A számítógépes tervezés geometriai alapjai: görbék típusai, matematikai leírás, manipulációk görbékkel.

Függvények görbék leírására

Egyszerű függvények: analitikus görbék

Polinomok: analitikus és szabadformájú görbék (valamennyi alak)

Polinom jól deriválható (érintő, görbület).

Az n-ed fokú polinom függvény általános alakja:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

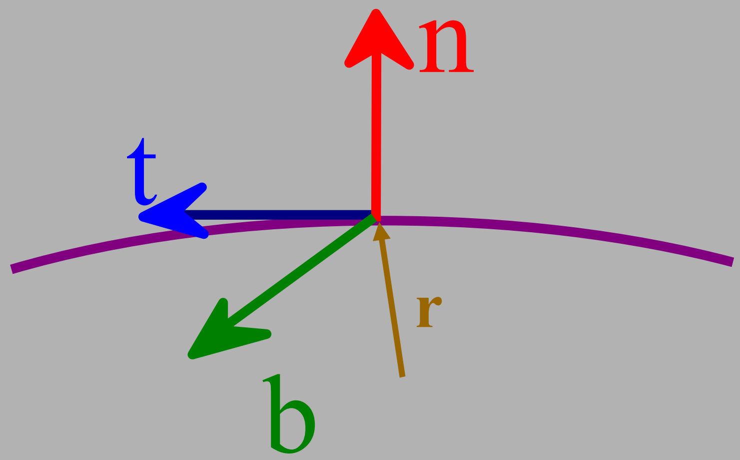
n pozitív egész szám a_0, a_1, ..., a_n valós számok

Más módon felírva:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

A görbe lokális (helyi) tulajdonságai

Az egységvektorokból képezett derékszögű koordináta-rendszer a kisérő triéder.

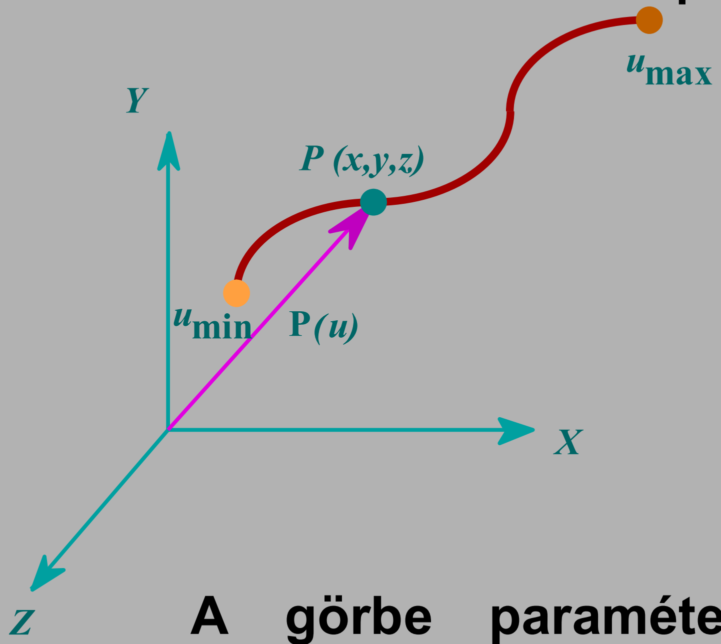


A kísérő triéder t és b vektorai a simulósíkot, b és n vektorai pedig a normálsíkot határozzák meg.

U paraméterű pontban

Érintő (t),
Főnormális (n)
Binormális (b)
Görbület (r)

Görbe paraméteres leírása



A *görbe paraméteres egyenlete* az *u* paraméter értékéhez adja meg a *P* pont modelltérbeli *x*, *y* és *z* koordinátáit.

A görbe pontját a paraméter (u) függvényében fejezi ki.

A görbe paraméteres egyenletének általános alakja:

$$P(u)=[x(u)\ y(u)\ z(u)]$$

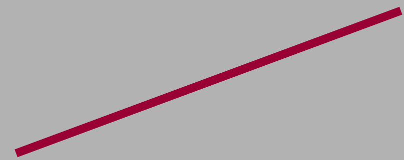
ahol $u_{min} <= u <= u_{max}$

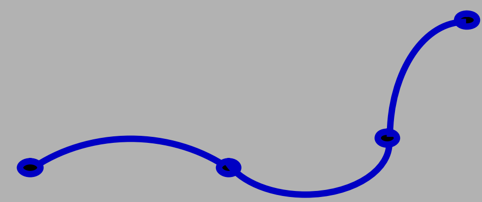
A *P* pont modelltérbeli *x*, *y* és *z* koordinátái az *u* paraméter függvényében:

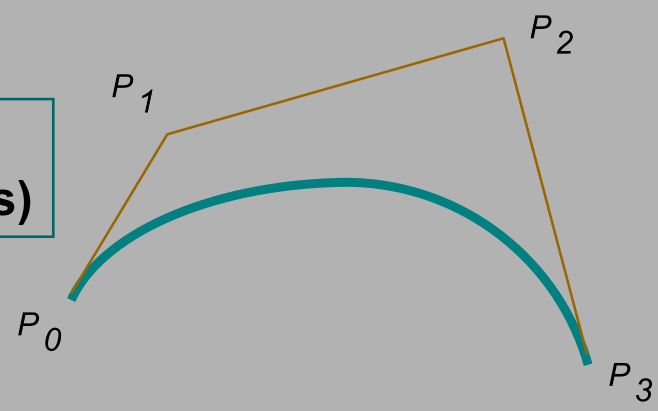
$$x=x(u),\ y=y(u) \text{ és } z=z(u)$$

Görbe létrehozásának módszerei

Feladat	Módszer
Megadott szabályszerűséget követ	Analitikus
Megadott pontokon áthalad	Interpolációs
Megadott pontokkal vezérelve harmonikus alakú	Közelítő (approximációs)





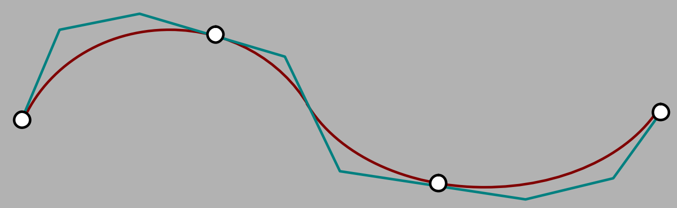


Görbe: egy darabban vagy részekből?

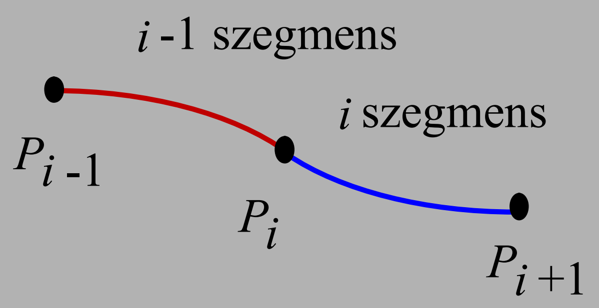
Egyetlen görbeként.

Bezier görbe: globális vezérlés, a vezérlőpont elmozdítása a teljes görbe mentén módosít.

Bezier görbék láncolata görbe leírására.



B-szplájn görbe: szegmensekből épül fel.

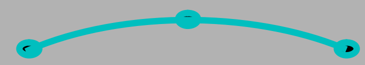


Interpolációs módszerek

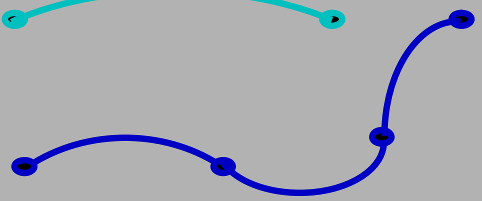
Kísérleti úton vagy számítással előállított pontokon átmenő görbe előállítása.

Lineáris interpoláció: **két-két pontot egyenes szakaszokkal kötnek össze**

Három ponton **körív vezethető át (másodfokú analitikus görbe)**

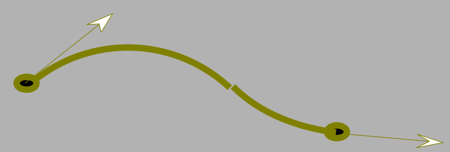


Négy ponton átvezetve **harmadfokú görbét kapunk**



A Hermite interpoláció görbe fektetését jelenti két pont közé, a két pont és a két pontnál megvalósítandó érintő alapján.

Hermite módszerét alkalmazta Ferguson és Coons



Az interpolációs feladat matematikai megoldásához interpolációs polinomokat fejlesztettek.
Ezek közül a Lagrange* polinom a legegyszerűbb.
A pontokra illesztés legismertebb módszere Lagrange nevéhez fűződik,
Lagrange* interpolációként ismert.

***Francia matematikus**

Bezier görbék

Görbék (és felületek) matemetikai leírásának első komolyabb alkalmazásai: repülőgépipar, autóipar

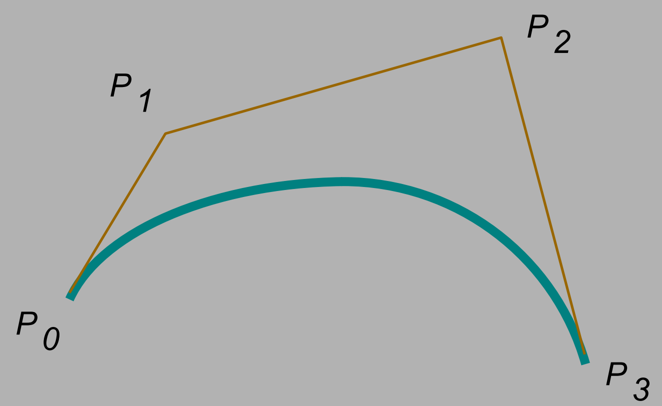
A görbék pontokból és érintővektorokból kiinduló meghatározása a gyakorlati alkalmazás számára nehézkesnek bizonyult (múlt század hatvanas évei).

Bezier (Renault): vezérlő sokszöget vezette be, amelynek csúcspontjainak helyzete a görbe alakját vezérli (irányítja). Alapfüggvényként Bernstein polinomokat alkalmaz

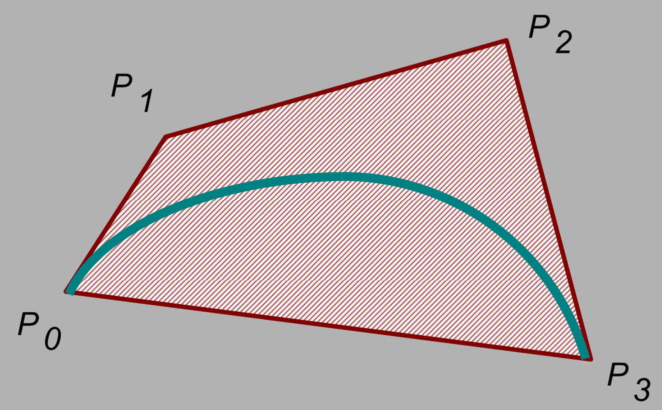
Vele egy időben, ugyanilyen módszerrel valósított meg görbetervezést de Casteljau (Citroen).

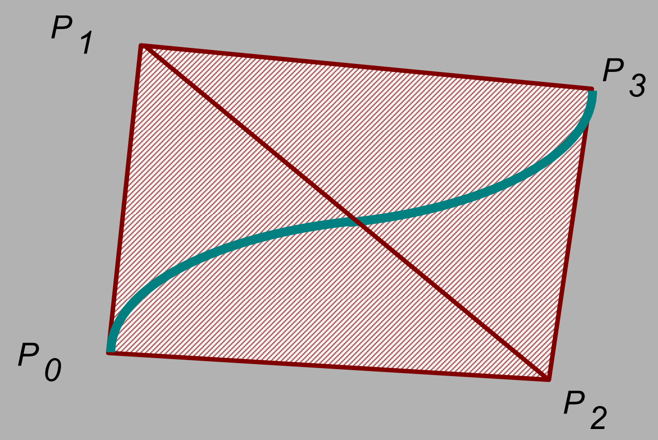
Bezier görbéjének tulajdonságai:

Globális vezérlés.
Fokszáma a vezérlőpontok számával összefügg.
Az első és utolsó vezérlőponton áthalad.
A vezérlő sokszög első és utolsó szegmensére érintőleges.
A vezérlő sokszög által lefedett konvex burkon belül helyezkedik el.



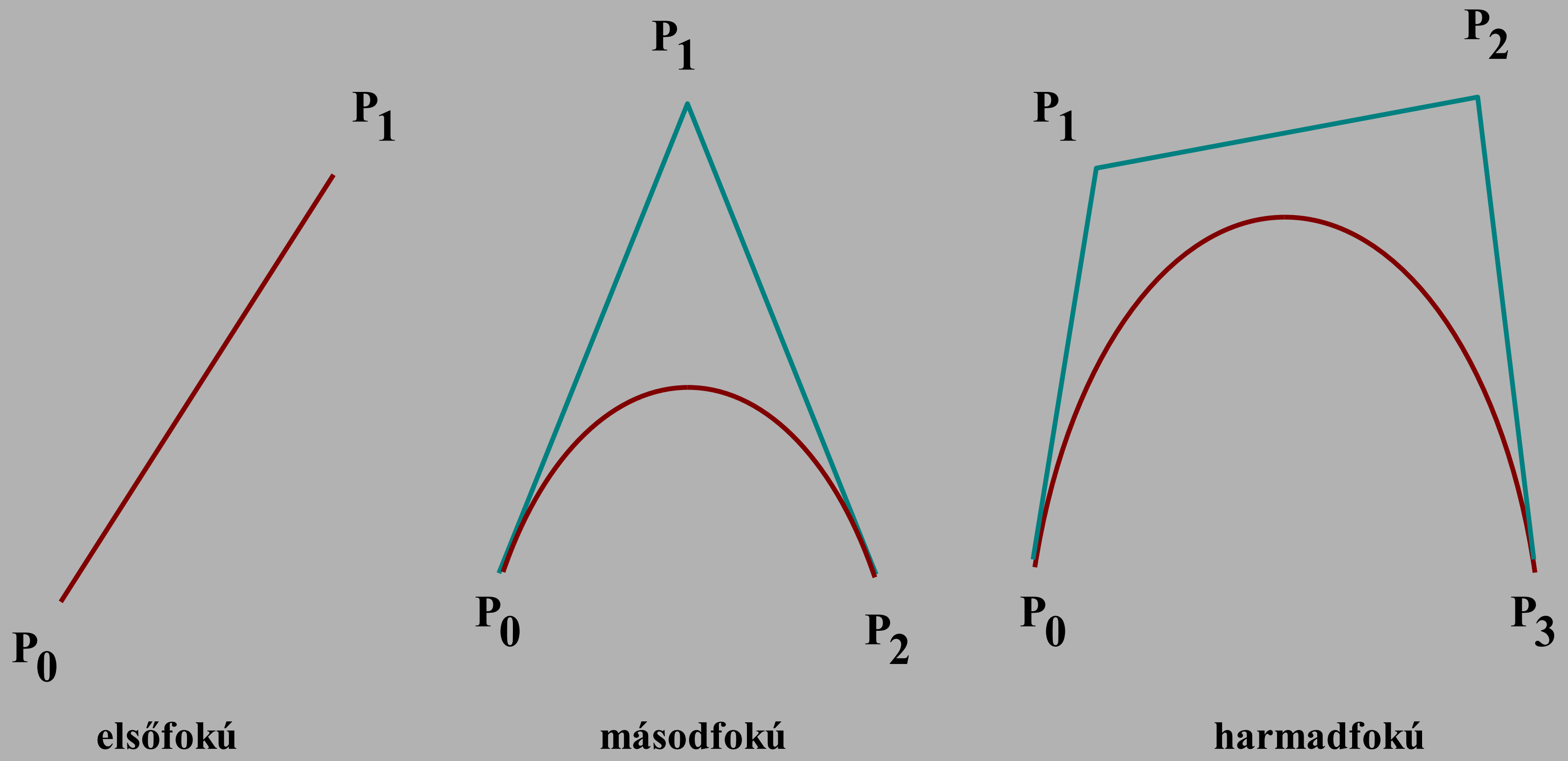
Konvex burok





Különböző fokszámú Bezier görbék

Görbe osztálya: vezérlőpontok száma
Görbe fokszáma: vezérlőpontok száma - 1



Bezier görbe Bernstein alapfüggvényekkel

Az n-ed fokú, vagyis n+1 -ed rendű, n+1 vezérlőponttal irányított Bezier görbét leíró n -ed fokú polinom:

$$P(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_{i,n}(u)$$

ahol P(*u*) a görbe valamely pontja, P$_i$ pedig valamely vezérlőpont. Az *u* paraméter értelmezési tartománya leggyakrabban:

$$0 \le u \le 1$$

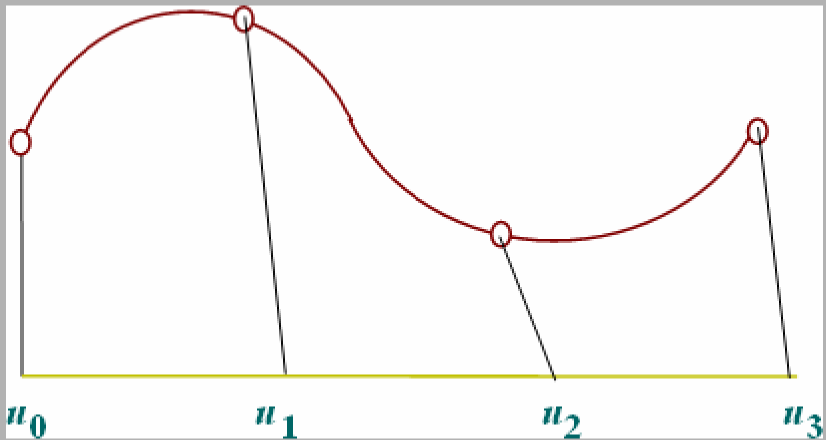
A $B_{i,n}$ alapfüggvények az alábbi Bernstein függvények:

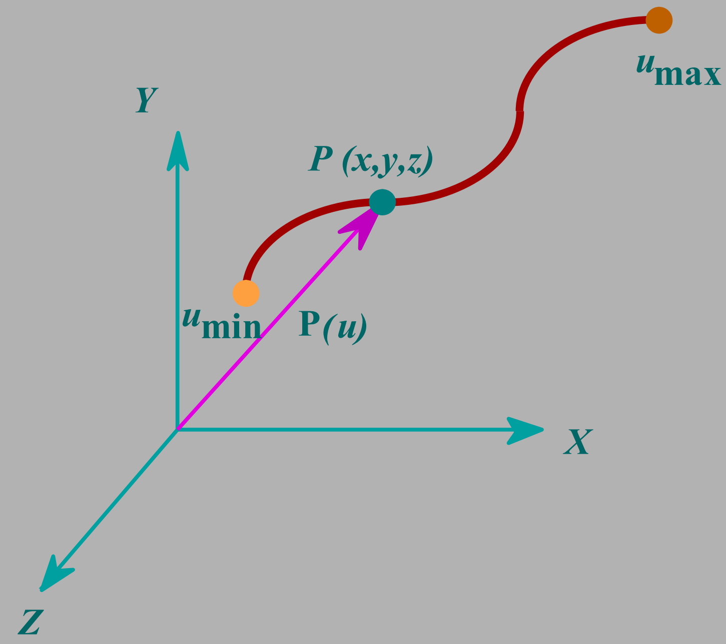
$$B_{i,n}(u)=C(n,i)\cdot u^{i}\cdot(1-u)^{n-i}$$

***C*(*n*,*i*) binominális együttható, amely**

$$C(n,i)=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

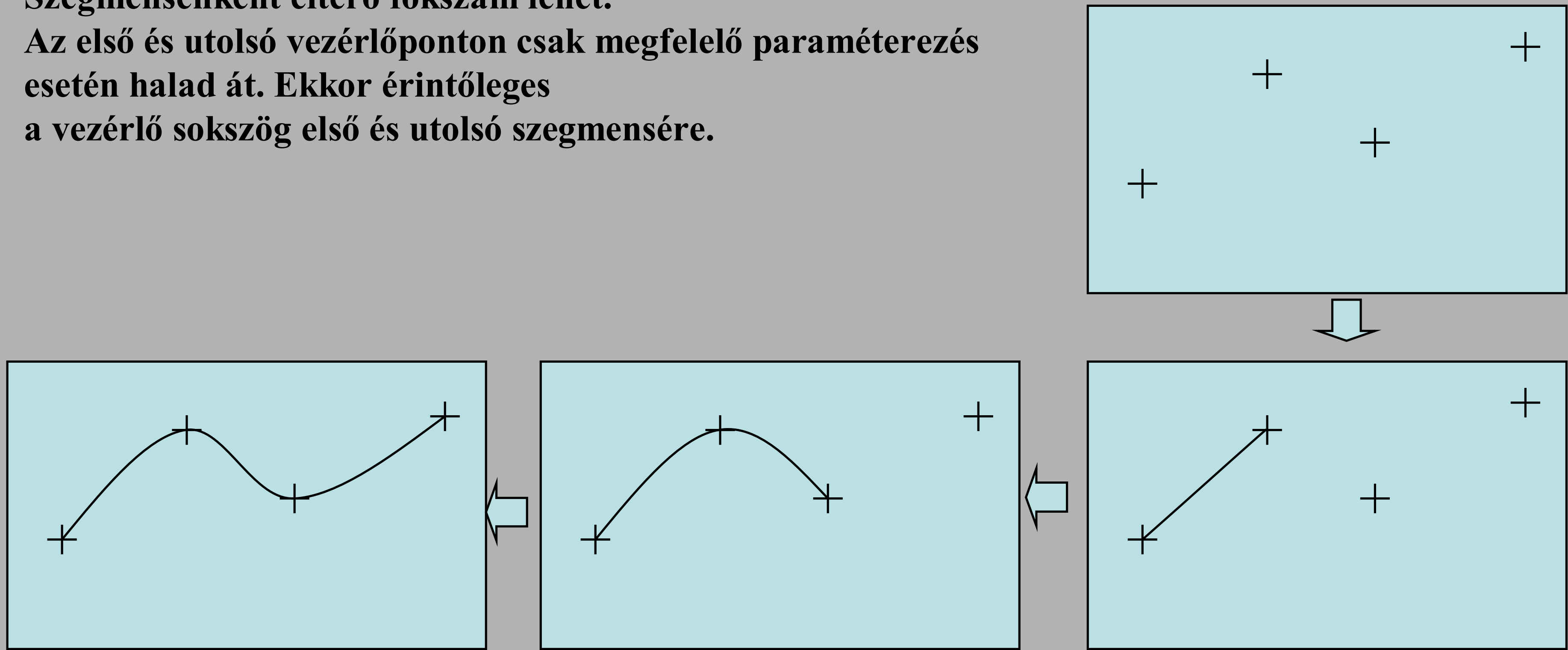
Szegmensekből felépülő görbe





B-szplájn görbe tulajdonságai

Szegmensekből áll
Folytonosság a szegmensek határain
Lokális vezérlés.
Szplájn alapfüggvény
A görbe fokszáma megegyezik az alapfüggvény fokszámával.
Szegmensenként eltérő fokszám lehet.
Az első és utolsó vezérlőponton csak megfelelő paraméterezés esetén halad át. Ekkor érintőleges a vezérlő sokszög első és utolsó szegmensére.



B-szplájn görbe analitikus és geometriai meghatározása

A B-szplájnok analitikus és geometriai meghatározását az alábbiakban vázoljuk. A P(u) a B-szplájn görbe analitikus definiciója

$$\mathrm{P}(u) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P_i} N_{i,k}(u)$$

ahol a vezérlőpontok és a csomópontok

$$\{\mathrm{P_i} : \mathrm{i} = 0,1,\ldots,n\}$$

A B-szplájn görbe polinomokkal leírt szegmensekből áll. Ezeknek a szegmenseknek a rendűségét k -val jelöltük. A görbe szegmensei k-1 fokúak. A fenti összefüggésben a $N_{i,k}$(u) a normalizált B-szplájn alapfüggvényeket jelöli.

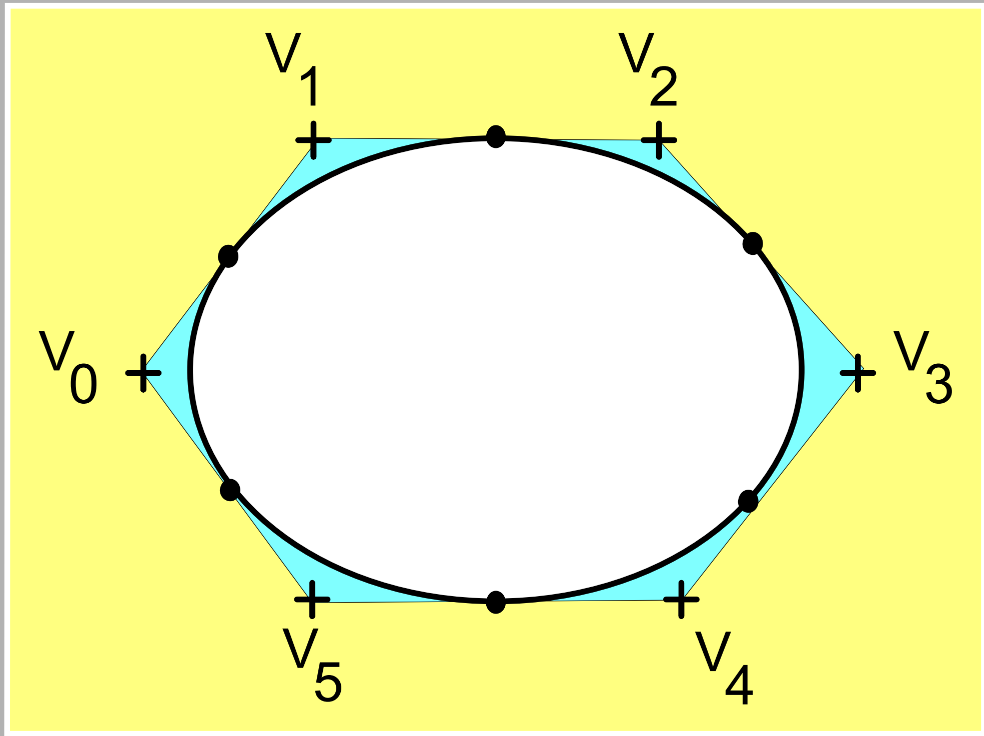
B-szplájn görbe szegmentált tulajdonsága

A B-szpájn alapfüggvényt meghatározott paraméter-intervallumon belül definiálják.

Az alapfüggvény a B-szplájn görbe paramétertartományának csak egy részén vezéreli a görbét.

A szegmensek határán másodrendű (C2) folytonosságot köbös B-szplájn függvények biztosítanak.

Példa: **Zárt görbe hat vezérlőponttal irányítva hat szegmensből áll.**
Az egyes szegmensek a következő szegmenssel két közös vezérlőpont hatása alá tartoznak.
Az első szegmenshez a *V*0-*V*2, a második szegmenshez a *V*1-*V*3 vezérlőpontok tartoznak, és így tovább.



B-szplájn görbe paraméterezése
Csomóvektor

A szplájn meghatározott számú szegmenshatár-ponton megy át. Ezeket a pontokat csomóknak (csomópont, vagy angolul: knot) nevezzük. A csomókhoz rendelik a szegmenshatárokon érvényes paraméterértékeket, amelyeket a csomóvektorban adnak meg:

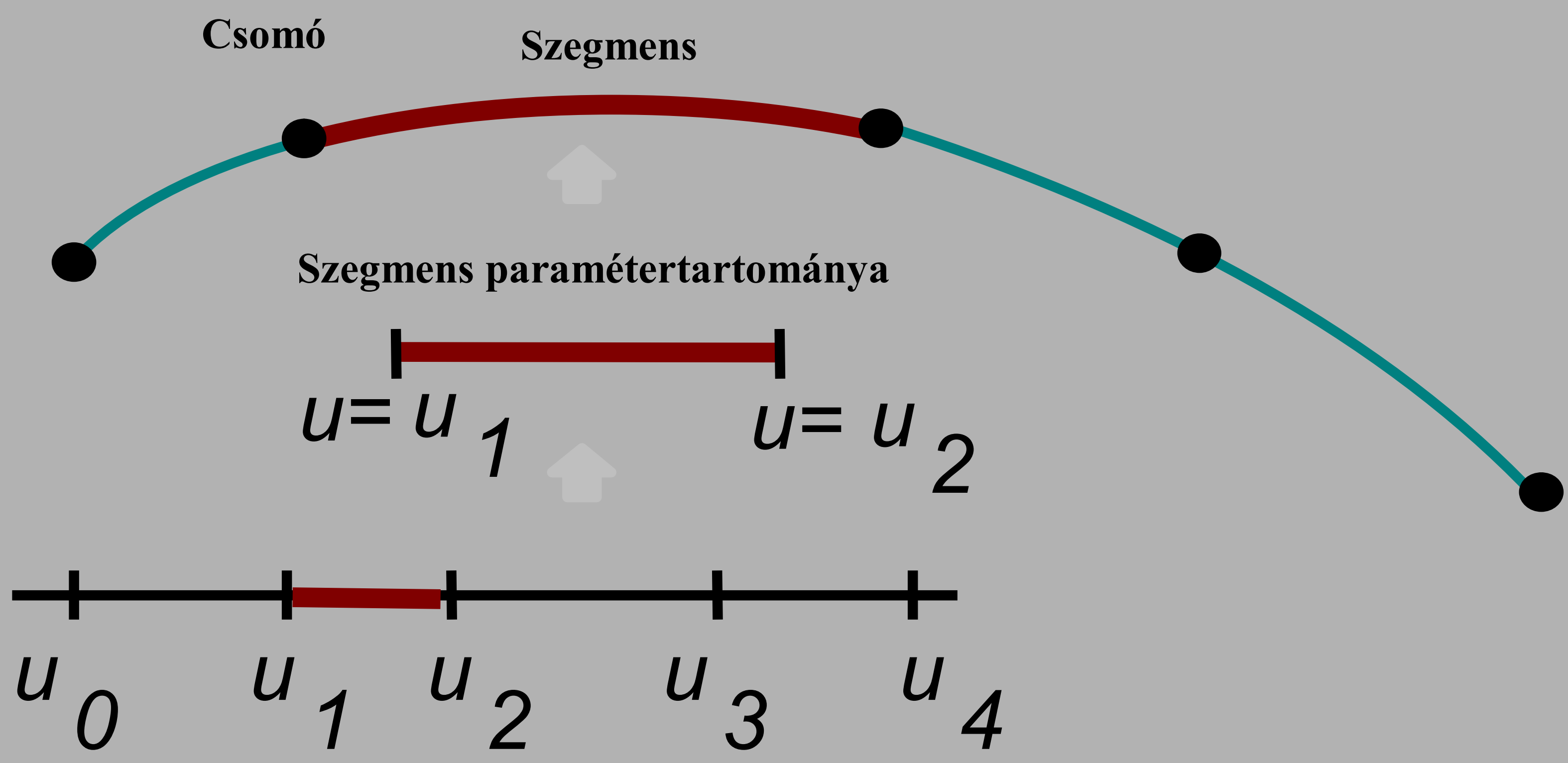
$$\{u_i : i = 0,1,\ldots,n+k\}$$

A csomóvektornak nem szabad csökkenő értékeket tartalmazni, tehát a paraméter-intervallumokra mindíg érvényesnek kell lenni az alábbi kifejezésnek:

$$u_i \le u_{i+1}$$

Az értéknek viszont nem szabad többször megjelenni a csomóvektorban, mint a B-szplájn görbe rendűsége.

Szegmensek B-szplájn görbén



Csomók B-szplájn görbén

A B-szplájn görbe esetében a vezérlőpontok száma, rendszám és a fokszám mellett a csomók számával is számolni kell.
Az n + 1 vezérlőpont közelítésével létrejött, k-ad rendű, vagyis k-1 fokú, valamint m számú csomóval rendelkező B-szplájn görbe esetében

$$(m+1)=(n+1)+k$$

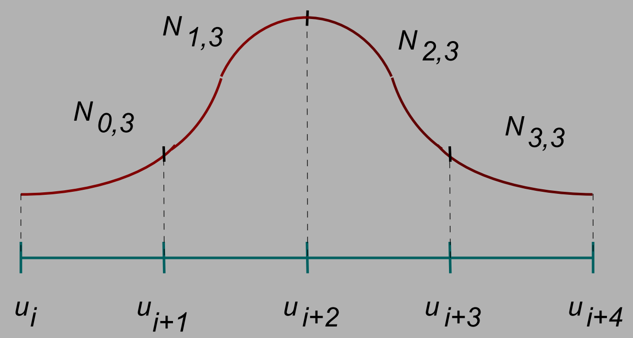
ebből a csomók száma

$$m=n+k$$

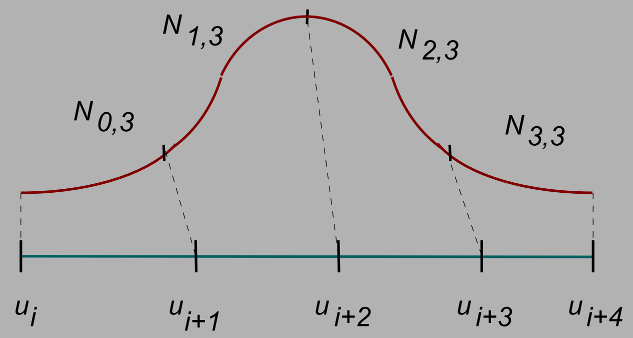
A B-szplájn görbét leíró polinom fokszáma az egyes paraméter-intervallumokon belül nem haladja meg a k-1 értéket.
Ugyanahhoz a csomóvektorhoz különböző rendűségű alapfüggvények is tartozhatnak. Például lineáris, másodfokú és harmadfokú görbe-szegmensek követhetik egymást.

Egyenközű és nem-egyenközű B-szplájn alapfüggvények

A paraméter-intervallumok, amelyeken belül az alapfüggvényeket definiáljuk:



azonosak: ***Egyenközű (angol kifejezéssel: uniform) B-szplájn.***



nem azonosak: Nem egyenközű (angol kifejezéssel: non-uniform) B-szplájn.

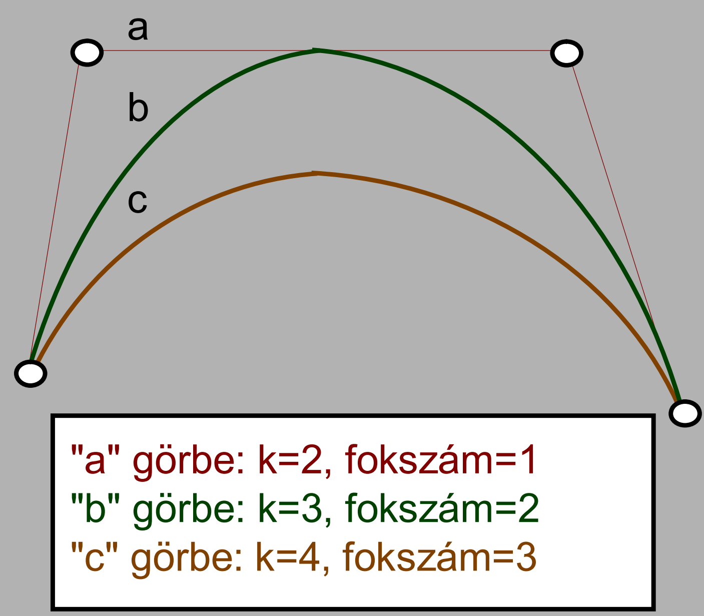
Periódikus és nem-periódikus B-szplájn görbék

- Ha a paraméter-intervallumok ismétlődnek, ***periódikus*** **(periodic)** B-szplájnról beszélünk.
- Ebből következik, hogy az egyenközű B-szplájn egyben periódikus is.
- A ***nem-periódikus*** **(non-periodic)** B-szplájn esetében a vektor belső csomói egyenlő elosztásúak, azonban a vektor elején és végén a görbe rendűségével azonos számú intervallum ismétlődik.
- A görbe vezérlésének lehetõségeit tágítja, ha a paraméter-intervallumok a vektor elején és végén egyaránt eltérőek. Így ***nem-egyenközű*** **(non-uniform)** B-szplájn görbét kapunk.
- Miután a paraméter-intervallumokat a csomóvektorban ábrázoljuk, a B-szplájn **görbe fenti sajátosságai a csomóvektorból felismerhetők**.

Nem-periodikus B-szplájn görbék

- **A különböző fokszámú nem-periodikus görbékre láthatunk példát az ábrán. A görbékhez tartozó csomóvektorok:**
- **"a" görbe: [001233]**
- **"b" görbe: [0001222]**
- **"c" görbe: [00001111]**

- **Figyeljük meg! A vezérlőpontok száma, a rendszám és a csomók számának fentebb bemutatott összefüggését. A B-szplájn görbe nem megy át az elsõ és az utólsó vezérlőponton, azonban az elsõ és az utólsó paraméter-intervallum kettőzésével erre "kényszeríthető".**



Nem-egyenközű B-szplájn görbék

- A nem-egyenközű B-szplájn csomóvektorának belsejében lehetnek intervallum-többszöröződések, például
- [01223]

- vagy az intervallumok a teljes vektor mentén eltérnek, például
- [0,0 0,1 0,33 0,6 0,8 1,0].

- A B-szplájn leírás a Bezier leírás általánosításának tekinthető. Ha a csomóvektorban a 0 majd az 1 érték a görbe rendűségével (k) egyenlõ számban ismétlődik, Bezier görbét kapunk. Például valamely négy vezérlőpontú nem-periodikus köbös B-szplájn görbe csomóvektora
- [00001111].
- Ez egy Bezier görbe.

Négydimenziós homogén koordináták

Eredetileg a transzformációk leírására szolgáló mátrixokban alkalmazták.
A háromdimenziós Euklideszi tér

$$P(x, y, z)$$

pontjának a négydimenziós homogén térben a

$$Q^w = (wx, wy, wz, w), \text{ ahol } w \geq 0$$

leírás felel meg.
A *w* a homogén koordináta, amelyet súlyozásnak is nevezünk.

Racionális B-szplájn görbék (1/3)

A homogén koordináták a racionális B-szplájnok leírásánál.

$$Q^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) V_i^w$$

ahol Q w (u) a görbe pontja négydimenziós homogén koordinátákkal kifejezve:

$$Q^w(u) = w_x(u), w_y(u), w_z(u), w$$

$N_{i,k}(u)$ a szplájn alapfüggvény, V pedig a vezérlőpont a négydimenziós homogén térben:

$$V_i = \frac{V_i^w}{w_i} \quad \text{ahonnan} \quad V_i^w = w_i V_i$$

Racionális B-szplájn görbék (2/3)

A görbe pontját a háromdimenziós térben az első három koordinátának a homogén koordinátával való elosztásával kapjuk meg:

$$x = \frac{wx}{w}$$

$$y = \frac{wy}{w}$$

$$z = \frac{wz}{w}$$

Ezután a racionális B-szplájn görbe függvénye

$$Q(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) w_i V_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) V_i}$$

Racionális B-szplájn görbék (3/3)

Nem-egyenközű recionális B-szplájn görbe:

- **Valamennyi alak leírására**
- **Analitikus alak egzakt (nem közelítő!)**
- **Az alakmodellezésben egyeduralkodóvá vált (CAD/CAM rendszerekben is)**

A racionális B-szplájn görbéket a csomóvektor és a súlyvektor jellemzi.

- **Például öt vezérlőpontot közelítő görbe csomóvektora**

[0000122222]

- **és *w* súlyvektora**

[1, 4, 1, 1, 1]

Analitikus görbék leírásánál a *w* értéke meghatározza, hogy egyenes, ellipszis, parabola vagy hiperbola az adott szegmens.