$\sigma_z = \frac{M_h}{I_x} y_p = \frac{120 \cdot 10^3}{\frac{4}{3} \cdot 10^4} 6 = \frac{12 \cdot 6 \cdot 3}{4} = 54 \text{ N/mm}^2$$

c/

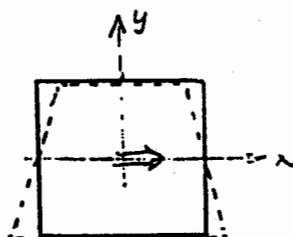
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

d/

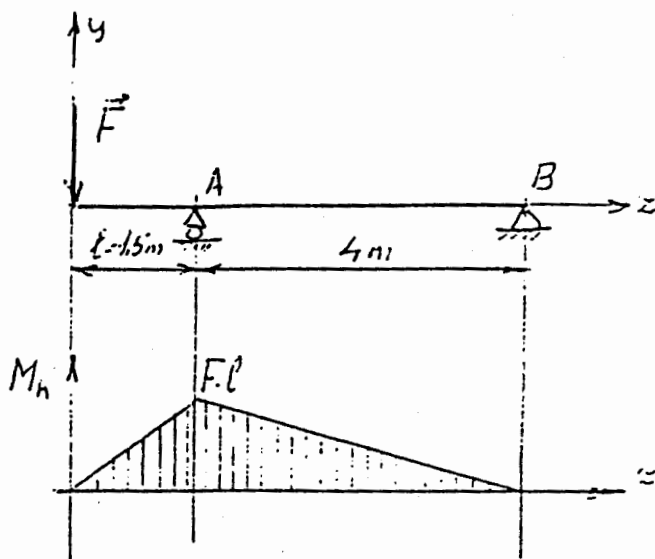
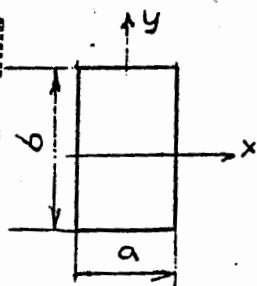
$$\vec{\rho}_n = \underline{T} \cdot \vec{n}$$



$$\Delta a = \varepsilon_x \cdot a = -\nu \varepsilon_z a = -\nu a \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\sigma_z(y_a = -10) = \frac{M_h}{I_x} y_a$$

MP-II. 4.56

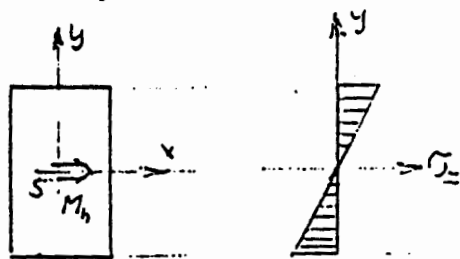


$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 40 \text{ mm}$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 150 \text{ MPa}$$

veszélyes km.



veszélyes pontok:

$$y = \pm \frac{b}{2}$$

$$I_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 10,66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

$$\frac{I_x}{y_{\text{max}}} = K_x = \frac{2I_x}{b} = \frac{ab^2}{6} = 5,33 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\frac{M_h}{K_x} = \frac{F \cdot l \cdot b}{I_x \cdot 2} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

$$F'_{\text{max}} = \frac{2\sigma_{\text{meg}} I_x}{bl} = \frac{\sigma_{\text{meg}} K_x}{l} = \frac{150 \cdot 5,33 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^3} =$$

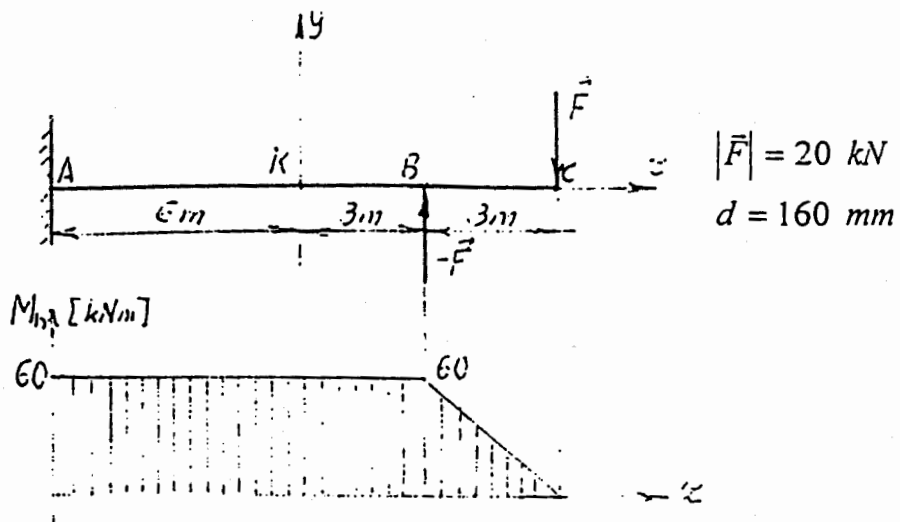
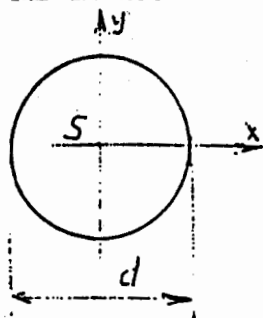
$$\underline{\underline{F'_{\text{max}} = 533,3 \text{ N}}}$$

b/

$$F''_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{meg}} K_x}{l} = \frac{150 \cdot 2,66 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^3} = \underline{\underline{266,6 \text{ N}}}$$

$$K_x = \frac{a^2 b}{6} = 2,66 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

MP-II. 4.55

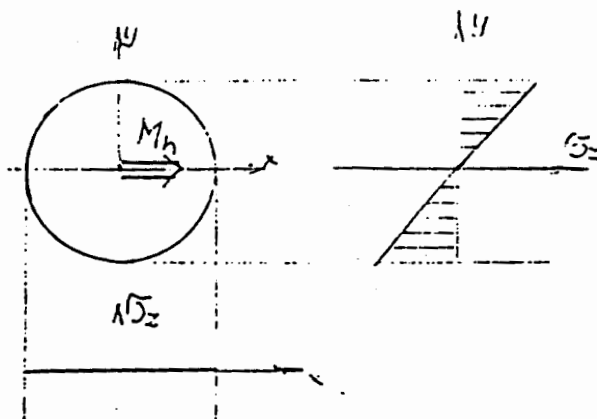


a/ hajl.nyom.
ábra

b/ veszélyes keresztmetszetek: A-B szakasz

c/

$$\sigma_z = \frac{M_h}{I_x} y$$



d/

$$y_P = 80 \text{ mm}$$

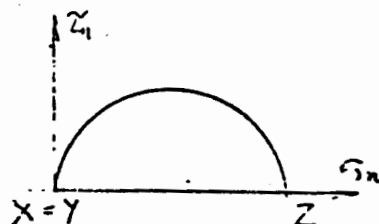
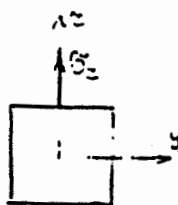
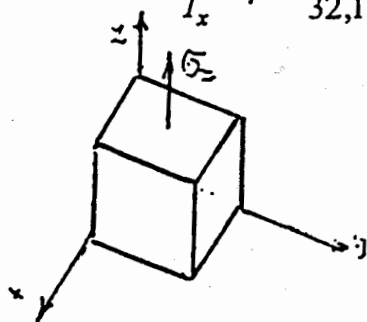
$$\begin{bmatrix} T \\ =P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 149,3 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = 32,15 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_p = \int_{(A)} R^2 dA = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x = 2I_x \Rightarrow I_x = \frac{I_p}{2}$$

$$\sigma_z(P) = \frac{M_h}{I_x} y_P = \frac{60 \cdot 10^6}{32,15 \cdot 10^6} \cdot 80 = 149,3 \text{ MPa}$$

e/ f/



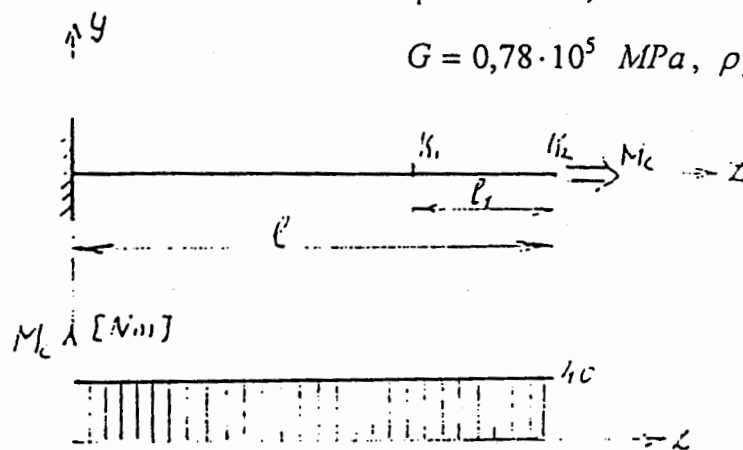
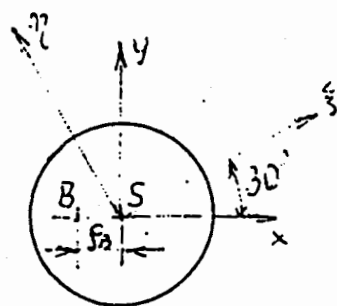
MP-II. 4.79

$$M_c = 40 \text{ Nm}, \quad d = 20 \text{ mm}$$

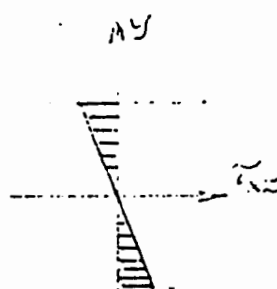
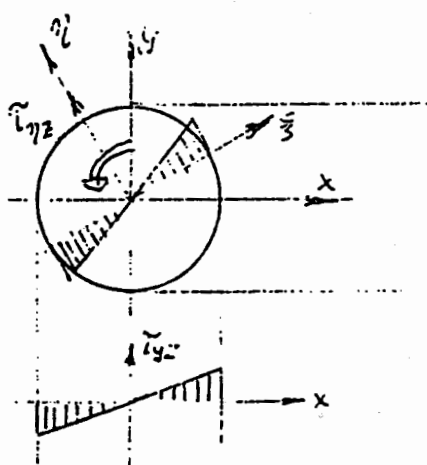
$$l = 500 \text{ mm}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$l_1 = 160 \text{ mm}, \quad \nu = 0,3$$

$$G = 0,78 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \rho_B = 5 \text{ mm}$$



1/



$$\tau_{xz} = \frac{M_c}{I_p} \rho$$

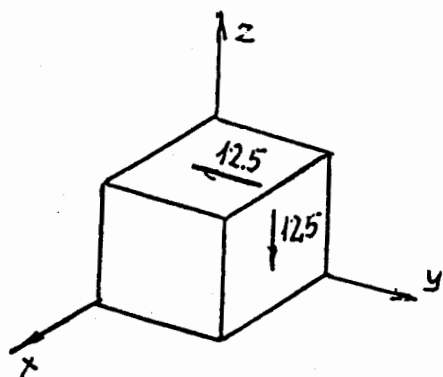
2/

$$T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\tau_{yz}|_B = \frac{M_c}{I_p} \rho_B = \frac{4 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^3} \sigma = 12,5 \text{ MPa}$$

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} \approx 0,1 d^4 = 16 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{yz} = -12,5 \text{ MPa}$$



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,78 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\underline{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{-12,5}{7,8} \cdot 10^{-4} = -1,6 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & -0,8 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

d/

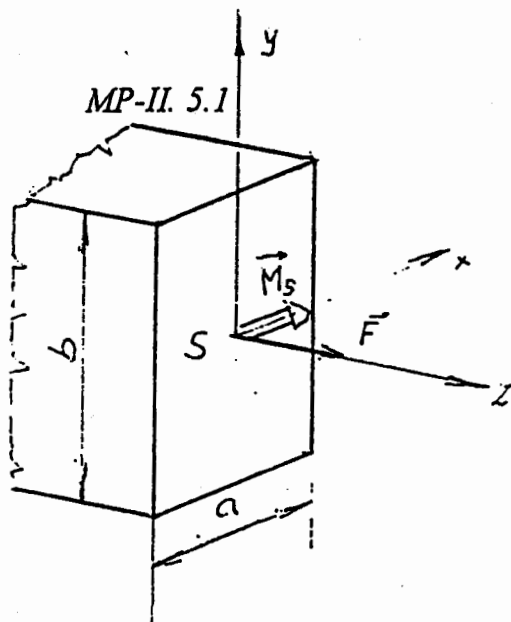
$$\psi_{12} = \vartheta_1 = 0,32 \cdot 10^{-4} \cdot 160 = 0,52 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\vartheta = \frac{M_c}{I_p G} \cong \frac{4 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^3 \cdot 0,78 \cdot 10^5} \cong 0,32 \cdot 10^{-4}$$

e/

$$U = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_c^2}{I_p G} dz = \frac{M_c^2}{2 I_p G} l =$$

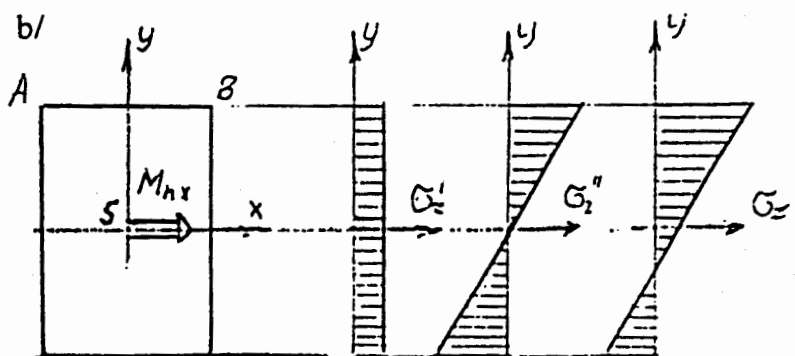
MP-II. 5.1



$$a = 40 \text{ mm}, \quad \vec{F} = (120\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$b = 60 \text{ mm}, \quad \vec{M}_S = (2,88\vec{e}_x) \text{ kNm}$$

a/ igénybevétel: húzás + hajlítás ($y = 30 \text{ mm}$)



$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{I_x} y$$

c/ veszélyes pontok: A-B egyenes

$$\sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{K_x} = \frac{12 \cdot 10^4}{2,4 \cdot 10^3} + \frac{2,88 \cdot 10^6}{2,4 \cdot 10^4} = 50 + 120 = 170 \text{ MPa}$$

$$K_x = \frac{2I_x}{b} = \frac{ab^2}{6} = \frac{4 \cdot 6^2 \cdot 10^3}{6} = 24 \cdot 10^3$$

d/

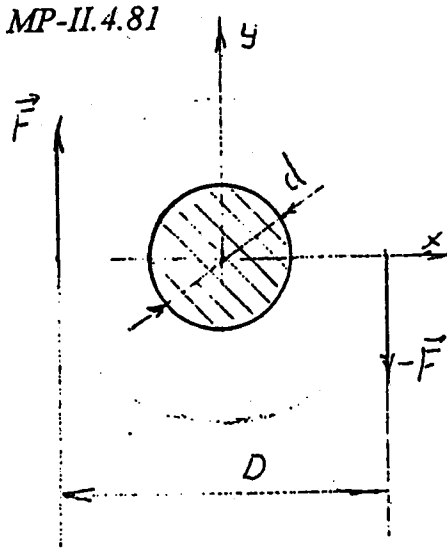
$$\sigma_{z \max} = \frac{\sigma_F}{n_t} \quad n_t = \frac{\sigma_F}{\sigma_{z \max}} = \frac{210}{170} \approx 1,24$$

e/

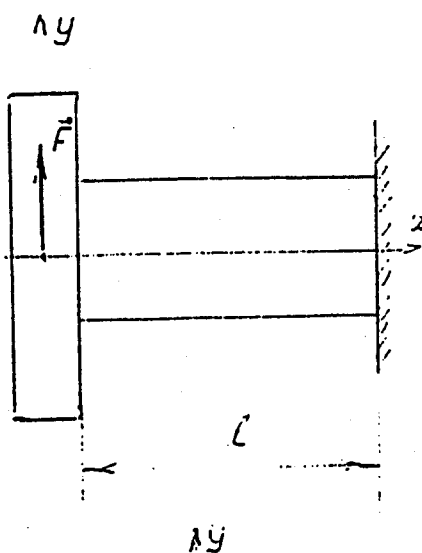
$$\sigma_z = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{I_x} y$$

$$y = -\frac{N}{A} \frac{I_x}{M_h} = -\frac{12 \cdot 10^4}{2,88 \cdot 10^6} \frac{36 \cdot 10^2}{12} = -12,5 \text{ mm}$$

MP-II.4.81



mechanikai modell



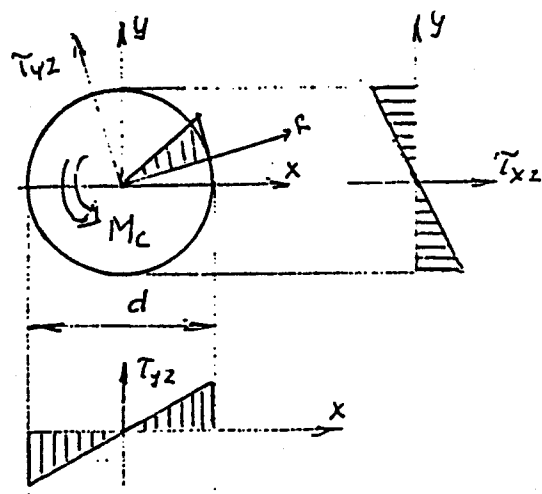
$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= 5 \text{ kN} \\ D &= 0,4 \text{ m} \\ d &= 60 \text{ mm} \\ \tau_{meg} &= 60 \text{ MPa} \end{aligned}$$



$$M_c = FD = 5 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$M_c = 2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

tetszőleges km.



$$\tau_{\varphi x} = \frac{M_c}{I_p} R$$

$$I_p = \int_{(A)} R^2 dA = \int_{R=0}^{d/2} R^2 \cdot 2\pi R dR = 2\pi \int_{R=0}^{d/2} R^3 dR$$

$$I_p = 2\pi \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^{d/2} = 2\pi \frac{d^4}{4 \cdot 16} = \frac{d^4 \pi}{32}$$

$$K_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{d^3 \pi}{16}$$

Ellenőrzés:

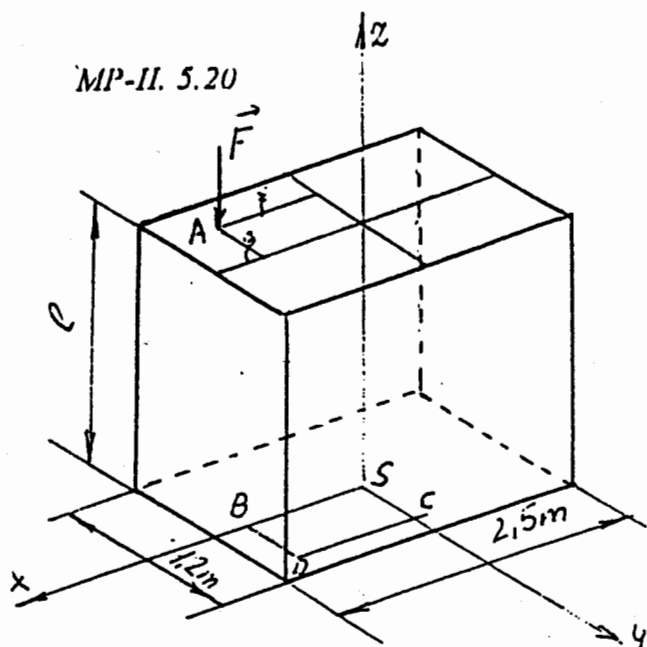
$$\tau_{\max} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 16}{60^3 \cdot 3,14} = 47,18 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{meg}$$

47,18 < 60, tehát a tartó (tengely)

MEGFELEL

MP-II. 5.20



$$A(0,8; -0,4; 1) \text{ m}$$

$$|\vec{F}| = 6 \text{ MN} = 6 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$|\vec{G}| = 0,6 \text{ MN} = 6 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$$B(1,2; 0; 0) \text{ m}$$

$$C(0; 0,5; 0) \text{ m}$$

$$D(1,2; 0,5; 0) \text{ m}$$

$$N = -F$$

$$M_{hx} = N \cdot \eta = -F \cdot \eta$$

$$M_{hy} = N \cdot \xi = -F \cdot \xi$$

$$a/ \quad \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

$$\sigma_z(S) = \frac{N}{A} = -\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} = -2 \text{ N/mm}^2$$

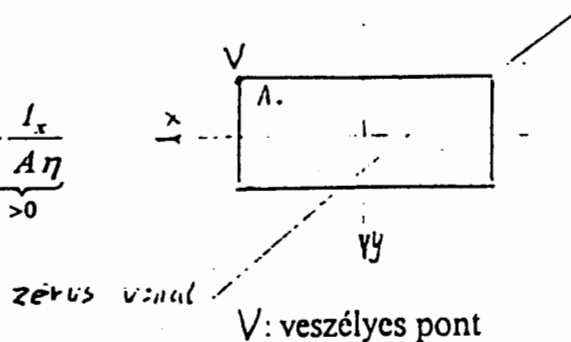
$$\sigma_z(D) = -2 + \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 12}{2,5 \cdot 1,2^3 \cdot 10^{12}} 500 - \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 800 \cdot 12}{1,2 \cdot 2,5^3 \cdot 10^{12}} \cdot 1200 = -17,23 \text{ MPa}$$

b/

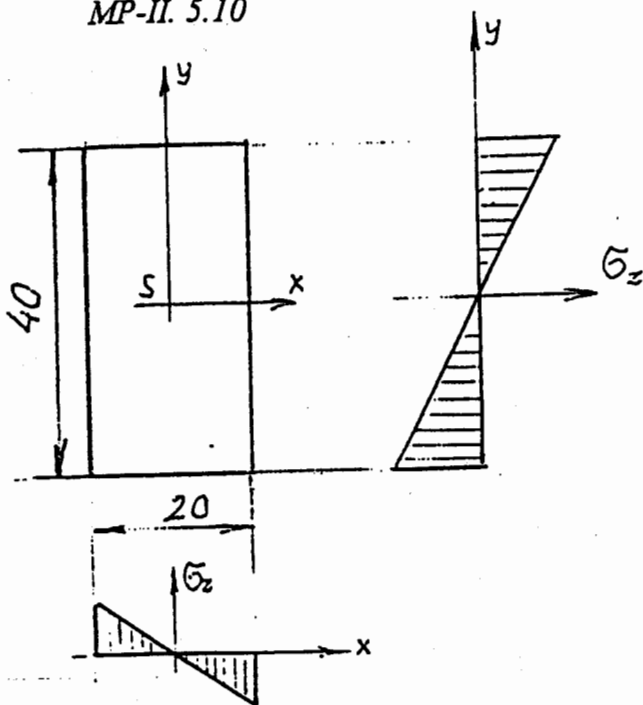
zérusvonal:

$$\sigma_z = 0 = \frac{N}{A} + \frac{N\eta}{I_x} y + \frac{N\xi}{I_y} x$$

$$y = -\frac{I_x}{\eta} \left(\frac{1}{A} + \frac{\xi}{I_y} x \right) = \underbrace{-\frac{\xi}{\eta} \frac{I_x}{I_y} x}_{>0} - \underbrace{\frac{I_x}{A\eta}}_{>0}$$



MP-II. 5.10



$$\vec{M}_S = (150\vec{e}_x + 120\vec{e}_y) \text{ Nm}$$

$$M_{hx} = 150 \text{ Nm}$$

$$M_{hy} = -120 \text{ Nm}$$

a/

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

$$I_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3 \cdot 10^4}{12} = \frac{32}{3} \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{a^3b}{12} = \frac{2^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{12} = \frac{8}{3} \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

b/

$$x_A = 10$$

$$y_A = 20$$

$$\sigma_z = \frac{15 \cdot 10^4}{\frac{32}{3} \cdot 10^4} \cdot 20 + \frac{-12 \cdot 10^4}{\frac{8}{3} \cdot 10^4} \cdot 10 = \frac{450}{28,1} - 45 \approx -16,9 \text{ MPa}$$

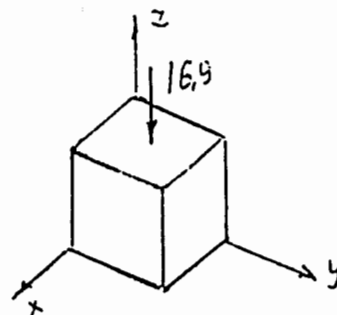
$$[T_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16,9 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

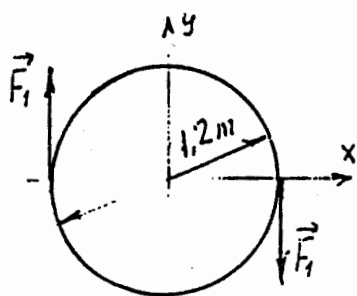
c/

$$\sigma_z = 0$$

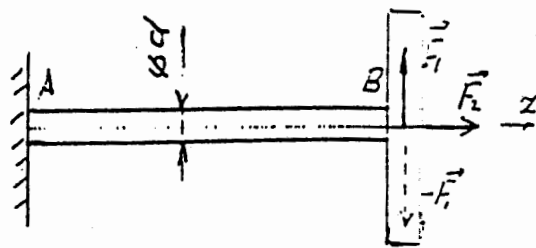
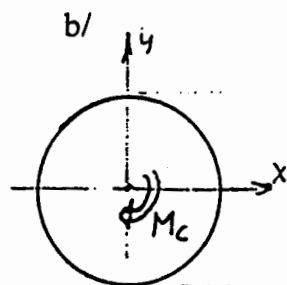
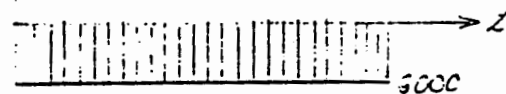
$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x = \frac{120}{150} \frac{32}{8} x = \frac{16}{5} x = 3,2x$$

$$\text{tg} \varphi = 3,2$$

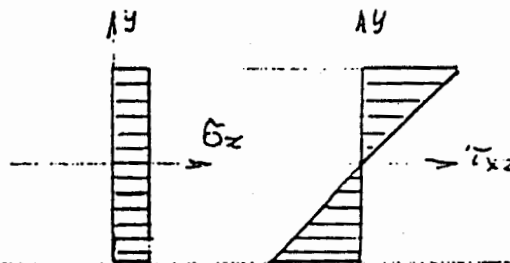




a/


 $\begin{matrix} M_c \\ [N \cdot m] \end{matrix}$


b/



$$d = 80 \text{ mm}$$

$$F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$F_2 = 20 \text{ kN}$$

$$\sigma_F = 180 \text{ MPa}$$

$$n_F = 1,5$$

veszélyes pontok: a keresztmetszet kerületén

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4}{(80)^2 \pi} = \frac{8 \cdot 10^4}{8 \cdot 0,8 \cdot 10^3 \cdot 3,14} \approx 4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{c \max} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{6 \cdot 10^6}{32 \cdot 10^3 \pi} \approx 59,6 \text{ MPa}$$

$$K_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{8^3 \cdot 10^3}{16} \pi = \pi 32 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau^2} \quad \begin{matrix} \beta = 4 \text{ Mohr} \\ \beta = 3 \text{ HMH} \end{matrix}$$

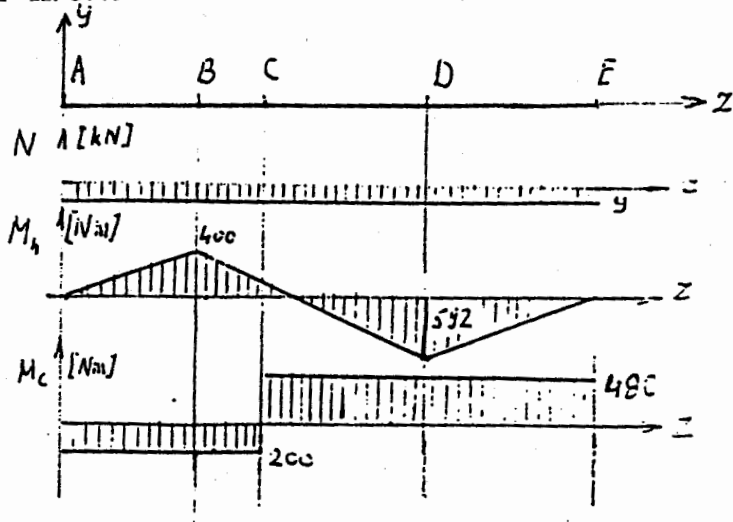
$$\sigma_{red} = (\text{Mohr}) \approx \sqrt{16 + 4 \cdot 59,6^2} \approx 119,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} = (\text{HMH}) \approx \sqrt{16 + 3 \cdot 59,6^2} \approx 104 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red} \leq \frac{\sigma_F}{n_F}$$

$$119,2 < 120 \quad \text{a tartó megfelel.}$$

MP-II. 5.49



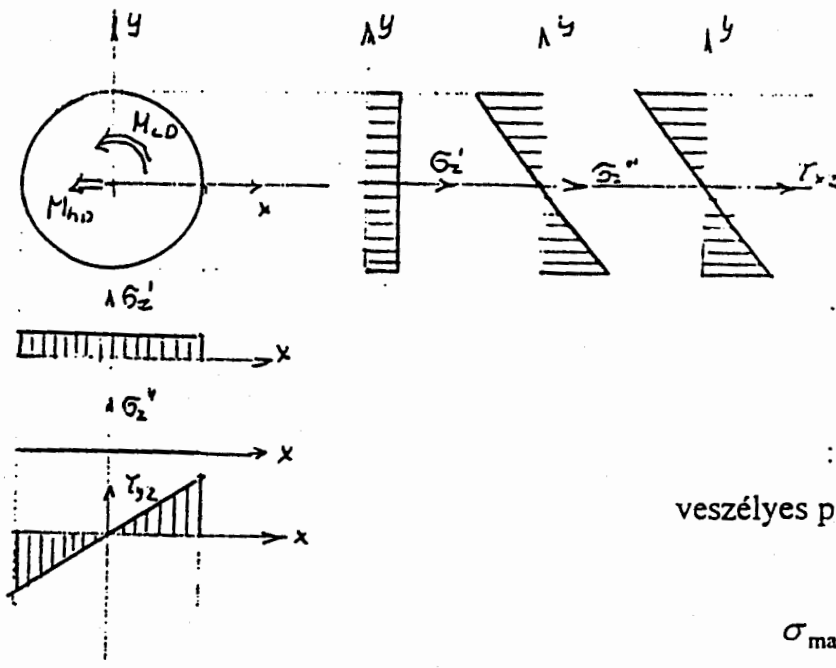
$$\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$$

$$A = 15 \text{ cm}^2$$

$$K_x = 8 \text{ cm}^3$$

1/ veszélyes keresztmetszet: D

2/ veszélyes pont:



$$\sigma'_z = \frac{N}{A}$$

$$\sigma''_z = \frac{M_h}{I_x} y$$

$$\tau_{yz} = \frac{M_c}{I_c} \rho$$

veszélyes pont: P

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{K_x} =$$

$$\tau_{max} = \frac{M_c}{K_p} = \frac{M_c}{2K_x} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \beta \tau^2} \\ \beta = 3 \text{ HMMH} \\ \beta = 4 \text{ Mohr} \end{array} \right\} \text{Spec.eset}$$

kör, körgyűrű:

$$K_p = 2K_x$$

$$I_p = 2I_x$$

$$\sigma_{max} = \frac{9 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^2} + \frac{592 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} = 6 + 74 = 80 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{480 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 10^3} = 30 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red \max} = 10 \sqrt{64 + 4 \cdot 9} = 100 = \sigma_{meg}$$

megfelel.