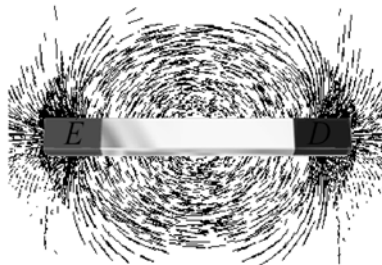


Mágnesesség, elektrodinamika

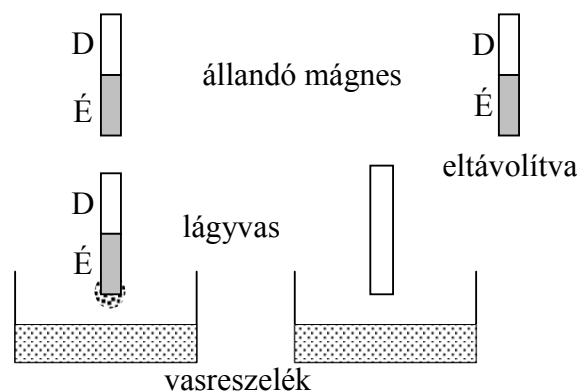
Mágneses alapjelenségek: Egyes vasércek, például magnetit (Fe_3O_4) képesek apró vasdarabokat magukhoz vonzani. A mágneses test és a vasdarab között mindig vonzó a kölcsönhatás. Az ilyen mágneseket permanens vagy állandó mágneseknek nevezzük. Tapasztalat szerint az acél felmágnesezhető egy mágneses érc segítségével. Egy acél mágnesű két végét pólusnak nevezzük, a vasreszelék csak ide tapad. Ezt a jelenséget egy mágnesrúd segítségével könnyen bemutathatjuk.



Vasreszelék rúd-mágnes körül

Tapasztalat szerint egy felfüggesztett mágnesű a földrajzi É-D irányba áll be, tehát a Földnek is van mágneses mezője. Azt a pólust, amely a stabil egyensúlyi helyzetben É- felé néz, É-i pólusnak nevezzük, a másikat, pedig D-i pólusnak. Két mágnesű egymű pólusait közelítve taszítóerő, a különű pólusok között, pedig vonzóerő lép fel.

A lágyvas felmágnesezhető, azonban a mágnes eltávolításakor mágneses tulajdonságát elveszti. A jelenséget mágneses polarizációnak nevezzük.



A lágyvas felmágnesezése

A tapasztalat szerint semmilyen módon nem érhető el, hogy egy testben a kétfajta mágnesség közül az egyik túlsúlyba kerüljön. Még az elemi részeckek, például az elektronnak is ugyanannyi az É-i, mint a D-i mágnessége. Mágneses töltés, mágneses monopólus tehát nem létezik. A legegyszerűbb mágneses alakzat a mágneses dipólus. Az elektromos influenciának, vagy megosztásnak nincs mágneses megfelelője.

A tapasztalat szerint a mozgó töltés, például árammal átjárt vezető közelébe helyezett mágnesű elfordul. A mozgó töltés tehát nemcsak elektromos, hanem mágneses mezőt is kelt, és ebben a mágneses dipólusra forgatónyomaték hat. A hatás kölcsönös, mivel áramjárta vezetőre mágneses mezőben erő hat, ezt Ampere-erőnek nevezzük.

A mágneses indukció-vektor bevezetése: A mágneses mezőt jellemző vektort, a $\vec{B}$ mágneses indukcióvektort az Ampère-erő segítségével definiáljuk. Az áramelemet a mágneses mező egy

tetszőleges pontjába helyezzük, és mérjük a rá ható erőt. Az áramelemre jellemző adatok az áramerősség I , és az ívelemvektor $\Delta \vec{r}$, ennek hossza Δs .

A mérési tapasztalatok szerint az áramelemre mágneses mezőben vele párhuzamos erő nem hat, az erő mindig merőleges az áramelemre $\Delta \vec{F} \perp \Delta \vec{r}$. A vizsgált P ponton át felvehető egy olyan kitüntetett e egyenes, amelynek irányába állítva az áramelemet $\Delta \vec{r} \parallel e$ rá erő nem hat, $\Delta \vec{F} = \vec{0}$. Ha az áramelem α szöget zár be az e egyenessel, akkor az erő merőleges a $\Delta \vec{r}$ és e síkjára és nagysága arányos az I árammal, valamint $|\Delta \vec{r}_\perp| = \Delta s \sin \alpha$ -val. A $\frac{\Delta F}{I \Delta s \sin \alpha}$ hányados az áramelem adataitól már nem függ, kizárólag a mágneses mezőt jellemzi a P pontban, ezt nevezzük a mágneses indukció nagyságának a kérdéses pontban.

$$B = \frac{\Delta F}{I \Delta s \sin \alpha}$$

A mágneses indukció iránya pedig párhuzamos az e kitüntetett egyenessel, és értelme olyan, hogy $\Delta \vec{F}$, $\Delta \vec{r}$ és $\vec{B}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkosson $\{\Delta \vec{F} \Delta \vec{r} \vec{B}\}$. A mágneses

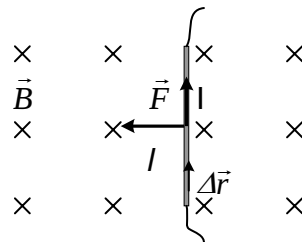
indukció mértékegysége: $[B] = 1 \frac{N}{Am} = 1 \frac{Nm}{Am^2} = 1 \frac{VAs}{Am^2} = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 \text{tesla} = 1T$

Ezt felhasználva az Ampère-erő képlete:

$$\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{r} \times \vec{B}$$

Egy vékony vonalas vezetőre ható erőt a vezetőszakaszra való integrálással kaphatjuk meg:

$$\vec{F} = I \int (d\vec{r} \times \vec{B})$$



Ampère-erő iránya

Tekintsünk egy l hosszúságú A keresztmetszetű vonalas vezetőszakaszt, és legyen merőleges a homogén mágneses mezőre, (lásd az ábra). Ekkor az erő iránya az ábrán látható, a nagysága pedig: $F = BI l$

Ha a vezeték α szöget zár be a mágneses indukcióval $\vec{B}$ -vel, akkor: $F = BI l \sin \alpha$

A Lorentz-erő: Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a vezetőben folyó I áram azt jelenti, hogy N db q töltésű elektron ugyanazon v sebességgel halad az ℓ hosszúságú vezetőben, (azaz ugyanazon Δt idő alatt teszi meg az ℓ távolságot) ekkor $I = Nq/\Delta t$ és $v = \ell / \Delta t$. Ezeket az Ampère-erő képletébe beírva az N db elektronra ható erő:

$$F = BI \ell = BNq \cdot \ell / \Delta t = BNqv$$

Vagyis az egy elektronra ható erő

$$F = qvB$$

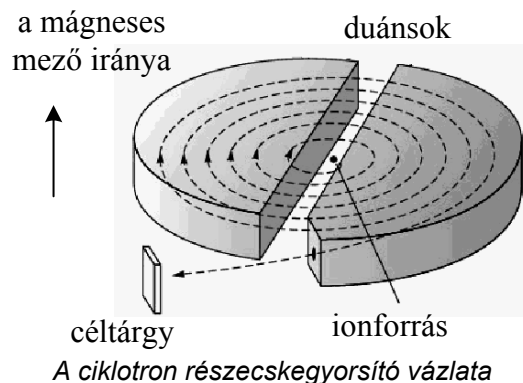
Általánosan egy $\vec{B}$ mágneses térben $\vec{v}$ sebességgel mozgó, q töltésű részecskére ható erő, az ún. mágneses Lorentz-erő:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Ez az erő merőleges a sebességre és a mágneses indukcióra, $\{\vec{v}, \vec{B}, \vec{F}\}$ ilyen sorrendben jobbsodrású rendszert alkot. Ha elektromos tér is van jelen, a q töltésre a $\vec{F}=q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ elektromágneses Lorentz-erő hat.

Az áram a töltéshordozók rendezett mozgása. Az áramvezetőre azért hat erő a mágneses mezőben, mert a mozgó töltéshordozókra hat erő, és mivel ezek a vezetőhöz vannak kötve, az erő átválik a vezető testének.

A (mágneses) Lorentz-erő minden pillanatban merőleges a sebességre, ezért a sebesség nagysága nem változik, csak az iránya (vagyis a mágneses Lorentz-erő teljesítménye nulla). Például, ha $\vec{v}$ merőleges $\vec{B}$ -re, a töltött részecske körpályára kényszerül, ha $\vec{v}$ nem merőleges $\vec{B}$ -re, akkor a töltés csavarvonal mentén mozog. A Lorentz-erőnek fontos szerepe van akkor, amikor töltött részecskéket akarnak eltéríteni, illetve gyorsítani. A ciklotron egy olyan részecskegyorsító, amiben a Coulomb erőt használják a sebesség nagyságának növelésére és a Lorentz erőt a részecske körpályán tartására.



A töltött részecskék gyorsítása a két „duás” között történik, amelyekre váltakozó feszültséget kapcsolnak. Ennek frekvenciáját úgy számítják ki, hogy mindig gyorsítsa a részecskét, azaz amikor a részecske a duások között van, akkor az a duás, amely felé éppen repül, vonzóerőt fejt ki rá. Az alkalmazott homogén mágneses mező pedig körpályára kényszeríti a részecskét, vagyis a centripetális erőt a Lorentz-erő adja:

$$QvB = m \frac{v^2}{r}$$

a körpálya sugara:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

tehát ahogy gyorsul a részecske, úgy kerül a középponttól távolabb. A körmozgás periódusideje:

$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2\pi m}{QB}$$

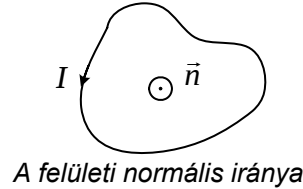
Vagyis a periódusidő (és ezzel a körfrekvencia) a sebességtől és a pálya sugarától független állandó. Ez azért fontos, mert így állandó frekvenciájú feszültséget lehet a duásokra kapcsolni a gyorsításhoz. Ezt a berendezést főleg orvosi diagnosztikában használt izotóptermelésre használják, például $^{131}_{53}\text{I}$ jódtizotópot állítanak elő, valamint anyagvizsgálatra, illetve magfizikai alap kutatásra.

Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra: Mágneses mezőben egy kicsiny sík áramhurokra forgatónyomaték hat. Vegyünk egy egyszerű esetet, egy téglalap alakú áramhurokot, a téglalap oldalai a és b , a terület $A=ab$, a mágneses indukció homogén és a b oldallal párhuzamos. Ekkor a két a hosszúságú oldalra egyenként BIa erő hat, amelyek ellentétes irányúak. A forgástengelyt az egyszerűség kedvéért a középpontban véve, a

két erő ugyanarra forog, mindkettő erőkarja $b/2$. Az eredő forgatónyomaték $2 \cdot B I a \cdot b/2 = B I a b = B I A$. Belátható, hogy ez a nyomaték az áramhurok alakjától független és az általános összefüggés:

$$\vec{M}_{\text{forg}} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

$\vec{A} = A \vec{n}$ a felületvektor melynek irányítását jobb kéz szabály szerint adhatjuk meg. A kicsiny sík áramhurokban folyó áram iránya és a felületi normális iránya a jobbszavar szabály szerint kapcsolódik össze.



Megállapodás szerint az itt bemutatott jelölés $\odot$ a felületből kifelé mutató vektort jelent, a felületbe befelé mutató vektort pedig a következő módon jelöljük: $\otimes$.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomatékot már korábban láthattuk:

$$\vec{M}_{\text{forg}} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ennek analógiájára az áramhuroknek mágneses dipólusnyomatékot vagy dipólusmomentumot tulajdonítunk:

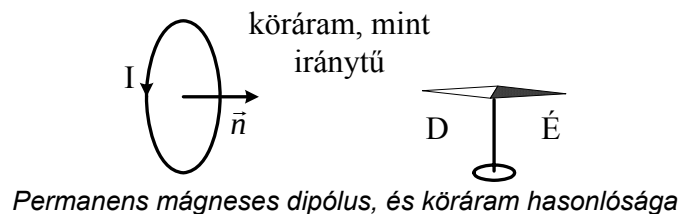
$$\vec{M}_{\text{forg}} = I \vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

ahol $\vec{m} = I \vec{A}$ az áramhurok mágneses dipólusmomentuma, melynek mértékegysége: $[\vec{m}] = 1 \text{ Am}^2$

A permanens mágneses dipólusra (mágnesűre) ható forgatónyomaték hasonlóan:

$$\vec{M}_{\text{forg}} = \vec{m} \times \vec{B}, \text{ ahol } \vec{m} \parallel \vec{I}$$

Az $\vec{m}$ mágneses dipólusnyomaték abszolút értéke attól függ, milyen erősen van felmágnesezve a mágnesű. A dipólusra ható forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{m} \parallel \vec{B}$. A kis áramjárta hurok tehát iránytűként használható.

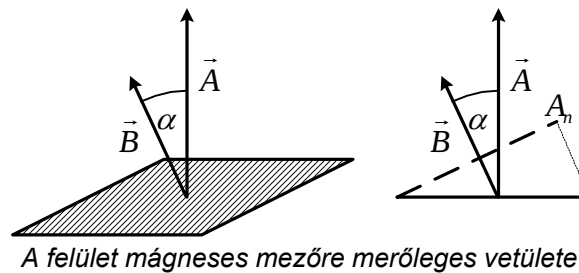


Megjegyezzük, hogy inhomogén mágneses mezőben az áramhurokra vagy általában a mágneses momentumra ható eredő erő általában nem nulla, hanem az inhomogenitás mértékétől (a térerősség gradiensétől) és a hurok elhelyezkedésétől függ. (Analógia: inhomogén elektromos erőterben az elektromos dipólusra erő, homogénben csak forgatónyomaték hat.)

Mágneses indukciófluxus és Gauss-törvény: A mágneses mező szemléltetésére a mágneses indukcióvonalakat használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral. Megállapodás szerint a mágneses indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal haladjon át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

A mágneses indukciófluxus Φ irányított felületre vonatkozik, és megadja a felületet átdőfő mágneses indukcióvonalak előjeles számát. Homogén mágneses mező esetén az A felület indukciófluxusa:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos \alpha$$



Ha a mágneses mező inhomogén, akkor egy elemi kicsiny felület fluxusa $\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{A}$, egy tetszőleges A felület indukciófluxusa pedig integrálással nyerhető:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek, így tetszőleges zárt felületre számított mágneses indukciófluxus mindig zérus. A mágneses Gauss-törvény tehát:

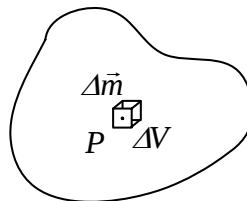
$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

A mágneses indukciójonalaknak nincs kezdetük és nincsen végük. (A törvény differenciális/lokális alakja: $\text{div}\vec{B}=0$.) A mágneses indukcióra vonatkozó határfeltétel: $B_{n2} - B_{n1} = 0$. Az elektromos indukcióvektor normális koordinátája a határfelületen azért szenvedett ugrást, mert ott elektromos töltések voltak. Mágneses töltések nincsenek, ezért a mágneses indukció normális koordinátája a két felület határán folytonos.

A mágneses polarizáció, a mágnesezettség vektora: A nukleonok (proton, neutron) mágneses dipólnyomatéka sokkal kisebb, mint az elektronoké, ezért egy atom vagy molekula mágneses dipólnyomatéka lényegében megegyezik az elektronok dipólnyomatékának összegével. Az elektronok mágneses dipólnyomatéka két részből áll:

- mozgásból származó mágneses nyomaték, mivel a mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
- saját mágneses nyomaték (a spinből adódik)

Az anyag mágnesezettségének jellemzésére vezessünk be egy új vektort. Legyen $\Delta\vec{m}$ a ΔV térfogatban lévő mágneses dipólnyomatékok vektori összege.



Az anyag mágnesezettségének bevezetése

Definíció szerint a mágnesezettség vektora a P pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses nyomatékokat.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V}$$

A mágnesezettség mértékegysége: $[M] = 1 \frac{Am^2}{m^3} = 1 \frac{A}{m}$.

Célszerű bevezetni a mágneses térerősséget mint a $\vec{B}$ és a $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációját, mivel rá egyszerű alakú alaptörvény állapítható meg. A $\vec{H}$ mágneses térerősség definíció szerint:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Itt a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ univerzális állandó a vákuum permeabilitása. A mágneses térerősség

mértékegysége: $[H] = [M] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Ezzel a permeabilitás mértékegysége:

$$[\mu_0] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{1 \frac{\text{A}}{\text{m}}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \text{ A } \vec{M} \text{ mágnesezettség, valamint a mágnesező tér } \vec{B} \text{ indukciója}$$

közötti kapcsolatot anyagegyenletnek nevezzük. Első közelítésben B és M között arányosságot feltételezünk, ilyenkor beszélünk lineáris anyagegyenletről. Ha $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$. A legtöbb izotróp közegben a $\vec{H}$ és az $\vec{M}$ vektorok nemcsak egyirányúak, hanem a tapasztalat szerint egymással egyenesen arányosak is:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

χ a mágneses szuszceptibilitás. Ezzel

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H},$$

ahol $\mu_r = 1 + \chi$ a relatív permeabilitás, $\mu = \mu_0 \mu_r$ pedig az abszolút permeabilitás.

Az anyagegyenlet így: $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$, $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ vagy $\vec{B} = \mu \vec{H}$

A mágneses energia, mágneses energiasűrűség: A homogén mágneses mező energiája egy V térfogatú térrészben:

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} V$$

A mágneses mező energiasűrűsége megadja az egységnyi térfogatban található mágneses energiát:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

A w mértékegysége az elektromos esethez hasonlóan J/m^3 . Ha a tér egy tetszőleges pontjában a mágneses térerősség $\vec{H}$ és a mágneses indukcióvektor $\vec{B}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \Delta V$ mágneses energia található. Ha a mező nem homogén, egy tetszőleges véges V térfogatban természetesen integrálással nyerhetjük a mágneses energiát:

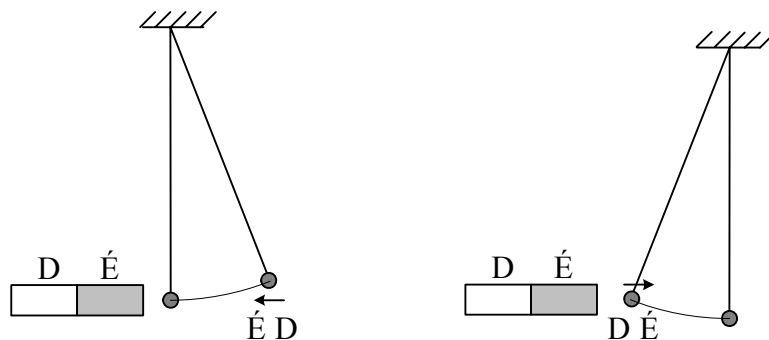
$$W = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

Az anyagok mágneses tulajdonságai

Mai ismereteink szerint az anyagok mágneses tulajdonságai alapján három fő típusba sorolhatóak: dia-, para-, ferromágneses típusba, de ezen felül léteznek antiferromágneses anyagok és ferritek is, emellett a szupravezetőket is külön kategóriába sorolják.

Diamágnesség: A bizmut, réz, ezüst, arany, higany, ólom, víz olyan anyagok, amelyek külső mágneses mező nélkül nem mutatnak mágneses tulajdonságokat. Mágneses mezőbe helyezve a kis bizmut-darabot, taszító hatást észlelhetünk. A bizmut polarizálódott és a mágnesező tér indukciója ellentétes irányú a mágnesezettség vektorával. Ezenél az anyagoknál tehát $\chi < 0$, abszolút értéke általában nem több mint 10^{-4} , de ennél néhány nagyságrenddel kisebb is lehet. A relatív permeabilitás ennek megfelelően csak egy kicsit kisebb egynél: $\mu_r = 1 + \chi \approx 0,9999...$

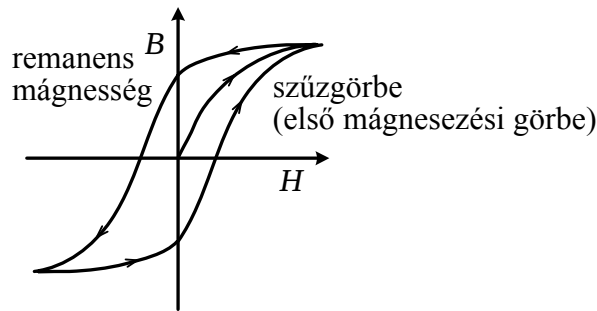
Mivel χ negatív, a közegbeli $\vec{B}$ indukció lecsökken a vákuumbeli $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ indukcióhoz képest. Ez a csökkenés nagyon kicsiny mértékű. Az ilyen anyagok atomjai külső mágneses mező nélkül nem rendelkeznek mágneses dipólmomentumokkal. Az elektronok pálya- és saját- mágneses momentumaik lerontják egymást. Külső mező hatására ez a helyzet felborul, ilyenkor az egyik elektron felgyorsul, a másik lelassul, és ezáltal az atomnak eredő mágneses dipólmomentuma keletkezik. A jelenség a hőmérséklettől független.



Rúd-mágnes és diamágneses, ill. paramágneses anyag kölcsönhatása

Paramágnesség: Paramágneses anyagok az alumínium, króm, platina, volfrám, hélium, oxigén, levegő. Külső mező híján ezek az anyagok sem mutatnak mágneses tulajdonságot. A felfüggesztett alumínium golyót az állandó mágnes vonzza. Ebben az esetben az anyag atomjainak külső mágneses mező nélkül is van eredő mágneses dipólmomentumuk, de külső mező híján ezek rendezetlenül állnak. A mágneses mező az atomi dipólusokat a maga irányába forgatja, mégpedig annál inkább minél erősebb az alkalmazott mágneses mező, és minél alacsonyabb a hőmérséklet. Ezt a jelenséget rendeződési polarizációnak nevezzük. Ilyenkor $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{M}$, a szuszceptibilitás pozitív: $\chi \approx 10^{-3} - 10^{-6}$, vagyis a vákuumbeli indukcióhoz képest ilyenkor (kismértékben) növekszik az indukció.

Ferromágnesség: A vas, kobalt, nikkel és ezek ötvözetek erősen mágnesezhető anyagok, a mágneses mezőből kiemelve többé-kevésbé megőrzik a mágnesességüket. A ferromágneses anyagok mind szilárd anyagok és mágneses szempontból többnyire anizotropok, a $\vec{B}$, $\vec{H}$, és $\vec{M}$ vektorok nem esnek egy egyenesbe, ettől a továbbiakban az egyszerűség kedvéért eltekintünk. A ferromágneses anyagot külső mágneses mezőbe helyezve, az $\vec{M}$ mágnesezettség a $\vec{H}$ térerősség növelésével eleinte igen gyorsan nő, de csak egy bizonyos határig, utána telítődés következik be. Az ilyen anyagok esetén tehát a lineáris anyagegyenlet nem használható. A B és H közötti összefüggés nemcsak nem lineáris, de nem is egyértékű. Kísérletileg meghatározható a mágnesezési vagy hiszterézis görbe.



Ferromágneses anyag hiszterézis görbéje

Az origóból indulunk, ahol a mágneses tér és a mágnesezettség is nulla, vagyis $H=0$, $M=0$, $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = 0$. Ha H növekszik, vele a B is növekszik, először gyorsan, majd a telítéshez közeledve egyre lassabban. Egy bizonyos H -nál már az összes elemi mágneses dipólus egy irányban áll, így M tovább nem növelhető. Ezt telítési mágnesezettségnek nevezzük. Ha most a H -t csökkenteni kezdjük, B is csökken, de nem ugyanazon a görbén halad visszafelé, vagyis a $H + \Delta H \rightarrow H$ csökkentés kisebb csökkenést eredményez B -ben, mint a $H \rightarrow H + \Delta H$ növelés. Hogy mennyivel kisebbet, az többek között az anyagi minőségtől függ. Amikor H már nullára csökkent, az M és így a B még mindig nem nulla, M értékét remanens mágnesezettségnek vagy remanenciának nevezik. Az olyan anyagokat, amelyeknek számottevő a remanens, azaz visszamaradó mágnessége, permanens mágneseknek nevezzük, ilyen például az acél. Ahhoz, hogy M nullára csökkenjen, ellenkező irányú H -t kell alkalmazni, ezt koercitív erőnek nevezzük. Tovább növelve az ellenkező irányú H -t, újra telítés következik be, stb.

Az összetartozó B és H értékek hányadosából kiszámítható μ vagy χ már nem állandó (azaz nem csak a minta összetételétől függ), hanem függ a H -tól és a minta előéletétől. A vasnál μ_r és így χ tipikusan több száz, de egyes speciális ötvözeteknél μ_r akár egymillió fölött is lehet. Ha a ferromágneses anyag hőmérsékletét növeljük, akkor egy bizonyos T_C hőmérséklet, az úgynevezett Curie-hőmérséklet fölött a ferromágneses anyagok paramágneses anyagokká válnak. A vas Curie-hőmérséklete 769°C , a kobalté 1075°C , a nikkelé 360°C . Ha az anyagot hűtjük, a Curie-hőmérsékleten egy másodrendű paramágneses-ferromágneses fázisátalakulás játszódik le. Nincs latens hő és térfogatugrás, a szuszceptibilitás viszont divergál (a gyakorlatban ez akár 10 nagyságrendbeli változást is jelenhet)

Amikor a H változása következtében M változik, energia disszipálódik. Egy cikluson végigmenve az összes irreverzibilisen hővé alakult energia mennyisége egyenlő a hurok területével. Elektromosan vezető ferromágnesekben a hő keletkezésének legfőbb oka az, hogy a változó mágneses tér változó elektromos teret indukál (lásd később az indukció fejezetnél), ezért örvényáramok (és így Joule-hő) keletkeznek. Ha lassabban változik a mágneses tér, tehát lassabban megyünk végig ugyanazon a hurkon, akkor kisebb térerősség, kevesebb áram indukálódik, azaz a hurok területének csökkennie kell. Tehát a hurok alakja nem csak a konkrét mintától, hanem a H változási gyorsaságától is függ.

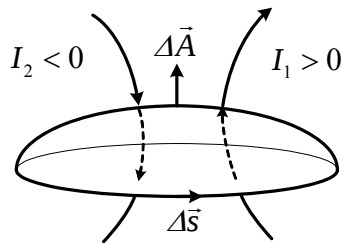
A ferromágneses anyagoknak azt a tartományát, amelynek mágnesezettsége egyirányú, doménnek (domain) nevezzük. A domének 10^{-9} - 10^{-12} cm^3 térfogatú tartományok $\sim 10^{15}$ számú atommal. Egy-egy domén telítésig mágnesezett, de külső tér híján a domének mágnesezettsége rendezetlen, a szomszédos domének gyakran ellentétesen mágnesezettek, így a makroszkopikus minta össz-mágnesezettsége lényegében zérus. Ha elkezdjük növelni a külső mágneses teret, akkor azon domének térfogata kezd nőni, amelyek mágnesezettségének iránya kis szöget zár be a külső mágnesező tér irányával. Ezt a jelenséget nevezzük faleltolódásnak. Nagy mágnesező tér esetén egy másik effektus is fellép, egy-egy domén mágnesezettsége ugrásszerűen befordulhat a külső mező irányába. A domének mágnesezettségének ugrásszerű változásait Barkhausen-ugrásoknak nevezzük. Mivel ekkor elektromos feszültség is indukálódik, ezt ki lehet vezetni egy

hangszóróra, így az ugrások sistersgő, sercegő zajként hallhatóak, ezt Barkhausen-zajnak nevezzük. Az újabb kutatások szerint ilyenkor valójában egy domén hirtelen árfordulása lavinaszerű átfordulásokat indít meg a környező doménekben és valójában ezek összesített hatásából származó zajt halljuk. A telítettséget akkor éri el az anyag, ha már minden elemi momentum a tér irányában áll, az egész anyagdarab egyetlen doménnek tekinthető.

Mágneses tér gerjesztése

Az Ampère-féle gerjesztési törvény: Korábban említettük, hogy mozgó töltések mágneses mezőt hoznak létre. A mérési tapasztalatok alapján felállított Ampère-féle gerjesztési törvény vékony vonalas áramok esetén azt mondja ki, hogy a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok algebrai összegével:

$$\oint_g \vec{H} d\vec{s} = \sum_j I_j$$



A zárt görbe által körülfogott áramok előjelezése

Az áramerősségek algebrai összegénél az előjelezésre azt a szabályt használjuk, hogy az az áram, amelyik a felületet a felület normálisának irányában dőfi pozitív, amelyik azzal ellentétesen dőfi, az pedig negatív. Megállapodás szerint, a peremgörbe körüljárási irányát és a felületi normális irányát a jobbszavar szabály kapcsolja össze. Az Ampère-féle gerjesztési törvény írja le az áram és az általa gerjesztett mágneses mező közötti összefüggést. A mágneses mező tehát még stacionárius esetben sem konzervatív. Tapasztalati tény, hogy a gerjesztési törvény akkor is érvényben marad, ha térben mágnesezhető anyagok vannak jelen.

Határfeltételek (peremfeltételek): Két közeg határfelületén:

$$H_{1t} = H_{2t},$$

azaz a két közeg határán a mágneses térerősség tangenciális koordinátája folytonos és

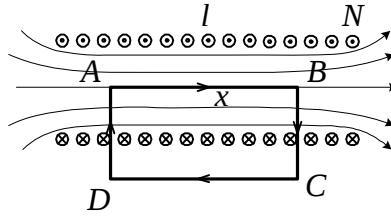
$$B_{1n} = B_{2n},$$

azaz a két közeg határán a mágneses indukció normális koordinátája folytonos.

Hosszú egyenes vezető mágneses tere: Szimmetria-okokból következik, hogy a térerősség értéke csak a vezetőtől mért távolságtól függ. Az erővonalak körül fogják az áramot, tehát a vezetőre merőleges síkokban fekvő koncentrikus körök, középpontjukban a vezetővel. Ekkor, ha egy ilyen körvonal mentén integrálunk, a $\vec{H}$ nagysága állandó, iránya párhuzamos az ívelemmel, így H kihozható az integráljel elé: $\oint_g \vec{H} d\vec{s} = H \oint_g d\vec{s} = H \cdot 2r\pi = I$, azaz $H = I/2r\pi$.

Szolenoid mágneses tere: tekintsünk egy, az átmérőjéhez képest hosszú, sűrűn csévelt hengeres tekercs mágneses terét. A mező homogénnek tekinthető a tekercs belsejében. A tekercs hosszát jelölje l , a menetszám legyen N , és legyen A , a keresztmetszet. Ekkor az egységnyi hosszra jutó menetek száma $\frac{N}{l}$. A tekercsben folyó áramerősség I . Egy alkalmasan megválasztott zárt

görbére írjuk fel a gerjesztési törvényt. A zárt görbe legyen az $ABCD$ téglalap, x az AB oldal hossza.



A szolenoid tekercs és mágneses mezeje

A zárt görbére történő összegzést felbonthatjuk négy nyílt görbére történő összegzésre:

$$\oint_g \vec{H} d\vec{s} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s} + \int_B^C \vec{H} d\vec{s} + \int_C^D \vec{H} d\vec{s} + \int_D^A \vec{H} d\vec{s}$$

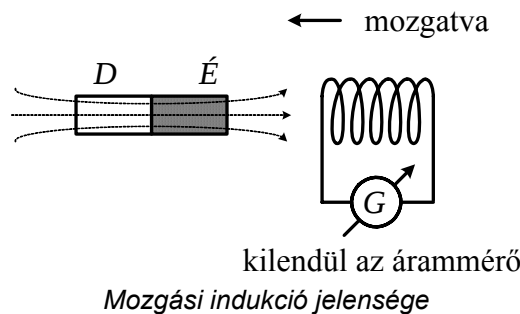
A téglalap esetében a DC szakaszon a tér közelítőleg nulla, az AD és a BC szakaszon pedig a tér iránya merőleges a görbére, így az összeg csak az AB oldalra nem tűnik el. Ebből: $Hx = \frac{N}{l} x I$,

azaz $H = \frac{NI}{l}$, így a mágneses indukció: $B = \mu \frac{NI}{l}$

Az elektromágneses indukció

Azt már tudjuk, hogy ha egy mágneses mezőben lévő vezetőben áram folyik, akkor a vezetőre erő hat (Ampère-erő) és az mozgásba lendül. Kérdés, hogy ha mágneses mezőben vezetőt mozgatunk, akkor indukálódik-e áram, ill. általában hogyan tudunk mágneses úton áramot előállítani.

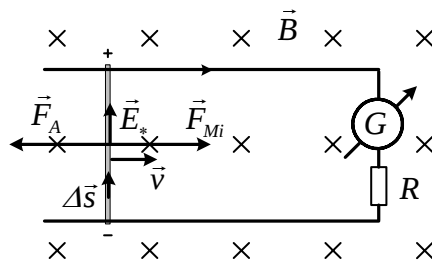
Mozgási indukció: Ha egy vezetőt mágneses mezőben mozgatunk, akkor a vele együttmozgó töltéshordozókra a Lorentz-erő hat. Ezt az erőt korábban idegen erőnek neveztük: $\vec{F}_* = q \vec{v} \times \vec{B}$.



Az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$. A mozgó vezető vonal mentén elektromotoros erő indukálódik (keletkezik), vagyis ekkor a vezető áramforrásként működik. A mozgási indukciót leíró Neumann-törvény általános alakja:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$$

Ha a vezetőből készített vonal zárt, akkor az indukált elektromotoros erő hatására indukált áram jön létre. Tekintsük egyenes vezetőt, és $\vec{v}, \vec{B}, d\vec{s}$ legyenek egymásra merőlegesek.



Az indukált elektromotoros erő a zárt áramkörben indukált áramot eredményez

A fenti, áramforrásként viselkedő mozgó fémrudat lineáris generátornak is nevezik. Figyelembe véve a nagyon speciális geometriát, az elektromotoros erő:

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} = v B \ell$$

A körben folyó áram erőssége pedig az ellenállások ismeretében meghatározható. Ha az egész kör ellenállása R , akkor $I = \mathcal{E}/R$. Azonban az indukált áram miatt erre a rúdra is hat az Ampère-erő, a mozgás irányával ellentétesen (ez a Lenz-törvény megnyilvánulása), így azt egy $\vec{F}_h$ (húzó)erővel kell kompenzálnunk. Ennek az erőnek a teljesítménye fedezi a fogyasztón mért teljesítményt. A generátorok mechanikai teljesítmény árán szolgáltatnak elektromos teljesítményt.

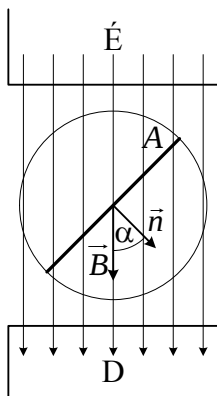
A fenti elrendezésnél ℓ a mozgó rúd konstans hossza volt, legyen a zárt hurok másik (az ábrán vízszintes) oldalának hossza h . Ekkor a hurok területe $A = h\ell$, a példában ez annál gyorsabban csökken, minél gyorsabban mozog a rúd jobbra. A rúd sebessége $v = -dh/dt$, de mivel ℓ konstans, $dA/dt = d(h\ell)/dt = -\ell v$. Az indukciófluxus változási gyorsasága:

$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B \frac{dA}{dt} = -B\ell v = -\mathcal{E}$. Általánosan, ha egy irányított – nem feltétlenül merev – zárt vezetőhurok mágneses mezőben mozog, akkor a benne indukált elektromotoros erőt Faraday törvénye adja:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Tehát a zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a zárt hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével (Fluxus-szabály). A fluxus-szabály segítségével az indukált elektromotoros erő gyakran könnyebben számítható, mint a Neumann-törvénnyel. Az is könnyen látható, hogy ha homogén mágneses mezőben egy vezető keret haladó mozgást végez, akkor nem indukálódik benne feszültség.

Váltakozó áramú generátor: Tekintsünk egy téglalap alakú vezető keretet. Keresztmetszete legyen A , és forogjon állandó ω szögsebességgel homogén mágneses mezőben. A mágneses mező indukciója legyen $\vec{B}$. A kezdeti pillanatban legyen $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$. Először írjuk fel a mágneses indukciófluxus időbeli változását:



Váltakozó áramú generátor

$$\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A} = B A \cos \alpha$$

mivel $\alpha = \omega t$, így az időben változó mágneses fluxus $\Phi = B A \cos \omega t$. Alkalmazzuk a Faraday-törvényt az indukált elektromotoros erő kiszámítására:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B A \omega \sin \omega t.$$

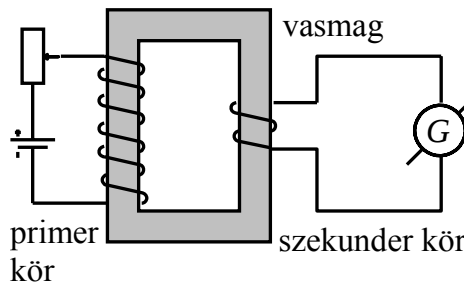
Használjuk az $\mathcal{E}_0$ jelölést az elektromotoros erő csúcserőére $\mathcal{E}_0 = B A \omega$, ezzel

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

Ha egymenetű keret helyett N menetű tekercset alkalmazunk, akkor az erővonalak mindegyik meneten átmennek, vagyis a fluxus (és annak változási gyorsasága) N -szeresére nő. Tehát a váltakozó áramú generátor elektromotoros ereje:

$$\mathcal{E} = N A B \omega \sin \omega t$$

Nyugalmi indukció: Tehát egy zárt vezetőkörben áram indukálódik, ha a mágneses indukciófluxus, azaz a $\vec{B}$ felületre vett integrálja változik. Ez az integrál nem csak úgy változhat, hogy a görbe alakja vagy helyzete, azaz az integrálási tartomány változik, hanem úgy is, hogy az integrandus, azaz a $\vec{B}$ vektor nagysága vagy iránya változik az időben (esetleg az integrálási tartománnyal együtt). Ha az integrálási tartomány nem változik, azaz nincs mozgás, $\vec{B}$ pedig változik, nyugalmi indukcióról beszélünk.

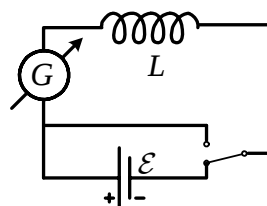


A nyugalmi indukció jelensége, kölcsönös indukció

Tekintsük a fenti elrendezést. Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körül fogja, és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog.

A jelenség magyarázata az, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az indukált elektromos mező mozdtítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége. A fenti kísérletben leírt konkrét jelenséget kölcsönös indukciónak nevezzük, ilyenkor a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Tekintsük most a következő elrendezést:



A nyugalmi indukció jelensége, önindukció

A tapasztalat szerint, ha a tekercset az áramforrásról lekapcsoljuk és egyben rövidre zárjuk, akkor az árammérő egy ideig még csökkenő áramerősséget jelez. A jelenség magyarázata az, hogy az áramforrást lekapcsolva változik a mágneses mező fluxusa, ez elektromos mezőt indukál, és ez tartja fenn az áramot egy ideig. A jelenséget önindukciónak nevezzük, ilyenkor az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza.

Összegezve, a Faraday-féle indukciótörvény tömör alakja:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ahol $\Phi = \int_F \vec{B} d\vec{A}$ a mágneses indukciófluxus. Részletesebben kiírva:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív.

Elektromos mezőt tehát nem csak töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is. A töltések keltette mező forrásos, s ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius, akkor örvénymentes. Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező forrásmentes és örvényes.

Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója: Amint azt korábban levezettük, egy hosszú vékony tekercsben a mágneses térerősség és a mágneses indukció:

$$H = \frac{NI}{l}, \quad B = \mu \frac{NI}{l}$$

Írjuk fel az egyetlen menet által körülfogott fluxust (menetfluxus):

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A} = BA = \mu \frac{NA}{l} I$$

A tekercsfluxus egyenlő a menetfluxusok összegével, így

$$\Phi = N\Phi_m = \mu \frac{N^2 A}{l} I$$

A tekercsfluxus arányos az őt gerjesztő árammal: $\Phi = LI$. Az arányossági tényező definíció szerint L , az önindukciós együttható, ami szolenoidra:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

Az önindukciós együttható mértékegysége: $[L] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ henry} = 1 \text{ H}$

Ha egy tekercsben váltakozó áram folyik, akkor $\Phi = LI(t)$

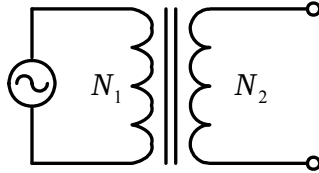
$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Tehát a tekercsben indukálódott feszültség arányos az áram változási gyorsaságával és az önindukciós együtthatóval. Utóbbiban benne van a menetszám négyzete (ezért van sok menete a tekercseknek) és a permeabilitás (ezért szoktak vasmagot tenni a tekercsekbe).

Sokmenetű tekercs esetén mivel L arányos N^2 -tel a tekercs önindukciós együtthatója olyan nagy, hogy az egyben az egész vezető kör induktivitásának tekinthető.

A tekercsben lévő mágneses mező energiája az $1/2BH$ energiasűrűség és az $A\ell$ térfogat szorzata, azaz $E_m = \frac{1}{2} \frac{NI}{\ell} \cdot \mu \frac{NI}{\ell} \cdot A\ell = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 A}{\ell} I^2 = \frac{1}{2} LI^2$.

Kölcsönös indukció együtthatója szoros csatolás esetén: Tekintsünk két nyugalomban lévő tekercset egymás közelében. A primer tekercs menetszáma legyen N_1 , a szekunder tekercs pedig N_2 . Ha a primer tekercsben folyó áram I_1 , akkor az indukció:



A kölcsönös indukció szoros csatolás esetén

$$B_1 = \mu \frac{N_1 I_1(t)}{l}$$

a menetfluxusa pedig:

$$\Phi_1 = \mu \frac{N_1 A}{l} I_1(t)$$

A szoros csatolás azt jelenti, hogy a primer tekercs menetfluxusa egyben a szekunder tekercs menetfluxusa is, így a szekunder tekercs teljes fluxusa:

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi_1 = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1(t)$$

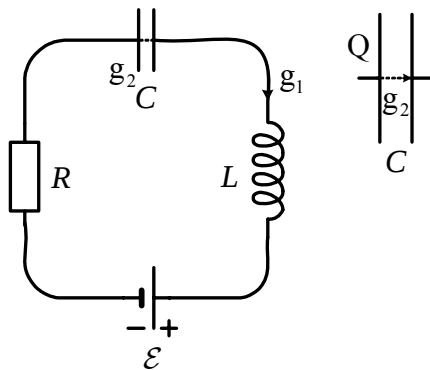
A kifejezésből kiolvasható, hogy a szekunder tekercs fluxusa arányos a primer árammal, az arányossági tényező M , a kölcsönös indukció együtthatója: $\Phi_{12} = M I_1$, ahol

$$M = L_{12} = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

A szekunder tekercs kapcsain az indukált feszültség:

$$U_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

A huroktörvény általánosítása váltóáramra egyetlen hurok esetén: Tekintsük egy olyan hurkot, amely egy ellenállást, egy kondenzátort, egy tekercset, és egy áramforrást tartalmaz. Legyen R a teljes kör ellenállása, C a kondenzátor kapacitása, L a tekercs (és egyben az egész hurok) önindukciós együtthatója, illetve $\mathcal{E}$ az alkalmazott elektromotoros erő.



Huroktörvény általánosítása

Íjuk fel a nyugalmi indukció Faraday-törvényét a hurokra:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d \left(\int_A \vec{B} d\vec{A} \right)}{dt}$$

Mivel a tekercs önindukciós együtthatója egyben a kör indukciós együtthatója is:

$$\oint_g \vec{E} d\vec{s} = -L \frac{dI}{dt}$$

A g zárt görbét az ábrán látható módon bontsuk fel két részre, g_1 haladjon a vezetőben, g_2 pedig a kondenzátor lemezei közötti szigetelőben. A g_2 görbén a térerősség integrálja nem más, mint a kondenzátoron eső feszültség, Q/C . Így ha a térerősségre vonatkozó összegzést a g_1 , g_2 , szakaszokra külön kiszámoljuk, akkor az alábbi egyenletet nyerhetjük:

$$IR - \mathcal{E} + \frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$$

A Kirchhoff-hurokegyenlet általánosítása soros RLC körre:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Tekercs rákapcsolása állandó feszültségre: Legyen a tekercs L induktivitása állandó, a kör ohmos ellenállása R , az áramforrás állandó elektromotoros ereje $\mathcal{E}$. A kapcsolót a $t=0$ időpillanatban zárjuk. Kérdés, hogyan változik az I áramerősség. Ha hirtelen ($\Delta t=0$ idő alatt) nulláról $I>0$ értékre nőne, akkor dI/dt és ezzel az indukált feszültség végtelen nagy lenne, ami lehetetlen. Következésképp $I(0)=0$. A differenciálegyenlet:

$$IR - \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

Egy szétválasztható típusú, integrálva:

$$\int_0^I \frac{dI}{\mathcal{E} - RI} = \frac{1}{L} \int_0^t dt$$

Az integrálást elvégezve:

$$\frac{1}{R} \ln \frac{\mathcal{E} - RI}{\mathcal{E}} = -\frac{1}{L} t$$

R -rel átszorozva, e -adra emelve kifejezhető az áramerősség:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_\infty \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Felhasználtuk, hogy $t \rightarrow \infty$ -re $I_\infty = \mathcal{E}/R$ -nek adódik. Vezessük be a $\tau = L/R$ mennyiséget, amelyet időállandónak vagy a kör relaxációs idejének is neveznek. Ezzel az áramerősség:

$$I(t) = I_\infty \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Az áramerősség tehát exponenciálisan tart a maximális I_∞ értékhez. Ha a tekercset hirtelen lekapcsoljuk az állandó feszültségről, ennek a fordítottja játszódik le, az áram exponenciális függvény szerint tart a nullához: $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Erről úgy győződhetünk meg, ha a fenti levezetést $I(t=0)=I_0$ és $\mathcal{E}=0$ értékekre megismételjük.

Kondenzátor kisütése: Egy Q töltésre, azaz $U_0=Q_0/C$ feszültségre feltöltött kondenzátort R ellenálláson keresztül kisütünk. A huroktörvény:

$$IR + \frac{Q}{C} = 0, \text{ ahol } I = \frac{dQ}{dt}$$

Idő szerint deriválva és átrendezve kapjuk a differenciálegyenletet az áramerősségre:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

ahol I_0 a kisütés kezdetekor beinduló áramerősséget jelenti. Ez az egyenlet is szétválasztható:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = \frac{-1}{RC} \int_0^t dt.$$

A megoldás: $\ln \frac{I}{I_0} = \frac{-1}{RC} t$, azaz

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-t/\tau},$$

ahol $\tau=RC$ az RC kör időállandója, $I_0 = U_0 / R$. Ez azt az időt adja meg, amely alatt e -adrészére csökken az áramerősség.

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen: Egyenáramot a kondenzátor nem vezet, de váltakozó feszültség hatására periódikusan feltöltődik és kisül. Így a váltakozó áram folytonosan folyik a körben anélkül, hogy a lemezek közötti szigetelő rétegben töltések áramlanának. Az általános Kirchhoff-hurokegyenletből kapjuk, hogy a kondenzátor $U=Q/C$ feszültsége az áramforrás ε elektromotoros erejével egyenlő. Mivel $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_0 \sin \omega t) = CU_0 \omega \cos \omega t.$$

Tehát az áramerősség az időnek koszinuszos függvénye, az áramerősség és a feszültség között $\pi/2$ fáziskülönbség van, vagyis az áramerősség 90° -kal siet a feszültséghez képest. Ez azért lehetséges, mert nem a kondenzátor lemezei között lévő feszültségkülönbség az oka a töltések áramlásának, hanem ennek a feszültségnek a megváltozása. A feszültség csúcsértéke U_0 , az áramerőssége $CU_0 \omega$, a kettő hányadosaként értelmezhetjük a kondenzátor váltóáramú ellenállását, más néven kapacitív ellenállását vagy kapacitanciáját:

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

Ez, mint látható, függ a frekvenciától és egyenáramra végtelenné válik.

Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen: Ha minden ohmos ellenállást elhanyagolunk,

a megoldandó egyenlet: $\varepsilon = L \frac{dI}{dt}$, ahol $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$. Idő szerint integrálva kapjuk, hogy

$-\varepsilon_0 \cos \omega t / \omega = LI$, azaz $I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega} \cos \omega t$, vagyis az induktivitáson az áram 90° -ot késik a

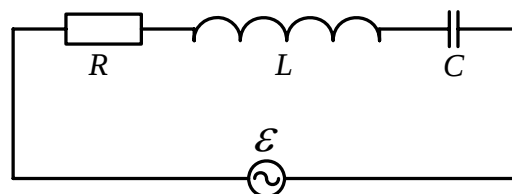
feszültséghez képest. A feszültség és az áramerősség csúcsértékének hányadosa a tekercs váltóáramú ellenállása, más néven induktív ellenállása vagy induktanciája:

$$X_L = L\omega$$

Egyenáramra ez nulla, a frekvencia növelésével növekszik.

Váltóáramú RLC-körök

Olyan áramköröket vizsgálunk, amelyekben az ohmos ellenállás mellett tekercs és kondenzátor is van, az áramforrás elektromotoros ereje pedig szinuszosan/koszinuszosan változik



Soros RLC kör

Tekintsük az ábrán látható soros RLC kört, és alkalmazzuk rá az általánosított hurok törvényt:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Tegyük fel, hogy a váltakozó áramú generátort elektromotoros ereje $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ függvény szerint változik. $\mathcal{E}_0$ a gerjesztő elektromotoros erő amplitúdója ω pedig a körfrekvenciája. A Kirchhoff-féle huroktörvény formálisan teljesen analóg az előző félévben tanult gerjesztett rezgés mozgásegyenletével. Az analóg mennyiségek:

$x \rightarrow Q$ a változó

$m \rightarrow L$ tehetetlenség

$\kappa \rightarrow R$ csillapítás, a rezgés energiája hővé alakul

$D \rightarrow \frac{1}{C}$ a rugó, ill. a kondenzátor tárolja az energiát, ami a megnyúlásból, ill. a töltés-

felhalmozódásból adódik ($\frac{1}{2} Dx^2$, ill. $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, ezek periodikusan átalakulnak az $1/2 mv^2$ mozgási

és az $1/2 LI^2$ mágneses energiává)

$F_0 \rightarrow \mathcal{E}_0$ kényszer, energiabetáplálás

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sajátfrekvencia, $\omega = \omega_0$ esetén rezonancia következik be.

Az RLC köröket vizsgálva minket jobban érdekel az áramerősség, mint a kondenzátoron lévő töltés, ezért lederiváljuk idő szerint a fenti egyenletet, hogy csak az áramerősség maradjon benne változóként:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\mathcal{E}_0 \omega \sin \omega t$$

Matematikailag a megoldandó egyenlet inhomogén másodrendű differenciálegyenlet az áramerősségre. Ennek általános megoldása két tagból áll: az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásából. A homogén egyenlet általános megoldása csillapított rezgőmozgásnak felel meg. Mivel nincs áramforrás, nincs, ami pótolja az ellenálláson keletkező Joule-hőt, ezért csillapodik az áram. Matematikailag ez egy $e^{-\alpha t}$ szorzóként jelenik meg, amely időben exponenciális lecsengést okoz, így az állandósult állapotban csupán a partikuláris megoldásnak megfelelő tag marad meg, a továbbiakban csak ezzel foglalkozunk. Tudjuk, hogy ha az inhomogenitást jelentő függvény ω körfrekvenciájú periodikus függvény, akkor a partikuláris megoldást is ω körfrekvenciájú periodikus függvény alakjában kereshetjük. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a partikuláris (időben állandósult) megoldás a következő:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Az áramerősség időfüggésében szereplő I_0 a létrejövő áram csúcsértéke, míg φ a kezdőfázis. Az áramerősség csúcsértékét a soros váltakozó áramú körökre vonatkozó Ohm törvény alapján határozhatjuk meg:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

vagy:

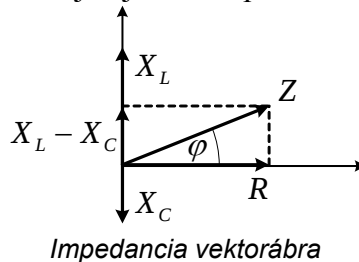
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

ahol Z a soros kör impedanciája (magyarul a váltakozó áramú ellenállása).

:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

A korábban bevezetett jelölésekkel felrajzoljuk az impedancia vektorábrát.



Ebből leolvasható a kezdőfázis:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

vagy

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Ha $\varphi > 0$ akkor I késik $\mathcal{E}$ -hoz képest, ha $\varphi < 0$ akkor I siet $\mathcal{E}$ -hoz képest.

Hasonlóan a mechanikai rezgéshez, itt is egyik formából a másikba alakul az energia és vissza periódikusan. Amíg az áramerősség nagy, addig a tekercs mágneses mezője erős és ennek energiája nagy, azután az áramerősség csökken, a töltés felhalmozódik a kondenzátoron, de akkor meg a kondenzátorban lévő elektromos tér erőssége és így az elektromos tér energiája lesz nagy.

Az egyes kapcsolási elemek pólusain mérhető feszültségek: Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jellegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel. Az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel mindig fázisban van. Ha $U_{R0} = I_0 R$ az ellenálláson a feszültség csúcsértéke, akkor

$$U_R(t) = U_{R0} \cos(\omega t - \varphi)$$

A kondenzátor feszültsége $\pi/2$ -vel késik az áramhoz képest, azaz

$$U_C(t) = U_{C0} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

ahol $U_{C0} = I_0 X_C$, a kondenzátoron mérhető feszültség csúcsértéke.

Az ideális tekercs feszültsége $\pi/2$ -vel siet az áramerősséghez képest:

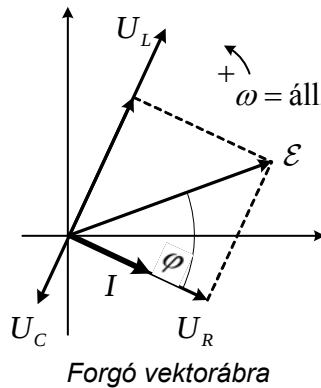
$$U_L(t) = U_{L0} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

ahol $U_{L0} = I_0 X_L$ az induktivitáson mérhető feszültség csúcsértéke.

Forgó vektorábra: A soros RLC kör fázisviszonyainak szemléltetésére gyakran használják a forgó vektoros ábrázolást. Ilyenkor a vektor hossza arányos az illető fizikai mennyiség csúcsértékével, és állandó szögsebességgel forog a síkban az óramutató járásával ellentétes irányban. A vízszintes tengelyre vett vetület harmonikus rezgést végez, ez adja a fizikai mennyiség pillanatnyi értékét.¹ A függőleges tengelynek nincs fizikai jelentése, azért vezettük be, mert vektorokat könnyebb összeadni, mint trigonometrikus függvényeket. Az első vektor,

¹ Lásd az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgés kapcsolatát az előző félévi jegyzetben.

amit egy ilyen ábrázolásnál felvesszünk, az áramerősség vektora. Mivel az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel mindig fázisban van, így az azt leíró vektor az áramerősséggel párhuzamos. Az ideális tekercs feszültsége $\frac{\pi}{2}$ -vel siet az áramerősséghez képest, így az ezt ábrázoló vektor, a vektorok forgásának irányában megelőzi az áramerősség vektorát. A kondenzátor feszültsége $\frac{\pi}{2}$ -vel késik az áramhoz képest, így a vektora az áramerősség vektorához képest 90° -kal lemarad. A vektorok összege pedig kiadja a generátor elektromotoros erejét. Megjelenik az ábrán a ϕ fáziskülönbség is.



Rezonancia soros RLC-körben: Vizsgáljuk meg, hogy egy adott RLC-körben milyen ω frekvenciára lesz maximális az áramerősség. Az

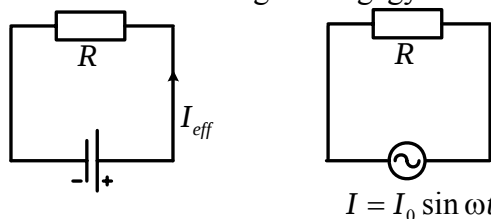
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Összefüggésből leolvasható, hogy ez akkor következik be, ha a nevező minimális. Mivel a gyökjel alatt álló első tag (R^2) rögzített, a második nemnegatív, akkor lesz minimális a két tag összege, ha a zárójelben álló tag nulla, azaz ha $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, vagyis a rezonanciafrekvencia

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ekkor a kondenzátoron és a tekercsen eső feszültség ugyanakkora, de ellentétes fázisú, így összegük minden pillanatban nulla. Ha R nagyon kicsi, akkor az áramerősség nagyon nagy. Ebből az következik, hogy a tekercsen és a kondenzátoron eső $U_{L0} = I_0 X_L$ és $U_{C0} = I_0 X_C$ feszültség is nagyon nagy, sokkal (akár sok ezerszer) nagyobb, mint az áramforrás elektromotoros ereje! Ezért ezt a rezonanciát feszültségrezonanciának is nevezik.

Váltakozó áram jellemzése effektív értékekkel: A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius áram erősségét jelenti. Akár a vizsgált váltakozó áram folyik át egy fogyasztón (jobb oldali ábra), akár egy I_{eff} erősségű stacionárius áram (bal oldali ábra), egy periódus alatt az elektromos munkavégzés megegyezik.



Egyszerű áramkörök az effektív áramerősség bevezetéséhez

$$W = I_{\text{eff}}^2 RT \qquad W = \int_0^T I^2(t) R dt$$

A szinusznégyszet-függvényt kiintegrálva belátható, hogy az effektív érték: $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Hasonlóan a generátor effektív feszültsége: $\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$. Ez utóbbi két formula felhasználásával a váltóáramú Ohm törvény egy gyakrabban használt alakba írható:

$$I_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}}{Z}$$

Teljesítmény soros váltakozó áramú körben: A soros áramkör esetén az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:

$$P(t) = \mathcal{E}(t) I(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Két ismert trigonometrikus azonosságot ($\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ és

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$) összeadva: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

Legyen $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$, ekkor:

$$\frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] = \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi),$$

így a pillanatnyi teljesítmény:

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$$

Ha ennek a függvénynek képezzük az időátlagát, akkor mivel a koszinuszos függvény időátlagára zérus, csak a jobboldali tag marad, mivel az konstans. Az átlagteljesítmény a csúcserővel, vagy az effektív értékekkel kifejezve:

$$\overline{P} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \mathcal{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2 R}{Z^2} = I_{\text{eff}}^2 R$$

Mivel a keletkezett hő ez adja meg, az átlagteljesítményt hatásos teljesítménynek is nevezik.

Megjegyezzük, hogy a $P_{\ell} = \mathcal{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ mennyiséget látszólagos teljesítménynek, $P_m = \mathcal{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi$ -t pedig meddő teljesítménynek nevezik. Utóbbi az áramforrás és a fogyasztó között periodikusan ide-oda áramló energiát adja meg.

Komplex megoldás: Fentebb láttuk, hogy a feszültséget és az áramerősséget forgó vektorokként, az impedanciát álló vektorként tekinthetjük egy kétdimenziós síkon. Utóbbiban az egyes tagokat (az ohmos ellenállást, a tekercs induktanciáját, a kondenzátor kapacitanciáját) soros kapcsolásnál vektorként adjuk össze. Párhuzamos esetben a reciprokokat kellene összeadni, csak hogy vektorokkal nem tudunk osztani, mivel nincs megfelelő szorzásunk.² Kiderült, hogy ha a vektorokat egyben komplex számoknak is tekintjük, akkor megfelelő szorzást kapunk és tudunk majd eredő impedanciát számolni tetszőleges kapcsolásnál. Természetesen visszamehetnénk a vektorokról a trigonometrikus függvényekre, azonban ez sokkal nehezebb számolásokat eredményezne. Az alábbiakban bemutatjuk a huroktörvény komplex megoldását és levezetjük azokat az összefüggéseket, amelyek a váltóáramú körök megoldásához szükségesek (ez részben az előző oldalakon elmondottak ismétlése lesz).

² Sem a skaláris, sem a vektoriális szorzásnál nem igaz, hogy $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ -ből következik $\vec{b} = \vec{c}$, tehát az $1/\vec{a}$ -val való szorzás ellentmondásra vezet.

A feszültséget $U_o e^{i(\omega t + \varphi)}$ alakban adjuk meg, az áramot $\tilde{I} = I_o e^{i\omega t}$ alakúnak tekintjük. Az áramot tehát fázisállandó nélkülinek tekintjük. Ezt egyébként jogunkban áll megtenni, mivel csupán azt jelenti, hogy az adott jelenség leírásához időmérésünk mikor indul, azaz a stopperóránk indítógombját mikor nyomjuk le. Az összefüggéseinkben a hullámvonallal ellátott szimbólumok komplex mennyiségeket jelölnek. Azt a megállapodást tartjuk szem előtt, hogy a komplex feszültségnek és az áramerősségnek csak a valós része értelmezhető és mérhető fizikailag. Ez a komplex írásmód - a látszat ellenére - jelentősen egyszerűsíti a számolást. A következő formulákat fogjuk használni:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t) &= U_o e^{i(\omega t + \varphi)} = U_o (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) = U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \tilde{U}_o e^{i\omega t} \\ \tilde{I}(t) &= I_o e^{i\omega t} \quad d\tilde{I}/dt = i\omega I_o e^{i\omega t} \quad d^2\tilde{I}/dt^2 = -\omega^2 I_o e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Az $e^{i\omega t}$ tag miatt forog az áramerősség és a feszültség ω szögsebességgel a komplex síkon az óramutató járásával ellenkező irányban – aki a komplex alakból nem látja, vizsgálja meg a trigonometrikus alakot.

A feszültség és az áram megfelelő deriváltjait az

$$L \frac{d^2\tilde{I}}{dt^2} + R \frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{\tilde{I}}{C} = \frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{dt}$$

inhomogén egyenletbe helyettesítve kapjuk a következőt:

$$-L\omega^2 I_o e^{i\omega t} + i\omega R I_o e^{i\omega t} + \frac{I_o}{C} e^{i\omega t} = i\omega U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

Osztva mindkét oldalt $i\omega$ -val, majd a nevezőből i/i szorzással eltüntetve az imaginárius egységet kapjuk az alábbi egyenletet:

$$iL\omega I_o e^{i\omega t} + R I_o e^{i\omega t} - i \frac{I_o}{\omega C} e^{i\omega t} = U_o e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (**)$$

Beírva a komplex alakokat:

$$iL\omega \tilde{I}(t) + R \tilde{I}(t) - i \frac{1}{\omega C} \tilde{I}(t) = \tilde{U}(t)$$

Az első formula baloldalán azonosíthatjuk az egyes áramköri elemeken jelentkező feszültségeket, s jobboldalon ezek összegét:

$$\hat{U}_R = R \hat{I} \quad \hat{U}_L = iL\omega \hat{I} \quad \hat{U}_C = -\frac{i}{\omega C} \hat{I} \quad (*)$$

E formulák egyúttal az Ohm törvény komplex alakjának megnyilvánulásai. Ezek mindegyike $\hat{U} = \hat{Z} \hat{I}$ alakú, ahol $\hat{Z}$ jelöli hagyományosan a komplex impedanciát:

$$\hat{Z}_R = R \quad \hat{Z}_L = i\omega L \quad \hat{Z}_C = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C}$$

Ha a fenti egyenletet átrendezzük:

$$\left[i(L\omega - \frac{1}{\omega C}) + R \right] \tilde{I}(t) = \tilde{U}(t),$$

felismerhetjük az eredő komplex ellenállást is, amely a sorba kapcsolt elemek komplex impedanciáinak összege.

$$\hat{Z}_e = R + i(L\omega - \frac{1}{\omega C})$$

Ennek az abszolút értékét a Pithagorasz tétellel számolhatjuk:

$$Z_o = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Látható, hogy a soros RLC kör komplex impedanciája az egyes tagok komplex impedanciájának összege. Ugyanígy levezethető, hogy ha több ohmos ellenállás, tekercs, illetve kondenzátor van sorosan kapcsolva, azok impedanciái is összeadódnak:

$$\hat{Z}_e = \sum_n R_n + i(\omega \sum_m L_m - \frac{1}{\omega} \sum_k \frac{1}{C_k})$$

Megjegyezzük, hogy visszakaptuk azt az egyenáramoknál levezetett szabályt, hogy sorba kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitásának reciproka a kapacitások reciprokainak összege.

Ha a (**) egyenletben az $e^{i\omega t}$ -vel egyszerűsítünk, akkor azt látjuk, hogy az eddig elmondottak – pl. az Ohm törvény * alakjai – nemcsak a pillanatnyi értékekre, hanem az amplitúdókra és így az effektív értékekre is változatlan formában érvényesek.

A következőkben Ohm törvényének alkalmazását tisztázzuk komplex váltakozó áramú ellenállásokra. Mind minden komplex mennyiség, így a komplex ellenállások is megadhatók a következő alakban: $\hat{Z} = \hat{Z}_0 e^{i\vartheta}$. Ha az áramot választjuk fázisállandó nélkülinek, (azaz

$I_0 e^{i\omega t}$ alakú) akkor az " $U = RI$ " Ohm törvény a következőkhöz vezet:

$$\hat{U} = Z_0 e^{i\vartheta} I_0 e^{i(\omega t + \vartheta)} = Z_0 I_0 e^{i(\omega t + \vartheta)} = U_0 e^{i(\omega t + \vartheta)}$$

Két dolgot látunk, egyrészt a feszültség-amplitúdót is Ohm törvénnyel kaptuk $U_0 = Z_0 I_0$

érdekesebb azonban az, hogy az elektromos feszültség fázisa ϑ értékével nagyobb az áram fázisánál. Az áram és a feszültség tehát nincs (azonos) fázisban, s e fáziskülönbség a komplex váltakozó áramú ellenállás fázisszögétől származik.

A fentieket alkalmazzuk pl. egy L önindukciós együtthatójú tekercsre: ³

$$\hat{Z}_L = iL\omega = L\omega e^{i\pi/2} \quad \hat{U} = \hat{Z}\hat{I} = L\omega I_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

A feszültség-amplitúdó tehát $U_0 = L\omega I_0$. Kiolvashatjuk továbbá azt is, hogy az önindukciós tekercsen a feszültség fázisa 90° -al vagyis $\pi/2$ -vel siet az áram fázisához képest. Ha másik mennyiséget választjuk referenciául, akkor ugyanezt a fizikai tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy önindukciós tekercsen az áram 90° -kal késik a feszültséghez képest.

Kimutatható, hogy ha állandó paraméterekkel bíró lineáris hálózaba azonos körfrekvenciájú szinuszos (koszinuszos) elektromotoros feszültségek vannak beiktatva, akkor a stacionárius állapotbeli áramerősségeket és feszültségeket a

$$\sum_i I_i = 0$$

komplex csomóponti és a

$$\sum_i I_i Z_i = \sum_k \mathcal{E}_k$$

komplex huroktörvényekből határozhatjuk meg.

Az egyenáramoknál az Ohm-törvényből és a két Kirchhoff törvényből vezettük le azt, hogy hogyan kell eredő ellenállást számolni soros és párhuzamos kapcsolásnál, ill. hogyan kell ezek segítségével tetszőleges hálózatot megoldani. Itt a fenti három törvény komplex áramerősségekre, feszültségekre és impedanciákra ugyanolyan formában igaz, mint egyenáramok esetében a megfelelő valós mennyiségekre, tehát ugyanúgy levezethetők a megfelelő szabályok. Eszerint, (mint azt már láttuk,) a sorosan kapcsolt konduktív (ohmos) ellenállások eredőjét megadó $R_e = \sum_i R_i$ összefüggés megfelelőjeként a sorba kötött

impedanciákra a

$$\tilde{Z}_e = \sum_k \tilde{Z}_k$$

komplex összefüggés érvényes. Hasonlóan, párhuzamosan kapcsolt impedanciák eredője az

$$\frac{1}{\tilde{Z}_e} = \sum_i \frac{1}{\tilde{Z}_i}$$

³ Felhasználjuk, hogy $e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

összefüggés szerint számítható. Az impedancia reciprokát szokás admittanciának is nevezni. A szabály tehát úgy foglалható össze, hogy soros kapcsolásnál a komplex impedanciák, párhuzamosnál a komplex admittanciák összegződnek.

Transzformátor: közös vasmagon van két tekercs. Tegyük fel, hogy az N_1 menetszámú primer tekercs egy áramforrásra van csatlóva, amelynek feszültsége: $U_1(t) = U_{1,0} \sin \omega t$. A primer kör ohmos ellenállását elhanyagoljuk, ekkor az áramerősség:

$$I_1 = \frac{U_{1,0}}{L_1 \omega} (-\cos \omega t), \text{ ahol } L_1 = \mu \frac{N_1^2 A_1}{l_1}. \text{ A primer tekercsen belül a mágneses tér}$$

$$H_1 = N_1 \frac{I_1}{l_1}, \text{ ebből az indukció } B_1 = \mu N_1 \frac{I_1}{l_1} = \mu N_1 \frac{U_{1,0} / l_1}{\mu \frac{N_1^2 A_1}{l_1} \cdot \omega} (-\cos \omega t) = \frac{U_{1,0}}{A_1 N_1 \omega} (-\cos \omega t)$$

Az indukcióvonalak a vasmagon belül haladnak, ezért a két tekercs egy menetre jutó fluxusa megegyezik: $B_1 A_1 = B_2 A_2$, azaz $B_2 A_2 = \frac{-U_{1,0}}{N_1 \omega} \cos \omega t$. A szekunder tekercsben az indukálódott

feszültség: $U_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ ahol $\Phi_2 = N_2 B_2 A_2 = -\frac{N_2 U_{1,0}}{N_1} \frac{\cos \omega t}{\omega}$. Ez persze csak akkor igaz, ha a

szekunder körben nem folyik áram, vagyis nem zárt az áramkör. A deriválást elvégezve

$$U_2(t) = -\frac{N_2}{N_1} U_{1,0} \sin \omega t = -\frac{N_2}{N_1} U_1(t), \text{ tehát a szekunder feszültség fázisa ellentétes a primerhez}$$

képest, a feszültségek nagyságának aránya pedig a menetszámok arányával egyenlő

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen nagy (vagy kicsi) váltakozó feszültséget elő tudunk állítani transzformálással. Transzformátorokat ma is sok helyen használnak, a jó transzformátorok hatásfoka meghaladja a 90%-ot.

Ha a szekunder kört zárjuk, abban is áram folyik, így a fluxus mindkét tekercs esetében megváltozik. Ezt az esetet bonyolultsága miatt nem tárgyaljuk. Azt azonban megjegyezzük, hogy mivel a primer áramkör által leadott teljesítmény jelenik meg a szekunder kör fogyasztóján:

$P_1 = P_2$, ebből $U_1 I_1 = U_2 I_2$ vagyis ha a feszültséget feltranszformáljuk, az megfelel az áram letranszformálásának:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Az erőművekben előállított feszültséget feltranszformálják a távvezetéken történő szállításhoz, hogy a vezetéken elszivárgó teljesítmény $I_2^2 R_{\text{vez}}$ kicsi legyen.

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény: Faraday indukció törvénye szerint az időben változó mágneses mező elektromos mezőt kelt. Maxwell elméleti megfontolások alapján feltételezte, hogy az elektromos mező időbeli változása pedig örvényes mágneses mezőt kelt. Az egyenlet felírása során az Ampère-féle gerjesztési törvény kiegészítette egy további taggal, amelyet eltolási áramnak nevezett. Így született meg az Ampère-Maxwell törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} d\vec{A}$$

Felhasználva az elektromos indukciófluxust, az Ampère-Maxwell törvény rövidebben:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I + \frac{d\Psi}{dt}.$$

A mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a vonalra feszített felületet átdőfő áramok erősségének, és a felületen átmenő elektromos fluxus változási gyorsaságának az összegével. Mágneses mezőt tehát nemcsak mágneses dipólusok, vagy áramok gerjeszthetnek, időben változó elektromos mező is képes mágneses mezőt kelteni. A jelenség szimmetrikus megfelelője a Faraday-féle indukciónak. Az eltolási áram, nem áram a szó eredeti értelmében, mert nem mindig kapcsolódik hozzá töltések mozgása. Azonban éppúgy gerjeszt mágneses mezőt, mint a vezetési áram. Jó vezetőben ($\gamma \approx 10^{17} / \Omega m$), technikai váltóáram esetén a vezetési áramsűrűség sok nagyságrenddel felülmúlja az eltolási áramsűrűséget. Nem hanyagolható el az eltolási áram szigetelőben, ahol nem folyhat vezetési áram, illetve ha a frekvencia az optikai tartományba esik.

A Maxwell-egyenletrendszer: A XIX. sz. egyik legnagyobb hatású egyenletrendszere, főleg azért, mert ebből az egyenletrendszerből vezették le az elektromágneses hullámok létezését.

1. Ampère-Maxwell féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_n I_n + \frac{d}{dt} \int_F \vec{D} d\vec{A} \quad \text{és} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2. Faraday-féle indukció-törvény:

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{A} \quad \text{és} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \text{és} \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

4. Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{és} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

A Maxwell-egyenletrendszer megoldásához szükségesek az anyagegyenletek is, amelyek megadják, hogy mi a kapcsolat egyfelől az elektromos térerősség és az elektromos indukció, másfelől a mágneses térerősség és a mágneses indukció között. A lineáris anyagegyenletek: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ és $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, valamint az Ohm-törvény: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, ahol a térerősségbe beleértjük az idegen térerősséget is. Míg azonban a Maxwell-egyenletek egzakt természettörvények, az anyagegyenletek csak bizonyos anyagokra igazak, és közelítő jellegűek. Nem adnak számot pl. a ferromágnesesség, ill. a permanens mágnesesek létezéséről.