

Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki kar
Gépészmérnöki szak

Áramlás és Hőtechnikai
Gépek Tanszéke

Áramlástan Előadásvázlat

KÉSZÍTETTE:

Tatár László (Laca)

Ferencz Miklós (Micu)

Karándy Zoltán („Szikszói barátunk”)

Szótér Gergely (Geri)

Dr. Baranyi László

Miskolc, 2004

HIDROSZTATIKA

Folyadékok és gázok tulajdonságai:

- Csekély ellenállást fejtenek ki az alakváltozással szemben.

(egymáshoz képest könnyen elmozdíthatóak)

A legkisebb nyírófeszültség hatására elmozdulás.

- A részecske relatív helyére közömbös, azaz mindig a határolóedény alakját veszik fel.
- Kontinuum; fizikailag homogén anyag; a fizikai tulajdonsága nem részecskékhez kötött. (meteorológia!)

$$\Rightarrow \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}; \quad p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad \text{valóság: } \Delta V \rightarrow \varepsilon^3; \Delta A \rightarrow \varepsilon^2$$

$\varepsilon \gg$ molekulák közti átlagos távolság

- A mozgás- és termodinamikai állapot, hely és idő függvényeként leírható.

Ideális (súrlódásmentes) folyadék:

0 nyírófeszültség – súrlódási határregegen kívül jó közelítés
húzófeszültség $\rightarrow 0$

Összenyomhatatlan folyadék:

- cseppfolyós
- kis sebességű gáz

Összenyomható folyadék:

gáz; kivétel: kis seb. \rightarrow összenyomhatatlan
($p=1\text{bar}$; $t=0^\circ\text{C}$; $v=50\text{m/s}$; $\Delta \rho / \rho_0 < 1\%$)

Ideális gáz: amely kielégíti a gáztörvényt.

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (R = C_p - C_v)$$

izobár $(p = \text{const}) \rightarrow \rho T = \text{const}$

izochor $(\rho = \text{const}) \rightarrow \frac{p}{T} = \text{const}$

izoterm $(T = \text{const.}) \rightarrow \frac{p}{\rho} = \text{const.}$

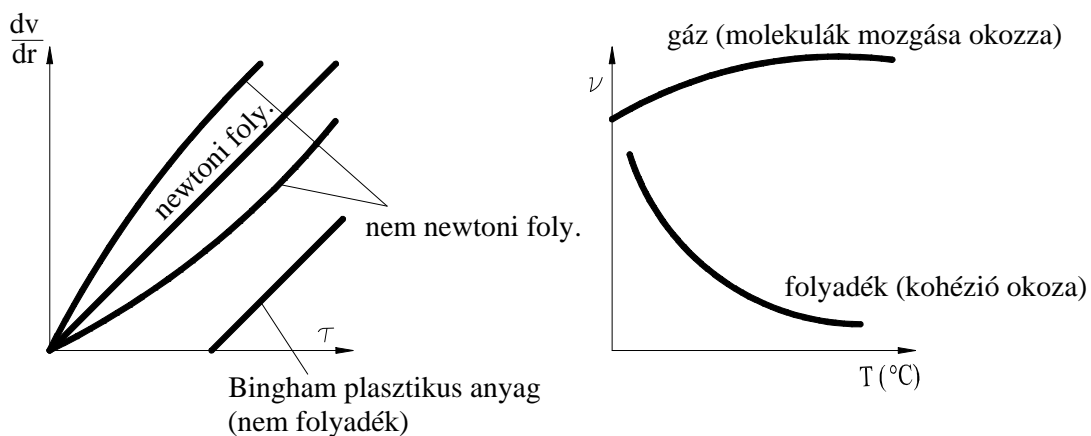
izentropikus $\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} \quad (\kappa = \frac{C_p}{C_v})$

politropikus $\frac{p}{\rho^n} = \text{áll.}$

Folyadékáramlásnál az alakváltozás sebessége játszik fontos szerepet, nem maga az alakváltozás.

- ellenállás a véges sebességű alakváltozással szemben \Rightarrow súrlódás
- a súrlódás függ az alakváltozás sebességétől és a viszkozitástól (η)

$$\tau = \eta \cdot \frac{dV}{dn}; \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{kinematikai viszkozitás}$$

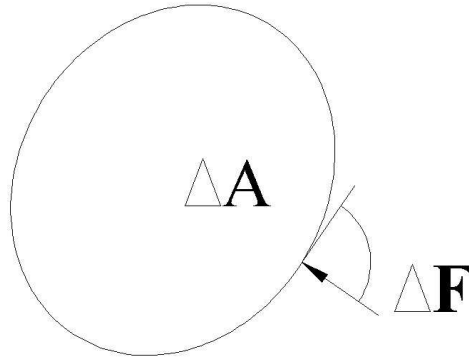


Folyadéknyomás

A legkisebb τ hatására alakváltozás lépne fel.

→ nyugvó folyadékban nincs τ nyírófeszültség! → felületre \perp erők csupán

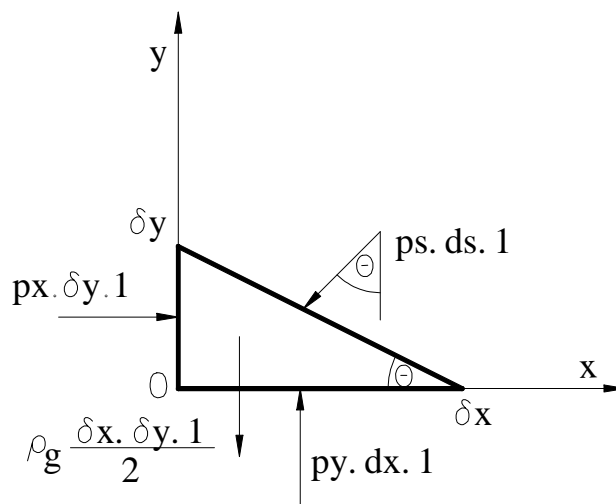
- az elemi folyadék részt elkülönítve vizsgáljuk, akkor a környezet hatását a felületén ható erőkkel vehetjük figyelembe.



- nyomás: felületegységre \perp -en ható erő. $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$
 $(\Delta F = \Delta F_n)$
 $(\Delta A \rightarrow \varepsilon^2)$
 $\varepsilon \gg \text{molekulák.közti}$
 $\text{átlagos.távolság})$

p skaláris mennyiség (iránytól független)

Bizonyítás: – ék alakú térfogatra bizonyítjuk. (3D-ra hasonlóan belátható)



indirekt bizonyítás: P_x, P_y, P_s

$$\delta_x = \delta_s \cos \Theta$$

$$\delta_y = \delta_s \sin \Theta$$

$$x: \quad p_x \delta_y \cdot 1 - p_s \overbrace{\delta_s \sin \Theta}^{\delta_y} = 0 \quad (1)$$

$$y: \quad p_y \delta_x \cdot 1 - p_s \overbrace{\delta_s \cos \Theta}^{\delta_x} - \underbrace{\rho g \frac{\delta_x \delta_y}{2}}_{\rightarrow 0} = 0 \quad (2)$$

$$\delta_x, \delta_y, \delta_s \rightarrow 0 \quad \text{miközben:} \quad \Theta = \text{const.}$$

$$(1) \rightarrow \left. \begin{array}{l} (1) \rightarrow p_x \rightarrow p_s \\ (2) \rightarrow p_y \rightarrow p_s \end{array} \right\} \Rightarrow p_s = p_x = p_y = p$$

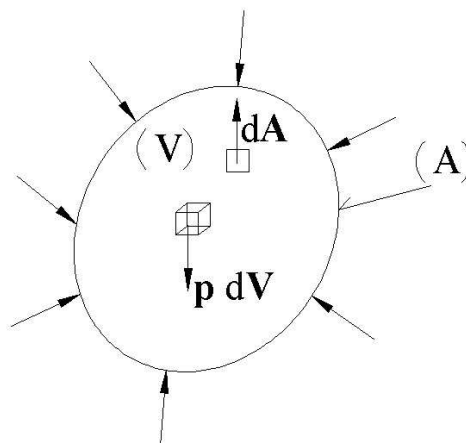
Θ tetszőleges volt \rightarrow a nyomás egy pontban mindenirányban azonos.

3D – hasonló bizonyítás.

- áramló folyadék: $\tau \neq 0$; p iránytól függ: $p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}$
- álló folyadék: $\tau = 0$; p iránytól független (skalár)

egység: $p \dots 1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa$; $10^5 Pa = 1 bar$

A hidrosztatika alapegyenlete



- A vizsgált folyadék tömeg az \mathbf{f} térerősséggel jellemzett erőterben van

- Tetszőlegesen választott (V) folyadéktérfogat egyensúlyban van

Elemi tömegeerő: $\rho \cdot \mathbf{f} \cdot dV$ $\int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_A p d\mathbf{A} = \mathbf{0}$

Elemi felületi erő: $-p d\mathbf{A}$

Gauss tétel $\rightarrow \int_V [\rho \mathbf{f} - \nabla p] dV = \mathbf{0}$

V tetszőleges $\rightarrow \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{0}$

Speciális esetek:

Barotrop közeg $[\rho = \rho(p)]$; $\mathbf{f} - \text{grad} \left[\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right] = \mathbf{0}$ $P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$ nyomáspotenciál

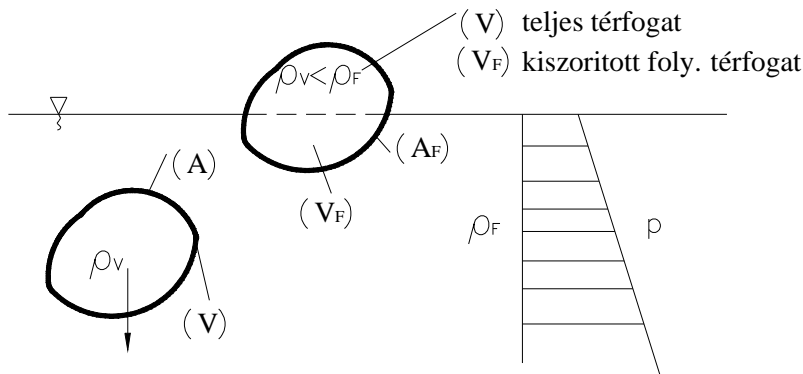
$\nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p$

Potenciál erőter: $\mathbf{f} = -\text{grad } U \rightarrow -\nabla(U + P) = \mathbf{0} \rightarrow U + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$

Gravitációs erőter: $U=gz$ \rightarrow $gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$

Összenyomhatatlan közeg: $\rho=\text{const.}$; $P = \frac{p}{\rho} \rightarrow gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$

Felhajtóerő, úszás:



Ha a (V) térfogatot $\rho_V \neq \rho_F$ sűrűségű anyaggal töltjük ki, akkor az eredeti egyensúlyi állapot megszűnik.

$$\underbrace{\int_V \rho_V \cdot \mathbf{f} dV}_{\text{tézerő}} - \underbrace{\int_A p d\mathbf{A}}_{\text{felhajtóerő}} = \underbrace{\mathbf{F}}_{\text{eredő}} \quad (1)$$

$$\int_{(V)} (\rho_V - \rho_F) \mathbf{f} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (2) \quad \text{a folyadék egyensúlyi egyenlete}$$

$$(1)-(2) \quad \int_{(V)} (\rho_V - \rho_F) \mathbf{f} dV = \mathbf{F} \quad \begin{array}{l} \mathbf{f} \text{ irányú} \\ \text{eredő erő: } -\mathbf{f} \text{ irányú} \\ \mathbf{0} \end{array}$$

Felhajtóerő = a kiszorított folyadéktömegre ható tézerővel (súlyával)

Archimedes...HEUREKA!!!

Úszás:

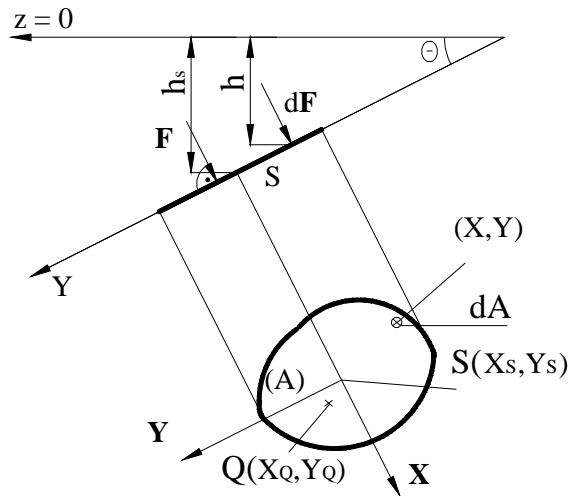
$$\text{Test:} \quad \int_{(V_F)} \rho_V \mathbf{f} dV - \int_{(A_F)} p d\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (*)$$

$$\text{Folyadék:} \quad \int_{(V_F)} \rho_F \mathbf{f} dV - \int_{(A_F)} p d\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (**)$$

⇓

$$\int_{(V)} \rho_V \mathbf{f} dV = \int_{(V_F)} \rho_F \mathbf{f} dV$$

Test súlya = kiszorított folyadék súlya



F ... merőleges a felületre

x, y ..súlyponton átmenő koordináta rendszer

$$\frac{p}{\rho} + gz = const.$$

peremfeltétel: $z=0; p=p_0$

$$p - p_0 = -\rho \cdot gz = \rho \cdot gh$$

$$dF = (p - p_0)dA = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA = \rho \cdot g \cdot y \sin \Theta \cdot dA$$

$$F = \int_{(A)} (p - p_0) dA = \rho \cdot g \cdot \sin \Theta \int_{(A)} y \cdot dA = \rho g \cdot \underbrace{y_s}_{h_s} \cdot \sin \Theta \cdot A = (p - p_0)_s \cdot A$$

$$F = \rho \cdot g \cdot h_s \cdot A = (p - p_0)_s \cdot A$$

- Megoszló terhelés a Q pontba helyezett F erővel helyettesíthető.

$$x_Q \cdot F = \int_{(A)} (p - p_0) x \cdot dA$$

$$y_Q \cdot F = \int_{(A)} (p - p_0) y \cdot dA$$

$$x_Q \cdot \rho \cdot g \cdot y_s \sin \Theta \cdot A = \rho g \cdot \sin \Theta \int_{(A)} xy \cdot dA = \rho g \cdot I_{xy} \cdot \sin \Theta$$

I_{xy}
 \Downarrow
 vegyes
 másodrendű
 tehetetlenségi
 nyomaték

$$x_Q = \frac{I_{xy}}{A \cdot y_s}$$

$$y_Q \cdot \rho g \cdot y_s \cdot \sin \Theta \cdot A = \rho g \cdot \sin \Theta \underbrace{\int y^2 \cdot dA}_{(A)} = \rho g \cdot I_x \cdot \sin \Theta$$

\downarrow
 I_x
 \downarrow
*x*tengelyre
 számított
 tehetetlenségi
 nyomaték

$$y_Q = \frac{I_x}{A \cdot y_s}$$

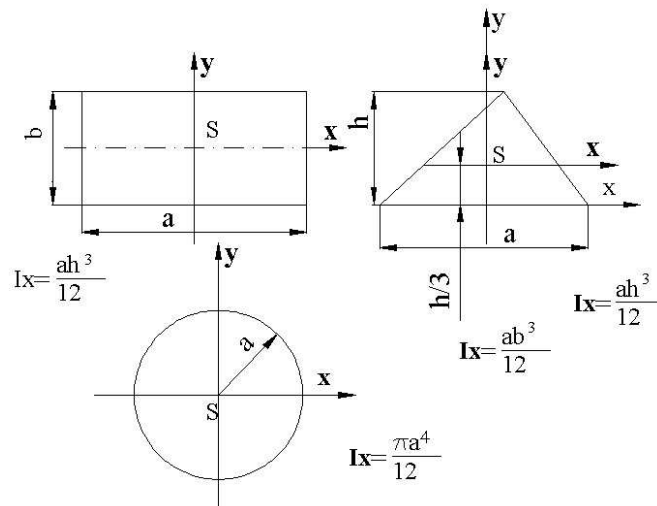
Steiner tétel:

$$I_x = \bar{I}_x + A y_s^2 \quad ; \quad I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A \cdot x_s y_s$$

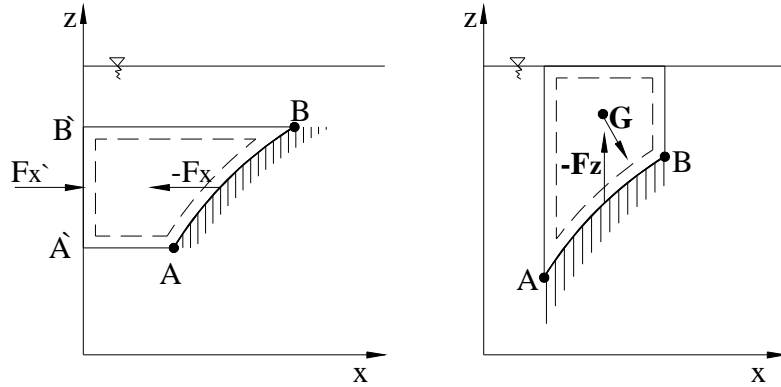
Így: $x_Q = x_s + \frac{\bar{I}_{xy}}{A \cdot y_s} > x_s$; $y_Q = y_s + \frac{\bar{I}_x}{A \cdot y_s} > y_s$

$\bar{I}_x > 0$; $\bar{I}_{xy} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ ($I_{xy} = 0$ ha már egyetlen szimmetriatengely van)

A pont, ahol a megoszló terhelés egyetlen erővel helyettesíthető (Q) mélyebben van a ??? alatt, mint a síkidom S súlypontja.



Görbült felületre ható erő: elemi erők nem párhuzamosak egymással.



A folyadék irányú egyensúlya:

$$\mathbf{F}'_x - \mathbf{F}_x = \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_x = \mathbf{F}'_x \text{ a felület}$$

Függőleges síkba vetített vetületre ható erő

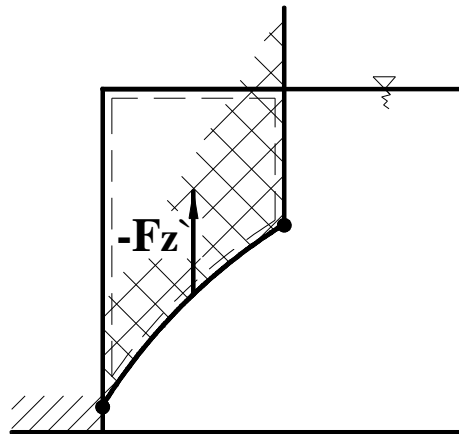
z irányú egyensúlya:

$$-\mathbf{F}_z + \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{G} \downarrow$$

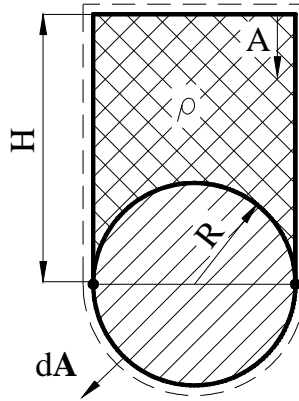
a fölötte lévő folyadék súlya

Speciális eset:



$$\mathbf{F}_z = -\mathbf{G} \quad \text{a fölé képzelt víz súlya felfelé!!}$$

Felhajtóerő (a görbült felületre ható erő alapján): $\mathbf{F}_F = - \int_{(A)} p \cdot d\mathbf{A}$



$$\underbrace{\mathbf{F}_x}_{\text{szimmetria}} = \mathbf{0}$$

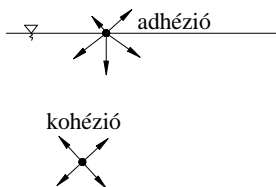
$$\mathbf{F}_{zn} = -\rho g \cdot b \left(H R R - \frac{R^2 \pi}{2} \right) \mathbf{k}$$

Felül:

$$\mathbf{F}_{zn} = \rho g \cdot b \left(H R R + \frac{R^2 \pi}{2} \right) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{F}_z = \rho g \cdot b \cdot R^2 \pi \cdot \mathbf{k} = \text{felhajtóerő}$$

Kapillaritás



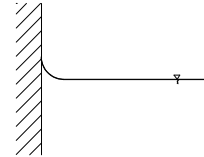
Kohézió alulról > adhézió (levegő molekulák vonzása) → felületi feszültség

Pl: vízi rovarok a víz felszínén.

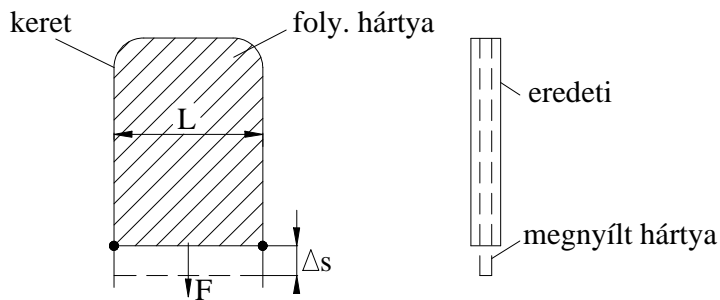
- Mélyen a folyadék felszíne alatt a folyadékmolekulák minden irányba azonos erővel hatnak egymásra (a kohéziós erők kiegyenlítődnek)

- A folyadékfelszín a folyadékmolekulák közti kohézió következtében összehúzódni igyekszik: felületi feszültség keletkezik. (mint egy megfeszített gumilemez)
folyadék szabad felszíne+szilárd felület érintkezése (adhézió+kohézió)

Ha a fal molekuláinak vonzó (adhézió) hatása > folyadék vonzó (kohézió) hatása → a folyadék felkúszik a falra; nedvesíti a felületet.



Gondolatkísérlet a felületi feszültség δ mérésére:



A végzett munka \propto felületnöveléssel
 $F \cdot \Delta s = \delta \cdot 2\Delta s \cdot L$
 ↓
 2 felület van!

$$\delta = \frac{F}{2L} \text{ (N/m) felületi feszültség}$$

δ csak a két érintkező anyagtól függ

víz – levegőre $\delta \approx 0.073 \text{ N/m}$...szobahőmérsékleten

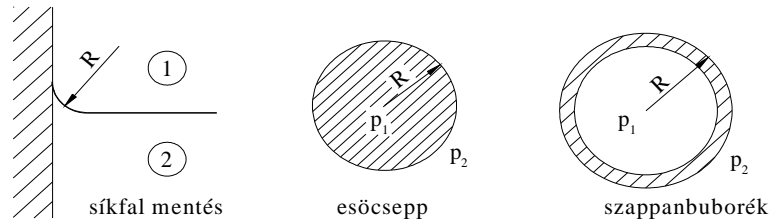
Görbült folyadékfelület esetén: a felületi feszültségből származó erő felület konkáv része felé mutat. Egyensúly esetén erre a konkáv oldali nagyobb nyomás tart egyensúlyt.

Belátható, hogy:

$$p_1 - p_2 = \delta \left(\frac{1}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Laplace-egyenlet}$$

ahol R_1, R_2 a két főgörbületi sugár.

Speciális eset:



$$R_2 = \infty; R_1 = R$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\delta}{R}$$

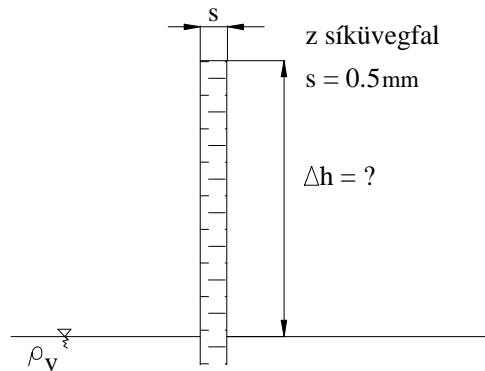
$$R_1 = R_2 = R$$

$$p_1 - p_2 = \frac{2\delta}{R}$$

$$R_1 \cong R_2 = R$$

$$p_1 - p_2 = \frac{4\delta}{R} \text{ 2 felület}$$

kis $R \rightarrow$ nagy $\Delta p!$



Roberson/Crowe P.26.

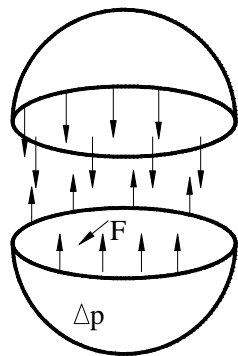
egyensúly:

folyadék súlya=felületi erő

$$1 \cdot s \Delta h \cdot \rho_v \cdot g = 2 \cdot 1 \cdot \delta$$

2 érintkező felület

$$\underline{\underline{\Delta h}} = \frac{2\delta}{\rho_v \cdot g \cdot s} = \frac{2 \cdot 0.073}{10^3 \cdot 9.81 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0.0298m = \underline{\underline{29.8mm}}$$



$d=1\text{mm}$ esőcsepp

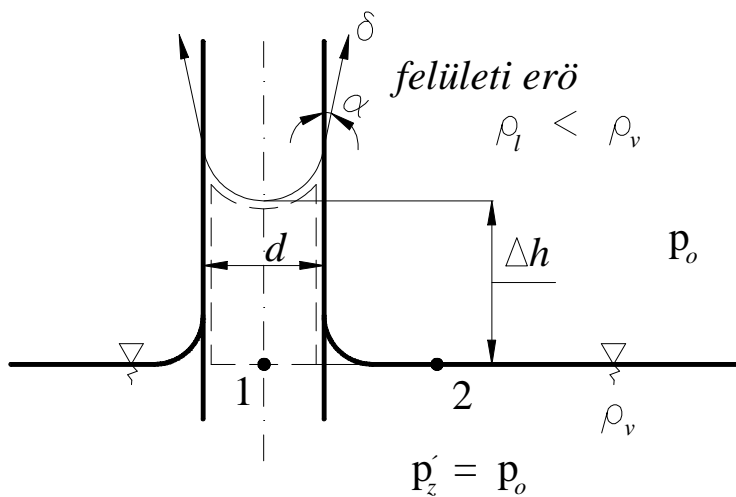
$$\delta \cdot 2R \cdot \pi = \Delta p \cdot R^2 \pi \rightarrow \Delta p = \frac{2\delta}{R}$$

kis R-nél igen nagy lehet

pl: $\delta \cong 0.073 \frac{N}{m}$

$$\underline{\underline{\Delta p = \frac{2\delta}{R} = \frac{4\delta}{d} = \frac{4 \cdot 0.073}{10^{-3}} = 292 \text{Pa}}}$$

Pl: Üvegcsövet nedvesítő folyadék emelkedése a csőben.



az üveg erős adhéziós erővel hat a vízre → felemelkedés

egyensúly:

$$\delta \cos \alpha \cdot d\pi - (\rho_v - \rho_l)g \cdot \frac{d^2\pi}{4} \Delta h = 0$$

ρ_v :súlyerő;

ρ_l :felhajtóerő

$$\rho_v \gg \rho_l$$

$$* \quad \boxed{\Delta h \approx \frac{4\delta \cdot \cos \alpha}{\rho_v \cdot g \cdot d} \cong \frac{4\delta}{\rho_v \cdot g \cdot d}}$$

$\cos \alpha \approx 1$ (üveg+víz)

kis $d \rightarrow$ nagy Δh

pl: $d=1.6\text{mm}$;

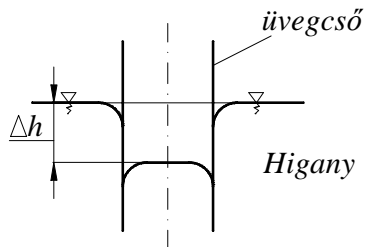
$\rho_v = 10^3 \frac{kg}{m^3}$;

$\delta=0.073\text{N/m}$;

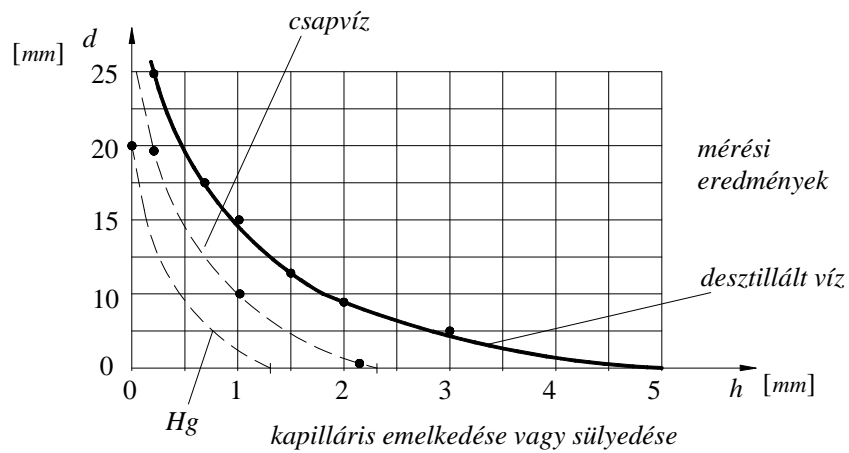
$g=9.81\text{m/s}_2$

$$\underline{\underline{\Delta h}} \cong \frac{4 \cdot 0.073}{10^3 \cdot 9.81 \cdot 1.6 \cdot 10^3} = 0.0186m = \underline{\underline{18.6mm}}$$

Üvegcsövet nem nedvesítő folyadék süllyedése a csőben:



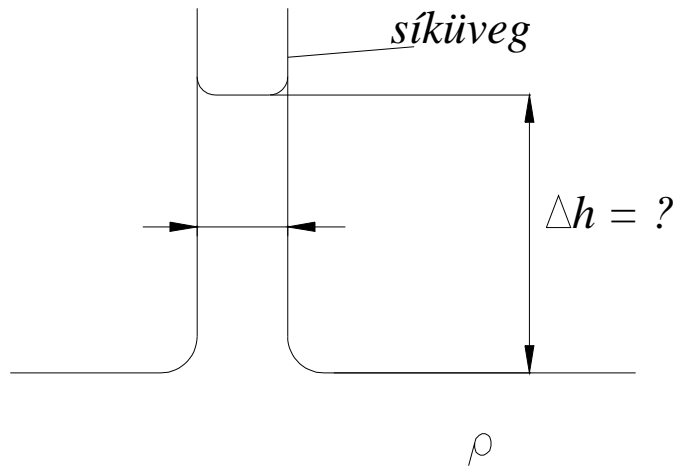
δ függ a folyadék és a súrlódó felület tisztaságától, minőségétől is. (adhézió < kohézió)



**

(*) → teljesen tiszta üveg esetén $\alpha \cong 0$, de a műszaki gyakorlatban általában sem az üveg, sem a folyadék nem tiszta.

Házi feladat: $s=0.5mm$ $\delta=0.073N/m$ $\rho = 10^3 kg/m^3$ $\Delta h = ?$



(**) R.L. Dougherty, „Hydraulics”
 McGraw-Hill Book Company, New York, 1937.

KINEMATIKA

(a mozgás geometriája)

Joseph, Louis, Lagrange (1736-1813) féle leírásmód

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, t); \quad v_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$y = y(\xi, \eta, \zeta, t); \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$z = z(\xi, \eta, \zeta, t); \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t}; \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ξ, η, ζ Lagrange változók

Hátrány: külön egyenlet minden részecskére.

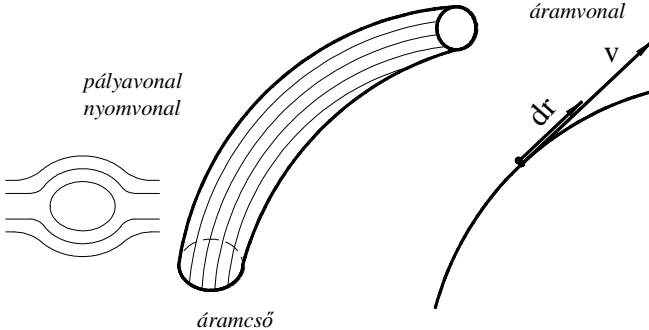
Leonard Euler: (1707-1783) féle tárgyalásmód.

- mozgásjellemzők megadása a térkoordináták és idő függvényében.

pl: $v_x = v_x(x, y, z, t)$; $v_y = v_y(x, y, z, t)$; $v_z = v_z(x, y, z, t)$; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rightarrow$ instacionárius

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow$ stacionárius

sebességtér



$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \begin{cases} v_y \cdot dz - v_z \cdot dy = 0 \\ v_x \cdot dz - v_z \cdot dx = 0 \\ v_x \cdot dy - v_y \cdot dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

gyorsulástér:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \dots = \frac{\partial F}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) F$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right)}_{\mathbf{v}} F = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F = \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} + v_z \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\substack{\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{v} \\ \mathbf{D}(\mathbf{v})}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{v}$$

$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \circ \nabla$ sebességtenzor derivált tenzora

Skaláregyenletek:

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \underset{\uparrow}{\mathbf{v}} \circ \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

a derivált tenzor transzponáltja: $\mathbf{D}_T(\mathbf{v}) = \nabla \circ \mathbf{v}$

Mozgásfajták:

sebesség tér: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$

rögzített időpontban: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + d\mathbf{v} = \mathbf{v} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}$

$$d\mathbf{v} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \underset{\uparrow}{\mathbf{v}}(d\mathbf{r} \cdot \nabla) = \mathbf{v}(\nabla \cdot d\mathbf{r}) = (\mathbf{v} \circ \nabla)d\mathbf{r} = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{D} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_T)}_{\text{szimm.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_T)}_{\text{antiszimm.}}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{v} \circ \nabla; \quad \mathbf{D}_T = \nabla \circ \mathbf{v}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_T) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{d} \times \mathbf{a} \quad (\text{a szimmetria tengely ilyen alakban felírható})$$

d vektortér (az antiszimmetrikus tengely ~a)

a tetszőleges vektor

d = ?

$$(\nabla \times \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_T)\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \circ \nabla - \nabla \circ \mathbf{v})\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \nabla) - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{a}$$

$$\rightarrow \mathbf{d} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$$

Stokes tétel:

$$\int_{(A)} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 = \oint_{(L_1)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{(L_2)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\oint_{(L_1)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\oint_{(L_2)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}_{-\oint_{(L_2)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}} = 0$$

$$\oint_{(L_1)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{(L_2)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$$

Helmholz (1821-1894) első örvénytétele
 örvénycső mentén a Γ cirkuláció konstans.

Örvénymentes áramlás:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 \rightarrow \int_{(A)} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \oint_{(L_1+L_2)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\rightarrow \int_{\substack{A \\ (L_1)}}^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\substack{A \\ (L_2)}}^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$$

$\rightarrow \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = d\Phi$ -totális differenciál

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \dots = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\Phi = \underline{\text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{r}$$

$\Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ -sebességi potenciál

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Térfogati integrál idő szerinti deriváltja

Avagy, kapcsolat térfogati integrál rendszerhez kötött, ill. ellenőrző térfogaton értelmezett deriváltjai között.

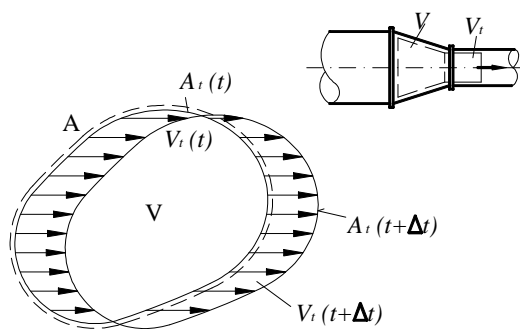
Tömeg,-energia megmaradás,-impulzus tétel, véges térfogatra történő felírásával, különböző mennyiségek térfogati integráljának szubsztanciális deriváltját kell kiszámítanunk.

Adott: $F(\mathbf{r},t); \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ sebesség tér; V_t, A_t ..rendszer térfogat/felület

rendszer: V_t ..együttmozgó folyadéktérfogat (mindig ugyanazokat a folyadék részeket tartalmazza)

A_t .. együttmozgó folyadékfelszín (V_t -t határolja).

V_t, A_t .. együttmozgó térfogatszerkezet/felület → nehéz kezelni,
célszerű térben és időben rögzített térfogatot és felületet használni.



V..ellenőrző térfogat

A..ellenőrző felület

térben rögzített – nyitott rendszer

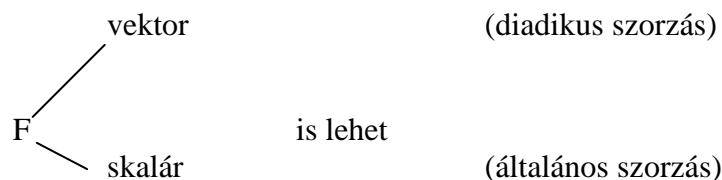
(közeg-átáramlás)

Levezetés nélkül:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_t)} F(\mathbf{r},t) dV = \int_{(V)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{(A)} F(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (*)$$

Gauss-tétel →

$$\int_{(A)} F(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \int_{(A)} (F \circ \mathbf{v}) d\mathbf{A} = \int_{(V)} (F \circ \mathbf{v}) \nabla dV$$



$$(F \circ \mathbf{v})\nabla = \underset{\uparrow}{F}(\mathbf{v} \cdot \nabla) + F(\underset{\uparrow}{\mathbf{v}} \cdot \nabla) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)F + F \cdot \text{div } \mathbf{v}$$

Tehát:

$$\int_{(A)} F(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \int_{(V)} (\mathbf{v} \cdot \nabla)F \cdot dV + \int_{(V)} F \cdot \text{div } \mathbf{v} \cdot dV$$

mivel, $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F$, így (*) \rightarrow

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{(V_t)} F dV = \int_{(V)} \left[\frac{-dF}{dt} + F \cdot \text{div } \mathbf{v} \right] dV} \quad (**)$$

Kontinuitási egyenlet: (tömegmegmaradás)

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_t)} \rho dV = \begin{cases} 0 \\ \int_{(V_t)} \rho dV \end{cases} \quad \begin{matrix} 0, \text{ ha a } V_t \text{ térfogatban nincsenek források} \\ \int_{(V_t)} \rho dV, \text{ ha a } V_t \text{ térf.-ban vannak források} \end{matrix}$$

$$\int_{(V_t)} \rho dV, \text{ ha a } V_t \text{ térf.-ban vannak források}$$

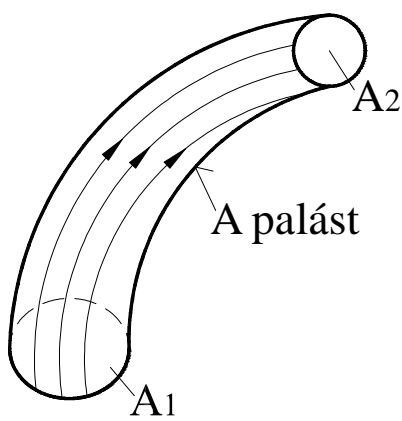
$$(**) \rightarrow F = \rho \quad \frac{d}{dt} \int_{(V_t)} \rho dV = \int_{(V)} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div } \mathbf{v} \right] dV = 0$$

mivel V tetszőleges:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div } \mathbf{v} = 0}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \text{a kontinuitási egyenlet differenciális alakja}$$

Stacionárius esetben:



$$\operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0$$

$$\int_{(V)} \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) dV = 0 = \int_{(A)} \rho \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

$$(A) = (A_1) + (A_2) + \underbrace{(A_{\text{pal.}})}_{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0}$$

$$\boxed{\int_{(A_1)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{(A_2)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}$$

különböző irányítású $d\mathbf{A}$ vektorok.

$d\mathbf{A}$ és \mathbf{v} hegyesszöget zárnak be.

közéérték tétel:

$$\underline{\rho_1 v_{1n} A_1 = \rho_2 v_{2n} A_2 = \dot{m}}$$

$$\underline{\rho \cdot v_n \cdot A = \text{const.} = \dot{m} \text{ (kg/s)}}$$

$\rho = \text{áll.} \rightarrow$

$$\underline{v_n \cdot A = \text{áll.} = Q = v_{1n} \cdot A_1 = v_{2n} \cdot A_2}$$

Következmény: legyen: $F = \rho f$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho f \cdot dV &= \int_{(V)} \left[\frac{d(\rho f)}{dt} + \rho f \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = \\ &= \int_{(V)} \left[\rho \frac{df}{dt} + f \underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \right)}_{\text{kontinuitás}} \right] dV = \int_{(V)} \rho \frac{df}{dt} dV \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho f \cdot dV = \int_{(V)} \rho \frac{df}{dt} dV} \quad (***)$$

Általános mozgásegyenlet:

- a folyadék valóságos; \mathbf{f} erőter; $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{(A)} \mathbf{F} d\mathbf{A} \quad \mathbf{F} \text{ ..feszültség tenzor}$$

$$\int_{(V)} \left[\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{F} \right] dV = \mathbf{0}$$

V tetszőleges \rightarrow

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{F}}$$

Euler-féle mozgásegyenlet:

a közeg sűrűdés mentes $\rightarrow \mathbf{F} = -p\mathbf{I}; \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = (-p\mathbf{I}) \cdot \nabla = -\nabla p$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -\operatorname{grad} p$$

így:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p} \quad (*) \text{ Euler I.}$$

komponens egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$

(*) \rightarrow

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p} \quad \text{Euler II.}$$

Speciális esetek:

- barotróp közeg potenciális erőterben

$$\underline{\underline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} \left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right]}} \quad \text{Euler III.}$$

- örvénymentes áramlás, összenyomhatatlan közeg, potenciális erőter

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} \left[U + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]$$

- ha az áramlás még stacionárius is \rightarrow mozgási energia integrálható

$$U + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (\text{Bernoulli egyenlet})$$

- a hidrosztatika alapegyenlete $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ helyettesítéssel

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{0}$$

Bernoulli egyenlet:

Daniel Bernoulli (1700-1782); svájci matematikus.

Az Euler-féle mozgásegyenlet első integrálja.

- A) Örvénymentes egyenlet:

potenciális erőter: $\mathbf{f} = -\nabla U$; barotróp közeg: $\rho = \rho(p)$; $P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right]; \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Phi$$

$$\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right] = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = k(t)$$

$k(t)$..Bernoulli konstans; csak t-től függ.

Mindig egy adott időpontban írjuk fel, tehát $k(t)$ tényleges konstansként kezelhető!

Speciális eset – stacionárius áramlás:

$$\underbrace{U}_{\text{helyzeti}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{mozgési}} + \int_{p_0}^p \underbrace{\frac{dp}{\rho}}_{\text{nyomási}} = \text{const.}$$

Ez a Bernoulli egyenlet energetikai jelenléte.

- nehézségi erőter, összenyomhatatlan közeg ($U=97$; $P=p/\rho$)

$$\boxed{gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}}$$

- potenciális erőter, stacionárius áramlás, izentropikus állapotváltozás.

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} p^{-1/\kappa}$$

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-1/\kappa} dp = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \underbrace{\frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0}}_{\frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho}} \left(p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right)$$

Tehát:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right)$$

Így:

$$\boxed{U + \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \text{const.}}$$

adiabatikus (izentropikus) hangsebesség:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \left| \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}; p = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^\kappa \right| = \frac{p_0}{\underbrace{\rho_0^\kappa}_{\frac{p}{\rho^\kappa}}} \kappa \cdot \rho^{\kappa-1} = \kappa \frac{p}{\rho}$$

$$\boxed{U + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \text{const.}}$$

B) Örvényes áramlás:

potenciális erőter, örvényes áramlás, barotrop közeg;

Az Euler-féle mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad} \left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right]$$

Integráljuk ezt az egyenletet egy áramvonal mentén:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{r} - \int_1^2 \underbrace{(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})}_{\substack{0, \text{ mivel} \\ \mathbf{v} \text{ és } d\mathbf{r} \\ \text{párhuzamos}}} d\mathbf{r} = - \int_1^2 \nabla \left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right] d\mathbf{r}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} ds \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1}{v} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} ds = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) ds = \frac{1}{v} v \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{\partial v}{\partial t} ds}}}$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right]_1^2 = 0}$$

Csak ugyanazon áramvonal két pontja között írható fel.

Speciális esetek: a)

$$\boxed{U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \text{const.}}$$

formailag ugyanaz, mint az örvénymentes áramlásnál

Lényeges különbség: örvénymentes áramlás: a Bernoulli konstans az egész áramlásterben azonos. (két pont...tetszőleges)

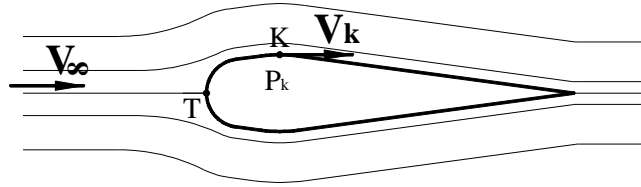
örvényes áramlás: a Bernoulli konstans minden áramvonalra más állandó (két pont...egy áramvonal)

b) $U=gz;$ $P=p/\rho$ ($\rho=\text{const.}$)

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \left[gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right]_1^2 = 0$$

A Bernoulli egyenlet néhány alkalmazása

1. Testek párhuzamos áramlásban:



áramkép megváltozik a sebesség és a nyomáseloszlás is.

Súrlódásmentes Bernoulli egyenlet:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{p_K}{\rho} + \frac{v_K^2}{2}$$

$$p_K = p_\infty + \frac{\rho}{2}(v_\infty^2 - v_K^2)$$

ha $v_K > v_\infty \rightarrow p_K < p_\infty$

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}v_0^2} = 1 - \left(\frac{v_K}{v_0}\right)^2 \quad \text{nyomástényező}$$

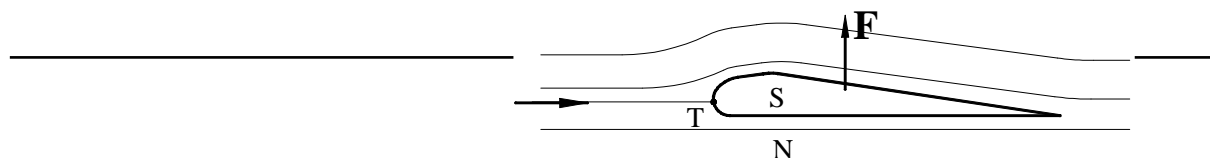
torlópontban: $v_T = 0 \rightarrow p_T = p_\infty + \frac{\rho}{2}v_\infty^2$

($k=T$) a legnagyobb nyomás a felületen

p ..statikus nyomás; $\frac{\rho}{2}v^2$...dinamikus nyomás; $p + \frac{\rho}{2}v^2$...összenyomás

Szimmetrikus, áramvonalas test körüli súrlódásmentes szimmetrikus áramlás.

(0 meghívási szög) $\rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0}$

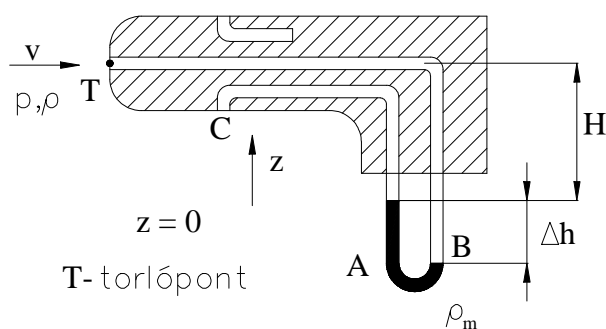


nem szimmetrikus test: →

$p_s < p_N$... felhajtóerő ... repülés

Nem áramvonalas testek nagy meghívási szög → leválás

2. Prandtl-erő: Ludwig Prandtl (1875-1953)



$p_A = p_B$ hidrosztatika az U csőben lévő folyadékra.

$$p_A = p + \rho g \cdot H + \rho \cdot m \cdot g \cdot \Delta h = p_B = p_{\dot{o}} + \rho g(H + \Delta h)$$

$$p_{\dot{o}} - p = (\rho_m - \rho) g \Delta h$$

másrészt az előbb láttuk:

$$p_{\dot{o}} = p_T = p + \frac{\rho}{2} v^2$$

így:

$$\frac{\rho}{2} v^2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h$$

$$v = \sqrt{2g \frac{\rho_m - \rho}{\rho} \Delta h} \quad \text{-pontbeli sebesség mérése.}$$

Impulzus tétel

Newton II. axiómája:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_i)} \underbrace{\rho \mathbf{v} dV}_{\text{impulzus (V}_i\text{-ben)}} = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{(A)} \mathbf{F} d\mathbf{A}$$

(V_i) és (V) a vizsgált időpontban egybeesik

A korábbiak alapján: $(\mathbf{F} \equiv \rho \mathbf{v})$

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_i)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{(V)} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{(A)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{A})$$

így

$$\boxed{\int_{(V)} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{(A)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})} = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} + \int_{(A)} \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A}$$

súrlódás mentes

súrlódásos

$\boldsymbol{\sigma}$...súrlódási feszültségi tenzor

$$\underline{\mathbf{F}} = -p^{\mathbf{I}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}$$

fesz. tenzor súrl. fesz. tenzor

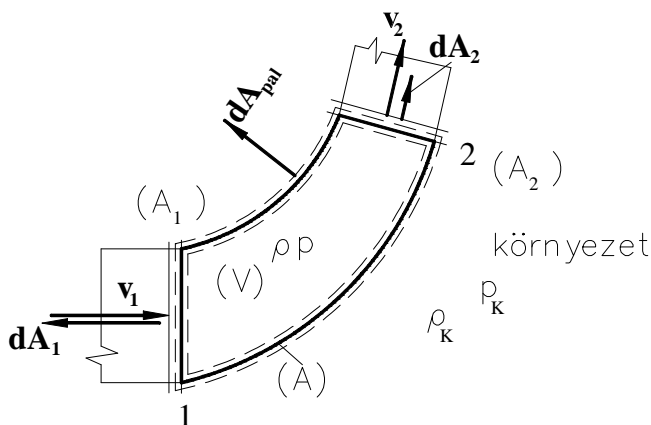
Az impulzusnyomaték tétel az előzőhöz hasonló

$$\boxed{\int_{(V)} \mathbf{r} \times \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{(A)} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})} = \int_{(V)} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV - \int_{(A)} p \mathbf{r} \times d\mathbf{A} + \int_{(A)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A}$$

\mathbf{r} ...helyvektor, attól a ponttól mérve, amelyre a nyomatékot számítjuk.

Alkalmazás: könyökcsőre ható erő stacionárius áramlás esetén.

súrlódásmentes eset



impulzus tétel (V)-ben lévő

folyadéokra:

$$\int_{(A)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} d\mathbf{A}) = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= \int_{(A_1)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_{(A_2)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_{(A_p)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \\ &= \underbrace{\mathbf{v}_1 \int_{(A_1)} \rho \cdot \mathbf{v}_1 d\mathbf{A}}_{-\dot{m}} + \underbrace{\mathbf{v}_2 \int_{(A_2)} \rho \mathbf{v}_2 d\mathbf{A}}_{\dot{m}} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \end{aligned}$$

$$-\int_{(A)} p d\mathbf{A} = -\int_{(A_1)} p d\mathbf{A} - \int_{(A_2)} p d\mathbf{A} - \int_{A_p} p d\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{pal}$$

↓

a könyök belső faláról a folyadékra ható erő

Így:

$$\boxed{\dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \underbrace{\int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV}_{\mathbf{G}} + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{pal}} \quad (*)$$

a környezet statikus egyensúlya (mintha (V) a környezeti közeggel lenne kitöltve)

$$\mathbf{0} = \underbrace{\int_{(V)} \mathbf{f} \rho_K dV}_{\mathbf{G}_K} - \underbrace{\int_{(A)} p_K d\mathbf{A}}_{\mathbf{P}_{K1} + \mathbf{P}_{K2} + \mathbf{P}_{Kpal}} \quad (**)$$

$$(**) - (*) \rightarrow \dot{m}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = -\int_{(V)} (\rho - \rho_K) \mathbf{f} dV - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{K1}) - (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{K2}) - \underbrace{\mathbf{P}_{pal} + \mathbf{P}_{Kpal}}_{\mathbf{R}}$$

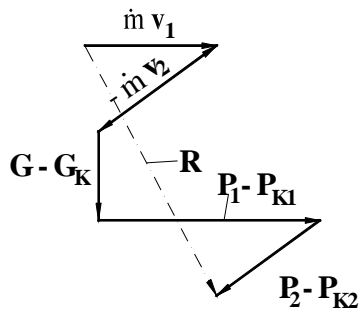
$$\mathbf{R} = \dot{m}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \underbrace{\int_{(V)} (\rho - \rho_K) \mathbf{f} dV}_{\substack{\text{felhajtóerővel} \\ \text{csökkentett} \\ \text{foly.súlya}}} + \underbrace{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{K1} + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{K2}}_{\substack{\text{környezeti nyomás feletti} \\ \text{túlnyomásból} \\ \text{származó} \\ \text{erő}}}$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{P}_{pal} + \mathbf{P}_{Kpal} = \underbrace{\int_{(A_{pal})} (p - p_K) d\mathbf{A}}_{\substack{\text{paláston lévő} \\ \text{túlnyomásból}}} = \int_{(V)} (\rho - \rho_K) \mathbf{f} dV - \int_{(A_1)} (p - p_K) d\mathbf{A} - \int_{(A_2)} (p - p_K) d\mathbf{A} + \dot{m}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

$p - p_K = p^*$ túlnyomás bevezetésével

és $\mathbf{P}_i^* = -\int_{(A_i)} p^* d\mathbf{A}; \quad (i=1,2)$

$$\mathbf{R} = \dot{m}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \mathbf{G} - \mathbf{G}_K + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$$



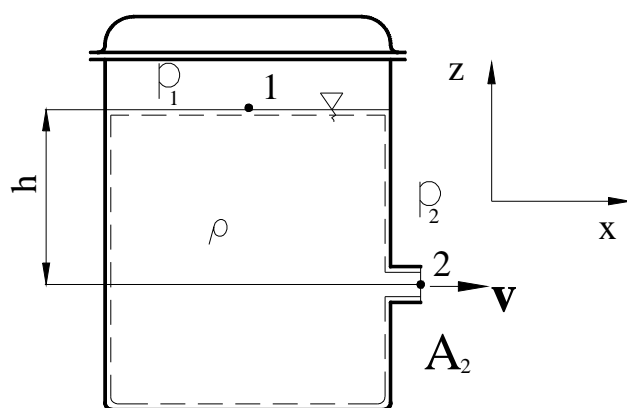
Az impulzus tétel előnye, hogy a folyadék és szilárd test köztikölcsönhatást akkor is megtudjuk határozni, ha az áramlást csak az ellenőrző felület azon a részein ismerjük, amely átáramlás van.

(Egyébként a nyomás és nyírófeszültség meghatározása/és integrálása/ igen bonyolult lenne)

Amennyiben az 1, és 2, keresztmetszetekben ismerjük a nyomást, akkor a levezetett összefüggés súrlódásos áramlása is érvényes.

A Bernoulli egyenlet és impulzus tétel alkalmazásai

1. nagy méretű tartály (stacionárius)



adott: p_1, p_2, ρ, h, A_2

$v=? \quad R_x=?$

1-2...Bernoulli

$$gh + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \right)}$$

ha nyitott tartály:

$$p_1 = p_2 = p_0 \rightarrow v = \underbrace{\sqrt{2gh}}_{\text{szabadesés}}$$

Torricelli képlet

Impulzus tétel:

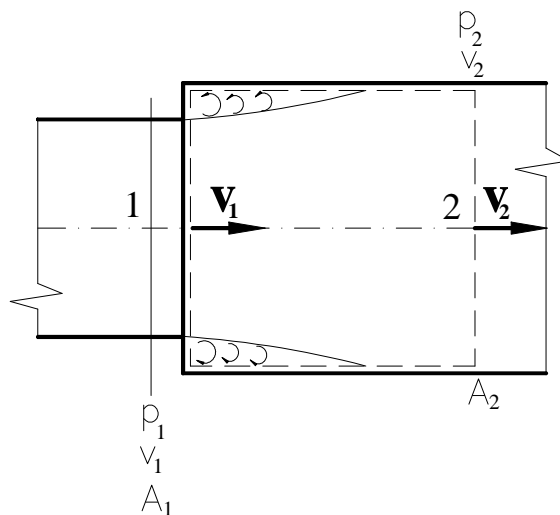
$$\mathbf{R} = \dot{m}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \mathbf{G} - \mathbf{G}_K + \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{K_1} + \underbrace{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_{K_2}}_0 \quad /i$$

$$R_x = -\dot{m}v = -\rho A_2 \cdot v^2 = -2\rho A_2 \left(gh + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \right)$$

a kiáramlás irányával ellentétes

Az ... a kifolyó folyadéksugár keresztmetszete!!!

2. Berda-Canot veszteség:



$\rho \cong const.$

leváló örvények \rightarrow energiacsökkenés $\rightarrow p_2 < p_{2id}$

Bernoulli egyenletből:

$$p_{2id} = p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (1)$$

imp. tétel(x): $\underline{\dot{m}(v_2 - v_1) = A_2 p_1 - A_2 p_2} \quad (2)$

kontinuitás: $\dot{m} = \rho A_1 \cdot v_1 = \rho A_2 \cdot v_2$ (3)

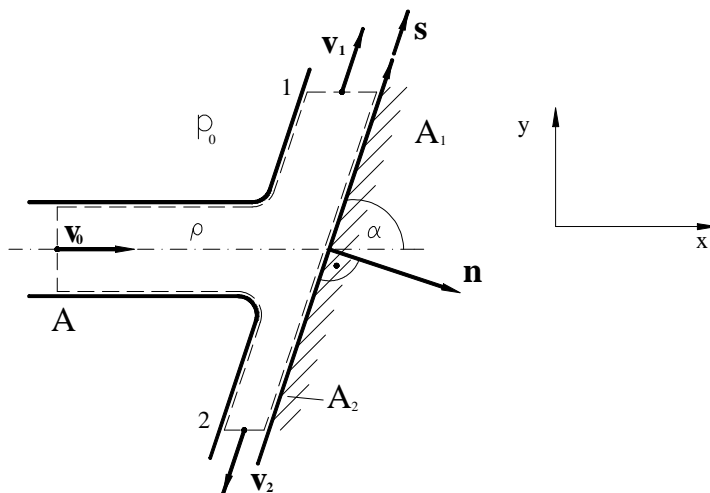
(2),(3) $\rightarrow \underbrace{\rho A_2 \cdot v_2}_{\dot{m}} (v_2 - v_1) = A_2 (p_1 - p_2)$

$\underline{p_2 = p_1 + \rho v_2 (v_1 - v_2)}$ (4)

(1)-(4) $\rightarrow \Delta p' = p_{2id} - p_2 = \rho \left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - \underbrace{v_2 (v_1 - v_2)}_{v_2^2 - v_1 v_2} \right] = \rho \left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} - v_1 v_2 \right)$

$\underline{\underline{\Delta p' = \frac{\rho}{2} (v_1 - v_2)^2}}$

3. Ferde falnak ütköző szabadsugár



adott: A_0, v_0, ρ, α

$R_n, A_1, A_2 = ?$

$p_1 = p_2 = p_0 \rightarrow v_1 = v_2 = v_0 = v$
(a veszteségektől eltekintve)

impulzus tétel:

$$\int_{(A)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} \cdot dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A}$$

≈ 0

$$-\dot{m}\mathbf{v}_0 + \dot{m}_1\mathbf{v}_1 + \dot{m}_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{G} + \underbrace{\mathbf{P}_0^*}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{P}_1^*}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{P}_2^*}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{P}_{pal}^*}_{-\mathbf{R}}$$

mivel, $p_1 = p_2 = p_0$

$$\boxed{\mathbf{R} = \dot{m}\mathbf{v}_0 - \dot{m}_1\mathbf{v}_1 - \dot{m}_2\mathbf{v}_2} \quad (1)$$

kontinuitás:

$$\underline{\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2} \quad (2)$$

$$\rho A_0 \cdot v_0 = \rho A_1 \cdot v_0 + \rho A_2 \cdot v_0 \quad (v_1 = v_2 = v_0)$$

$$\rightarrow \underline{A_0 = A_1 + A_2} \quad (2a)$$

$$(1) \rightarrow \mathbf{e}_r = \sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{j}$$

$$R_n = R = -\rho A_0 v^2 \mathbf{i} (\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{j}) = \rho A_0 v^2 \sin \alpha$$

$$\boxed{R = \rho A_0 v^2 \sin \alpha} \quad \text{a felületre merőleges (súrlódásmentes)}$$

$$(1) \rightarrow \mathbf{e}_s = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$$

$$\underbrace{0}_{\substack{\text{súrl} \\ \text{mentes}}} = \rho A_0 \cdot v^2 \mathbf{i} (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) - \rho A_1 v^2 + \rho A_2 v^2 \quad / \rho v^2$$

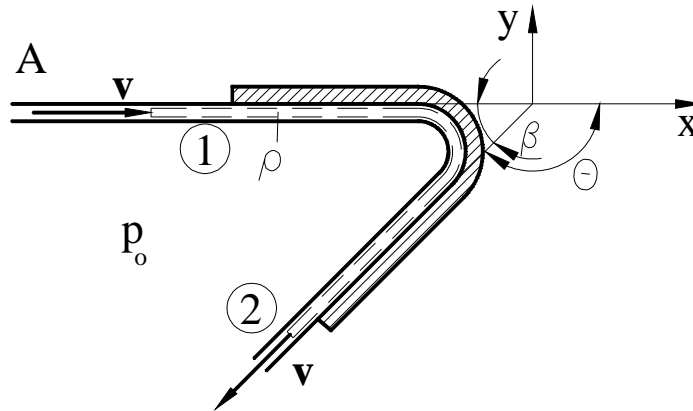
$$\underline{A_0 \cos \alpha = A_1 - A_2} \quad (3)$$

$$\underline{A_0 = A_1 + A_2} \quad (2a)$$

$$\boxed{A_1 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} A_0}$$

$$\frac{(2a) - (3)}{2} \rightarrow \boxed{A_2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2} A_0}$$

4. Folyadéksugár által az elterelő lemezre ható erő



súrlódásmentes folyadék;

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v$$

Adott: v, ρ, A, Θ
sugár
ker metszete

$$\Theta = 180^\circ - \beta; \quad \mathbf{R} = ?$$

stac. imp.tétel:

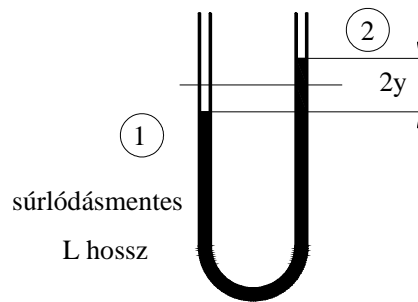
$$\int_{(A)} \rho \mathbf{v} (v d\mathbf{A}) = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A}$$

$$\dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \int_{(V)} \rho \mathbf{f} dV + \underbrace{\mathbf{P}_1^*}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{P}_2^*}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{P}_{pal}^*}_{-\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{R} = \dot{m}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \rho A v^2 [\mathbf{i} - (-\cos \beta \mathbf{i} - \sin \beta \mathbf{j})]$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \rho A v^2 [(A + \cos \beta) \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}]}; \quad \begin{aligned} R_x &= \rho A v^2 (1 + \cos \beta) \\ R_y &= \rho A v^2 \sin \beta \end{aligned}$$

3. A folyadékoszlop lengése:



$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \left[gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right]_1^2 = 0$$

nyitott erő $\rightarrow p_1 = p_2 = p_0$

$y(t)$ kitérés; $v(t)$..sebesség

mivel állandó keresztmetszetű a cső $\rightarrow V_1 = V_2 = V$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$L \frac{d^2 y}{dt^2} + 2g \cdot y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{2g}{L} y = 0$$

$$y = A \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{L}} t\right) + B \cos\sqrt{\frac{2g}{L}} t$$

Kezdeti feltétel:

$$t = 0: y = h \rightarrow B = h$$

$$\dot{y} = v = 0 \rightarrow A = 0$$

$$y = h \cdot \cos\sqrt{\frac{2g}{L}} t$$

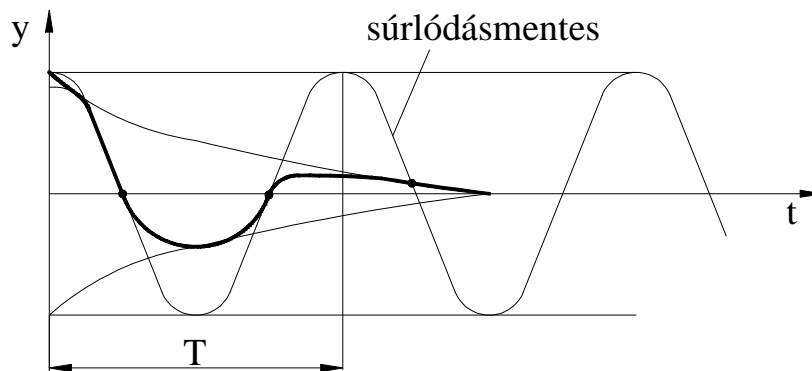
Harmónikus lengőmozgás:

$$\sqrt{\frac{2g}{L}} T = 2\pi$$

$$T = \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

lengésidő; állandó amplitúdó

súrlódásos áramlás → csökkenő amplitúdó; megáll



Síkbeli potenciális áramlás

Síkbeli áramlás: – kiválaszthatók olyan egymással párhuzamos síkok, amelyen az áramképek egybevágóak. Ilyenkor elég az áramlást egyetlen síkon vizsgálni. Tekintsünk stacionárius 2D áramlást!

Legyen:

$$\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$$

örvénymentes áramlás: $rot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ (1)

összenyomhatatlan folyadék: $div \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ (2)

(1) → Φ seb. pot fgv.; $v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$; $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \xrightarrow{(2)} \nabla^2 \Phi = 0$ harmadfokú fgv.

(2) → Ψ áramfgv. $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$; $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \xrightarrow{(1)} \nabla^2 \Psi = 0$ harmadfokú fgv.

Így állnak a Cauchy-Riemann egyenletek:

$$(v_x =) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (= v_y)$$

így Φ, Ψ segítségével definiálható egy reguláris komplex függvény, amelyet komplex potenciálfüggvénynek fogunk hívni:

$$\underline{W_{(z)} = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)}$$

ahol: $z=x+iy$: komplex helyvektor; $i = \sqrt{-1}$: képzetes egység

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}_{v_x} + i \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}_{v_y} = \frac{\partial W}{\partial (iy)} = \frac{1}{i} \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{v_y} + i \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}_{v_x} \right) = v_x - iv_y = \bar{v}$$

iránytól független

$$\underline{\frac{dW}{dz} = \bar{v} = v_x - iv_y} \quad \text{konjugált komplex sebesség.}$$

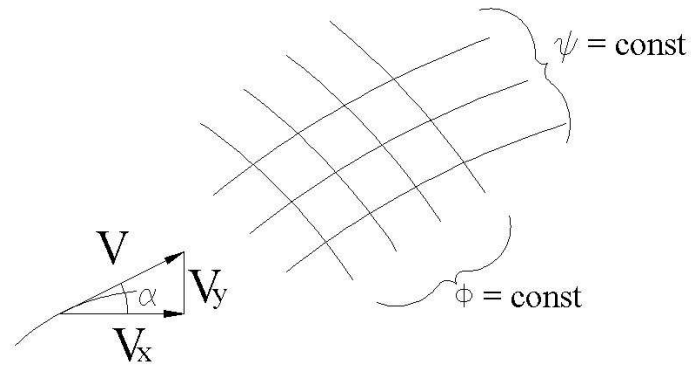
Bármely reguláris komplex függvénynek megfeleltethető egy (összenyomhatatlan közeg) örvénymentes síkbeli áramlás.

Áramvonal: $\psi(x,y)=\text{const.}$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{dv} = -\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{v_y}{v_x} \quad (= \text{tg}\alpha)$$

valóban áramvonal

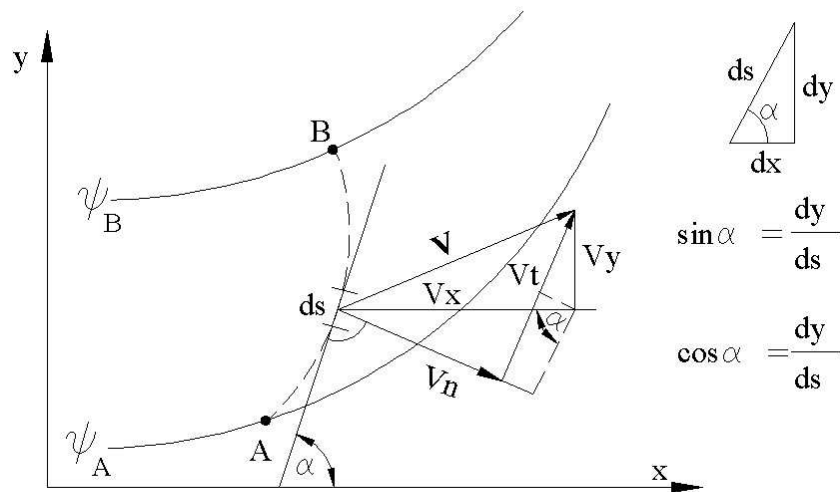


Potenciál nívóvonal: $\Phi(x,y)=\text{const}$

$$d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0$$

$$\rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{pot} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{dv}} \quad \dots \text{ortogonális trajektóriák}$$

-áramvonalon nincs átáramlás \Rightarrow 2 áramvonal között a térfogatokban minden keresztmetszetben azonos



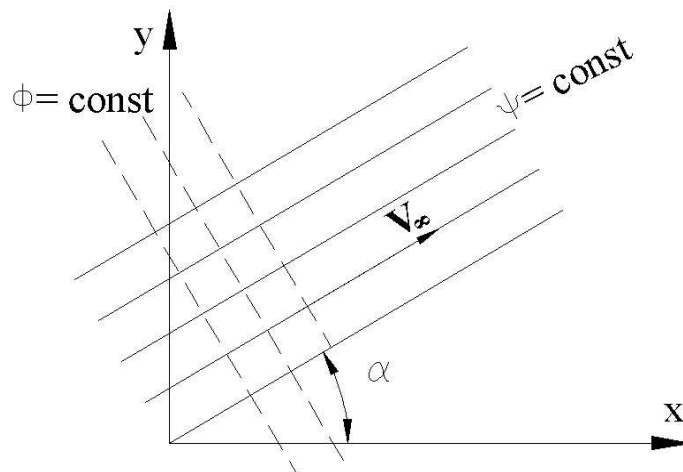
$\mathbf{v} = v_x \mathbf{j} + v_y \mathbf{j}$... felbontható v_n és v_t -re

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_A^B v_n ds = v_n = v_x \sin \alpha - v_y \cos \alpha = \int_A^B \underbrace{v_x}_{\frac{\partial \psi}{\partial y}} \underbrace{\sin \alpha ds}_{dy} - \int_A^B \underbrace{v_y}_{-\frac{\partial \psi}{\partial x}} \underbrace{\cos \alpha ds}_{dx} = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \\
 &= \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \\
 Q &= \int_A^B v_n ds = \psi_B - \psi_A
 \end{aligned}$$

Térfogatáram = az áramfüggvény értékeinek különbsége a két áramvonalon.

Alapáramlások:

1, Párhuzamos áramlás



komplex potenciál $W(z)$

$$W(z) = v_\infty e^{-i\alpha} z$$

$$\mathbf{v} = \frac{dW}{dz} = v_\infty e^{-i\alpha}$$

$$\mathbf{v} = v_\infty e^{i\alpha}$$

áramvonalon:

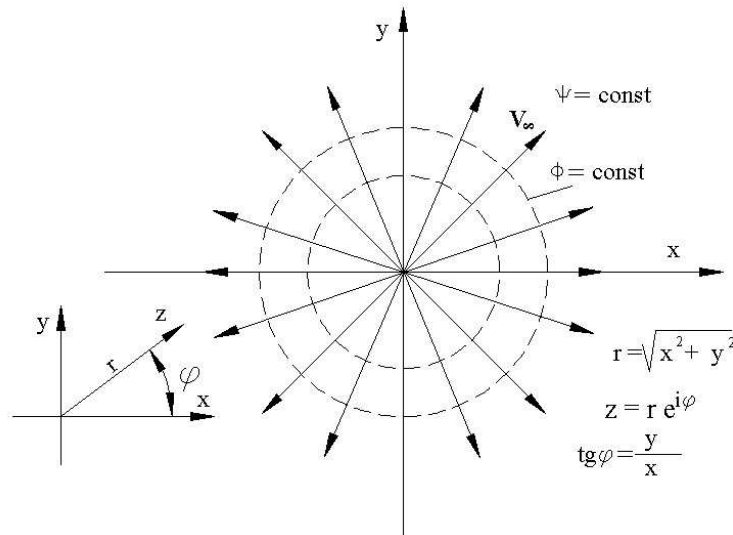
$$W = v_\infty (\cos \alpha - i \sin \alpha)(x + i y) = \overbrace{v_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha)}^{\Phi(x,y)} + i \overbrace{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}^{\psi(x,y)} v_\infty$$

$$\psi(x,y) = v_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = K$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{K}{v_\infty \cos \alpha} \quad \text{egyenes sereg}$$

belátható, hogy a $\Phi = \text{áll.}$ görbék ezen görbékre merőleges egyenes sereg.

2, Forrás:



$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

$$\mathbf{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{Q}{2r} e^{-i\varphi}$$

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{2\pi r} e^{i\varphi}$$

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(r e^{i\varphi}) = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + \underbrace{\ln e^{i\varphi}}_{i\varphi}) = \underbrace{\frac{Q}{2\pi} \ln r}_{\Phi} + i \underbrace{\frac{Q}{2\pi} \varphi}_{\psi}$$

Áramvonal:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \underbrace{\varphi}_{\arctg \frac{y}{x}} = K \rightarrow \arctg \frac{y}{x} = \frac{2\pi K}{Q} \quad / \quad \text{tg}$$

$$\frac{y}{x} = \text{tg} \frac{2\pi K}{Q}$$

$$y = x \text{tg} \frac{2\pi K}{Q} \quad \text{origón átmenő sugárban}$$

(áramvonal)

potenciál nívóvonal:

$$\Phi = \text{const.} \quad \Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = K$$

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\pi K}{Q} \quad / \quad e^{\dots}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \exp\left(\frac{2\pi K}{Q}\right)$$

$$x^2 + y^2 = \exp\left(\frac{4\pi K}{Q}\right) \text{ körszelet (origó középponttal)}$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad ; \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi = \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial r}}_{\frac{Q}{2\pi}} \underbrace{\mathbf{e}_r}_{e^{i\varphi}} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}}_0 \mathbf{e}_\varphi = \frac{Q}{2\pi r} e^{i\varphi}$$

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad ; \quad v_\varphi = 0 \quad \text{sugár irányú sebességek}$$

$Q > 0$...forrás .. áramlás az origóból kifelé

$Q < 0$ nyelő áramlás az origó felé

3, Potenciális örvény:

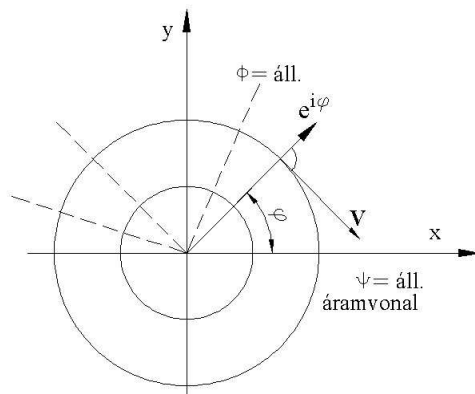
forgósél, tornádó, ...

a részecskék forgó mozgást végeznek, de $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ (nem forognak)!

$$W(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\mathbf{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \quad \begin{matrix} z = re^{i\varphi} \\ i = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{matrix} = \frac{\Gamma i}{2\pi r e^{i\varphi}} = \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$



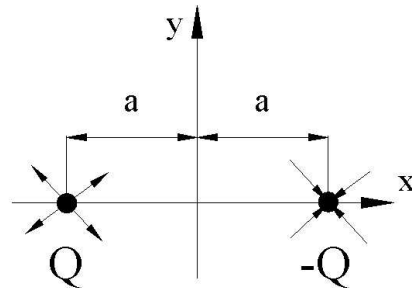
$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\varphi}) = \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\varphi) = -\underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}}_{\Phi} \varphi + i \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}}_{\Psi} \ln r$$

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = k \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = \exp\left(\frac{4\pi}{\Gamma} k\right) \text{ kör.}$$

Nívóvonal... $\varphi = \text{const}$...sugárral \Rightarrow szerepcseré a forráshoz képest

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi ; \quad \mathbf{v} = \nabla\Phi ; \quad v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 ; \quad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

4, Dipólus:



$a \rightarrow 0$ és $Q \rightarrow \infty$ úgy, hogy $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} aQ = \text{véges érték} = M\pi$

M ..dipólus erőssége

$$W(z) = \frac{M}{z} \qquad M = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \frac{Qa}{\pi}$$

$$\mathbf{v} = \frac{dW}{dz} = -\frac{M}{z^2} = -\frac{M}{r^2 e^{2i\varphi}} = \frac{M}{r^2} e^{-2i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$-1 = e^{i\pi}$

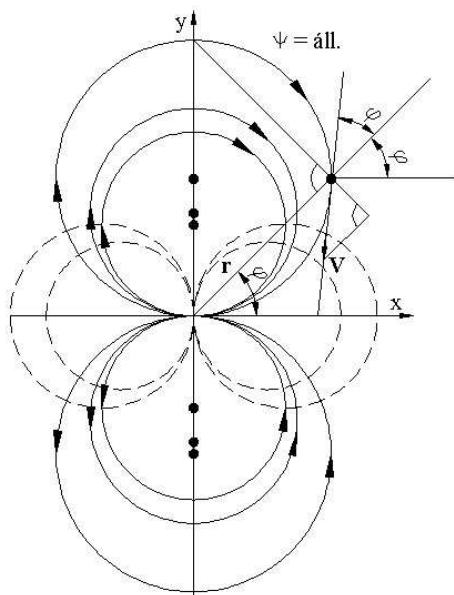
$$\mathbf{v} = \frac{M}{r^2} e^{2i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$W = \frac{M}{x+iy} \frac{x-iy}{x-iy} = M \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{Mx}{x^2+y^2} - i \frac{My}{x^2+y^2} = \Phi + i\psi$$

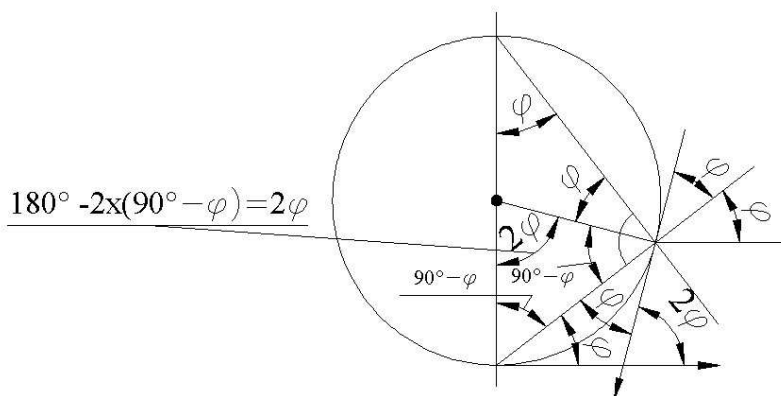
$$\psi(x,y) = -\frac{My}{x^2+y^2} = K \quad \rightarrow \quad K(x^2+y^2) + My = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{K}y = 0$$

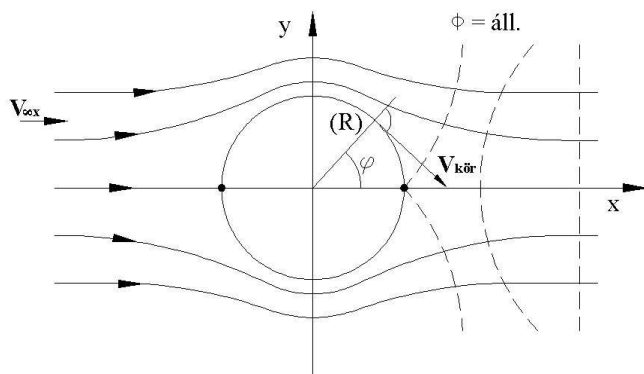
$$x^2 + (y + \frac{M}{2K})^2 = \frac{M^2}{4K^2} \quad \dots \text{origón átmenő körök, középpontok az } y \text{ tengely mentén}$$



$\varphi \rightarrow 2\varphi - \pi$ (visszafordítás)



Elemi áramlások összegzése (szuperpozíció):
Dipólus párhuzamos áramlásban:



$$W(z) = v_{\infty} z + \frac{M}{z}$$

$$\mathbf{v} = v_{\infty} \mathbf{e}_x - \frac{M}{z^2}$$

$$W = v_{\infty} (x + iy) + \frac{M}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = v_{\infty} (x + iy) + M \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \Phi + i\psi$$

$$\psi(x, y) = y \left(v_{\infty} - \frac{M}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} v_{\infty x} \frac{M}{x^2+y^2} = 0 \rightarrow x^2+y^2 = \frac{M}{v_{\infty x}} = R^2 \dots \text{kör} \\ y=0 \dots \text{egyenes} \end{cases}$$

$$R = \sqrt{\frac{M}{v_{\infty x}}} ; \quad M = v_{\infty x} R^2$$

így,

$$W(z) = v_{\infty x} \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dW}{dz} = v_{\infty x} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

torló pontok: $z = \pm R$

Sebesség a kör kerületén: $z_{\text{kör}} = R e^{i\varphi}$

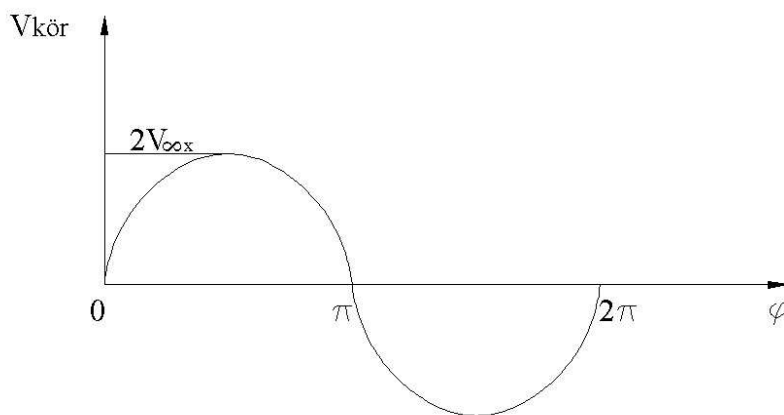
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{kör}} &= v_{\infty x} \left(1 - \frac{R^2}{R^2 e^{2i\varphi}} \right) = v_{\infty x} (1 - e^{-2i\varphi}) = v_{\infty x} \underbrace{(1 - \cos 2\varphi)}_{2\sin^2 \varphi} + i v_{\infty x} \underbrace{\sin 2\varphi}_{2\sin \varphi \cos \varphi} = 2v_{\infty x} \sin \varphi (\sin \varphi + i \cos \varphi) = \\ &= 2v_{\infty x} \sin \varphi i (\cos \varphi - i \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{\text{kör}} = 2v_{\infty x} \sin \varphi e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$\mathbf{v}_{\text{kör}} = 2v_{\infty x} \sin \varphi e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

szimmetrikus áramlás \rightarrow nincs felhajtóerő

D'Alambert féle paradoxon



$$W(z) = v_{\infty x} \left(r + \frac{R^2}{z} \right) = v_{\infty x} \left[x + iy + \frac{R^2(x+iy)}{x^2+y^2} \right] = v_{\infty x} \underbrace{\frac{x}{r \cos \varphi}}_{\Phi} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + i v_{\infty x} y \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\Phi = v_{\infty x} \left(r + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \varphi ; \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi$$

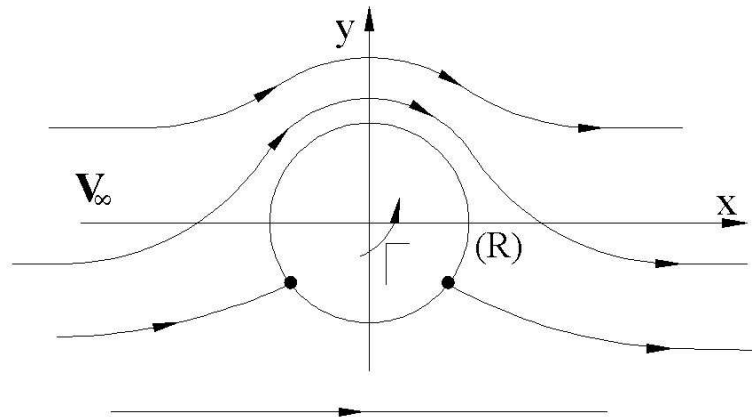
$$v_r = v_r(r, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_{\infty x} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \varphi$$

$$v_\varphi = v_\varphi(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -v_{\infty x} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \varphi$$

felületen: $v_r(R, \varphi) = 0$ érintőleges

$$v_\varphi(R, \varphi) = -2v_{\infty} \sin \varphi$$

Kör körüli cirkulációs áramlás:



$$W = v_{\infty x} \left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\mathbf{v} = v_{\infty x} \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

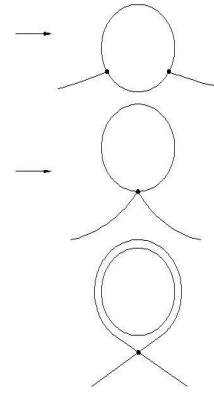
torlópontok: $\mathbf{v}(z_T) = \mathbf{0}$

$$v_{\infty x} \left(1 - \frac{R^2}{z_T^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z_T} = 0 \quad /z_T^2$$

$$v_{\infty x} z_T^2 + \frac{i\Gamma}{2\pi} z_T - v_{\infty x} R^2 = 0$$

$$z_T = -\frac{i\Gamma}{4\pi v_{\infty x}} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}}\right)^2 + R^2}$$

- a, $\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}} < R$... két a kör kerületén \rightarrow
 b, $\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}} = R$... egy a kör kerületén \rightarrow
 c, $\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}} > R$... két torlópont képz. tengelye \rightarrow



(képzetes)

u.i. a, és b, esetben

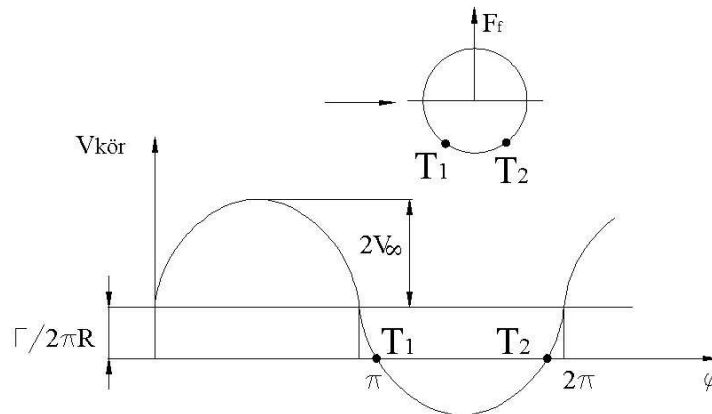
$$z_T^2 = z + z_T = \left(-\frac{i\Gamma}{4\pi v_{\infty x}} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}}\right)^2 + R^2}\right) \left(\frac{i\Gamma}{4\pi v_{\infty x}} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}}\right)^2 + R^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}}\right)^2 + \left[-\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_{\infty x}}\right)^2 + R^2\right] = R^2 = z_T^2$$

Sebesség a kör kerületén: $z_{kör} = Re^{i\varphi}$

$$\mathbf{v}_{kör} = v_{\infty x} (1 - e^{-i2\varphi}) + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\varphi} = v_{\infty x} \underbrace{(1 - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}_{2v_{\infty x} \sin \varphi e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})}} + \frac{\Gamma}{2\pi R} e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$\mathbf{v}_{kör} = (2v_{\infty x} \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R}) e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})} \quad ; \quad \mathbf{v}_{kör} = (2v_{\infty x} \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R}) e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$



$$v_{kör} = 2v_{\infty x} \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

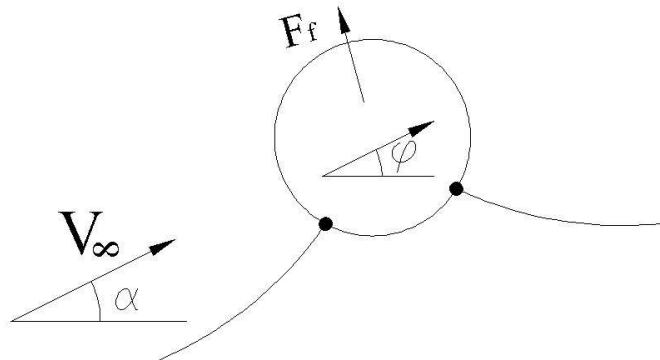
nem szimmetrikusáramlás

a henger felett nagyobb a sebesség mint alatta

a henger felett kisebb a nyomás mint alatta

\Rightarrow felhajtóerő $F_f = \rho \Gamma v_{\infty x}$ [N/m]

Ha megfúvási szög van, akkor



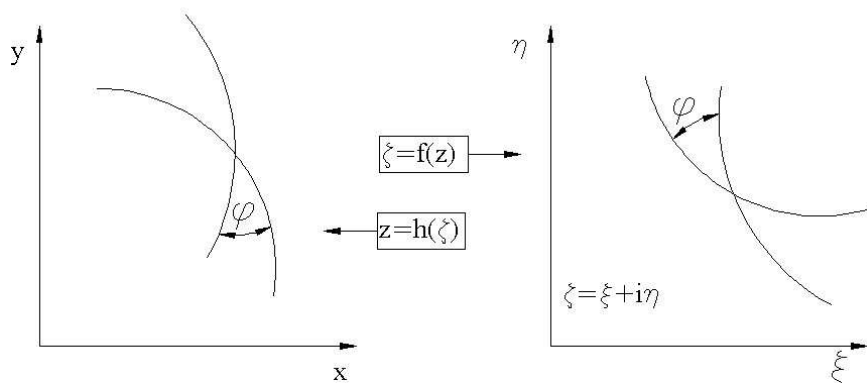
$$v_{kör} = 2v_{\infty} \sin(\varphi - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

felhajtóerő: $F_f = \rho \Gamma v_{\infty}$ v_{∞} -re \perp

Konform leképezés

Riemann:

Minden egyenesen összefüggő tartomány egy alkalmasan választott reguláris komplex függvénnyel körre leképezhető.



Konformis leképezés: szög- és aránytartó leképezés.

A leképezés geometriai oldala: kör \rightarrow kívánt profil

Fizikai leképezés: a két sík egymásnak megfelelő pontjaiban a
 komplex pot. azonos \rightarrow áramvonal \rightarrow áramvonal
 \rightarrow elemi pot. vonal \rightarrow elemi pot. vonal

ζ síkon $W^*(\zeta) = W[h(\zeta)] = \Phi^*(\xi, \eta) + i\psi^*(\xi, \eta)$

$$\frac{dW^*}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \frac{1}{f'(z)} \Rightarrow \mathbf{v}(\zeta) = \frac{\mathbf{v}(z)}{f'(z)}$$

A leképezés szinguláris pontja ott van, ahol

$$f'(z) = 0 ; f'(z) = \infty$$

és

$$|v(\zeta)| = |v(z)| \left| \frac{1}{f'(z)} \right|$$

A z síkon ismert a kör körüli cirkulációs áramlás $v(z)$ sebességtere, amiből a ζ sík megfelelő pontjaiban a $w(\zeta)$ sebesség meghatározható, amennyiben $f(z)$ leképző függvényt ismerjük. Olyan leképző függvényt célszerű választani, amelynek a végtelenben a z szerinti deriváltja egységnyi; így a két síkon a ∞ -beli sebesség arányos.

Zsukovszkij-féle leképezés:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 1$$

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \rightarrow f'(z) = 1 - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} \dots$$

A Zsukovszkij-féle leképezés:

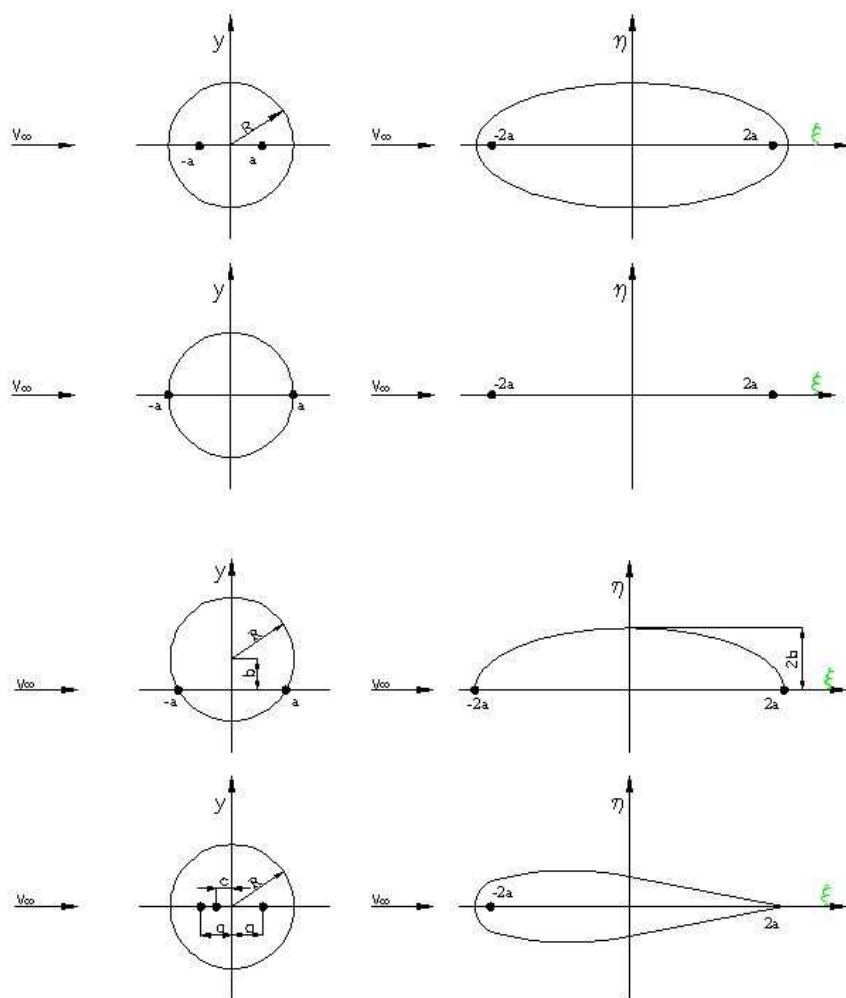
$$\zeta = f(z) = z + \frac{a^2}{z^3} - \dots$$

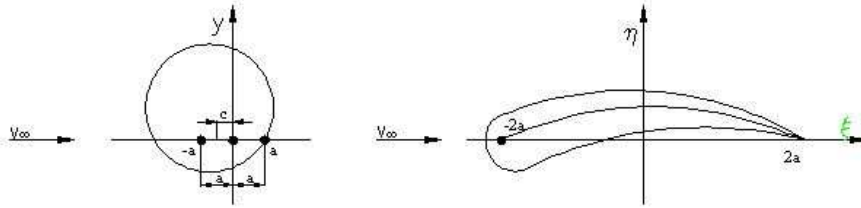
$$f'(z) = \frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a^2}{z^2}$$

szinguláris pontok: $z = \pm a$; illetve a ζ - síkon a $\zeta = \pm 2a$

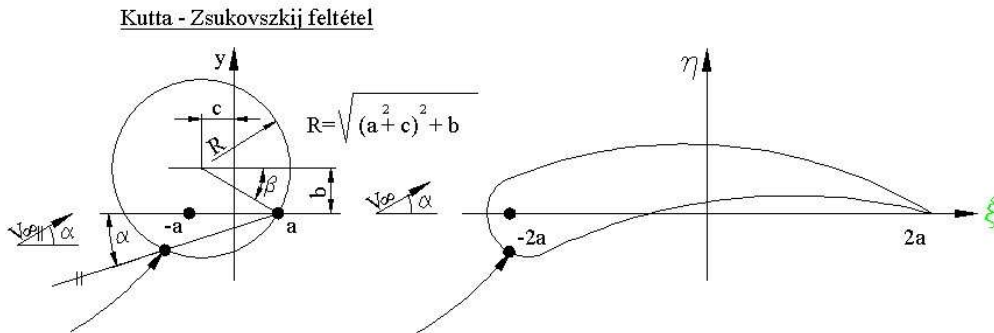
$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} = x + iy + \frac{a^2}{x + iy} = x + iy + a^2 \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\xi = x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \eta = y - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$$





Kutta- Zsukovszkij feltétel :



A sima leáramlás feltétele:

$$f'(z = a) = 0 \rightarrow (\zeta = 0) = \text{ legyen } (\Gamma \text{ célszerű választása})$$

$$\text{ legyen } v(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \text{ belátható, hogy véges határérték}$$

$$\mathbf{v}_{\text{kör}} = 2v_{\infty} \sin(\varphi - \alpha) \frac{\Gamma}{2\pi R} \rightarrow \Gamma = 4R\pi v_{\infty} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{ ahol } R = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$$

$$v_{\text{kör}}(\varphi = -\beta) = 0 \rightarrow 0 = 2 v_{\infty} \sin(-\beta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \rightarrow \text{ahol } \Gamma = 4R\pi v_{\infty} \sin(\alpha + \beta)$$

Felhajtóerő: $F_f = \rho v_{\infty} \Gamma = 4 \pi \rho v_{\infty}^2 R \sin(\alpha + \beta)$

Zsukovszkij- profilnál: $L \approx 4R \rightarrow F_f \approx L \pi \rho v_{\infty}^2 \sin(\alpha + \beta) \quad [\text{N/m}]$

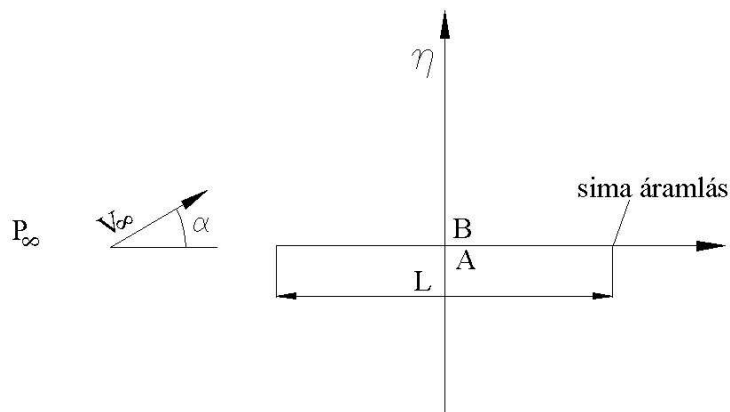
Ez az erő nagy fizikai jelentőséggel bír ; ez az alapja ugyanis a repülőgépek szárnyprofil kialakításainak(felszállás / leszállás).

Felhajtóerő tényező :

$$C_f = \frac{F_f}{\frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 L} \cong \frac{2\pi \sin(\alpha + \beta)}{1}$$

(itt F_f az egységnyi szélességű szárnyszelvényre ható erő)

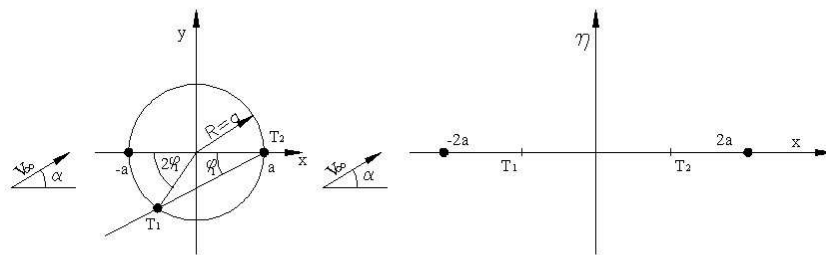
Példa a konform leképzésre : Síklap menti áramlás



Példa: $p_{\infty}, v_{\infty}, L, \alpha, \rho$; sima leáramlás teljesül

$$v_{\text{lap}} = ? \quad p_{\text{lap}} = ? \quad \Delta p = p_A - p_B$$

$F_f / b = ? \dots$ egységnyi szelvényű felületre ható erő



Zukovskij-féle leképezés :

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a^2}{z} = x + iy + \frac{a^2}{x + iy} = x + iy \frac{a^2(x - iy)}{x^2 + y^2} = \xi + i\eta$$

$$\xi = x\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right); \quad \eta = y\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{a leképző függvény}$$

ha az $x^2 + y^2 = a^2$ kört képezzük le , akkor $\xi = 2x$ és $\eta = 0$ adódik (geometriai leképezés)

kör körüli cirkulációs áramlás:

$$\mathbf{v}(z_{kör}) = \left[2v_\infty \sin(\alpha - \beta) + \frac{\Gamma}{2R\pi} \right] e^{-i(\varphi - \pi/2)}$$

Fizikai leképezés :

$$W^*(\zeta) = W(z)$$

$$\underbrace{\frac{dW}{dz}}_{v(z)} = \underbrace{\frac{dW^*}{d\zeta}}_{v(\zeta)} \underbrace{\frac{d\zeta}{dz}}_{v(z)} \rightarrow \mathbf{v}(\zeta) = \mathbf{v}(z) \frac{1}{f'(z)}$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = f'(z) = 1 - \frac{a^2}{z^2}$$

tehát a leképezés szinguláris pontjai: $z = \pm a$; és $z = 0$

$$z_{\text{kör}} = a e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned} f'(z_{\text{kör}}) &= 1 - \frac{1}{e^{2i\varphi}} = 1 - e^{-2i\varphi} = 1 - \underbrace{\cos 2\varphi}_{2\sin^2\varphi} + i \underbrace{\sin 2\varphi}_{2\sin\varphi\cos\varphi} = 2\sin\varphi(\sin\varphi + i\cos\varphi) = \\ &= 2\sin\varphi \underbrace{i}_{e^{i\pi/2}} \underbrace{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{e^{-i\varphi}} = \underline{2\sin\varphi e^{-i(\varphi-\pi/2)}} \end{aligned}$$

Sima leáramlás :

$$\mathbf{v}_{\text{kör}}(\varphi = 0) = \mathbf{0}$$

$$2v_{\infty}\sin(-\alpha) + \frac{\Gamma}{2R\pi} = 0$$

$$\frac{\Gamma}{2R\pi} = 2v_{\infty}\sin\alpha$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_{\text{kör}} = 2v_{\infty}[\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha] e^{-i(\varphi - \pi/2)}$$

$$\mathbf{v}_{\text{lap}} = \frac{\mathbf{v}_{\text{kör}}}{f'(z_{\text{kör}})} = \frac{2v_{\infty}[\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha]e^{-i(\varphi - \pi/2)}}{2\sin\varphi e^{-i(\varphi - \pi/2)}}$$

$$\rightarrow \mathbf{v}_{\text{lap}}(\varphi) = v_{\infty} \frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha}{\sin\varphi} = v_{\text{lap}}(\varphi) \quad \text{ahol: } \varphi \neq 0, \pi$$

Mert a $\varphi = 0, \pi$ a leképezés szinguláris pontjai !

$$\lim v_{lap} = v_{\infty} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \varphi} = \left(\frac{0}{0} \right) = v_{\infty} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi} = v_{\infty} \cos \alpha = v_{\infty}$$

tehát : $\lim_{\varphi \rightarrow 0} v_{lap}(\varphi) = v_{\infty} \cos \alpha$ –sima leáramlás esetén

φ	$\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha$	$\sin \varphi$	v_{lap}
$0 < \varphi < \pi$	>0	>0	>0
$\pi < \varphi < \pi + 2\alpha$	>0	<0	<0
$\pi + 2\alpha < \varphi < 2\pi$	<0	<0	>0

$$\rightarrow v_{lap}(\varphi) = v_{\infty} \frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \varphi} \quad \text{ahol: } \varphi \neq 0, \pi$$

$$v_{lap}(\varphi) = v_{\infty} \cos \alpha \quad \varphi = \pi$$

A Bernoulli – egyenlet :

$$\frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{p_{lap}}{\rho} + \frac{v_{lap}^2}{2}$$

$$p_{lap} = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} (v_{\infty}^2 - v_{lap}^2)$$

$$p_{lap}(\varphi) = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 \left\{ 1 - \left[\frac{\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \varphi} \right]^2 \right\}$$

$$p_{lap}(\varphi_A) = p_{lap} \left(\varphi = -\frac{\pi}{2} \right) = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} v_{\infty}^2 \left\{ 1 - \left[\frac{\sin \left(-\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin \alpha}{\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)} \right]^2 \right\}$$

$$p_{lap}(\varphi_B) = p_{lap}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = P_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left\{ 1 - \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right]^2 \right\}$$

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right]$$

ahol : $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos \alpha$; $\sin(\pi/2+\alpha) = \cos \alpha$

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 \left[\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

$$\underline{\Delta p = \rho v_\infty^2 \sin 2\alpha = p_A - p_B}$$

A felhajtóerő :

$$F_f = \rho \Gamma v_\infty = \rho \frac{4R}{L} \pi \sin \alpha v_\infty^2 = \rho L \pi \sin \alpha v_\infty^2 \text{ [N/m]}$$

$$\underline{F_f = \rho L \pi \sin \alpha v_\infty^2 \text{ [N/m]}}$$

Navier – Stokes – féle mozgásegyenlet :

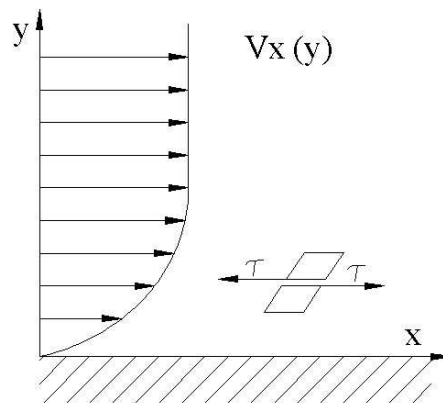
Sir Gabriel Stokes (1819 - 1903)
brit matematikus, fizikus

L. M. Navier (1785 - 1836)

Eddig : súrlódásmentes folyadék – a felületi erők merőlegesek a felületre (nincs tangenciális komponens)!

Valóság : ellenállás a véges sebességű alakváltozással szemben folyadék súrlódás(-nak nevezzük)

Fal menti áramlás:



$$v_x = v_x(y) ; v_y = v_z = 0 \quad \mathbf{v} \Big|_{\text{fal}} = \mathbf{0}$$

A faltól távolodva először rohamosan nő a sebesség, később egyre kisebb mértékben. Ahol erőteljesen változik sebesség, ott nagy az alakváltozás sebessége → jelentős súrlódási ellenállás. Ennek mértékéül a nyírófeszültségek szolgálnak.

Tekintsük egy síkfal menti AD lamináris áramlást (a folyadékreszecskek ugyanabban a rétegben maradnak a mozgásuk során.)

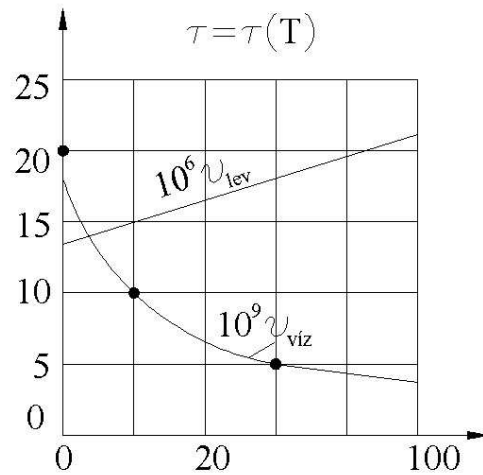
Mint láttuk – a súrlódási törvény ; Newton (1643 - 1727)
A Newton - féle súrlódási törvény

$$\tau = \tau_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dv_y}$$

Newtoni folyadék : amely eleget tesz a fenti összefüggéseknek $\tau = \tau(T)$

η ... dinamikai viszkozitási tényező

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \dots \text{kinematikai viszkozitási tényező [m}^2/\text{s]}$$



Newtoni súrlódási törvény kiterjesztése térbeli (3 D) esetre:

G.G. Stokes (1819-1903)

(Novier: 1827 ρ =állandó eset; Stokes: 1845 $\rho \neq$ állandó)

A rugalmasságtanhoz analóg módon (~ Hook törvény)

Stokes-féle viszkozitási törvény:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Normális irányú feszültségek (Hook analógia)

Stokes-féle viszkozitási törvény

$$\sigma_x = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (4)$$

$$\sigma_y = 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_z = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (6)$$

η' .. második viszkozitási tényező

$$p \text{ def.: } p = -\frac{F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}}{3}$$

viszont:

$$\mathbf{F} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - p \end{vmatrix}$$

F első skalárinvariánsa (főátlóban lévő elemek összege):

$$F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = -3p = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3p$$

$$\rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$$

$$(4) + (5) + (6) \rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 3\eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

így

$$\eta' = -\frac{2}{3}\eta$$

így a súrlódási tenzor:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \mathbf{S} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I}$$

ahol:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \text{ .. alakváltozási sebesség tenzor}$$

Feszültségtenzor:

$$\mathbf{F} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{F} = -p\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{S} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \text{Stokes-féle viszkozitási törvény}$$

Az általános mozgásegyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\delta} \operatorname{div} \mathbf{F} \quad (7)$$

η = állandó feltevással:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -\nabla p + 2\eta \operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{2}{3}\eta \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + \nabla(\nabla \mathbf{v})]$$

$\Delta = \nabla * \nabla$.. Laplace operátor

így

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \eta \left(1 - \frac{2}{3}\right) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v})$$

így (7):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v})$$

a Navier- Stokes egyenlet.

Másodrendő parciális differenciál egyenlet (PDE) (Euler elsőrendű volt) mindkét egyenlet nem lineáris.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$$

a turbulens áram leírására is alkalmas

ha $\rho = \text{állandó} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (const. egyenlet)

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

részletesebben: x, y, z koordináta rendszerben:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

peremfeltétel:

$$\mathbf{v} \Big|_{\text{fal}} = \mathbf{0}$$

(illetve a fal sebességgel mozog a fallal érintkező folyadék részecske)

Navier- Stokes egyenlet zárt alakú néhány esetben.

Navier- Stokes zárt mentes eset: $v = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$ (Euler féle mozgás egyenlet)

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ hidrosztatika: } \mathbf{0} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Energia egyenlet

A termodinamika I. főtétele mozgó zárt rendszerre.

(Ugyanazok a folyadékrészek vannak benne)

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt}$$

- $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$.. a rendszerbe időegység alatt bevezetett hő (<0, ha leadott hő)
- $\dot{W} = \frac{dW}{dt}$.. a rendszer által a környezetén időegység alatt végzett munka
- $E = \int_{(V_t)} \rho e dV$.. energia; V_t .. együttmozgó térfogat; V .. ellenőrző térfogat
- $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho e dV + \int_{(A)} \rho e \mathbf{v} d\mathbf{A}$ E szubsztanciális deriváltja
- $e = u + gz + \frac{v^2}{2}$... fajlagos energia
- u .. belső energia
- gz .. potenciális energia
- $\frac{v^2}{2}$.. kinetikus energia

Itt V az ellenőrző (fix) térfogat, A az ellenőrző felület,

így:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{(A)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A} \quad (*)$$

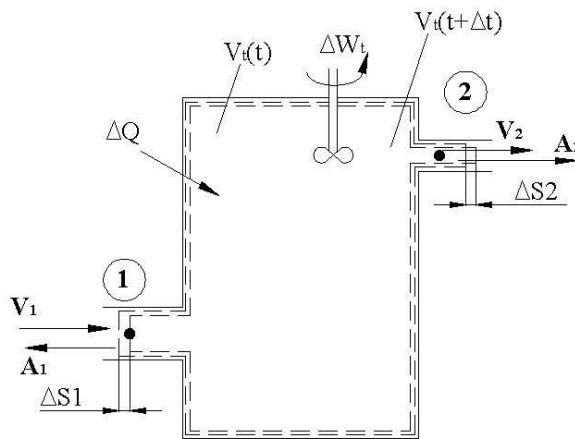
W két részre bontható:

$$W = W_t + W_p$$

- W_p - az áramló közegnek a nyomás révén a környezeten végzett munka –ÁTTOLÁSI MUNKA
- W_t tengelyen - bevezetett vagy kivett munka ($W_t = -W_{\text{technikai}}$)

Turbina: - energiakivétel, $W_t > 0$ a rendszer végez munkát (pl.: turbina lapáton)
Szivattyú, kompresszor: -energia bevétel $W_t < 0$ a gép végez munkát a rendszeren (a rendszer negatív munkavégzése)

(W_t minden bevezetett vagy elvitt munka, ami nem tartozik W_p - hez) (pl.:a veszteségi erők munkája is)



kilépés: a környezetre ható erő: $p_2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{F}_2$

Az A_2 felület Δt idő alatt $\Delta \mathbf{s}_2 = \mathbf{v}_2 \Delta t$ elmozdulást végez.

A kilépésnél a környezeten Δt alatt végzett munka:

$$\Delta W_{p2} = \mathbf{F}_2 \Delta \mathbf{s}_2 = p_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{A}_2 \Delta t$$

$$\dot{W}_{p2} = \frac{\Delta W_{p2}}{\Delta t} = p_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{A}_2$$

belépés: a környezetre ható erő:

$$p_1 \mathbf{A}_1 = \mathbf{F}_1$$

Az A_1 felület Δt idő alatt $\Delta \mathbf{s}_1 = \mathbf{v}_1 \Delta t$ elmozdulást végez.

A belépésnél a környezetben Δt alatt végzett munka:

$$\Delta W_1 = \mathbf{F}_1 \Delta \mathbf{s}_1 = p_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{A}_1 \Delta t$$

$$\dot{W}_{p1} = \frac{\Delta W_{p1}}{\Delta t} = p_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{A}_1 < 0 \text{ a környezet végez munkát a}$$

rendszeren a belépésnél ($\vec{v}_1 \vec{A}_1 < 0$)

Mivel az ellenőrző felület 1 és 2-es keresztmetszetétől eltérő helyein (palást... A_p) nincs átáramlás, így

$$p \mathbf{v} d\mathbf{A} = 0; \quad \text{és mivel: } (A) = (A_1) + (A_2) + (A_p)$$

így:

$$\dot{W}_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_p}{\Delta t} = \int_{(A)} p \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{(A)} \frac{p}{\rho} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

Ahol, A a teljes mozgó $V(t)$ térfogat $A(t)$ határoló felületét jelenti; $\Delta t \rightarrow 0$ esetben ez az (A_1) , (A_2) és $(A_{palást})$ felületeket tartalmazza.

(*) energiaegyenletek:

$$\dot{Q} - \dot{W}_t - \int_{(A)} \frac{p}{\rho} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{(A)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{(A)} \rho \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

$h = u + \frac{p}{\rho}$ fajlagos entalpia

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{(A)} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A} \quad \text{energiaegyenlet}$$

A rendszerbe bevezetett hő illetve a rendszeren végzett időegység alatti munka egyrészt a rendszerben lévő közeg energiájának időbeli változását, valamint a rendszerhatárokon átáramló közeg energiaváltozását okozza.

Stacionárius energiaegyenlet :

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \int_{(A)} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

Itt a tartomány belsejében lévő „dolgokkal” nem kell foglalkoznunk, elég a tartomány be és kilépő részein lévő jellemzőket vizsgálni.

Példa:

Egy gőzturbinába p_1 (1.4MPa) nyomású és (400 °C) hőmérsékletű h_1 (3121 $\frac{kJ}{kg}$) fajlagos entalpiájú túlhevített gőz érkezik. A turbinát elhagyó gőz p_2 (101 kPa) nyomású és T_2 (100 °C) hőmérsékletű, h_2 (2676 $\frac{kJ}{kg}$) fajlagos entalpiájú. A gáz belső sebessége v_1 (15 $\frac{m}{s}$),

kilépő sebessége v_2 (60 $\frac{m}{s}$). A turbina be és kilépő pontja közötti szintkülönbség

elhanyagolható. A turbinafalon fellépő hőveszteség \dot{Q} (-7600 $\frac{kJ}{h}$), a gáz tömegárama

\dot{m} (0,5 $\frac{kg}{s}$).

Mekkora a turbina teljesítménye?

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \int_{(A)} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A} = (h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2) \rho_2 A_2 V_2 - (\frac{v_1^2}{2} + h_1 + gz_1) \rho_1 V_1 A_1 = \dot{m} \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + h_2 - h_1 \right)$$

$$\dot{W}_t = \dot{Q} + \dot{m} \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + h_2 - h_1 \right) = \frac{-7,6 * 10^6 J}{3600s} + 0,5 \left[\frac{15^2 - 60^2}{2} + (3121 - 2676) 10^3 \right] =$$

$$= -2,11 kW + 0,5 \left[-1,69 \frac{kJ}{kg} + 445 \frac{kJ}{kg} \right]$$

$$\dot{W}_t = 220 \frac{kJ}{kg} = 220 kW$$

A kinetikus energiaváltozás gőzturbinában általában elhanyagolható az entalpiaváltozáshoz képest (lásd e példa is).

Energiaegyenlet stacionárius csőáramra:

$$\dot{Q} - \dot{W}_t = \int_{(A)} \rho \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{(A_2)} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz \right) \rho v dA + \int_{(A_2)} \frac{v^3}{2} dA - \int_{(A_1)} \left(u + \frac{p}{\rho} + gz \right) \rho v dA - \int_{(A_1)} \frac{v^3}{2} dA$$

A be és kilépő (1-2) keresztmetszetekben a jellemzők átlagértékeit véve:

$$\dot{Q} - \dot{W}_t + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + u_1 \right) \int_{(A_1)} \rho v dA + \int_{(A_1)} \rho \frac{v^3}{2} dA = \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + u_2 \right) \int_{(A_2)} \rho v dA + \int_{(A_2)} \rho \frac{v^3}{2} dA$$

$$\int_{(A)} \rho v dA = \rho v A = \dot{m}$$

ahol v .. az átlagsebesség a keresztmetszetben.

$$\int_{(A)} \rho \frac{v^3}{2} dA = \alpha \rho \frac{v^3}{2} A$$

α A kinetikus energia korrekciós tényezője A keresztmetszetben $\rho - t$ állandónak véve:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_{(A)} \left(\frac{v}{v} \right)^3 dA$$

Speciális esetek:

- a.) $\alpha = 1$, ha a sebesség állandó a keresztmetszetben ($v=v$)
 $\alpha > 1$, ha sebesség nem állandó
- b.) Lamináris csőáramlás: $\alpha = 2$
- c.) Turbulens csőáramlás: $\alpha = 1.01 \div 1.11$
 $\alpha = 1.06$ (gyakorlatban $\alpha \cong 1$)

Így az energiaegyenletet \dot{m} -al elosztva:

$$q - w_t + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + u_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + u_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2}$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \left[\frac{J}{kg} \right] \quad \text{a rendszerbe bevezetett fajlagos, tömegegységre vonatkoztatott hő}$$

$q > 0$ bevezetett

$q < 0$ elvezetett

$$w_t = \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \left[\frac{J}{kg} \right] \quad \text{a tengelyen elvitt (vagy bevezetett) fajlagos munka}$$

$w_t > 0$ turbina

$w_t < 0$ szivattyú, kompresszor

Összenyomhatatlan közeg: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$q - w_t + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + u_1 + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + u_2 + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2}$$

átrendezve:

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2}}_{e_{m1}} - w_t = \underbrace{\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2}}_{e_{m2}} + \underbrace{(u_2 - u_1 - q)}_{Y'}$$

$Y' = u_2 - u_1 - q$ fajlagos mechanikai energiavesztés

e_m fajlagos mechanikai energia

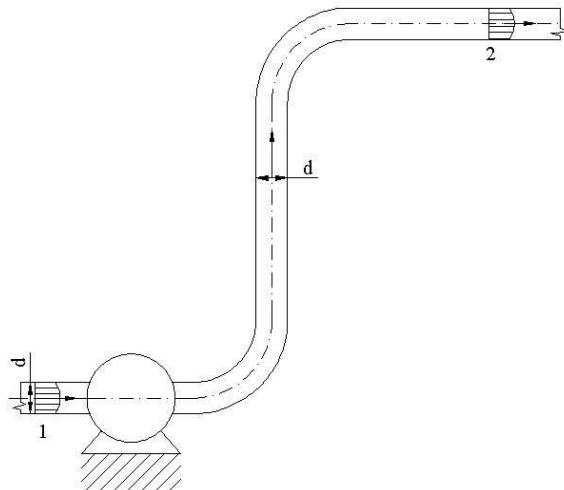
$$e_{m1} - w_t = e_{m2} + Y'$$

$Y' = u_2 - u_1 - q$ a rendszer belső energiájának növekedése illetve a rendszert elhagyó hő növeli a fajlagos energiavesztést.

Mivel az esetek többségénél az áramlás turbulens $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - w_t = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + Y'$$

Példa:



A $d(500\text{mm})$ átmérőjű cső $\rho \left[1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ sűrűségű vizet szállít az ábrán vázolt rendszerben. Az

1 és 2 keresztmetszetekben az abszolút nyomás p_1 (1.7 bar) illetve

p_2 (4.5 bar), az áramló közeg tömegárama \dot{m} (500 kg/s). z_2 (40m) z_1 (30m) adott. Az 1 és 2 pontok között fellépő fajlagos mechanikai energiaveszteség Y' ($29,43 \frac{J}{kg}$). Mekkora teljesítményt kell a rendszerbe szivattyúval betáplálni az adott szállítási feladat megvalósításához? $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \underbrace{\frac{P_{sz}}{\dot{m}}}_{-w_t} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + Y'$$

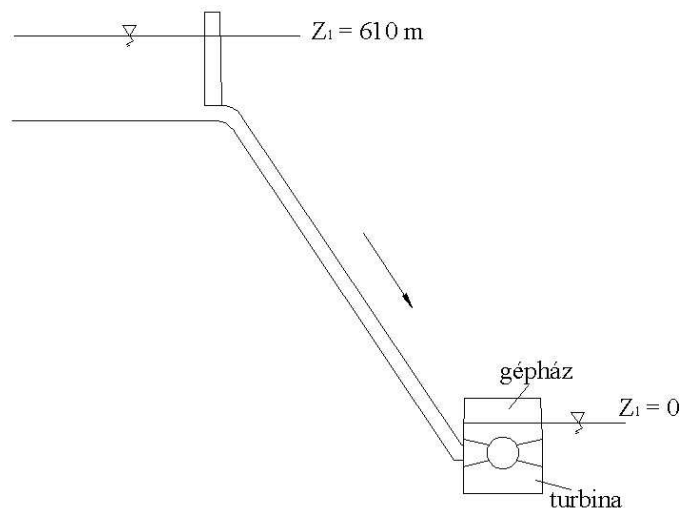
$$P_{sz} = \dot{m} \left[\underbrace{\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)}_{Y \text{ fajlagos energia növekmény a szivattyún}} + Y' \right]$$

$$\dot{m} = \rho A_1 v_1 = A_2 v_2 \rho$$

$$A_1 = A_2 = \frac{d^2 \pi}{4} \rightarrow v_1 = v_2 \rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0$$

$$P_{sz} = 500 \left(\frac{(4.5 - 1.7) 10^5}{10^3} + 9.81(40 - 30) + 29.43 \right) = 204 \text{ kW}$$

Példa:



Egy vízerőmű víznyelése $141 \frac{m^3}{s}$. A csőben fellépő fajlagos veszteség Y' ($1.52 \cdot 9.81 \frac{J}{kg}$)

Szintkülönbség: $z_1 - z_2 = 610m$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

Mekkora vízerőmű teljesítménye? ($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$)

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_t}{m} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + Y'$$

$$P_t = m \left[\underbrace{\frac{p_1 - p_2}{\rho}}_0 + \underbrace{\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}}_0 + g(z_1 - z_2) - Y' \right]$$

$$p_1 \approx p_2 = p_0$$

$v_1 = v_2 = 0$ (a szintkülönbség miatti nyomásváltozás elhanyagolható)

$$P_t = m [g(z_1 - z_2) - Y'] = \rho Q [g(z_1 - z_2) - Y'] = 1000 \cdot 141 \cdot [9.81 \cdot (610 - 1.52)] = 842 MW$$

További speciális eset:

A.) Ha a rendszerben nincs erő vagy munkagép $w_t = 0$

Így,
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + Y' \quad \frac{J}{kg}$$

$Y' = gh'$... h' súly egységre vonatkoztatott energiaveszteség

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h' \quad [m]$$

B.) Amennyiben az áramlás súrlódásmentes

$Y' = 0$ kapjuk az összenyomhatatlan közeg stacionárius áramlására érvényes Bernoulli egyenletet.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

Áramlások hasonlósága:

Feltételek:

- tökéletes geometriai hasonlóság (érdesség is)
- dinamikai hasonlóság

mozgásegyenletek egyetlen átvihetők a másik áramlásra

Súrlódási f. mozgásegyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Átszámítások:

$$\mathbf{r} = M_r \mathbf{r}^*$$

$$\mathbf{v} = M_v \mathbf{v}^*$$

$$t = \frac{M_r}{M_v} t^*$$

$$\rho = M_\rho \rho^*$$

$$p = M_p p^*$$

$$\nu = M_\nu \nu^*$$

$$\mathbf{f} = M_g \mathbf{f}^*$$

A * adataival a mozgásegyenlet

$$\frac{M_v^2}{M_r} \frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = M_g \mathbf{f}^* - \frac{M_p}{M_\rho M_r} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{M_\nu M_v}{M_r^2} \left[\Delta^* \mathbf{v}^* + \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{v}^*) \right]$$

dinamikai hasonlóság, ha két egyenlet csak egy konstans számban különbözik egymástól.

Így,
$$\frac{M_v^2}{M_r} = M_g = \frac{M_p}{M_\rho M_r} = \frac{M_\nu M_v}{M_r^2}$$

$\frac{M_v^2}{M_r}$: tehetetlenségi erők átszámítási tényezője

M_g : tömegeerők átszámítási tényezője

$\frac{M_p}{M_\rho M_r}$: nyomóerők átszámítási tényezője

$\frac{M_\nu M_v}{M_r^2}$: súrlódási erők átszámítási tényezője

a.) A tehetetlenségi és tömegeerők aránya

$$\frac{M_v^2}{M_r} = M_g \rightarrow \frac{M_v}{\sqrt{M_r M_g}} = 1 \rightarrow \frac{\frac{v}{v^*}}{\sqrt{\frac{l}{l^*} \frac{g}{g^*}}} = 1$$

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{l \cdot g}} \text{ Froude szám}$$

Szabad felszíni áramlás,

(pl.: hullámhossz)

b.) A tehetetlenségi és súrlódási erők aránya

$$\frac{M_v^2}{M_r} = \frac{M_v M_v}{M_r^2} \rightarrow \frac{M_v M_r}{M_v} = 1$$

$$\frac{\frac{v}{v^*} \frac{l}{l^*}}{\frac{\nu}{\nu^*}} = 1$$

$$\frac{vl}{\nu} = \frac{v^* l^*}{\nu^*}$$

$$Re = \frac{vl}{\nu} \text{ Reynolds szám}$$

c.) A tehetetlenségi és nyomóerők viszonya azonos

$$\frac{M_v^2}{M_r} = \frac{M_p}{M_\rho M_r}$$

$$\frac{v^2}{v^{*2}} \frac{d^*}{d} = \frac{\frac{\Delta p}{\rho}}{\frac{\Delta p^*}{\rho^*}} \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho v^2} d = \frac{\Delta p^*}{\rho^* v^{*2}} d^*$$

$$Eu = \frac{\Delta p d}{\rho v^2} \text{ Euler szám}$$

Δp : nyomásesés az l hosszban; d az l -re merőleges hossz (átmérő)

$$\Delta p = 2Eu\rho \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \text{ csősúrlódás} \quad \lambda: \text{csősúrlódás tényező}$$

d.) A nyomóerők és a súrlódóerők viszonya azonos

$$\frac{M_p}{M_\rho M_r} = \frac{M_v M_v}{M_r^2}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta p^*} \frac{\rho^*}{\rho} \frac{l^*}{l} = \frac{v}{v^*} \frac{v}{v^*} \frac{d^{*2}}{d^2}$$

$$\frac{\Delta p}{l} \frac{d^2}{\rho v} = \frac{\Delta p^*}{l^*} \frac{d^{*2}}{\rho^* v^* v^*}$$

$$Ha = \frac{\Delta p d^2}{l \eta v} \text{ Hagen szám}$$

$$Eu Re = \frac{\Delta p d}{\rho v^2} \frac{v d}{v} = \frac{\Delta p d^2}{l \eta v} = Ha = Eu Re$$

e.) A lokális és konvektív gyorsulás aránya azonos

$$\frac{M_v}{M_t} = \frac{M_v^2}{M_r} \rightarrow \frac{M_r}{M_v M_t} = 1$$

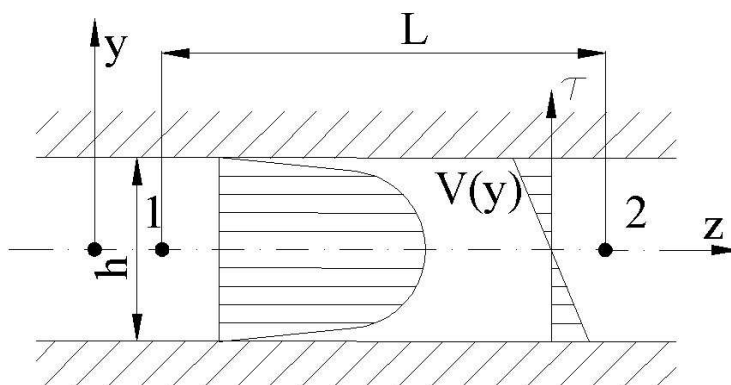
$$\frac{l}{v T} = \frac{l^*}{v^* T^*}$$

$$St = \frac{l}{v T} \text{ Strouhall szám}$$

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{f: frekvencia}$$

$$St = \frac{l f}{v}$$

Lamináris áramlás párhuzamos falak közti részben



Stacionárius 1D-s áramlás

Teljesen kialakult áramlás (fully developed flow)

$$v_x = v(y)$$

$$v_y = v_z = 0$$

térerőt elhanyagoljuk

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Kontinuitás: $\text{div } \mathbf{v} = 0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$v_x = v(y)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{v})$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

$$V = -\frac{\Delta p}{2\eta L} y^2 + C_1 y + C_2$$

Peremfeltétel:

$$V\left(\frac{h}{2}\right) = V\left(-\frac{h}{2}\right) = 0$$

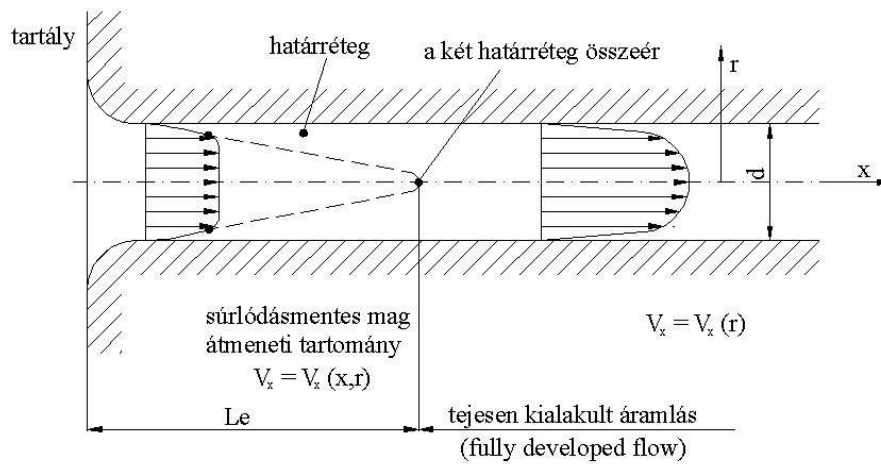
$$0 = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{h^2}{4} + C_1 \frac{h}{2} + C_2$$

$$0 = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{h^2}{4} - C_1 \frac{h}{2} + C_2$$

$$C_2 = \frac{\Delta p h^2}{8\eta L}$$

$$C_1 = 0$$

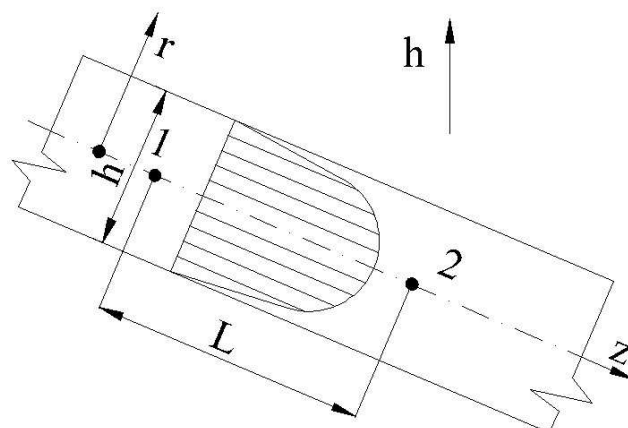
Lamináris áramlás kör keresztmetszetű csőben:



jól lekerekített belépés:

- közel homogén sebesség profil
- fal hatása: súrlódás, fal menti sebesség csökkenése, a mag sebességének növekedése (kontinuitás) \rightarrow vastagodó határréteg
- adott hossz után – teljes határréteg áramlás – $L_e = 0.058 Re d$ Langhaar (1942)

Mi az $x > L_e$ esettel foglalkozunk



Feltevések: $\rho = \text{áll}$, stacionárius, teljesen kifejlett áramlás

$$v_z = v(r)$$

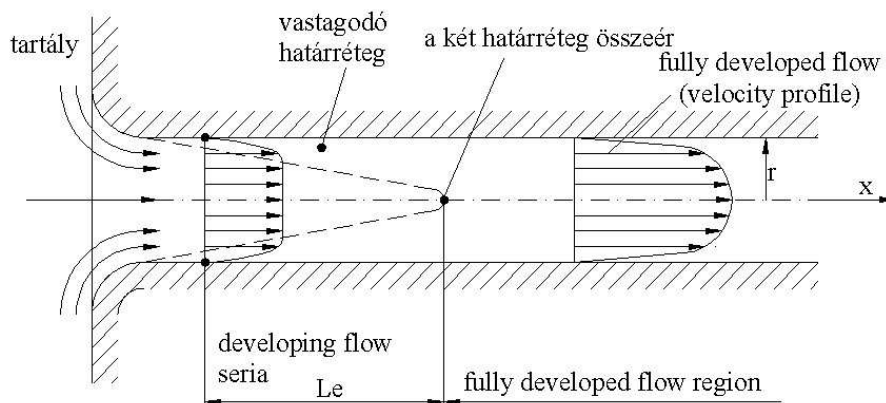
$$v_x = v_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

Kontinuitás:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$v_z = v(r)$$



$$\frac{L_e}{d} \approx 0.058 \text{Re} \text{ (laminar (Langhaar ... elmélete))}$$

(Sheeter, V. L. –Wylie, E. B fluid mechanica p193)

Szélcsatorna $L \ll L_e$ – ne legyen teljes a határ rétegáramlás a csatornában; súrlódás – csak a csatornafal közelében → vizsgált lesz – közel homogén áramlás van.

Energia egyenlet:

$$\alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + e'_s$$

$$e'_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\mathbf{f} = -\nabla(gh) \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

$$\text{így } \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla \left(gh + \frac{p}{\rho} \right) = -\nabla Y$$

Vegyük észre: $Y = \left(gh + \frac{p}{\rho} \right)$ ez a tömegegységre vonatkozó fajlagos helyzeti + nyomási energia.

$$\mathbf{0} = -\nabla Y + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial Y}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial Y}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial Y}{\partial z} + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned} \right\} Y = Y(z) \text{ tehát } Y \text{ csak } z \text{-től függhet, ezért írhatjuk } \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{dY}{dz}$$

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{f(r)} = \frac{1}{\underbrace{\nu}_{g(z)} \frac{dY}{dz}} = \text{const}$$

$$\frac{dY}{dz} = \frac{\Delta Y}{\Delta z} = \frac{p_2 - p_1}{\rho L} + g \frac{h_2 - h_1}{L} = -J$$

$$\Delta \mathbf{v} = -\frac{J}{\nu}$$

Nézzük a kapott egyenletet HKR-ben, ne felejtsük el, hogy Δv r függvénye volt! Mindenki

emlékszik a Laplace operátorra HKR-ben: $\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{J}{\nu}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{J}{\nu} r \quad / \int dr$$

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{J}{2\nu} r^2 + C_1$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{J}{2\nu} r + C_1 \frac{1}{r} \quad / \int dr$$

$$v(r) = -\frac{J}{4\nu} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

A kapott egyenlethez tartozó peremfeltételek:

- $r=R$ $v=0$ $\longrightarrow C_2 = \frac{J}{4\nu} R^2$
- $r=0$ v véges (tapasztalat) $\longrightarrow C_1 = 0$

$$\boxed{v(r) = \frac{J}{4\nu} (R^2 - r^2)}$$
 parabolikus eloszlás

Hagen-Poiseuille áramlás

ahol $J = \frac{e_s}{L} = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} + g \frac{h_1 - h_2}{L}$

Nézzük meg vízszintes csőre hogyan alakul a képlet?!

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} = \frac{\Delta p}{\rho L} \text{ és így } \rightarrow v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

Térfogatáram:

$$Q = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = 2\pi \frac{J}{4\nu} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi J}{2\nu} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi J}{8\nu} R^4}$$
 Hagen-Poiseuille törvény

Nézzük meg vízszintes csőre hogyan alakul a Hagen-Poiseuille törvény

$$\text{Ekkor } J = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} = \frac{\Delta p}{\rho L}$$

melyet behelyettesítve

$$Q = \frac{\pi J}{8\nu} R^4 = \frac{\pi \Delta p}{8\eta} R^4 = \frac{\pi \Delta p d^4}{128\eta L}$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi \Delta p d^4}{128\eta L}}$$

$$c = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{R^2 \pi} = \frac{J R^2}{8\nu}$$

$$v_{\max} = v(r=0) = \frac{J R^2}{4\nu} = 2c$$

Energiaegyenlet:

$$\alpha_1 \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \alpha_2 \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + e'_s$$

$$e'_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2) = LJ = L \frac{8\nu}{R^2} c$$

$$\underline{\underline{e'_s = L \frac{8\nu}{R^2} c}}$$

Turbulens áramlásnál:

$$e'_s = \lambda \frac{L c^2}{d \cdot 2}$$

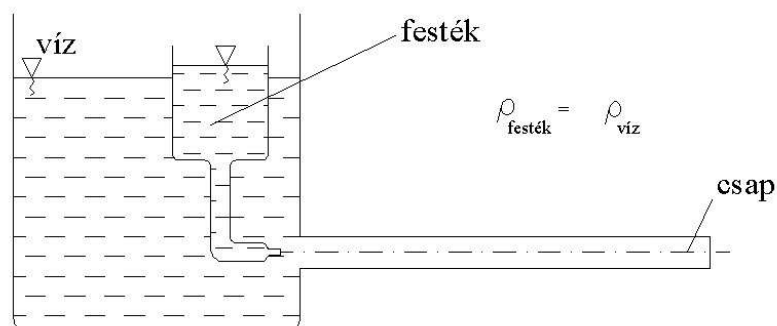
λ értéke lamináris áramlás esetén:

$$e'_s = L \frac{32\nu}{d^2} c = \lambda_{lam} \frac{L c^2}{d \cdot 2}$$

$$\lambda_{lam} = 64 \frac{\nu}{\underbrace{dc}_{\frac{1}{Re}}} = \frac{64}{Re}$$

TURBULENS ÁRAMLÁS

Osborne REYNOLDS kísérletei (1883)



- kis áramlási sebességnél a festék egy rétegben marad \longrightarrow **lamináris áramlás**
- a sebességet egy bizonyos érték felé növelve **instabillá** válik az áramlás – **átmenet**
- tovább növelve a sebességet a festék teljes keresztmetszetben elkeveredik \longrightarrow **turbulens áramlás**

kereskedelmi cső: $Re_{krit} \cong 2300$

ha $Re < Re_{krit}$

stabilan lamináris

ha $Re > Re_{krit}$

lehet lamináris de kis megzavarás hatására turbulenssé válik

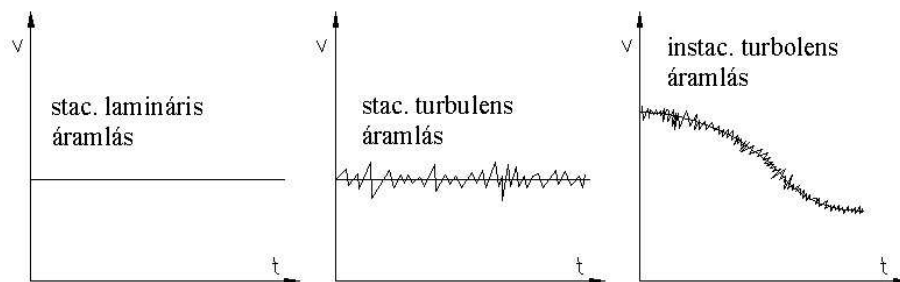
(nagyon finoman megmunkált (nagyon sima) cső: $Re_{krit} \cong 40000$ is lehet)

Peter BRADSHAW (1994)

„Turbulence is the invention of the devil on the 7th day of creation”
magyarul „A turbulenciát az ördög találta ki a teremtés 7. napján”

Turbulens áramlás:

- folyadékreszecskek állandó keveredése, véletlenszerű mozgása (Brown-féle hőmozgáshoz hasonló)
- szigorúan véve mindig instacionárius
- nagy Re szélcsatorna áramlás ; $f_{turb} = 1 \div 10000\text{Hz}$
 $L = 0,1 \div 4000\text{mm}$ (hullámhossz)
- a műszerek általában átlagértéket mérnek (sebesség, nyomás) (hődrótos anemométer ingadozást is képes)



A turbulens áramlások vizsgálatára számos módszert dolgoztak ki, használnak.

Probléma: erősen ingadozó nyomás és sebességértékek. Nem ismerünk olyan, az időben véletlenszerűen változó függvényt, amely kielégítené a mozgásegyenletet.

A) Direkt Numerikus Szimuláció (DNS) (legmagasabb szint)

- A Navier-Stokes egyenlet megoldása az ingadozó sebesség és nyomásértékekre
- Nincs turbulencia modell

- Nagyon finom térbeli háló és időlépcső kell, hogy a nagyon különböző méretű és frekvenciájú örvényeket is le tudja írni szélescsatorna $f = 1 + 10000\text{Hz}$
 $L = \text{néhány tized mm} \longrightarrow \text{több m}$
- Óriási gépidő, pl. repülőgép körüli áramlás DNS-s több ezer év CPU time lenne
- Kisebb Re számú csatornaáramlásokra használják – igen pontos lehet (akár műszerek kalibrálása)
- 2002. CFD konferencia Toulouse – japán kutató 10^9 számítási pont (3D)

B) Nagy Örvények Szimulációja (LES – Large Eddy Simulation)

- Gazdaságosabb mint a DNS
- Csak közepes és nagy méretű örvények közvetlen számítása
- Megfontolás: a közepes és nagy méretű örvények határozzák meg a turbulencia transzportját, a kis örvények a turbulens energia disszipációjáért felelősek
- Térbeli szűrő alkalmazása a Navier-Stokes egyenletre
- Kiszűri a kis örvényeket ; a kapott egyenlet direkt megoldás
- Kis örvények hatásának figyelembevétele egy általános érvényű turbulencia modellel (amely nem tartalmaz feladattól függő empirikus állandókat)
- Még mindig nagy gépidő ; Ma divatos sok helyen használják

C) Időátlagolt Navier-Stokes egyenlet – Reynolds egyenlet (RANS – Reynolds Avaraged Navier-Stokes Equations)

Megjegyzés: A mérnököket általában az időben átlagolt értékek érdeklik (nem az ingadozás)

Pillanatnyi értékek:

$$v_T(x, y, z, t)$$

$$p_T(x, y, z, t)$$

Időátlag:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}_T dt$$

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T p_T dt$$

$T \gg$ mint a turbulens áramlás ingadozására jellemző időállandó, de $T \ll$ mint az instacionárius áramlás időállandója

$$T \approx 5 \text{ s}$$

Ingadozás:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_T - \mathbf{v}$$

$$p' = p_T - p$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_T &= \mathbf{v} + \mathbf{v}' \\ v_{Tx} &= v_x + u' \\ v_{Ty} &= v_y + v' \\ v_{Tz} &= v_z + w' \end{aligned} \right\} (1)$$

Navier-Stokes egyenlet érvényes a pillanatnyi értékekre ($\rho = \text{const}$)!

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} + (\mathbf{v}_T \nabla) \mathbf{v}_T = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p_T + \nu \Delta \mathbf{v}_T \right\} (2)$$

Kontinuitás: mivel $\text{div}(\mathbf{v}_T) = 0$ és $\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \longrightarrow \text{div}(\mathbf{v}') = 0$

$$\left. \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \right\} (3)$$

(1-2)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + [(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \nabla](\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v}'$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v}' \left\} (3!)$$

itt:

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}' = v_x' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + v_y' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} + v_z' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial z}$$

$$(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v} = u' \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v' \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w' \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

$$(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' = u' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} + v' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial y} + w' \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial z}$$

(3) időátlagolása, feltételek:

$$\overline{f + h} = \overline{f} + \overline{h}$$

$$\overline{fh} = \overline{f} \overline{h}$$

$$\overline{cf} = c \overline{f} \quad (c = \text{const})$$

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t') dt'$$

(3) átlagosan:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ \overline{\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}} &= \mathbf{0} \\ \overline{(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}} &= (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \\ \overline{(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}'} &= (\mathbf{v} \nabla) \underbrace{\overline{\mathbf{v}'}}_{=0} = \mathbf{0} \\ \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}} &= \underbrace{\overline{\mathbf{v}' \nabla}}_{=0} \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \overline{\frac{1}{\rho} \nabla(p + p')} &= \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \overline{\nu \Delta(\mathbf{v} + \mathbf{v}')} &= \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

Ezen időátlagolt tagokat visszaírjuk az időátlagolt (3)-ba:

$$\overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'} \quad \left. \right\} (4)$$

Mivel:

$$\overline{div(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')} = \overline{(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}') \nabla} = \underbrace{\overline{(\mathbf{v}' \circ \nabla) \mathbf{v}'}}_{\mathbf{v}' \circ \nabla} + \underbrace{\overline{(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}') \nabla}}_{\mathbf{v}' \cdot \overline{div \mathbf{v}'}} = \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'}$$

Így:

$$-\overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'} = -\overline{div(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')} = \frac{1}{\rho} \overline{div \left[\underbrace{-\rho(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')}_{\sigma_T} \right]} = \frac{1}{\rho} \overline{div \sigma_T}$$

Tehát a (4) egyenlet:

$$\boxed{\overline{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \overline{div \sigma_T}}$$

Ami nem más mint a **Reynolds-féle mozgásegyenlet.**

ahol:

$$\sigma_T = -\rho \overline{(\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}')} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix} \text{ a Reynolds-féle turbulens feszültségtenzor}$$

A tenzor szimmetrikus: $\overline{v'u'} = \overline{u'v'}$; $\overline{v'w'} = \overline{w'v'}$; $\overline{w'u'} = \overline{u'w'}$

Tehát 6 független elemet tartalmaz.

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_T = -\frac{1}{\rho} \rho (\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) \nabla = -(\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) \nabla = - \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_T = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) & \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) & \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'u'}) & \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) & \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \\ \frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'u'}) & \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'v'}) & \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'^2}) \end{bmatrix}$$

mivel $\overline{v'u'} = \overline{u'v'}$; $\overline{v'w'} = \overline{w'v'}$; $\overline{w'u'} = \overline{u'w'}$, ezért 6 ismeretlen kifejezés van az $\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_T$ vektorban.

Koordináta-egyenletek:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'^2})$$

Emlék kontinuitás:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

3D eset:

4 egyenlet

10 ismeretlen $v_x, v_y, v_z, p, \overline{u'v'}, \overline{v'w'}, \overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$

így a turbulens áramlás egzakt megoldása a Reynolds-féle egyenlet felhasználásával lehetetlen.

2D eset:

3 egyenlet

6 ismeretlen $v_x, v_y, p, \overline{u'v'}, \overline{u'^2}, \overline{v'^2}$

Turbulencia modellek:

- 2 egyenletes $k - \varepsilon$; $k - \omega$
- 1 egyenletes
- 0 egyenletes keveredési úthosszon alapuló

Ludwig Prandtl (1875-1953)

Síkbeli áramlás:

$$\tau' = \tau_{xy}' = -\rho \overline{u'v'} = \rho \cdot l^2 \cdot \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \cdot \frac{dv_x}{dy}$$

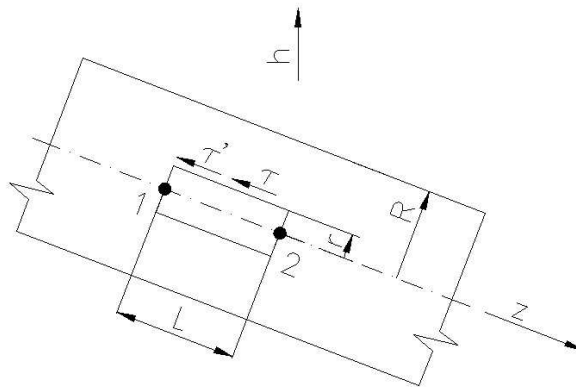
Prandtl:

$$l = \kappa \cdot y \quad y = \text{faltól mért távolság} ; \kappa \cong 0,4$$

Kármán T.(1881-1963):

$$l = \kappa \frac{\left| \frac{dv_x}{dy} \right|}{\frac{d^2v_x}{dy^2}}$$

Turbulens csőáramlás:



Impulzustétel a jelölt térfogatra, és kapjuk (levezetést mellőzve):

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\frac{\rho \cdot J}{2} r}_{\text{fajl. tehetet-}} + \underbrace{\eta \frac{dv}{dr}}_{\text{lenségi erő}} - \underbrace{\rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{dv}{dr} \right)^2}_{\substack{\tau' - \text{fajl. viszkózus erő} \\ \tau' - \text{turbulens impulzus-} \\ \text{cserébősszármazó fajl. erő}}} = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

ahol,

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} + g \frac{h_1 - h_2}{L} \dots \text{esés}$$

Prandtl megoldása:

$$l = \kappa \cdot y \quad y = R - r \text{ (faltól mért távolság) ; } \kappa \cong 0,4$$

a.) Lamináris alapréteg:

fal közelében:

$$\tau' \ll \tau \rightarrow \tau' = 0$$

$r \approx R \rightarrow \tau \approx \tau_0$ (lamináris megoldásból nyerhető)

$$v_{lam}(r) = \frac{J}{4\nu} (R^2 - r^2)$$

$$\tau_0 = \eta \frac{dv}{dr} \Big|_{r=R} = -\frac{\rho J}{2} R$$

súrlódási sebesség bevezetése:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{JR}{2}}$$

$$\frac{\rho J}{2} R + \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v_*^2}{\nu}$$

$$v = -\frac{v_*^2}{\nu} r + C$$

peremfeltétel:

$$v(R) = 0 \rightarrow C = \frac{v_*^2}{\nu} R$$

$$\frac{v(r)}{v_*} = \frac{v_*}{v} (R - r)$$

b.) Turbulens határreteg:

$$\tau' \ll \tau \rightarrow \tau \approx 0$$

$$l = \kappa y = \kappa(R - r)$$

tehetetlenségi erőben:

$$r \approx R$$

$$\frac{\rho l}{2} R - \rho \kappa^2 (R - r)^2 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 = 0 \quad / \cdot \rho$$

$$v_*^2 = \kappa^2 (R - r)^2 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2$$

$$\pm v_* = \kappa (R - r) \left(\frac{dv}{dr} \right)$$

$$\frac{dv}{dr} < 0 \rightarrow -$$

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{v_*}{\kappa} \frac{1}{R - r}$$

$$v = \frac{v_*}{\kappa} \ln(R - r) + K'$$

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(R - r) + K \quad K: \text{integrációs állandó}$$

K: a lamináris alapréteghez való csatlakoztatás feltételéből nyerjük

δ Lamináris alapréteg vastagsága

$$v_{lam}(R - \delta) = v(R - \delta)$$

$$\frac{v_{lam}}{v_*} \Big|_{R-\delta} = \frac{v_*}{v} [R - (R - \delta)] = \frac{v_*}{v} \delta$$

$$\frac{v_*}{v} \delta = \frac{1}{\kappa} \ln \delta + K \rightarrow \frac{v_*}{v} \delta - \frac{1}{\kappa} \ln \delta$$

Prandtl feltevése:

$\delta = B \frac{V}{v_*}$ Nikuradse mérései igazolták ezt.

Így,
$$K = \underbrace{\frac{v_*}{V} B \frac{V}{v_*}} - \frac{1}{K} \ln(B \frac{V}{v_*}) = \underbrace{B - \frac{1}{K} \ln B} - \frac{1}{K} \ln(\frac{V}{v_*})$$

$$K = C + \frac{1}{K} \ln(\frac{V}{v_*})$$

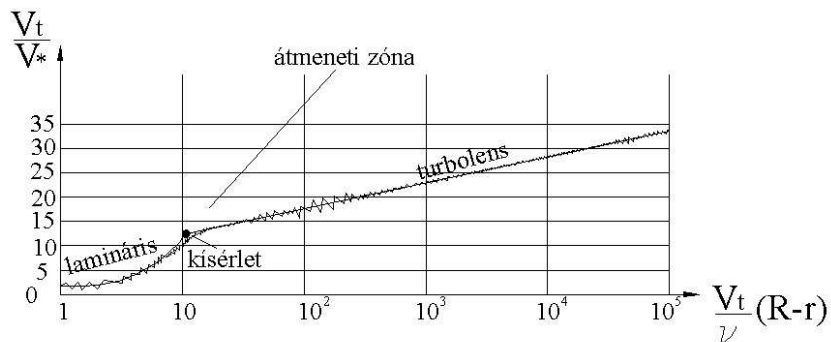
$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{v}{V} + \frac{1}{K} \ln(R-r) + C$$

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{v}{V} + C$$

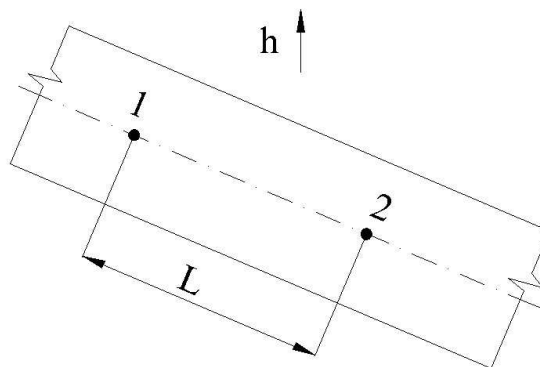
Nikuradse mérései:

$K = 0.4,$ $C = 5.5$

$$\frac{v}{v_*} = 5.75 \lg \frac{v_*}{V} (R-r) + 5.5$$



Csövek hidraulikai ellenállása:



energiaegyenlet 1-2 közé:

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \alpha_1 \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \alpha_2 \frac{c_2^2}{2} + e'_s$$

$$e'_s = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2) = JL$$

$$v_* = \sqrt{\frac{|\tau_0|}{\rho}} = \sqrt{\frac{JR}{2}} \text{ bevezetésével } \rightarrow J = \frac{2}{R} v_*^2$$

Így:

$$e'_s = JL = \frac{2L}{R} v_*^2 = 8 \left(\frac{v_*}{C} \right)^2 \frac{L}{d} \frac{c^2}{2} \lambda \text{ csőszűrlődési tényező}$$

$$e'_s = \lambda \frac{L}{d} \frac{c^2}{2} \text{ univerzális ellenállástörvény turbulens áramlásra}$$

lamináris: $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$

Hidraulikus sima cső- felületi érdesség a lamináris alaprétegben

$$\rightarrow \lambda = \lambda(\text{Re})$$

elméletileg és kísérletileg:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\sqrt{\lambda} \text{Re}) - 0.8$$

$$\text{Re} > 3000$$

különböző közelítések:

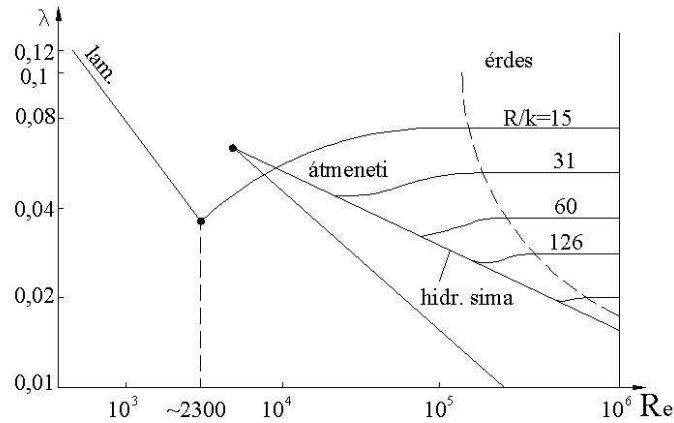
$$\lambda = \frac{0.3164}{4 \cdot \sqrt{\text{Re}}} \quad 2300 < \text{Re} < 8 \cdot 10^4 \text{ (Blasius)}$$

$$\lambda = 0.0054 + 0.396 \text{Re}^{-0.3} \quad 2 \cdot 10^4 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5 \text{ (Schiller)}$$

$$\lambda = 0.032 + 0.221 \text{Re}^{-0.237} \quad 10^5 < \text{Re} < 10^8 \text{ (Nikuradse)}$$

Érdes cső:

Nikuradse (1933)- homokkal érdesített cső-
k: egyenértékű homokérdesség



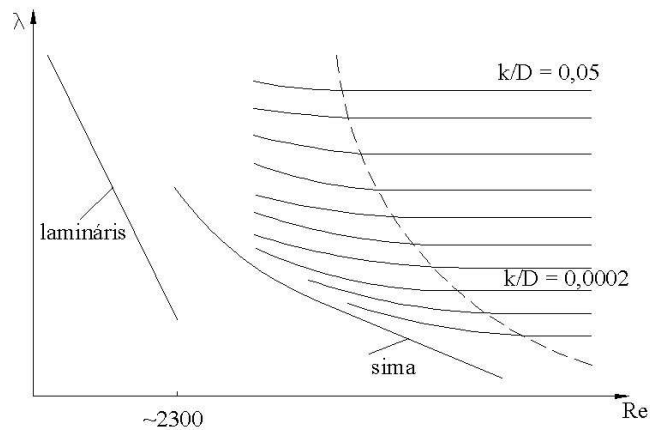
hidraulikailag sima: $k \ll \delta_{lam} \rightarrow \lambda = \lambda(Re)$

átmeneti: $k \sim \delta_{lam} \rightarrow \lambda = \lambda(Re, \frac{R}{k})$

hidraulikailag érdes: $k > \delta \rightarrow \lambda = \lambda(\frac{R}{k})$

Nikuradse ... mesterségesen érdesített csövek

Moody – kísérletek kereskedelemben kapható „természetes” érdességű csövek – ma inkább ezt használják.



Csőidomok és szerelvények ellenállása:

$$e'_s = \zeta \frac{c^2}{2}$$

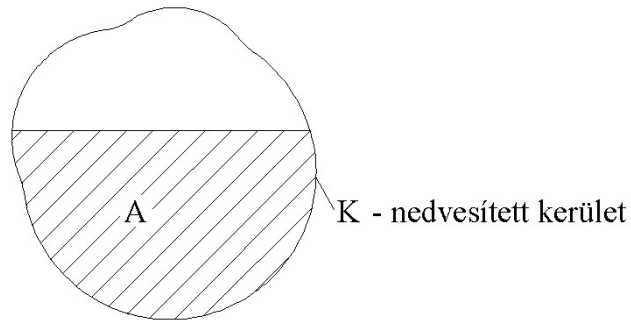
ζ veszteségtényező

ζ meghatározása méréssel

helyenként analitikus megoldás(Borda-Carnot)

Áramlás nem kör keresztmetszetű csövekben:

$$D_h = \frac{4A}{K} \quad \dots \text{hidraulikai átmenő}$$



$$e'_s = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{c^2}{2} \quad \text{kiterjesztett ellenállástörvény}$$

$$\lambda = \lambda(\text{Re}, \frac{k}{D_h})$$

$$\text{Re} = \frac{cD_h}{\nu}$$

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{\frac{cD_h}{\nu}}$$

Speciális esetek:

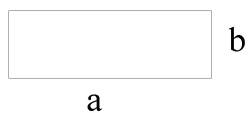
- kör:

$$A = \frac{D^2\pi}{4}$$

$$K = D\pi$$

$$D_h = \frac{4A}{K} = D$$

- téglalap:



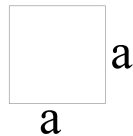
–füstgázcsatorna:

$$K = 2(a + b)$$

$$A = ab$$

$$D_h = \frac{4A}{K} = \frac{4ab}{K(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

- négyzet:



$$a = b : D_h = \frac{2a^2}{2a} = a$$

Egyenértékű csőhossz.

Összetett rendszer vesztesége:

$$e'_s = \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{c_i^2}{2} + \sum_{j=1}^N \zeta_j \frac{c_j^2}{2}$$

L_e . Egyenértékű csőhossz; d_e ; λ_e

$$e'_s = \lambda_e \frac{L_e}{D_e} \frac{c_e^2}{2}$$

$$A_i c_i = A_e c_e$$

$$\lambda_e \frac{L_e}{D_e} \frac{c_e^2}{2} = \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{c_i^2}{2} + \sum_j \zeta_j \frac{c_j^2}{2}$$

$$L_e = \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \frac{D_e}{D_i} L_i \left(\frac{c_i}{c_e} \right)^2 + \frac{D_e}{\lambda_e} \sum_j \zeta_j \left(\frac{c_j}{c_e} \right)^2$$

$$\left(\frac{c_i}{c_e} \right)^2 = \left(\frac{D_e}{D_i} \right)^4$$

$$\left(\frac{c_j}{c_e} \right)^2 = \left(\frac{D_e}{D_j} \right)^4$$

$$L_e = \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda_e} \left(\frac{D_e}{D_i} \right)^5 L_i + \frac{D_e}{\lambda_e} \sum_j \zeta_j \left(\frac{D_e}{D_j} \right)^4$$

Csőáramlási feladatok megoldása:

1.) Adott: $Q, D, L, k/D, \rho, \nu, e'_s = ?$

$$C = \frac{4Q}{D^2\pi}$$

$$\text{Re} = \frac{CD}{\nu}$$

$\lambda = \lambda(\text{Re}, \frac{k}{D})$ diagramból

$$e'_s = \lambda \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}$$

$$\Delta p' = \rho e'_s = \rho \lambda \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}$$

2.) Adott: $D, L, k/D, \rho, \nu, e'_s, Q = ?$

Kezdet:

$\lambda_0 = \lambda(\frac{k}{D})$ teljesen érdes (Moody diagram)

$$e'_s = \lambda_0 \frac{L}{D} \frac{C_0^2}{2}$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{2e'_s D}{\lambda_0 L}}$$

$$\text{Re}_0 = \frac{C_0 D_0}{\nu}$$

$\lambda_1 = \lambda(\text{Re}_0, \frac{k}{D})$

$$C_1 = \sqrt{\frac{2e'_s D}{\lambda_1 L}}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{C_1 D_1}{\nu}$$

$\lambda_2 = \lambda(\text{Re}_1, \frac{k}{D})$

konvergencia: _____ $Q = C \frac{D^2\pi}{4}$

3.) Adott: $Q, k, L, \rho, \nu, e'_{s\max}, D = ?$

$$e'_s = \lambda \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}$$

$$e'_s = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \left(\frac{4Q}{D^2 \pi} \right)^2 = \lambda \frac{8L}{\pi^2} \frac{Q^2}{D^5}$$

$$Re = \frac{CD}{\nu} = \frac{4Q}{D\pi\nu}$$

D₀ felvétele:

$$Re = \frac{4Q}{D\pi\nu}$$

$$\frac{k}{D_0} \rightarrow \lambda_0 = \lambda(Re_0, \frac{k}{D_0})$$

$$e'_s = \lambda_0 \frac{8L}{\pi^2} \frac{Q^2}{D_0^5} \dots \text{összehasonlítás } e'_{s\max} \text{-al}$$

Ha $e'_s > e'_{s\max}$ $D_1 < D_0$ választása

$$Re_1 = \frac{4Q}{D_1\pi\nu}$$

$$\frac{k}{D_1} \rightarrow \lambda_1 = \lambda(Re_1, \frac{k}{D_1})$$

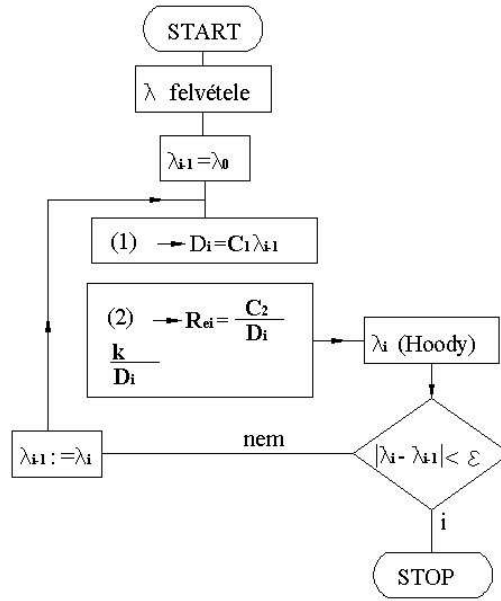
$$e'_s = \lambda_1 \frac{8L}{\pi^2} \frac{Q^2}{D_1^5} \dots \text{összehasonlítás } e'_{s\max} \text{-al}$$

Ha $e'_s > e'_{s\max}$ D növelése (szabványos csőátmérők)

3.) Feladat másik megoldása:

$$D^5 = \lambda_1 \frac{8L}{\pi^2} \frac{Q^2}{e'_s} = C_1 \lambda_1 \quad (1)$$

$$Re = \frac{4Q}{\pi\nu} \frac{1}{D} = \frac{C_2}{D} \quad (2)$$



A konvergált D_i -hez legközelebb eső, annál nagyobb szabványos átmérő választása.

)