

PETKOVICS IMRE

A VILLAMOSSÁGTAN ALAPJAI

TANKÖNYV



KÉSZÜLT AZ APÁCZAI CSERE JÁNOS ALAPÍTVÁNY TÁMOGATÁSÁVAL

SZABADKA, 2000

ELŐSZÓ

A szabadkai Műszaki Főiskolán 1996 óta mindhárom szakon magyarul is hallgatható **A villamosságtan alapjai** kötelező tantárgy. Az 1996/97-es iskolaévtől kezdve készül ez a tankönyv, amely alapozó jellegű a hallgatók számára. Elsődleges célja, hogy a villamosságtan alapfogalmait, alaptörvényeit és a nemzetközileg elfogadott normákat ismertesse. Főleg a jelenségek fizikai oldalát igyekszik kidomborítani, nem belebonyolódva a matematikai apparátus labirintusaiba. Matematika nélkül, persze, nem lehet tanulni és tanítani villamosságtant, de a tankönyv még a Maxwell egyenletekig (a vektortér divergenciájának és rotációjának fogalmáig) sem vezeti el az olvasóját. Megelégszik a jelenségek makroszkopikus szintű leírásával. Elvértve található csak egy-egy "kirándulás" az anyagtechnológia világába, hogy a törvényszerűségek miértjére, más törvényszerűségekkel való kapcsolataira rámutasson. Az az elenyésző számú mikroszkopikus szintű leírás (pl. az egyenáramok megfogalmazásánál) pedig a legelső közelítésre, a legegyszerűbb modellre szorítkozik. A villamosságtan alapjait képező jelenségek és törvények már több, mint száz éve ismertek a tudomány számára. Ezt a témakört már nagyon sok kutató és pedagógus feldolgozta, átdolgozta. Felvetődik a kérdés, vajon mi szükség van akkor erre a könyvre? Hiszen az irodalomban szereplő könyvek-munkák jó része klasszikussá, meghatározó jellegűvé vált az utóbbi harminc évben. A válasz sokkal hétköznapibb, mint bárki gondolná: magyar nyelven itt, Jugoszláviában, az érvényben lévő tantervnek megfelelő szakkönyv még nem készült.

A villamosságtan alapjai nevű tantárgy, annak ellenére, hogy a villamosságtan alapjai már lassan másfél évszázada nem változnak, időről-időre módosul. Nem a témakör változik, hanem a tantervet szabogatják ki-kihagyva belőle egyes (a nagyléptékű műszaki – főleg számítástechnikai-informatikai – fejlődés következtében) háttérbe szoruló részeket. Ennek a tankönyvnek is vannak olyan fejezet-részei, amelyek a megjelenés idejében már nem képezik a tárgy "oktatandó tömegét". A kép teljességének érdekében azonban nem csonkítottam meg az anyagot. A tankönyv természetesen elsősorban a leendő villamosmérnökök számára készült, de vélhetőleg használni tudja majd mindenki, aki köszönőviszonyba akar kerülni a villamosságtan alapjaival (akár önkéntesen, akár kényszerből). A tankönyv anyaga a hallgatók megsegítése, és a tantárgy jobb elsajátítása céljából az Interneten és CD-n is megjelenik.

A tankönyv rögzíti az órákon előadott, valamint a táblagyakorlatokon begyakorolt anyagot. A következő lépés, a hálózatépítés és hálózatanalízis számítógépes szimulációja, remélhetőleg hamarosan beindul. Nem lenne jó, azonban, ha mindezek háttérbe szorítanák a mással igazából nem pótolható laboratóriumi gyakorlatokat. A tankönyvben az általam legfontosabbnak és nehezebbnek vélt témaköröknél szemléltető-magyarázó példák találhatók. Minden fejezet végén ellenőrző kérdések sorakoznak felőlelve a tananyag teljes egészét. Jó szolgálatok tehetnek azoknak, akik ellenőrizni szeretnék tudásukat.

Kihasználom az alkalmat, hogy köszönetemet fejezzem ki elsősorban családomnak, de kollégáimnak és munkatársaimnak is az anyag összeállításánál, illetve a tankönyv megírásánál nyújtott segítségért.

Külön köszönöm az Apáczai Csere János Alapítvány támogatását.

Petkovics Imre
peti@vts.su.ac.yu

Szabadka, 2000.07.25.

Alkalmazott jelölések (szimbólumok) jegyzéke:

[illegible]

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETŐ	1
1.1. Történelmi áttekintés	1
1.2. Az anyagok felépítése, a villamos (elektromos) erő és az elektromosság fogalma	4
1.3. A töltéssel rendelkező testek definíciója	4
1.4. Az villamos (elektromos) töltés mértékegysége és jelölése	5
1.5. Az atom méreteiről és két test érintkezéséről az atomelmélet szempontjából	5
1.6. Vezetők, szigetelők és félvezetők	6
1.7. Alap- és származtatott mennyiségek és mértékegységek	6
1.8. Alapismeretek a vektormennyiségekről	7
1.8.1. A vektormennyiségek definíciója	7
1.8.2. Vektoralgebra	8
1.8.2.1. Vektorok összege, különbsége, skalárszámmal való szorzata	8
1.8.2.2. Skalárszorzat	9
1.8.2.3. Vektorszorzat	10
1.8.2.4. Vegyes szorzat	11
1.8.2.5. Kétszeres vektorszorzat	12
1.8.2.6. A felületelem mint vektor	12
2. ELEKTROSZTATIKA	13
2.1. Az elektrosztatikus erők	13
2.1.1. Coulomb törvénye	13
2.1.2. A szuperpozíció-elv	15
2.2. A villamos tér	15
2.2.1. A villamos tér fogalma és vektortermészete	15
2.2.1.1. A villamos (elektromos) térerősség erővonalai	17
2.2.1.2. Felületi és térbeli töltésseloszlások és villamos terük	17
2.2.2. Az elektromos tér potenciálja	19
2.2.2.1. Az elektromos erő munkája	19
2.2.2.2. Az energiamegmaradás törvénye és felhasználása az elektrosztatikában	20
2.2.2.3. A villamos tér potenciáljának definíciója és a potenciálkülönbség	21
2.2.2.4. Ekvipotenciális felületek, a potenciál és a térerősség-vektor közötti kapcsolat	24
2.2.2.5. A dipólus potenciálja és térerősségvektora	26
2.2.2.6. A felületi és térbeli töltésseloszlás potenciálja	27
2.2.3. Gauss törvénye	27
2.2.3.1. Gauss törvényének levezetése	28
2.2.4. Vezetők az elektrosztatikus térben	30
2.2.4.1. A vezető felszínén levő felületi töltéssűrűség és a felszín közelében levő térerősség kapcsolata	31
2.2.4.2. A töltésmennyiség eloszlása különböző alakú magányos vezető testeken	32
2.2.4.3. Influenca (elektrosztatikus indukció vagy megosztás)	33
2.2.4.4. A vezető testek töltése és potenciálja közötti kapcsolat, kondenzátorok és azok kapacitása	35
2.2.4.4.1. A kondenzátorok soros és párhuzamos kötése	37
2.2.4.5. A potenciál és a térbeli töltéssűrűség-eloszlás közötti kapcsolat (Poisson egydimenziós egyenlete)	38
2.2.5. Szigetelők az elektrosztatikus térben	39
2.2.5.1. A villamos polározás vektora (polarizációvektor)	40
2.2.5.2. Kötétt (látszólagos) villamos töltések	42
2.2.5.3. A villamos tér homogén szigetelőben (az abszolút és relatív permittivitás)	43
2.2.5.4. Gauss törvényének általános alakja	45
2.2.5.5. Az erővonalak törési törvényei (határfeltételek)	47
2.2.5.6. Az eltolási vektor fluxuscsatornája	48
2.2.5.7. A szigetelők kritikus (átütési) térerőssége	49
2.2.5.8. A visszamaradt polarizáció	51
2.2.5.9. Ferroelektromos (szenyetto-elektromos) anyagok	51
2.2.5.10. Elektretrek	52
2.2.5.11. Dörzsölési elektromosság	53
2.2.6. Erők az elektrosztatikus térben	53
2.2.6.1. A feltöltött kondenzátor energiája	54
2.2.6.2. Az energiasűrűség az elektrosztatikus térben	55
2.2.6.3. Az elektrosztatikus erők számítása energia segítségével	56

2.2.7. A változó villamos térben elhelyezkedő dielektrikumok veszteségei	58
2.2.8. Villamos töltések mozgása elektrosztatikus térben	60
2.2.8.1. Villamos töltések mozgása homogén villamos térben	60
2.2.8.2. A villamos töltések mozgása inhomogén villamos térben	62
2.3. Ellenőrző kérdések	62
3. EGYENÁRAMOK – ELEKTROKINEMATIKA	67
3.1. Elektromos áram szilárd és folyékony vezetőkben	67
3.1.1. Az áram sűrűsége és az áram erőssége	69
3.2. Kirchhoff első törvénye	73
3.3. Az elektromos áram áramlási tere	75
3.3.1. A fajlagos ellenállás és fajlagos vezetőképesség	75
3.3.2. A vezetőkben hővé alakuló villamos energia teljesítménysűrűsége	75
3.3.3. A $\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$ kifejezés elméleti levezetése	77
3.3.4. A fémek fajlagos ellenállása	78
3.3.5. Az elektronok mozgékonyasága a fémekben	80
3.3.6. A szupravezetők	80
3.3.7. Az elektrolitok vezetőképessége	81
3.3.8. A dielektrikumok (szigetelők) vezetőképessége	82
3.4. Az elektromos ellenállás és Ohm törvénye	83
3.4.1. Az ellenállások soros, párhuzamos és vegyes kapcsolása	86
3.4.2. Az ellenállás hőfokfüggése	88
3.4.3. A feszültség referenciairánya az ellenállásokon	89
3.4.4. Földelések ellenállása	89
3.4.4.1. A lépésfeszültség	91
3.5. Joule törvénye	92
3.6. Villamos generátorok	95
3.6.1. A feszültséggenerátor forrásfeszültsége és belső ellenállása	97
3.6.2. A generátor kapocsfeszültsége	99
3.7. Áramerősség és feszültség az áramkörben	101
3.7.1. Az áramerősség meghatározása az egy generátorból és egy ellenállásból álló áramkörben	101
3.7.2. A több áramforrást és több ellenállást tartalmazó áramkörök áramerősségének meghatározása	103
3.7.3. Feszültség és potenciál az áramkörben	104
3.8. A villamos hálózatok és Kirchhoff második törvénye	105
3.8.1. Röviden a villamos hálózatokról	105
3.8.2. Kirchhoff második törvénye	106
3.9. Áramgenerátorok	107
3.10. Hálózatanalízis	110
3.10.1. A hálózattopológia alapfogalmai	110
3.10.2. Hálózatszámítás a Kirchhoff-törvényekkel	113
3.10.3. Hurokáramok módszere	115
3.10.4. Csomóponti potenciálok módszere	118
3.10.4.1. A csillag-háromszög átalakítás	121
3.10.5. A szuperpozíció elve	124
3.10.6. A felcserélési tétel (Reciprocitás tétele)	126
3.10.7. Thévenin- és Norton-tétel	128
3.10.7.1. Feszültséggenerátorok kapcsolása	130
3.10.8. A kompenzáció (helyettesítés) tétele	131
3.10.9. A teljesítménymegmaradás tétele	132
3.10.10. A hálózat egyéb megoldási eljárásai	132
3.10.10.1. Arányos mennyiségek eljárása (létrahálózat)	133
3.10.10.2. A szimmetrikus hálózatok megoldása	133
3.11. A nemlineáris áramköri elemek	135
3.12. Átmeneti jelenségek az RC hálózatban	137
3.13. Kondenzátorokat tartalmazó hálózatok	142
3.14. Ellenőrző kérdések	144
4. STACIONÁRIS (IDŐBEN ÁLLANDÓ) MÁGNESES TÉR	149
4.1. Két áramelem között ható mágneses erő	149

4.2. A mágneses tér fogalma, mágneses indukció vektora, Biot-Savart törvénye	150
4.2.1. Mágneses indukcióvektor az áramhurok síkjának pontjaiban	154
4.3. A mágneses térben levő áramhurokra ható erő és forgatónyomaték	156
4.4. Villamos töltés mozgása mágneses és elektromos térben	157
4.4.1. A ciklotron elvi működése	158
4.4.2. Hall effektus	159
4.5. A mágneses indukció vektorának erővonalai	160
4.6. Mágneses indukció fluxusa és a mágneses fluxusmegmaradás törvénye	162
4.7. Ampère törvénye	164
4.7.1. Példák az Ampère-törvény alkalmazására	164
4.8. Anyag a mágneses térben	167
4.8.1. Diamágneses, paramágneses és ferromágneses anyagok	167
4.8.2. Mágnesezettség vektora	169
4.8.3. Az általános Ampère-törvény	170
4.8.4. Az elemi Ampère-áramokkal ekvivalens makroszkópikus áramok	173
4.8.5. Határfeltételek	176
4.9. Általános fogalmak a ferromágneses anyagokról	177
4.9.1. A ferromágneses anyagok mágnesezési görbéje	178
4.9.2. A ferromágneses anyagok permeabilitásának definíciója	181
4.9.3. Magnetosztatika	183
4.9.4. Mágneses körök	183
4.9.4.1. Kirchhoff törvényei a vékony mágneses körökre	185
4.9.4.2. Légréssel rendelkező mágneses körök	187
4.9.4.3. A mágneses körök számítása	188
4.9.4.3.1. Egyszerű mágneses körök számítása	188
4.9.4.3.2. Az összetett szimmetrikus mágneses körök számítása	189
4.9.4.3.3. Az összetett nonszimmetrikus mágneses körök számítása	190
4.9.4.4. Állandó mágnesből készült mágneses kör	192
4.10. Ellenőrző kérdések	194
5. IDŐBEN VÁLTOZÓ VILLAMOS (ELEKTROMOS) ÉS MÁGNESES TÉR	197
5.1. Elektromágneses indukció	197
5.1.1. Az indukált villamos tér	197
5.1.2. Az elektromágneses indukció Faraday-törvénye	199
5.1.2.1. Az elektromágneses indukció iskolapéldái	200
5.1.3. Lenz törvénye	203
5.2. A potenciál és a feszültség az időben változó elektromos és mágneses térben	204
5.3. Örvényáramok	205
5.4. A szkinneffektus és a közelhatás elve	206
5.5. A kölcsönös indukció és az önindukció	207
5.5.1. A kölcsönös indukció-együttható	207
5.5.2. Az önindukció-együttható	208
5.6. Induktív tekercs és ohmos ellenállás az áramkörben	209
5.7. A mágneses indukció mérése próbatekerccsel	212
5.8. Szupravezetől készült vezetőhurok a mágneses térben	213
5.9. A mágnesesen csatolt áramkörök áramai	214
5.10. Energia és erő a mágneses térben	214
5.10.1. A mágneses tér energiája	214
5.10.2. Energiaeloszlás a mágneses térben	216
5.10.3. Histerézisveszteségek a ferromágneses anyagokban	217
5.10.4. A mágneses erők számításának általános módszere	218
5.11. Ellenőrző kérdések	219
6. AZ IDŐBEN VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ VILLAMOS HÁLÓZATOK	222
6.1. Bevezető	222
6.1.1. Különbségek az egyenáramú és időben váltakozó áramú áramkörök között	222
6.1.2. Alapelemek a váltakozó áramú áramkörökben	222
6.1.3. Kirchhoff törvényei a váltakozó áramú áramkörökre	224
6.1.4. Teljesítmény a váltakozó áramú áramkörökben	224
6.2. Alapfogalmak a periodikus mennyiségekről	225
6.2.1. A periodikus mennyiségek középfértéke és effektív értéke	227
6.3. Sinusos áramú hálózatok	228

6.3.1. A sinusosan változó áram és feszültség előállítás és alkalmazása	228
6.3.2. Az áramerősség meghatározása a sinusos feszültségre kapcsolt passzív alapelemeken keresztül	229
6.3.3. A sinusos mennyiségek ábrázolása forgóvektor segítségével	230
6.3.4. A teljesítmény a váltóáramú hálózatokban	231
6.3.5. A váltóáramú hálózatok megoldása komplex számításal	234
6.3.5.1. Kirchhoff törvényei komplex alakban. Impedancia és admittancia	235
6.3.5.2. Az elemek soros és párhuzamos kapcsolása. Az elemek csillag- és háromszög-kapcsolásának azonossága	237
6.3.5.3. A komplex feszültség és áram ábrázolása a komplex síkban	239
6.3.6. Feszültség- és áramgenerátorok	241
6.3.7. Hurokáramok módszere komplex alakban	241
6.3.8. A csomóponti potenciálok módszere komplex alakban	242
6.3.9. A fogyasztók és generátorok komplex teljesítménye	243
6.3.10. Általános hálózatszámítási tételek	244
6.3.10.1. A szuperpozíció elve	244
6.3.10.2. A reciprocitás elve	244
6.3.10.3. Thèvenin tétele	245
6.3.10.4. Kompenzáció elve	245
6.3.10.5. A komplex és a pillanatnyi teljesítmény megmaradásának elve	245
6.3.11. A fogyasztó generátorra való hangolása	245
6.3.12. A fogyasztók teljesítménytényezőjének feljavítása	246
6.4. Néhány rendhagyó kapcsolat a váltóáramú áramkörökben	247
6.4.1. Áramkörök mágnesesen csatolt ágakkal (légmagos transzformátor)	247
6.4.2. Villamos transzformátor	248
6.4.2.1. A transzformátort helyettesítő Thèvenin-generátor	251
6.4.2.2. A transzformátor bemenő impedanciája	251
6.4.2.3. Ideális transzformátor	252
6.4.2.4. A transzformátor általános helyettesítő sémája	253
6.4.2.5. Autotranszformátor	254
6.4.3. Rezgőkörök	255
6.4.3.1. Egyszerű (soros) rezgőkör	255
6.4.3.2. Párhuzamos rezgőkör	258
6.5. Háromfázisú rendszerek	261
6.5.1. Általános fogalmak a polifázisú rendszerekről	261
6.5.2. Általános fogalmak a háromfázisú generátorokról	262
6.5.3. A fogyasztók háromfázisú generátorra való kapcsolása	263
6.5.4. A szimmetrikus háromfázisú rendszerek kivizsgálása	264
6.5.4.1. A fogyasztók csillagkapcsolása	265
6.5.4.2. A fogyasztók háromszög-kapcsolása	266
6.5.5. A háromfázisú fogyasztók és generátorok teljesítménye	266
6.5.6. A háromfázisú és monofázisú rendszerek összehasonlítása az energiaszállítás szempontjából	268
6.5.7. Forgó mágneses tér létrehozása két- és háromfázisú áramrendszer segítségével	269
6.6. Alapfogalmak az üzemmód-változás folyamatairól a villamos hálózatokban	272
6.6.1. Folyamatok a soros RC-kör üzemmód változásakor	272
6.6.2. A soros RC-kör egyenfeszültségre kapcsolása	273
6.6.3. A kondenzátor kisütése a soros RC-körben	274
6.6.4. A soros RC-kör váltófeszültségre kapcsolása	275
6.7. Folyamatok a soros RL-kör üzemmód-változásakor	277
6.7.1. Soros RL-kör egyenfeszültségre kapcsolása	277
6.7.2. Az áram megszűnése a soros RL-körben	277
6.7.3. A Soros RL-kör váltófeszültségre kapcsolása	278
6.8. Ellenőrző kérdések	279
7. MELLÉKLET	284
7.1. Ferromágneses anyagok mágnesezési görbéi	284
7.2. Alapmágnesezési görbék	284
7.3. Lemágnesezési görbe	285
7.4. Ferromágneses anyagok relatív permeabilitása	285
7.5. Paramágneses anyagok relatív permeabilitása	286
7.6. Diamágneses anyagok relatív permeabilitása	286
7.7. Egyes anyagok relatív permittivitása	287
7.8. Szigetelőanyagok átütési szilárdsága	287

7.9. Fémek fajlagos ellenállása és ellenálláshőmérsékleti tényezői	288
7.10. Szigetelőanyagok fajlagos ellenállása	288
7.11. Ellenállás-alapanyagok fajlagos ellenállása és hőmérsékleti tényezője	289
7.12. A tankönyvben alkalmazott trigonometrikus összefüggések	289
7.13. A tankönyvben használt állandók értékei	290
8. IRODALOM	291

1. BEVEZETŐ

1.1. Történelmi áttekintés

Az első felfedezés az elektromosság létezéséről 26 századdal ezelőtt történt. Miletoszi Thalész (i.e. ~640 – i.e. 546) jón bölcsele és matematikus, aki a Kis-Ázsiában élt, i.e. 600 körül egy jelentéktelennek tűnő kísérletet végzett és írt le, amely ma is elvégezhető: ha egy borostyánrudat gyapjúszörmével megdörzsölünk, akkor a rúd magához vonzza a könnyű tárgyakat (papírszeletpéket, hajszálakat vagy fareszeléket).

A XVII. században Villiam Gilbert (1540-1603) Erzsébet királynő udvari orvosa, fizikus az 1600-ban megjelent munkájában közzéteszi addigi megfigyeléseit, felfedezését, tudniillik, hogy sok tárgy, nemcsak a borostyán, dörzsölés után vonzza a könnyű tárgyakat (pl. üveg, viasz, kén, állatok szörméje és néhány drágakő is). Az "elektron" görög kifejezés alapján, ami borostyánt jelent Gilbert az ilyen állapotba hozott testeket elektromos testeknek nevezte el.

A következő két évszázadban rohamosan nőttek az ismereteink az elektromosságról. Kísérletek útján megállapították, hogy a tárgyak, amelyek elektromossá válnak, vagy vonzzák, vagy taszítják egymást. Ezzel a tulajdonsággal a testek nem rendelkeznek dörzsölés előtt és ezért ezt a tulajdonságot valamilyen anyagtöbblettel vagy -hiánnyal magyarázták, amely dörzsöléskor átjut egyik testről a másikra. Sok vita és véleményegyeztetés után arra a megegyezésre, illetve feltételezésre jutottak a korabeli tudósok, hogy két "anyag", kétfajta töltés (elektromosság) létezik. Ennek a következtetésnek az alapján ha két test ugyanazzal a töltéstöbblettel rendelkezik, akkor ezek taszítják egymást. Ha pedig különböző töltésűek a testek, akkor vonzzák egymást. Több elnevezése volt ennek a két töltésnek, de a "pozitív" és "negatív" az a kettő, amelyek a mai napig megmaradtak. Ezeket az elnevezéseket minden különösebb ok, illetve magyarázat nélkül Benjamin Franklin (1706-1790) amerikai természettudós, fizikus ajánlotta, illetőleg vezette be. Azt a töltést, amely az üvegrúd és a selyem dörzsölésekor az üvegrúdon jelenik meg pozitívnak nevezte el, azt pedig, amely a borostyánrúdon keletkezik ha gyapjúval dörzsöljük negatívnak.

A további tudományos kutatások rohamos fejlődést biztosítottak az elektromosság és az elektromos (villamos) jelenségek terén. A XVIII. század végén kísérletileg felfedezték és megfogalmazták a két villamos (elektromos) test között fellépő erő pontos kifejezését, az elektrosztatika talán legfontosabb törvényét. A felfedezés Coulomb (Charles Auguste de Coulomb 1736-1806, francia fizikus, hadmérnök) nevéhez fűződik, aki 1784 és 1789 között végzett méréseivel igazolta az azóta róla elnevezett Coulomb-törvényt: a két pontszerű töltés között ható erő törvényét. A XIX. század első felében gyarapodtak talán a legtöbbet az ismereteink a villamos jelenségekkel kapcsolatban. Az elektrosztatikához hasonló eredményekkel eladdig nem dicsekedhettek a tudósok az elektromos áram vizsgálatain terén, hiszen nem tudták biztosítani az állandó töltésáramlást. Magyarán nem volt egyenáramú (egyenfeszültségű) generátoruk. Ezen a nehézségen segítette át az akkori tudósokat Volta (Alessandro Volta 1745-1827, olasz fizikus, fiziológus), aki az ugyancsak olasz Galvani (Luigi Galvani 1737-1798, olasz anatómus, természettudós) kísérleti eredményeit (a békacomb rángatózása két különböző fémrel való érintkezés ideje alatt) felhasználva megalkotta az első egyenáramú generátort (galván elemet). Az igazi áttörést talán mégis Oersted (Hans Christian Oersted 1777-1851, dán fizikus és kémikus) felismerése jelentette, tudniillik, hogy az elektromos áramnak mágneses hatása is van. Megfigyelte, hogy a mágnesű kitér eredeti helyzetéből, ha közelében áramjárta vezeték van. Ez a felfedezés rámutatott a villamos és mágneses jelenségek elválaszthatatlan voltára. Addig ugyanis Coulomb elméletére alapozva eleve kizárták, hogy a villamos (elektrosztatikus) és mágneses jelenségeknek közük lehet egymáshoz. Kísérjük hát most végig röviden a mágneses jelenségekkel kapcsolatos felfedezéseket és ismereteket a kezdetektől Oersted felfedezéséig.

Azokat az erőket, amelyeket ma mágneses erőknek nevezünk, már az antik időkben észrevették. Megfigyelték, hogy a kisázsiai Magnesia város közelében talált mágneses vaskő (a

magnetit) vonzza a vastárgyakat. A vasércdarabokat, amelyek mágneses tulajdonsággal rendelkeznek, természetes mágneseknek nevezzük. Azokat a vastárgyakat, amelyeket a természetes mágnesekhez közelítünk és maguk is mágnesek lesznek, mesterséges mágneseknek hívjuk. A mágnes pólusai a mágnes azon területei, ahol a mágneses erők a legkifejezettebbek. Még a régi Kinában (i.e. 120) megfigyelték, hogy a vízszintesen elhelyezett mágnesrúd megközelítően a földrajzi észak-dél irányba áll be (egész 1600-ig azt hitték, hogy ez az északi sarkcsillag hatása miatt van). Ennek megfelelően a mágnesrúdnak az Északi sark felé mutató végét északi, a másikat déli pólusnak nevezik. Az egynemű mágneses pólusok taszítják, a különeműek vonzzák egymást. Az elektromos erőkhöz és a töltésekhez hasonlóan kezdetben azt hitték, hogy egy mágnes kettévágásával külön lehet választani a két pólust. Egy mágnes felezésével azonban, mint tudjuk, két új kétpólusú mágneset kapunk. E tulajdonság miatt, és amiatt, hogy a mágnes nem hat a nyugalomban levő elektromos töltésekre, egészen a múlt század elejéig (1820-ig) úgy hitték, hogy az elektromos és mágneses jelenségek között nincs semmi kapcsolat. A mágneses jelenségekkel foglalkozó tudomány fejlődése során sokáig az elektromos jelenségekről már előbb megszerzett tudásra támaszkodott. A mágneses erők kiszámítására először Coulomb fogalmazott meg egy kifejezést, amely az elektrosztatikus erő képletének mintájára készült. Ez a kezdet nem volt megfelelő a mágnesesség további fejlődéséhez és megértéséhez. Különválasztott mágneses pólusok a természetben nem léteznek, így a mágnesesség elmélete, amely az elektrosztatikával való hasonlóságon alapult, egyúttal sok érthetetlen definícióval és megmagyarázhatatlan jelenséggel is párosult.

Térjünk vissza 1820-hoz. Ettől az évtől kezdve ugyanis már teljesen egybefonódnak az elektrosztatikus, elektrokinematikus, mágneses, majd kicsit későbbtől (1831) az elektromágneses jelenségekkel kapcsolatos kutatások és eredmények is. Oersted felfedezése után még ugyanebben az évben két francia kísérleti fizikus, Biot (Jean Baptiste Biot 1774-1862) és Savart (Felix Savart 1791-1841) kvantitatív leírását adták a vezetőben folyó áram mágneses terének. Az azóta róluk elnevezett törvény pontos megfogalmazásában honfitársuk Laplace (Pierre Simon Laplace 1749-1827, matematikus, fizikus, csillagász) segédkezett. Ampère (André Marie Ampère 1775-1836, francia fizikus, matematikus) még ugyancsak 1820-ban felismerte és sok kísérlet alapján megfogalmazta a két áramjárta vezető (két áramelem) között ható mágneses erő kiszámítására szolgáló kifejezést, amelyet a következő évben publikált is. Először 1826-ban írta fel a róla elnevezett törvényt Ohm (Georg Simon Ohm 1787-1854, német fizikus), amely a villamos töltések áramlása (az elektromos áram) és az őt létrehozó elektromotoros erő között adja meg a kapcsolatot. Furesa játéka a sorsnak, hogy elméletét csak tizenöt évvel később, 1841-ben ismerték el véglegesen. Faraday (Michael Faraday 1791-1867, angol kísérleti fizikus) 1831-ben felfedezte az Oersted-i jelenség "fordítottját", neki sikerült ugyanis először átalakítani a mágnesességet elektromossággá. Nevéhez sok más felfedezés fűződik, de ez valamennyi közül a legjelentősebb. Az indukált áram irányára vonatkozó kvalitatív törvényt fogalmazta meg 1833-ban Lenz (Heinrich Friedrich Emil Lenz 1804-1865, német származású pétervári fizikus) pétervári akadémikus, amelyben kimondja, hogy az indukált áram olyan irányú, hogy mágneses terével akadályozza azt a változást amely őt magát létrehozta. 1841-ben Joule (James Prescott Joule 1818-1899, angol fizikus) megjelentette az áram hőhatására vonatkozó munkáját, 1845-ben pedig az energiamegmaradás törvényét. Ez utóbbi munkájára csupán egyetlen lelkes fiatal tudós Thomson (William Thomson, később Lord Kelvin 1824-1907, ír-skót fizikus) figyelt fel, akiről, ha mást nem, azt illik tudni, hogy ő volt a regőkör frekvenciáját megadó képlet atyja. Az áramelágazások problémáját csak Ohm törvényének végleges elismerése után oldotta meg Kirchhoff (Gustav Robert Kirchhoff 1824-1887, német fizikus), és Ohm törvényét általánosítva megfogalmazta a bonyolult hálózatok megoldásának módszerét (a róla elnevezett két törvényt). Az elektromágneses tér teljes elmélete a XIX. század legnagyobb lángelméjéhez, legnagyobb elméleti fizikusához Maxwellhez (James Clerk Maxwell 1831-1879, skót elméleti fizikus) fűződik. Oersted, Ampère és Faraday felfedezéseit általánosítva foglalta egyenletrendszerbe (1862-ben) az elektromosságtant, a mágnességtant és a fénytant. Az elektromágneses hullámok

létezése Maxwell egyenleteiből könnyen leszűrhető, amit később Hertz (Heinrich Rudolf Hertz 1857-1894, német fizikus) 1886-ban kísérletileg is igazolt.

Ma már tudjuk, hogy a mágneses jelenségek is (akárcsak a villamos jelenségek) az elemi töltött részecskéktől származnak. Az egyetlen különbség az, hogy az elektromos (elektrosztatikus) jelenségek akkor jelentkeznek (és mérhetők) ha ezek a részecskék nyugalomban vannak, míg mágneses jelenségek csak akkor figyelhetők meg, amikor a részecskék a megfigyelőhöz viszonyítva mozognak. Például a két mágnes között ható mágneses erők tulajdonképpen a két mágnes atomjaiban mozgó elemi töltések (az atommag körül keringő elektronok) közötti erőket jelentik.

A mélyebb ismeretszerzésre, az ok-okozati összefüggések megvilágítására azonban csak az atom szerkezetének felfedezése után, a múlt század végén, illetve századunk, a XX század elején kerülhetett sor. Az anyag szerkezetéről elsőként Démokritosz (Abderai Démokritosz, i.e. ~ 460 – i.e. ~ 371, görög filozófus) fogalmazott meg elméletet, amelyről egyes tudománytörténészek elmarasztalóan (elsietett, kiforratlan) mások viszont lelkesedéssel („a filozófiatörténet legzseniálisabb gondolatcsírája”) beszélnek. Démokritosz az anyagot diszkrét (nem folytonos) felépítésű, parányi, tovább nem osztható (a görög atomosz szó jelentése oszthatatlan) részecskék halmazának tekinti, rámutatva a vákuum (az üres) létezésének szükségszerűségére. A démokritoszi elképzelést Dalton (John Dalton 1766 – 1844, angol fizikus és kémikus) fejlesztette tovább. Rámutatott, hogy az atomok közötti vonzóerő anyagonként változó, és az anyagok halmazállapota az atomok közötti távolságtól (az atomok közötti vonzóerőtől) függ. Atomsúlytáblázatot is készített. Aztán az oszthatatlannak hitt atomkép is szertefoszlott Thomsonnak (Sir Joseph John Thomson 1856 – 1940, angol fizikus) köszönve, aki 1897-ben felfedezte az elektront, minden elem atomjának alkotórészét. Az atom szerkezetének megismerésében sorsdöntő szerep jutott Rutherford (Ernest Rutherford 1871 – 1937, újjélandi születésű angol fizikus) szórási kísérleteinek, amelyekből egyértelműen kiderült, hogy az atom kisméretű és nagy tömegű magból és a mag körül keringő elektronokból épül fel. Az atommag és az elektronpályák között vákuum van, az elektronok száma pedig megegyezik az elem rendszámával, vagyis az atom kifelé elektromosan semleges. A klasszikus fizika törvényei szerint azonban ez a Rutherford által leírt atommodell, a gyakorlattól eltérően, nem stabilis képződményeknek ábrázolta az atomokat. Elvetve a klaszikus elektrodinamika törvényeit Bohr (Niels Henrik David Bohr 1885 – 1962, dán elméleti fizikus) 1913-ban új atommodellt írt le, amely szerint az elektronok csak meghatározott pályákon keringhetnek a mag körül, és ilyenkor nem sugároznak. Az atom csak akkor sugároz, ha valamelyik (esetleg több) elektronja pályát cserél. Ezt az atommodellt fejlesztették tovább közösen Sommerfelddel (Arnold Sommerfeld 1868 – 1951, német fizikus, matematikus) 1915 és 1922 között. Rutherford 1911-ben azonosította a protont, az atommag egyik összetevőjét, és már 1920-tól próbálták kimutatni a protonnal körülbelül azonos tömegű semleges részecskének, a neutronnak a létezését Chadwickkel (Sir James Chadwick 1891 – 1947, angol fizikus). Chadwick a neutron felfedezését bejelentő cikkét 1932-ben jelentette meg. A kvantummechanika kidolgozásával több tudós is foglalkozott: Heisenberg (Werner Karl Heisenberg 1901 – 1976, német elméleti fizikus), Schrödinger (Erwin Schrödinger 1887 – 1961, osztrák elméleti fizikus), Pauli (Wolfgang Pauli 1900 – 1958, osztrák-svájci elméleti fizikus) és Dirac (Paul Adrien Maurice Dirac 1902 – 1984, angol elméleti fizikus), hogy csak a legismertebbeket említsük. Nekik köszönve újabb, bonyolultabb atommodellek születtek. Ma már több mint kétszáz a felfedezett és ismert elemi részecskék száma.

1.2. Az anyagok felépítése, a villamos (elektromos) erő és az elektromosság fogalma

Minden ami körülvesz bennünket atomokból épül fel. Az atomok egyszerű eszközökkel nem oszthatók tovább. A természetben 92 fajta atom létezik. Mostani tanulmányozásunkhoz elég, ha az atomot úgy képzeljük el, hogy azt egy központi, nehéz részecske (az atommag) és meghatározott számú könnyű részecske (elektron) alkotja. Ez utóbbiak úgy keringenek a központi mag körül, mint a bolygók a Nap körül.

A gravitációs erő hatása révén a bolygók nem távolodnak el a Naptól. Az atom alkotórészei között elektromos erők hatnak és ezek kényszerítik az elektronokat arra, hogy keringjenek a mag körül. Az elektromos erő (amely lehet vonzó vagy taszító) az atomon belül sokkal erősebb mint a gravitációs erő (amely csak vonzó lehet). Mint ahogy az elektromos testekről, az elektromos erőkről is csak azt tudjuk, hogy léteznek, de nem tudjuk, hogy hogyan és miért hatnak. Ugyanígy nem tudjuk miért hat a gravitációs erő két test között. Mégis, az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy az erő két villamos (elektromos) részecske között az elektromosságuk (a töltésük) következménye.

A mag és az elektronok töltése különböző: pozitív és negatív. Az elektromos erők matematikai megfogalmazásának szempontjából igen hasznos az egyik töltésnek pozitív, a másiknak negatív előjelet adni, mivel ez lényegesen könnyít a jelenségek matematikai magyarázatánál. Így már a nevük is utal az előjelükre.

Az elektronokat nem tudjuk felbontani kisebb részekre. Az elektron egyben a legkisebb negatív töltésű részecske is, mely a természetben előfordul. Az atommagot kétféle részecske alkotja: a proton és a neutron. A protonok pozitív töltésűek és számuk megegyezik az elektromos számával. A neutronoknak nincs töltésük. Tömegük megközelítőleg egyforma a protonokéval és majdnem 2000-szer (1835-ször) nagyobb az elektronokétól. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az atom szinte teljes tömege a magban található.

Egyforma vagy különböző vegyi elemek két vagy több atomja társulhat. Például: egy vagy több elektron lehet közös elektronja ennek a társulásnak, és ezek keringhetnek a társult atomok magjai körül különböző összetett pályákon. Az ilyen atomok csoportját, társulását nevezzük molekulának.

A természetben a legösszetettebb atom az urán atomja, amely 92 elektronnal rendelkezik. Atommagja 92 protonból és 146 neutronból áll. Mesterséges úton létrehoztak még néhány összetett atomot és ezeket transzuránoknak (uránon túliaknak) nevezzük.

1.3. A töltéssel rendelkező testek definíciója

Az atomokon belül az elektronok különböző szinteken helyezkednek el, amelyeket elektronhéjaknak nevezzük. Egyes esetekben és bizonyos körülmények között egy elektron a saját atomja külső héjáról leválhat és egy másik atom külső héjához csatlakozhat. Ilyen esetekben mindkét atom elveszti semleges töltését és elektromos (villamos) erőkkel hatnak egymásra, még akkor is ha egymástól aránylag messze vannak.

Egy test, melynek minden atomja semleges, maga is semleges. Két ilyen test között semmilyen elektromos erő nem hat. Ha egy megfelelő számú atomból valamilyen módon elveszünk egy-egy elektront, vagy hozzáadunk valamenyi elektront a test villamossá (elektromossá) válik. Két elektromosan töltött test között villamos (elektromos) erők hatnak. Ezek az erők lényegében véve azon elektromos erők eredőjének tekinthetők, amelyek a testeken fellelhető töltéstöbbletek között hatnak.

A testek elektromossá tétele dörzsöléssel: dörzsölés folyamán egy meghatározott számú elektron átjut az egyik test külső elektronhéjáról a másik test külső elektronhéjára, így mindkét test elektromossá válik.

1.4. Az villamos (elektromos) töltés mértékegysége és jelölése

Ahhoz, hogy egy test elektromos töltését meg tudjuk határozni, ki tudjuk fejezni, ismernünk kell a villamos töltés mértékegységét. Mivel a testek villamos töltése mindig egész számú elektron vagy proton töltésével egyenlő, ezért természetes lenne, hogy az elemi villamos töltést vegyük mértékegységként. Tudjuk azonban, hogy egy elektromos testnek általában több milliárd elektron- vagy protontöbblete van, ezért sokkal nagyobb mértékegységre van szükség. Az elektromos töltés mértékegysége a coulomb (C):

A villamos töltés jeleként a nagy Q jelet használjuk. A Q lehet pozitív vagy negatív, ezért azt mondjuk, hogy a Q a villamos töltés algebrai értéke.

1.5. Az atom méreteiről és két test érintkezéséről az atomelmélet szempontjából

Ha az atommagot úgy képzeljük el mint kis golyót, akkor a sugara r_m és m között mozog. Ha ugyanebben az alakban elképzeljük az elektronokat (mint kis gömböket), azoknak a sugara r_e m. Magának az atomnak a sugara r_a m. Az atom térfogatában a részecskék nagyon kis térfogatrészt foglalnak el, az atom térfogatának legnagyobb részét üres tér képezi, amelyet vákuumnak nevezünk.

Felvetődik a kérdés: ha az atom ilyen "üres", akkor, hogyan lehet megmagyarázni két test összeütközését. Miért nem hatolnak át a test atomjai a másik test atomjai között? Kalapáccsal miért üthetünk az ujjunkra?

Ilyen ütés alkalmával valójában nem kerül sor érintkezésre sem a testek, sem az atomok, de még az atomok elektronjai között sem. Amikor a kalapács atomjai megközelítik a kéz atomjait egy erős taszító erő kezd hatni az elektronok között. Ez a taszító erő átvivődik a kéz atomjaira (fájdalom kíséretében) egyetlen atom ütközése illetve érintkezése nélkül. Persze ez gyenge vigasz annak, aki kalapáccsal a kezére üt.

Így nem kell csodálkozni azon, hogy két, töltéssel rendelkező test már távolról hat egymásra, anélkül hogy valamilyen test vagy közeg továbbítaná ezt a hatást. A hatástovábbítást a villamos térnek tulajdonítjuk, amely minden fajta közegben, még a vákuumban is jelen van a töltéssel rendelkező test közelében.

1.6. Vezetők, szigetelők és félvezetők

Az összes kémiai elemet, amelyekkel találkozhatunk a természetben, elektromos szempontból három csoportba oszthatjuk.

Az első csoportba tartoznak azok az elemek, amelyeknél normális feltételek mellett az elektronok a külső pályán szorosan kapcsolódnak az atomhoz vagy atomcsoporthoz amely molekulát alkot. Ezeket az elemeket szigetelőknek, vagy dielektrikumoknak nevezzük. Ha ideális szigetelő közelébe egy elektromosan töltött test kerül, a villamos erő hatni kezd az atommagra is meg az elektronokra is a szigetelőanyagban, de elektron nem távozik az atomból, csupán az atom kismértékű deformációját figyelhetjük meg. A valóságban előforduló szigetelőknél ilyen esetben elektronok szakadnak el némely atomtól vagy atomcsoporttól, és rendezett, irányított mozgásba fognak, de ezt a mozgást, az elektronok elenyésző száma miatt, a legtöbb esetben elhanyagolhatjuk.

A másik csoportba tartoznak a vezetők. Ezek nagyszámú töltéssel (elektromosan töltött részecskével) rendelkeznek, amelyek szabadon mozognak az anyag belsejében. A legjobb vezetők a fémek (réz - Cu, alumínium - Al, ezüst - Ag). Náluk az elektronok a külső elektronhéjon nagyon lazán kötődnek az atomhoz. Így az elektronok atómtól atomig mozoghatnak és ezeket vezető elektronoknak nevezzük.

Folyékony oldatok esetében az oldott anyag semleges molekulái az oldatban két különböző töltésű részecskére esnek szét: úgynevezett pozitív és negatív ionokra. Ionok léteznek a gázokban is. Ha egy gázban nincs ion akkor az szigetelőként viselkedik. Ha egy gázban csak kis számú ion van jelen (levegő), akkor ez a gáz továbbra is szigetelő marad, ha nem túl nagyok a benne ható elektromos erők.

Nagy intenzitású villamos erők hatására a gázokban az ionok akkora sebességet kaphatnak, hogy a semleges molekulákkal való ütközéskor azokat két különböző töltésű részre, ionra osztják (ütközési ionizáció). Az ionok száma a gázokban így növekszik, és azok mind jobb vezetőként viselkednek.

A harmadik csoportba tartoznak a félvezetők. Ezeknél a szabadon mozgó elektromos töltésű részecskék száma sokkal nagyobb, mint a szigetelőknél, de kisebb mint a vezetőknél.

1.7. Alap- és származtatott mennyiségek és mértékegységek

Válasszunk ki tetszőlegesen négy mennyiséget, amelyet használunk az elektrotechnikában (villamosságtanban). A négy szabadon kiválasztott mennyiség segítségével kifejezhetjük az össz többit, és ezért alaplammennyiségeknek nevezzük őket, mértékegységeiket pedig alaplammértékegységeknek. A többi mennyiséget származtatott mennyiségeknek, mértékegységeiket pedig származtatott mértékegységeknek nevezzük.

Az MKSA mértékrendszerben az alaplammennyiségek a következők: hosszúság, tömeg, idő és áramerősség. Ezeknek az alaplammennyiségeknek a mértékegységei rendre a következők: méter (m), kilogramm (kg), másodperc (s) és amper (A).

A nemzetközi mértékrendszer SI rövidítése a megjelölésére használt francia kifejezés rövidítése ("Système International"). Alaplammennyiségei közé a fent említett négyen kívül még a hőmérséklet, a fényerősség vagy megvilágítás intenzitása (erőssége), és az anyagmennyiség tartozik. Az SI rendszerben a négy MKSA-alaplammértékegység mellett még három szerepel: kelvin (K), kandela (cd), és a mol. A mérnök számára nagyon fontos, hogy tudja az arányokat az alapvető fizikai mértékegységek és a gyakorlatban jelentkező értékek között.

A mért vagy számított értékek a villamosságtanban gyakran az SI mértékrendszer (alap)egységeinek többszöröseit vagy csupán tört részeit teszik ki. Ilyenkor az SI egységeket megszorozzuk vagy elosztjuk 10 valamelyik hatványával, illetve az 1.1. táblázatban található előtagokat illesztjük az SI egységjel elé.

1.1. táblázat

Az előtag neve	Az előtag jele	Szorzószám
exa-	E-	10^{18}
peta-	P-	10^{15}
tera-	T-	10^{12}
giga-	G-	10^9
mega-	M-	10^6
kilo-	k-	10^3
hekto-	h-	10^2
deka-	Da-	10^1
deci-	d-	10^{-1}
centi-	c-	10^{-2}
milli-	m-	10^{-3}
mikro-	-	10^{-6}
nano-	n-	10^{-9}
piko-	p-	10^{-12}
femto-	f-	10^{-15}
atto-	a-	10^{-18}

1.8. Alapismeretek a vektormennyiségekről

1.8.1. A VEKTORMENNYISÉGEK DEFINÍCIÓJA

A villamosságtanban alapvetően két fajta mennyiséggel találkozhatunk. Az első fajta mennyiséget a **skalármennyiségek** képviselik, amelyeket egyetlen számadattal megadhatunk illetve jellemezhetünk. Ilyen mennyiségek például a villamos töltés (villamos töltésmennyiség), a töltéssűrűség, a feszültség, a hőmérséklet, stb.

A **vektormennyiségek** meghatározására, definiálására nem elegendő egyetlen számadat, mert abból nem tudjuk egyértelműen kiszámítani a tőlük függő egyéb fizikai mennyiségeket. Vektormennyiségek például az erő, a térerősség, a nyomaték, stb.

Lássuk a különbséget egy példán keresztül! Ha a tér meghatározott P_1 pontjának hőmérsékletét írjuk le, akkor elégséges egyetlen t_1 hőmérsékletet megadnunk. Amennyiben viszont a P_1 pontban ható erőt akarjuk jellemezni, akkor nem elégséges egyetlen érték megadása - pl. az erő nagysága -, hiszen ha ez az erő egy pontszerű töltésre hat, az erő nagyságából még nem tudjuk, hogy milyen irányban fogja elmozdítani a pontszerű töltést.

Vektor tehát minden olyan mennyiség, amelynek egyértelmű meghatározásához egy megjelölt kezdő- és végponttal rendelkező (vagyis irányított) egyenesszakasz szükséges.

A **vektormennyiségek** három jellemzője a következő:

- a vektor abszolút értéke (intenzitása vagy nagysága), amely mindig pozitív szám (skalármennyiség), jelölése pedig v , vagy egyszerűen csak v ,
- a vektor iránya, amely nem más, mint az v -t ábrázoló egyenesszakasz iránya, és
- a vektor irányítása, amelyet az egyenesszakasz kezdő és végpontja határoz meg (az adott irányban – egyenesszakaszon – a két lehetséges irány közül az egyik).

Két vektort akkor tekinthetünk egyenlőnek, ha egyenlő az irányuk, irányításuk és az intenzitásuk, vagyis egyenesszakaszaik hossza (a vektorok abszolút értéke) megegyezik, egyenesszakaszaik párhuzamosak egymással, és azonos értelmű nyíllal rendelkeznek. Nem szükséges tehát, hogy a két vektor egybeessen, elég, ha transláció (párhuzamos eltolás) útján egybeejtethetők.

Az irányított egyenesszakasz megadásához elég biztosítani az egyenesszakasz vetületét a Descartes-koordináta rendszer három tengelyére. Jelölése:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

A v_x, v_y, v_z pozitív vagy negatív (skalár)számok a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái (rendezői). Nyilvánvaló, hogy ugyanazt a $\mathbf{v}$ vektort bármilyen más három, egymástól független adattal is megadhatjuk, pl. a vektor abszolút értékével (nagyságával) és két különböző tengellyel bezárt szögével. A könyvben csak a vektor rendezőivel találkozunk majd, de akit érdekel a vektoroknak a hengeres és gömbszferikus koordináta rendszerben való ábrázolása és az ott alkalmazott vektorparamétereknek a rendezőkkel való kapcsolata, az nézzon utána a vektortanban vagy W.H.Hayt könyvében 8. .

Az irányított egyenes szakasz hossza, vagyis a $\mathbf{v}$ vektor abszolút értéke a rendezők ismeretében a következő módon számítható:

Ha $v = 1$, akkor a $\mathbf{v}$ vektort **egységvektornak** nevezzük, jelölése $\mathbf{v}_0$. Ha $v = 0$, akkor a $\mathbf{v}$ vektort **zérusvektornak** (**nullavektornak**) nevezzük, jelölése $\mathbf{0}$ (váslagon szedve, megkülönböztetésül a skaláris nullától).

1.8.2. VEKTORALGEBRA

1.8.2.1. Vektorok összege, különbsége, skalárszámmal való szorzata

A vektorokat a paralelogrammaszabály szerint adjuk össze. A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor összegén azt a vektort értjük, amelyet úgy kapunk, hogy

- a $\mathbf{v}_2$ vektort párhuzamos eltolással úgy mozdítjuk el, hogy a kezdőpontja egybeessen a $\mathbf{v}_1$ vektor végpontjával, majd
- a $\mathbf{v}_1$ vektor kezdőpontját egyenesszakasszal összekötjük a $\mathbf{v}_2$ vektor végpontjával az így kapott vektor nem más, mint a keresett vektorösszeg ($\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$), irányítása (nyílazása) pedig a $\mathbf{v}_1$ vektor kezdőpontjától a $\mathbf{v}_2$ vektor végpontja felé mutat.

A vektorok kivonása az összeadásra vezethető vissza, ha tudjuk, hogy a mínusz jel a vektor előtt csupán az irányítás megváltoztatását (a nyílazás vagy nyíl megfordítását) jelenti.

Könnyen belátható, hogy a vektor összeadás kommutatív ($\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$) és asszociatív ($(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$) művelet.

A vektor és a skalárszám szorzatának eredménye egy, az eredeti vektorral párhuzamos vektor, amely rövidebb, hosszabb vagy az eredeti vektorral egyenlő hosszúságú, irányítása pedig a skalárszám értékétől függ: az eredeti vektorral megegyező irányú, ha pozitív a skalárszám, illetve ellenkező nyílazású, ha negatív a skalárszám. Az eredményvektor (a vektor és a skalárszám szorzatának eredménye) akkor lesz rövidebb, ha a skalárszám abszolút értéke kisebb egynél, egyenlő lesz az eredeti vektorral, ha a skalárszám abszolút értéke egyenlő eggyel, és hosszabb lesz mint az eredeti vektor, ha a skalárszám abszolút értéke nagyobb mint egy. A skalárszámmal való szorzás disztributív művelet:

$$\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2.$$

Legyen $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$, $\mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ és $\mathbf{v}_3 = (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z})$, ahol a zárójelben levő számok a vektor skalár-összetevői, skalár-komponensei, vagy egyszerűen: a derékszögű koordinátái.

Ilyen jelölésmód mellett két vektor, a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$v_{1x} = v_{2x}, \quad v_{1y} = v_{2y}, \quad v_{1z} = v_{2z}.$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok összege:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y}, v_{1z} + v_{2z}).$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok különbsége:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (v_{1x} - v_{2x}, v_{1y} - v_{2y}, v_{1z} - v_{2z}).$$

A vektor szorzása skalárszámmal:

$$\lambda \mathbf{v}_1 = (\lambda v_{1x}, \lambda v_{1y}, \lambda v_{1z}).$$

Vezessük be az x , y és z tengely irányába mutató egységvektorokat, amelyeknek jelölése: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, és $\mathbf{k}$. Ebben az esetben a fenti vektorok a következő alakban írhatók fel:

$$\mathbf{v}_1 = v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_2 = v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j} + v_{2z}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_3 = v_{3x}\mathbf{i} + v_{3y}\mathbf{j} + v_{3z}\mathbf{k}.$$

A villamosságtanban fontos szerepet játszik a tetszés szerinti irányba mutató, egységnyi hosszúságú vektor, más néven egységvektor. Segítségével ugyanis minden vektor felírható a következő alakban:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{v_1}{|\mathbf{v}_1|} \mathbf{v}_{10} = v_1 \frac{\mathbf{v}_{10}}{|\mathbf{v}_{10}|},$$

Innen aztán könnyen kifejezhető a $\mathbf{v}_1$ vektor egységvektora, a $\mathbf{v}_{10}$:

ahol α , β , γ a $\mathbf{v}_1$ vektor és a koordinátatengelyek által bezárt szögek. Magától értetődő, hogy:

1.8.2.2. Skalárszorzat

Két vektor skaláris szorzatán azt a skalárszámot értjük a definíció szerint, amelyet a két vektor abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatával kapunk meg:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| \cos(\varphi) = v_1 v_2 \cos \varphi = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z},$$

ahol φ a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor által közrezárt szög.

Két egymásra merőleges vektor skalárszorzata nulla, ami a fenti kifejezésből is kitűnik.

A vektorok skaláris szorzása kommutatív művelet, és ezt a tényt legegyszerűbben a definícióból következtethetjük ki, vagyis érvényes, hogy:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1.$$

Könnyen belátható a geometriai ábrázolás alapján, hogy a skalárszorzás művelete disztributív is, vagyis

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3.$$

Az 1.1. ábra alapján látszik, hogy ugyanazt kapjuk akár külön-külön vetítjük a $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektort a $\mathbf{v}_1$ vektorra és úgy adjuk össze, akár előbb adjuk össze a $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektort és csak utána vetítjük a $\mathbf{v}_1$ vektorra.

1.1 ábra

Az asszociatív tulajdonság viszont nem érvényes a skaláris szorzás esetében, vagyis

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) \neq (\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3.$$

A fenti kifejezés igazolására lássuk be, hogy a bal oldalon egy, a $\mathbf{v}_1$ vektor irányába mutató vektor szerepel (hiszen a $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ skaláris szorzat eredménye egy skalárszám), a jobb oldalon viszont egy, a $\mathbf{v}_3$ vektor irányába mutató vektor áll.

1.8.2.3. Vektorszorzat

A definíció szerint a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektoriális szorzata olyan vektor, melynek iránya merőleges a két vektor által kifeszített síkra (tehát mind a $\mathbf{v}_1$, mind a $\mathbf{v}_2$ vektorra), az eredményvektor irányítása pedig abból a feltételből határozható meg, hogy a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektorhármassal jobbsodrású rendszert alkot. Más szóval a vektorszorzat nyílazását a jobbkezes csavar haladási iránya adja meg akkor, amikor a forgási irányának megfelelően az első vektort (a $\mathbf{v}_1$ vektort) a második vektor (a $\mathbf{v}_2$ vektor) irányába forgatjuk el (rotáljuk). A vektor abszolút értéke (intenzitása, nagysága) pedig a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szög szinuszána a szorzata:

$$|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| \sin \varphi$$

ahol φ a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor által bezárt szög.

Két párhuzamos vektor vektorszorzata zérusvektort eredményez, ez a fenti kifejezésből is látható.

A vektoriális szorzás művelete nem kommutatív, hiszen nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1.$$

A tényezők felcserélésével ugyanis megváltozik a vektoroknak az egymásbaforgatási iránya, vagyis

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = - \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 .$$

Az asszociatív tulajdonság sem érvényes a vektorsorzatra, tehát

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \neq (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 .$$

A disztributív tulajdonság azonban megmarad, tehát érvényes a vektoriális szorzás műveletére is:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 .$$

Ismerve a vektorszorzat egyes vektorainak komponenseit, a vektorszorzat komponenseinek kényelmes (könnyen megjegyezhető) kiszámítási módját nyújtja a determináns alakban felírt kifejezés:

A számítás végeredménye pedig természetesen a következő:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}) \mathbf{i} + (v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z}) \mathbf{j} + (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}) \mathbf{k} .$$

1.8.2.4. Vegyes szorzat

Legyen a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ három térbeli vektor. Nézzük hogyan értelmezhetjük e három vektor $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3$ alakú vegyes szorzatát. Ha a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok vektorszorzatát skalárisan megszorozzuk a $\mathbf{v}_3$ vektorral nyilvánvalóan pozitív vagy negatív skalárszámot kapunk eredményül. Az $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, tehát a vektorszorzat abszolút értéke a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, maga a vektorszorzat pedig merőleges a paralelogrammát tartalmazó síkra. Ennek az eredményvektornak (vektorszorzatnak) a $\mathbf{v}_3$ vektorral való skaláris szorzata a három vektor alkotta paralelepipedon magasságával való szorzást jelenti. Így a felírt vegyes szorzat eredményeként a három vektor által meghatározott paralelepipedon térfogatát kapjuk (igaz ugyan, hogy a térfogatérték sohasem lehet negatív). Az eredmény (a vegyes szorzat értéke) attól függően lesz negatív vagy pozitív, hogy a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ jobbsodrású vagy balsodrású rendszert alkot. Érdemes megjegyezni, hogy a vegyes szorzat esetében csak a vektorok sorrendjére kell ügyelni, nem pedig arra, hogy melyik két vektort szorozzuk vektoriálisan, ugyanis

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) = - (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_3 = - \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2) = - \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)$$

A vegyes szorzat értékének számítása determináns alakban:

A vegyes szorzat kifejezéséből és a magyarázat alapján könnyen belátható, hogy a vegyes szorzat értéke nulla lesz, ha a három adott vektor egy síkba (ugyanabba a síkba) tartozik.

1.8.2.5. Kétszeres vektorszorzat

A $\mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ kétszeres vektorszorzat (dupla vektorszorzat) eredménye egy újabb vektor. Mivel a $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ vektorszorzat merőleges a $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ által meghatározott síkra, a kétszeres vektorszorzat eredményvektora mindenképpen a $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ által meghatározott síkba fog esni. Ennek köszönve a dupla vektorszorzat eredményvektora felbontható $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ menti összetevőkre amit kifejtési tételnek is hívnak:

$$\mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 .$$

1.8.2.6. A felületelem mint vektor

A vektoriális szorzat fogalma illetve jelentése már sejteti a lehetőséget, hogy a felületet vektorként is ábrázolhatjuk. Két vektor vektorszorzata ugyanis olyan vektor, melynek abszolút értéke egyenlő a vektorok által kifeszített felület nagyságával, iránya pedig merőleges a vektorok által meghatározott síkra. A felület vektorának irányítását (nyilazását, értelmét) a felület körüljárási iránya szabja meg, amelyet a vektorszorzatban szereplő két vektor sorrendje diktál. A felületvektor irányítása úgy viszonyul a felület körüljárási irányához, mint a jobbmenetű csavar haladási iránya annak forgásirányához.

2. ELEKTROSZTATIKA

2.1. Az elektrosztatikus erők

Az elektromos töltésű testek közötti erők meghatározása: már mondtuk, hogy a villamos (elektromos) erő két villamosan töltött test között, helyesebben szólva a töltéstöbbleteik között jelentkező erők eredménye. Ha ismernénk minden részecske pontos helyét, meg tudnánk határozni az erőt minden részecskepár között és így megkaphatnánk az eredő erőt a két töltött test között. Ez a módszer a gyakorlatban, a töltéstöbbletet alkotó elemi töltések roppant nagy száma miatt, alkalmatlan a két töltött test közötti erő számítására. A probléma könnyebb megoldása céljából átlagértékeket vezetünk be. A fizikában és a technikában ez gyakori jelenség. Például a testek tömegsűrűségének meghatározásánál a $\Delta m / \Delta V$ hányados jelzi a közép- vagy átlagsűrűséget. Itt a ΔV térfogatelem nem lehet végtelen kicsiny, hiszen ily módon a térben egy tetszőleges szerinti pontot kiválasztva a hányados értéke lehet akár nulla is, ha a ΔV térfogatelem nem tartalmazza a test egyetlen atomját sem. A fizikailag kis térfogatnak vagy térfogatelemnek tehát, az elektrotechnikában, makroszkópikus méretben kicsinynek kell lennie (nagy számú elektromos részecskét kell tartalmaznia), azaz a töltéssűrűség nem szabad hogy változzék lényegesen a térelem szélső pontjai között, mikroszkópikusan azonban nagynak kell lennie, vagyis még mindig igen sok töltést kell magába foglalnia. Amikor a fizikai jelenségek megközelítésénél a mikroszkópikus mennyiségek átlagértékeit vesszük figyelembe, akkor makroszkópikus hozzáállásról beszélünk. A mennyiségek középértékeit makroszkópikus mennyiségeknek is nevezzük ("makroszkópikus" a görög "szemmel látható"-ból).

Kísérletek bizonyítják, hogy az erők nem egyformák, változnak ha a villamos töltések nyugszanak vagy ha mozognak a megfigyelőhöz viszonyítva. A legegyszerűbb, ha az össz töltés makroszkópikusan nyugalomban van (mikroszkópikus szinten ez természetesen lehetetlen).

2.1.1. COULOMB TÖRVÉNYE

A villamos töltés (az elektromosan töltött test) egy olyan test, amelyen pozitív, vagy negatív töltéstöbblet van. A villamos töltések között fellépő villamos erő a töltésmennyiségtől és a távolságtól függ. Coulomb törvénye a pontszerű töltések egymásra hatását írja le. Az elektromosan töltött testeket akkor tekinthetjük pontszerűeknek, ha a testek dimenziója, nagysága elenyésző, elhanyagolható a közöttük levő távolsághoz viszonyítva (pl. egy kisebb méretű könyvet 10m-ről vagy távolabbról nyugodtan tekinthetjük pontszerű testnek). Coulomb törvénye, amely egyes vélemények szerint az elektrosztatika alaptörvényének számít kísérletek, kísérletsorozatok eredményeként jött létre és kapta meg a számunkra ismert végső alakját:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$
$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

A villamos töltések közötti erő nagysága egyenesen arányos a töltésmennyiségekkel és fordítottan arányos a töltések közötti távolság négyzetével. Gyakran a k arányossági tényezőt

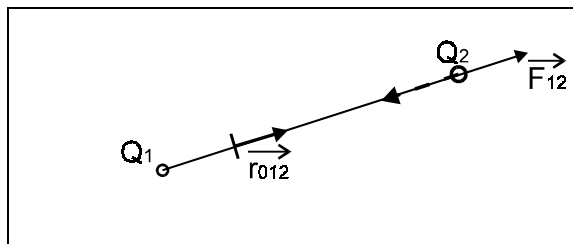
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ alakban írjuk fel, ahol ϵ_0 egy új állandó (konstans).

ϵ_0 - a vákuum dielektromos állandója, vagy a vákuum permittivitása

$$\epsilon_0 \cong \frac{10^{-9}}{36\pi} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \right] \left[\frac{F}{m} \right]$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right] \left[\frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$



Ez a Coulomb törvény algebrai alakja. A vektoralak pedig a következő:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{012}$$

Megegyezés:

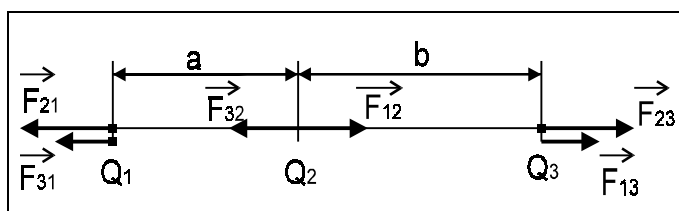
1. az F_{12} erő az az erő, amellyel a Q_1 töltés hat a Q_2 töltésre,
2. a pozitív és a negatív töltésekhez a megfelelő algebrai jelet is hozzárendeljük,
3. ha azonos előjelűek a töltések, az F_{12} erő a képen megjelölt irányba hat,
4. ellentétes előjelű töltések esetén, a fellépő erő irányát a szaggatott nyíl jelzi

(a $-\vec{r}_{012}$ - nek ellenkező iránya van mint az $\vec{r}_{012}$ -nek).

2.1. Példa: Három elektromosan töltött kisméretű test a, b és (a+b) távolságra vannak egymástól, tehát egy egyenesen helyezkednek el. Mekkora kell, hogy legyen a három test töltése (a töltésmennyisége és előjele) ahhoz, hogy az eredő elektromos erő mind a három testre nulla legyen?

Megoldás:

Az erők összege az egyes testekre a példa szerint nullával egyenlő, vagyis



$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = 0$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0$$

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$$

Mivel a harmadik egyenlet megkapható az első kettő összeadásával, így az első kettő következményének is tekinthető, tehát semmiféleképp sem független és mint ilyet nyugodtan elhagyhatjuk (nem hordoz új információt a számunkra)

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{r}_{012}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{r}_{021}$$

$$\vec{F}_{13} = \frac{Q_1 \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0 (a+b)^2} \cdot \vec{r}_{013}$$

$$\vec{F}_{31} = \frac{Q_3 \cdot Q_1}{4\pi\epsilon_0 (a+b)^2} \cdot \vec{r}_{031}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{Q_2 \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot \vec{r}_{023}$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{Q_2 \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot \vec{r}_{032}$$

$$\vec{r}_{012} = \vec{r}_{013} = \vec{r}_{023} = \vec{r}_0 \text{ balról jobbra mutató egységvektorok}$$

$$\vec{r}_{021} = \vec{r}_{032} = \vec{r}_{031} = -\vec{r}_0 \text{ jobbról balra mutató egységvektorok}$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot (-\vec{r}_0) + \frac{Q_3 \cdot Q_1}{4\pi\epsilon_0 (a+b)^2} \cdot (-\vec{r}_0) = 0 \quad / \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{Q_1(-\vec{r}_0)} \right)$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{r}_0 + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot (-\vec{r}_0) = 0 \quad / \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{Q(-\vec{r}_0)} \right)$$

$$\frac{Q_2}{a^2} + \frac{Q_3}{(a+b)^2} = 0$$

$$\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_3}{b^2} = 0 \quad Q_1 = Q_3 \cdot \frac{a^2}{b^2} = -Q_2 \frac{(a+b)^2}{b^2}$$

2.1.2. A SZUPERPOZÍCIÓ-ELV

Coulomb törvényét alkalmazhatjuk akkor is, ha több pontszerű villamos töltéssel rendelkező test hat egymásra. Ezt a **szuperpozíció-elv** segítségével végezzük. **Az össz elektromos erő, amellyel a testre hatnak a többi testek, egyenlő azon erővektorok vektoriális összegével, amellyekkel a testek külön-külön hatnak az adott testre.**

2.2. A villamos tér

2.2.1. A VILLAMOS TÉR FOGALMA ÉS VEKTORTERMÉSZETE

Coulomb törvénye vákuumban írja le az erőhatást két pontszerű töltés között. Nem létezik megmagyarázható mechanizmusa a két, egymástól bizonyos távolságra elhelyezkedő test egymásra hatásának, mivel nincs közvetlen kapcsolat a két test között. Az erők, amellyekkel a vákuumban a testek egymásra hatnak azért érthetetlen, mert a vákuumban nem létezik számunkra ismert anyag, amely ezt a hatást átvinné, terjesztené. Ezt a nehézséget a villamos (elektromos) tér fogalmának bevezetésével oldjuk fel. Azt mondjuk, hogy Q_1 töltés megváltoztatja, modifikálja a teret maga körül, villamos teret hoz létre abban a térrészben ahol elhelyezkedik, és ez a villamos tér hat a másik (Q_2) testre, amelyet beviszünk ebbe a térbe.

Próbatöltésnek (jele ΔQ) nevezzük azt a kisméretű testet, amely kis mennyiségű pozitív villamos töltéssel rendelkezik. Minden elektromosan töltött test valamilyen módon hat a villamos töltések elrendezésére a közelben elhelyezkedő testeken és így a térre is. A próbatöltés kis töltésmennyiségénél fogva nem változtatja meg a töltéselrendezést a közelében lévő

töltéshordozókon sem, így a villamos térerősség bevezetésénél fontos szerepe van. Írjuk fel most Coulomb törvényét egy Q és egy ΔQ töltésű pontszerű testre, majd osszuk át a kifejezés jobb és bal oldalát a próbatöltés töltésmennyiségével (ΔQ). A kifejezés jobb oldalán csak a Q töltéssel kapcsolatos mennyiségek maradnak (kivéve a távolságot a ΔQ töltéstől a Q töltésig). Ezt a kifejezést tekintjük a Q pontszerű töltés által r távolságban létrehozott villamos térerősség definíciójának:

$$\vec{F}_{a\Delta Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$$

$$\frac{\vec{F}_{a\Delta Q}}{\Delta Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{a\Delta Q}}{\Delta Q}$$

$$\vec{F} = \Delta Q \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$$

2.2. Példa: Számítsuk ki az elektromos tér vektorának x és y összetevőjét egy tetszőleges (x,y) pontban a képen látható esetre, amikor két ellentétes előjelű, de egyforma töltésmennyiségű pontszerű töltés hozza létre a villamos teret!

Megoldás:

mivel hogy a $Q_2 = -Q_1$, ezért

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right)$$

$$\vec{r}_1 = x \vec{i} + \left(y - \frac{d}{2}\right) \vec{j}$$

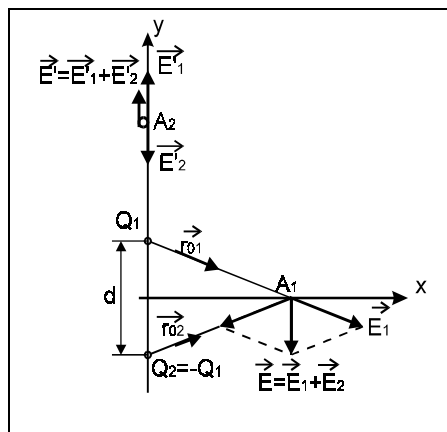
$$\vec{r}_2 = x \vec{i} + \left(y + \frac{d}{2}\right) \vec{j}$$

Ezeknek a vektoroknak a nagysága

$$r_1 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}$$

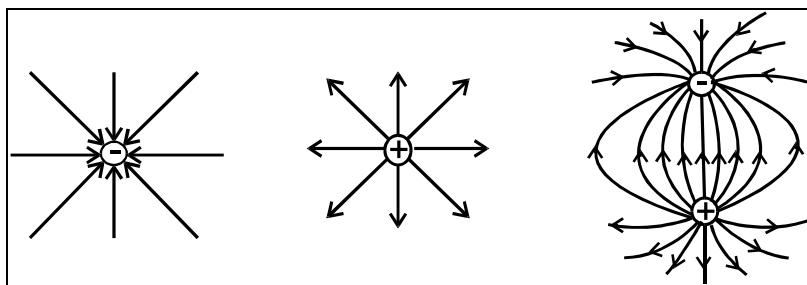
$$r_2 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}$$

A feladat megoldásánál másik módja:



$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \vec{r}_{01} & \vec{r}_{01} &= \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j} \\ \vec{E}_2 &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \vec{r}_{02} & \vec{r}_{02} &= \cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j} \\ \vec{E}_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) \\ \vec{E}_2 &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} (\cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j}) \\ \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) - \frac{1}{r_2^2} (\cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j}) \right) \\ \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r_1^2} \cos\alpha - \frac{1}{r_2^2} \cos\beta \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{r_1^2} \sin\alpha - \frac{1}{r_2^2} \sin\beta \right) \vec{j} \right] \\ r_1 &= \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} \\ \sin\alpha &= \frac{x}{r_1} & \sin\beta &= \frac{x}{r_2} \\ \cos\alpha &= \frac{y - \frac{d}{2}}{r_1} & \cos\beta &= \frac{y + \frac{d}{2}}{r_2}\end{aligned}$$

2.2.1.1. A villamos (elektromos) térerősség erővonalai



Az elektromos tér vizuális ábrázolásához a villamos tér erővonalait, vagy az elektromos tér vektorait használjuk. Az elektromos tér erővonalai képzeletbeli görbe vonalak, amelyeknek

minden pontjában a villamos térerősség vektora ($\vec{E}$) érintő irányú. Ahhoz, hogy az E vektorainak ne csak az irányát, hanem az irányítását is meg tudjuk határozni, nyilakkal látjuk el a villamos térerősség erővonalait. Az intenzitás meghatározásához az erővonalak sűrűségét vesszük figyelembe: sűrűbb erővonalak nagyobb térintenzitást, a ritkábbak gyöngébb teret jeleznek.

2.2.1.2. Felületi és térbeli töltéeloszlások és villamos terük

A villamos töltésmennyiség mindig az elektronok töltésmennyiségének egész számú többszöröseként jelentkezik. Az elektromos töltéseket (töltéstöbbletet vagy töltéshiányt) nem

egyenként vesszük számba, hanem bevezetjük az elektromos töltéssűrűség fogalmát. Ez jellemzi a töltésmennyiség makroszkópikus középértékét valamely pont közelében az elektromosan töltött test belsejében vagy felületén. A szigetelőket (dielektrikumokat) is dörzsöléssel lehet elektromossá tenni, így keletkeznek a felületi töltéseloszlások, amelyekhez a felületi töltéssűrűség fogalma kapcsolódik. Képzeljünk el egy felületet, amely felületi töltéseloszlással rendelkezik és ezen a felületen válasszunk ki egy kis felületelemet (ΔS). Az ezen a felületelemen elhelyezkedő töltésmennyiség ($\Delta Q_{a\Delta S}$) és a kiválasztott felületelem hányadosa adja meg a felületi átlagos töltéssűrűséget:

$$\sigma = \frac{\Delta Q_{a\Delta S}}{\Delta S}$$

A felületi töltéssűrűség általános esetben pontról pontra változik, illetve a testfelület minden pontjában más és más. Ha az S felület minden pontjában ismerjük az elektromos test felületi töltéssűrűségét, akkor a töltésmennyiséget a következő módon határozzuk meg:

$$Q = \text{az össz } \Delta Q \text{ összege az } S \text{ területen} = \sum_S \sigma \Delta S$$

A Q értéke annál pontosabb, minél kisebb ΔS felületelemet választunk ki. A nagyon kis felületelemeket dS -el jelöljük és a $\sum$ jelet az integrál jele váltja fel, vagyis:

$$Q = \int_S \sigma dS \rightarrow \sigma \text{ különböző a terület minden pontjában}$$

$$Q = \sigma S \rightarrow \sigma \text{ konstans az egész területen}$$

A gyakorlatban találkozhatunk (habár sokkal ritkábban mint a felületi töltéseloszlással) felhő alakban elhelyezkedő töltésekkel (elektroncsöveknél, plazma állapotban levő anyagoknál), tehát térbeli töltéssűrűséggel. Az ilyen esetek miatt vezetjük be a térbeli töltéssűrűség fogalmát, mint a kis ΔV térfogatelemben elhelyezkedő össz töltésmennyiség (ΔQ) és a kis térfogatelem hányadosát:

$$\rho = \frac{\Delta Q_{a\Delta V}}{\Delta V}$$

Általános esetben a térbeli töltéssűrűség a megfigyelt térrész minden pontjában más és más. Ha az elektromosan töltött test V térfogatának minden pontjában ismerjük a térbeli töltéssűrűséget, akkor az össz töltésmennyiséget a következő módon kapjuk meg:

$$Q = \text{az össz } \Delta Q \text{ a } V \text{ térfogaton belül} = \sum_V \rho \Delta V, \text{ vagyis}$$

$$Q = \int_V \rho dV \quad \text{vagy}$$

$$Q = \rho V \quad \text{ha a } \rho \text{ állandó a test minden pontjában}$$

Ha a tér egy konkrét pontjában a felületi, vagy térbeli töltéseloszlások esetében érdekel bennünket a villamos térerősség, akkor a következő módon járunk el.

A felületi töltéseloszlás (töltéssűrűség) esetében ismernünk kell a felületi töltéssűrűség-függvényt (vagyis azt, hogy pontról pontra hogyan változik a felületi töltéssűrűség értéke). A felületet kis dS felületelemekre osztjuk (ahol az elektromosság σdS) és ezt a töltésmennyiséget pontszerű töltésnek tekintve felírhatjuk, hogy:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{r}_0$$

Az előző kifejezésben felület menti vektorintegrálásról van szó, hiszen az integrálást a töltéshordozó test egész felületére kell elvégeznünk, emellett egyúttal vektoriális összegezést is igényel a kifejezés hiszen a tér általunk kiválasztott pontjában (amely pontra a térerősséget számítjuk) csak egy villamos térérték létezik, viszont a ponthoz húzott helyvektorok iránya és intenzitása a felület különböző dS felületelemeiből más és más, tehát vektoriálisan kell összegezni őket.

Térbeli töltéeloszlás (töltéssűrűség) alkalmával a villamos térerősség meghatározásához ismernünk kell a térbeli töltéssűrűség-függvényt (térbeli töltéssűrűség-eloszlást). Hasonló eljárással mint a felületi töltéssűrűség esetében (itt természetesen a töltések által elfoglalt térrészt osztjuk dV térfogatelemekre) a következő kifejezéshez jutunk:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{r}_0$$

2.2.2. AZ ELEKTROMOS TÉR POTENCIÁLJA

Láttuk, hogy a villamos teret minden pontban meghatározhatjuk a térerősség vektorával $\vec{E}$. E módszer mellett létezik még egy másik is, amellyel meghatározhatjuk az elektromos teret. Ennél a módszernél csak egy skaláris mennyiséget kell ismernünk, az úgynevezett potenciált. Ez az egyszerűbb módszer a villamos tér leírásának. Az $\vec{E}$ vektort könnyen meghatározhatjuk, ha a tér minden pontjában rendelkezésünkre áll a potenciál értéke.

2.2.2.1. Az elektromos erő munkája

Képzeld el, hogy az A pontban ΔQ próbatöltés van. Erre a töltésmennyiségre F_1 erő hat:

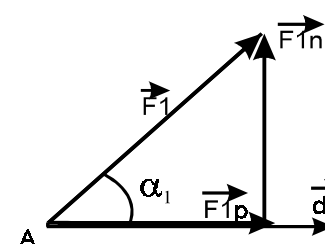
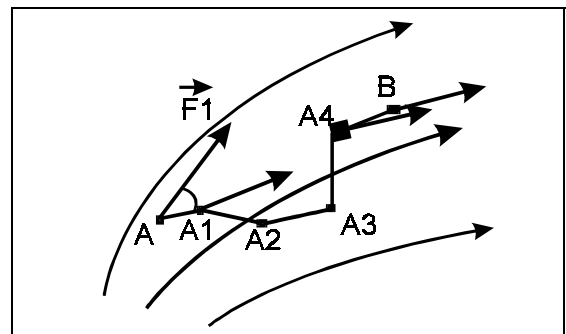
$$\vec{F}_1 = \Delta Q \vec{E}_1$$

Ha megengednénk, hogy az E vektor irányában az F_1 erő elmozdítsa a töltést, akkor egy rövid Δl úton az erő a következő munkát végezné:

$$\Delta A = F_1 \Delta l.$$

Ha az F_1 erő hatására a ΔQ töltés nem az $\vec{F}_1$ vektor irányában mozog el, akkor a ΔA_1 munkát egy kicsit másképp számoljuk ki. Az $\vec{F}_1$ erőt felírhatjuk két merőleges komponens összegeként:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1p} + \vec{F}_{1n}$$



Látható, hogy a ΔQ töltés csak az $\vec{F}_{lp}$ erő hatására mozog és mivel

$$F_{lp} = F_1 \cos(\angle F_1, F_{lp}) = F_1 \cos \alpha_1$$

$$\Delta A_1 = F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 = \Delta Q E_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1$$

A Δl_1 tulajdonképpen elmozdulás egy meghatározott irányban, ez felfogható a $\vec{dl}$ vektor intenzitásának is. A szorzat jobb oldala két vektor intenzitásának és a köztük levő szög koszinuszának szorzata: ez két vektor skaláris szorzatát jelenti! Tehát felírható, hogy:

$$\Delta A_1 = \Delta Q \vec{E}_1 \vec{dl}_1$$

Az erőter össz munkája amely ahhoz szükséges, hogy valamilyen töredezett útvonalon a ΔQ töltés az A pontból a B pontba kerüljön:

$$\begin{aligned} A_{\text{tér ereje A -tól B -ig}} &= \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = \Delta Q (\vec{E}_1 \vec{dl}_1 + \vec{E}_2 \vec{dl}_2 + \dots + \vec{E}_n \vec{dl}_n) = \\ &= \Delta Q \sum_{i=1}^n \vec{E}_k \vec{dl}_k \end{aligned}$$

Ha azt akarjuk, hogy a töltés egy szabályos (nem tördezett) útvonalon mozogjon, akkor ezt az utat sok kis rövid szakaszra kell felosztanunk, és ezekre kell alkalmazni az előző képletet. A számítás annál pontosabb, minél rövidebb, apróbb szakaszokat képezünk.

$$\Delta l_k \rightarrow dl$$

$$\sum \rightarrow \int$$

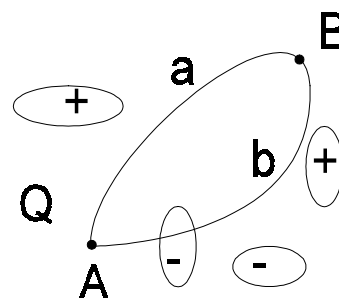
$$A_{\text{a tér ereje az A-tól B-ig}} = \Delta Q \int_A^B \vec{E} \vec{dl}$$

Az utolsó kifejezés szavakkal így fogalmazható meg: az A és a B pont között a villamos térerő (a tér erejének) munkája egyenlő a mozgó test töltésmennyiségének és a villamos térerősség-vektor adott út menti vonalintegráljának a szorzatával.

2.2.2.2. Az energiamegmaradás törvénye és felhasználása az elektrosztatikában

Az energia megmaradásának törvénye azt mondja ki, hogy az energia nem jöhet létre, csak fenntartható, vagyis átalakulhat egyik alakjából a másikba. Figyeljük meg a képen látható elektromos testek rendszerét! Képzeld el, hogy a villamos tér által kifejtett erő átvitte a próbatöltést az A pontból a B pontba. Először az AaB úton, másodszor pedig az AbB úton. Különbözik-e a munka e két esetben?

Be fogjuk bizonyítani, hogy az energiamegmaradás törvénye szerint ez a két munka egyforma. Mekkora munkát kell befektetni ahhoz, hogy a próbatöltés körüljárja az egész AaBbA zárt görbét? Láthatjuk, hogy egyes részekben a tér gyorsítja a próbatöltést míg máshol lassítja, mégpedig ahol az $\vec{E}$ és a $\vec{dl}$ közötti szög kisebb mint $\frac{\pi}{2}$, ott a térerő munkája pozitív, vagyis gyorsítja a töltést. Ahol ez a szög nagyobb mint $\frac{\pi}{2}$, ott az térerő



munkája negatív, azaz a villamos erők lassítják a töltést. A mozgás ezeken a részeken csak valamilyen külső mechanikus erő hatására történhet. Miután a töltés körüljárja a zárt görbét és visszatér az A pontba, az egész rendszer ugyanolyan lesz mint amilyen volt az elindulás előtt, tehát a rendszer energiája is azonos marad.

Ebből következik, hogy **nyugvó töltések terében (az elektrosztatikus térben) tetszőleges zárt görbe mentén a végzett össz munka (az elektromos térerő által végzett munka) értéke nulla:**

$$\Delta Q \oint_{AaBbA} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\Delta Q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} + \Delta Q \int_B^A \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Könnyen bebizonyítható, hogy:

$$\int_B^A \vec{E} d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Más szóval azt is mondhatjuk, hogy az elektrosztatikus tér cirkulációmentes, vagyis a villamos térerősségvektor integrálja bármely zárt görbére nulla. Ebből az alábbi lényeges tény következik. Elektrosztatikus térben két pont között a feszültség (a tér által valamely töltésen végzett munka) csak a kezdő- és végpont helyzetétől függ, az integrációs úttól (magától a töltés pályájától) azonban független. Lássuk most azt a gondolatmenetet, amellyel eljutunk az imént leírt tényig!

Ha a "b" úton megyünk az A pontból a B pontba nem pedig a B-ből az A-ba, akkor a $d\vec{l}$ vektor előjele megváltozik, vagyis $-d\vec{l}$ lesz belőle. (A matematikából ismert, hogy az integrálhatárok felcserélése előjelváltozást eredményez). Így megkapjuk, hogy az elektromos erők munkája nem függ a választott út hosszától, vagy alakjától hanem csak a végső pontok elhelyezkedésétől.

$$\Delta Q \int_{AaB} \vec{E} d\vec{l} = \Delta Q \int_{AbB} \vec{E} d\vec{l}$$

2.2.2.3. Az villamos tér potenciáljának definíciója és a potenciálkülönbség

Bebizonyítottuk, hogy a próbatöltés átvitelekor a tér egyik pontjából a másik pontba a villamos tér által végzett munka nem függ az út alakjától hanem csak a végső pontoktól. A villamos térnek ez a tulajdonsága lehetővé teszi, hogy a tér minden pontját leírassuk egy skaláris mennyiséggel, a potenciállal.

Válasszunk ki a térben egy tetszőleges R pontot (alappont, referens pont, zérus potenciálú pont)! Így a tér minden pontjához egyértelműen rendelhetünk egy értéket, amely avval a villamos tér által elvégzett munkával egyenlő, amely szükséges ahhoz, hogy a ΔQ töltést a villamos erők a tér adott pontjából az R pontba vigyék át. A villamos tér pontjainak ilyen leírásánál mindig szerepelne a ΔQ töltésmennyiség, ami kellemetlen, mert mindig fel kellene tüntetnünk, hogy mekkora ez a ΔQ töltésmennyiség. Ha viszont a munkát elosztjuk a ΔQ -val, egy olyan mennyiséget kapunk, amely nem függ a ΔQ -tól, és ezt potenciálnak nevezzük:

$$V_A = \int_A^R \vec{E} d\vec{l}, \text{ ahol a } V_A \text{ az A pont potenciálja a referens R ponthoz viszonyítva}$$

A villamos tér valamely kiválasztott pontjának potenciálja számbelileg megegyezik a munkával, amelyet az elektromos erők végeznek, amíg az egységnyi próbatöltést átviszik a kiválasztott pontból a zérus potenciálú R pontba.

A referens pont kiválasztása tetszőleges. Az elméleti számítások során a végtelen távoli pontot, gyakorlati feladatok esetében pedig a Földet szokás alappontnak tekinteni, de gyakran más választás is célszerű lehet. A potenciál definíciójából látjuk, hogy a referens pont potenciálja egyenlő nullával (mivel az integrál határai megegyeznek), ami azt jelenti, hogy a Föld felszíne zérus potenciálú.

Számoljuk ki két pont (A és B) potenciálkülönbségét!

$$V_A - V_B = \int_A^R \vec{E} d\vec{l} - \int_B^R \vec{E} d\vec{l}$$

$$V_A - V_B = \int_A^R \vec{E} d\vec{l} + \int_R^B \vec{E} d\vec{l}$$

Mivel az előbbi magyarázat szerint az integrál az A-tól a B-ig nem függ az úttól és mindegy, hogy az R pont ezen az úton van vagy sem, az következik, hogy:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

A két pont közötti potenciálkülönbség nem függ a referens pont helyzetétől. Az előző egyenlet jobb oldalán szereplő integrált elektromos feszültségnek nevezzük, vagy egyszerűen feszültségnek, amely két pont (az A és B pontok) között mérhető. Ez azt jelenti, hogy a feszültség és a potenciálkülönbség az elektrosztatikában megegyező fogalmak (ez a megállapítás nem vonatkozik az időben változó villamos térre).

$$U_{AB} = V_A - V_B = -U_{BA} \text{ [V]} \quad E \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

A feszültség jellegzetes értékei a gyakorlatban:

- a legkisebb feszültség, amelyet manapság mérni tudunk 10 nV
- a feszültség értéke az ember szíve és a kezei között 1 mV
- az akkumulátor csatlakozói között a feszültség 1,5-12 V
- a városi hálózati feszültség 220 V
- a feszültség a távvezeték vezetői és a föld között 35,110,220,400 kV
- a feszültség a föld és az elektromosan töltött felhő között a villámlás pillanatában 100 MV

2.3. Példa: Négy kicsi és egyforma töltésmennyiségű test ($Q = +0,5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$) egy négyzet csúcsaiban helyezkedik el. A négyzet oldalainak hossza $a=2 \text{ cm}$. Határozzuk meg a potenciált az átlók metszetében, és a potenciálkülönbséget az átlók metszéspontja és az egyik oldal középpontja között! Mekkora munkát végeznek a villamos erők az egyik töltésnek egy nagyon távoli pontba való elmozdítása során?

A diagram of a square with side length a and diagonal length $a/2$. The square is labeled with 'Q' at each corner. The top side is labeled a , the right side is labeled a , and the bottom side is labeled $a/2$. A vertical line segment connects the top and bottom corners, and a horizontal line segment connects the left and right corners, intersecting at the center. The diagonal is labeled $a/2$.

$$V_D = 1,271 \text{ kV}$$

$$V_S = 1,301 \text{ kV}$$

$$V_D - V_S = -30 \text{ V}$$

$A_{\text{elektromos erő}} = Q \cdot V$, ahol V az a potenciál, amelyet a többi töltés az alapon létrehoz.

$$A_{\text{elektromos erő}} = \frac{Q^2 \left(\frac{2}{a} + \frac{\sqrt{2}}{2a} \right)}{4\pi\epsilon_0} = 0,304 \mu J$$

$$V_A = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_A = V_{A1} + V_{A2} + V_{A3} + V_{A4}$$

$$V_{A1} = \int_A^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{r}_{01}$$

$$V_{A1} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \vec{r}_{o1} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 l^2} dl = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{l} \right)_{l_1}^{\infty} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 l_1}$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4$$

$$V_{A1} = V_{A2} = V_{A3} = V_{A4}$$

$$V_A = 4V_{A1}$$

$$V_A = 4 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 l_1}$$

$$V_A = 1272,79 \text{ V}$$

$$l_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$l_1 = \sqrt{2} \frac{a}{2}$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B2} + V_{B3} + V_{B4}$$

$$V_{B1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{2}} = V_{B3}$$

$$V_{B2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 l_4} = V_{B4}$$

$$V_B = 1302,49V$$

$$U_{AB} = V_A - V_B = -29,7V$$

$$A = Q_3(V_3 - V_\infty)$$

$$V_3 = V_{13} + V_{23} + V_{43}$$

$$V_{13} = V_{43} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$V_{23} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l_{23}}$$

$$V_3 = 609,1V$$

$$A = 304,55 nJ$$

$$l_4^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$l_4^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$l_4 = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$V_\infty = 0 \quad \text{a vonatkoztatási pont}$$

$$l_{23} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

2.2.2.4. Ekvipotenciális felületek, a potenciál és a térerősség-vektor közötti kapcsolat

Azokat a felületeket, amelyeknek pontjai ugyanazon a potenciálon vannak **ekvipotenciális felületeknek** nevezzük. Az ekvipotenciális felületen figyeljünk meg két közeli pontot (A-t és B-t az ábrán) nevezzük. Figyeljünk meg két közeli pontot (A-t és B-t) valamilyen. A "B" pontnak az "A" ponthoz viszonyított helyzete $d\vec{l}$ vektorral van meghatározva. A potenciálkülönbség egyenlő nullával, mivel ezek ekvipotenciális felületen helyezkednek el. A definíció szerint:

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l})$$

A $V_A - V_B$ kifejezés csak akkor lehet nulla, ha a szög az E és a $d\vec{l}$ között 90 fok, vagyis $\pi/2$. Ebből arra következtetünk, hogy a térerősség vektora derékszögben szeli az ekvipotenciális felületeket. Az elektromos térerősség vektora és a potenciál között egyszerű kapcsolat létezik.

Legyen az A és a B két közeli pont az elektromos térben! Tételezzük fel, hogy az x -tengely irányában növekszik a potenciál és így:

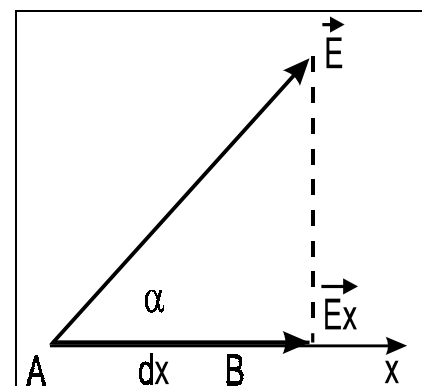
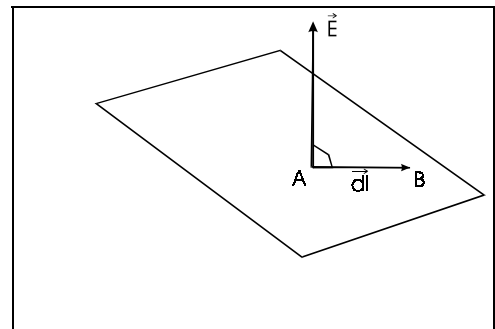
$$V_A - V_B = V_A - (V_A + dV) = -dV$$

Mivel ez a két pont közel van egymáshoz, ezért a potenciálkülönbséget úgy számíthatjuk, mint:

$$V_A - V_B = E dx \cos(\vec{E}, d\vec{x}) = E dx \cos \alpha = E_x dx$$

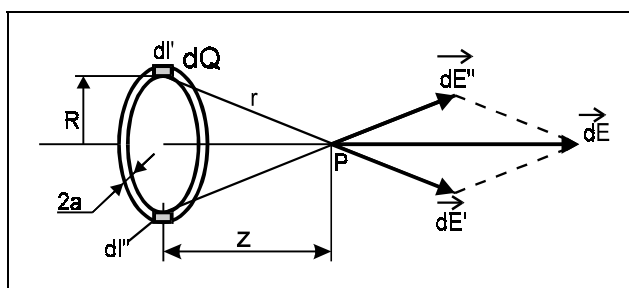
Ha összehasonlítjuk a két előbbi kifejezést, akkor láthatjuk, hogy az E vektor E_x komponense az x irányában:

$$E_x = E \cos \alpha = -\frac{dV}{dx}$$



Ha ismerjük a tér minden pontjának a potenciálját, akkor az E vektort mindig könnyen kiszámíthatjuk. Az egyenlőség arra utal, hogy az E vektor iránya mindig a kisebb potenciállal rendelkező ekvipotenciális felület felé irányul. Az egyenlőség azt is mutatja, hogy a potenciál leggyorsabban az elektromos térerősség irányával szemben növekszik (amikor az $\alpha=180^\circ$), mivel akkor a legnagyobb a dV/dx (az E intenzitása). Ugyanúgy mint az erővonalak, az ekvipotenciális felületek is alkalmasak az elektromos tér vizuális bemutatására. Ha egy térrészen belül lerajzoljuk az ekvipotenciális felületeket, akkor megközelítőleg tudjuk az E vektor irányát is (az E derékszögben metszi az ekvipotenciális felületet és irányítása a kisebb potenciálú ekvipotenciális felület felé irányul). Az E intenzitásának becslésekor szokásos az ekvipotenciális felületeket úgy rajzolni, hogy a rajzon egyforma köztük a potenciál. Ahol az így rajzolt felületek közelebb vannak egymáshoz ott az E vektor intenzitása nagyobb és fordítva.

2.4. Példa: Számítsuk ki az elektromos tér vektorának erősségét egy vékony a sugarú gyűrű esetében a szimmetriatengely egy tetszőleges pontjában! A Q töltésmennyiség eloszlása a gyűrűn egyenletes.



$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad Q' - \text{a gyűrű hosszanti elektromossága}$$

$$E_z = -\frac{dV_{(z)}}{dz} \quad Q' = \frac{Q}{2\pi R} \quad dQ = Q' \cdot dl \quad dQ = \frac{Q}{2\pi R} dl$$

$$dV = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2\pi R r} = \frac{Q \cdot dl}{8\pi^2 \epsilon_0 R \sqrt{R^2 + z^2}} \quad r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$V = \int dV = \int_0^{2\pi R} \frac{Q \cdot dl}{8\pi^2 \epsilon_0 R \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0 R \sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$V_{(z)} = \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0 R \sqrt{R^2 + z^2}} (2\pi R - 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E_z = -\frac{d}{dz} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \right] = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dz} (R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E_z = -\frac{Q}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} (R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2z \right]$$

$$E_z = \frac{Q \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.2.2.5. Az dipólus potenciálja és térősségvektora

Az elektromos dipólus foga alatt két egyforma töltésmennyiségű villamos töltést értünk, melyeknek különböző az előjelük, és a töltések közötti távolság nagyon kicsiny. A valóságban gyakran szükség van a dipólus hatására (terére, potenciáljára) olyan távolságban a dipólustól, amely távolság nagy a két töltés közötti távolsághoz képest. Az elektromos dipólus fogalma fontos a szigetelőknél (dielektrikumoknak) az elektrosztatikus térben való viselkedésének tanulmányozásához. A dipólustól nagy távolságra elhelyezkedő M pont potenciálja egyenlő azzal a potenciállal melyet a Q és a -Q töltések hoznak létre.

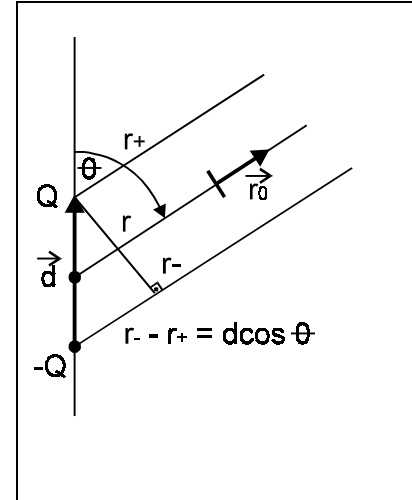
$$V_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

A képen r_+ jelöli az M pont távolságát a Q töltéstől, r_- pedig az M pont távolságát a -Q töltéstől (r a középtávolság). A képről láthatjuk, hogy:

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

mivel az r , r_+ és az r_- sokkal nagyobb mint a d , ezért

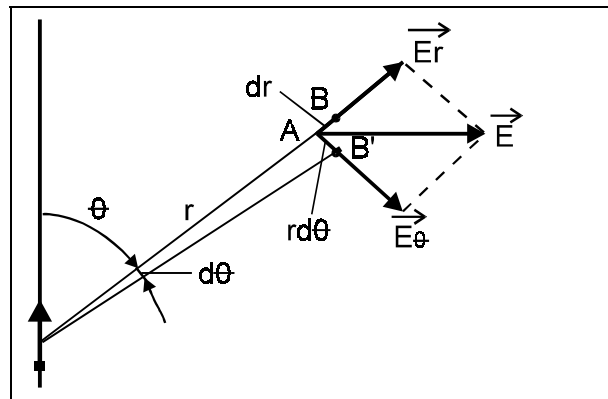
$$V_M = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



A dipólus potenciálja nem függ külön-külön a Q -tól és a d-től, ami azt jelenti, hogy a dipólust a Q és d szorzatával elég meghatározni. A potenciál meghatározásához tudnunk kell a dipólus irányítását is. Ezért a d távolságot vektorként fogjuk kezelni. Így a $\vec{p} = Q\vec{d}$ szorzat jellemzi a dipólus nagyságát és irányítását is, és ezt a szorzatot dipólusmomentumnak nevezzük. A dipólustól eredő villamos tér erősségének megállapításához a következő ábrát használjuk. Ezen az ábrán a dipólust egy kis függőleges nyíllal ábrázoltuk.

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 dr} \left[\frac{1}{(r+dr)^2} - \frac{1}{r^2} \right] = -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 dr} \frac{r^2 - (r+dr)^2}{r^2 (r+dr)^2} \approx \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{dV}{rd\theta} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\cos(\theta+d\theta) - \cos \theta}{d\theta}$$

Mivel a $d\theta$ kicsi, ezért

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta \cos d\theta - \sin\theta \sin d\theta \approx \cos\theta - d\theta \sin\theta$$

$$\cos d\theta \approx 1, \quad \sin d\theta \approx d\theta$$

$$E_\theta \approx \frac{\rho \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

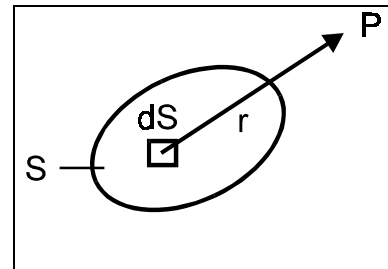
2.2.2.6. A felületi és térbeli töltéeloszlás potenciálja

Először tételezzük fel, hogy az elektrosztatikus tér egy meghatározott, ismert töltéssűrűségű elektromosan töltött testtől ered (ahogy a képen látható). Egy kiválasztott kis dS felületen a fellelhető töltésmennyiség $dQ = \sigma dS$. A potenciál, amelyet ez a töltésmennyiség a P pontban létrehoz a következő módon fejezhető ki:

$$dV = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

A P pontban az eredő potenciál megkapható mint az elemi potenciálok algebrai összege (integrálja):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}$$



Hasonló módon határozzuk meg azt a potenciált is amely a térbeli töltéssűrűségtől ered. A változó töltéssűrűségű (a ρ minden pontban más és más) térfogatot, amelyen belül helyezkedik el a töltésmennyiség felosztjuk kis dV térfogatelemekre. A töltésmennyiség értéke a kis térfogatelemben $dQ = \rho dV$, a P pont potenciálja pedig

$$dV = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r}$$

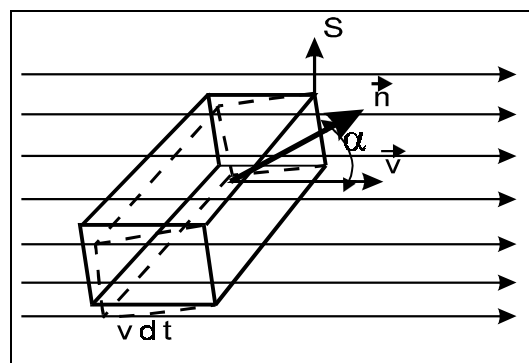
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

2.2.3. GAUSS TÖRVÉNYE

A pontszerű villamos töltéstől eredő térerősség vektorának matematikai alakja, vagyis Coulomb törvényének közvetlen következménye Gauss törvénye, vagy teorema. Ez egy matematikai kifejezés, amely egy zárt felületen átmenő villamos térerővonalak számát hozza mennyiségi kapcsolatba a felület által bezárt töltésmennyiséggel.

A vektor fluxusának fogalma: képzeljük el, hogy valamilyen örvénymentesen áramló folyadékba belehelyezünk egy kis merev hálót, melynek területe ΔS . Ha ismerjük a folyadék sebességét (v), hogyan tudnánk meghatározni a folyadék áramlásának erősségét a hálón keresztül?

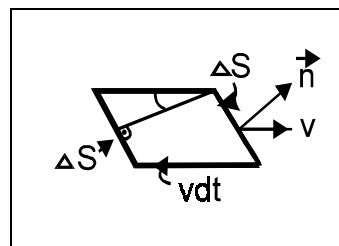
Először határozzuk meg azt a térfogatot amely keresztül folyik a hálón egy rövid dt idő elteltével. A dt idő alatt a részecskék a $v dt$ utat tesznek meg, tehát



a térfogat amely keresztülfolyik a hálón: $v \Delta S \cos \alpha$. Így az áramlás a ΔS területen keresztül $v \Delta S \cos \alpha$.

Ez hasonlít két vektor skaláris szorzatára, de a ΔS nem vektor. Definiáljuk a ΔS felületelemet mint $\Delta \vec{S}$ vektort melynek intenzitása ΔS az irányítása pedig a felületelemre merőleges $\vec{n}$ egységesvektorral van meghatározva:

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}$$



Így az áramlás erőssége a ΔS felületelemen keresztül egyenlő a következő szorzattal: $\vec{v} \cdot \Delta \vec{S}$

A latin "fluxus" szóból, ami "átfolyást" jelent a $\vec{v} \cdot \Delta \vec{S}$ szorzatot a $\vec{v}$ vektor fluxusának nevezzük a ΔS felületelemen keresztül. **Igazi áramlásról csak akkor beszélhetünk, ha a sebesség vektorának fluxusáról van szó.**

A definíció értelmében valamilyen felületen (felületelemen) keresztül a vektor fluxusa skaláris érték. Így a tetszőleges felület fluxusát kiszámíthatjuk az össz felületelemekre vonatkozó fluxusok összegeként:

$$\sum_{k=1}^n \vec{E}_k \cdot \Delta \vec{S}_k$$

Tegyük fel, hogy az a vektor, amelynek a fluxusát keressük változó irányú és intenzitású. A számítások ebben az esetben is annál pontosabbak lesznek, minél kisebb részecskékre osztjuk a felületet.

$$\Delta \vec{S}_k \rightarrow d\vec{S}$$

$$\sum \rightarrow \int$$

$$\text{Az } \vec{E} \text{ fluxusa az } S \text{ területen keresztül} = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad [\text{Vm}]$$

Az S lehet valós és elképzelt geometrikus felület, ugyanúgy lehet zárt is. Megegyezés szerint az $\vec{n}$ egységsvektor mindig a zárt felületből kifelé, a tér felé mutat.

2.2.3.1. Gauss törvényének levezetése

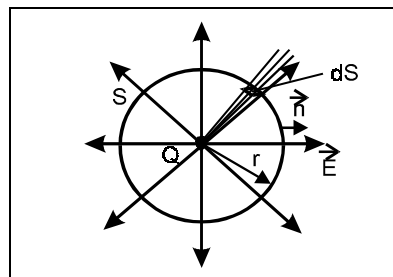
Figyeljünk meg egy pontszerű, Q töltésmennyiséggel rendelkező testet! Határozzuk meg az $\vec{E}$ térerősségvektor fluxusát egy képzeletbeli gömb alakú zárt felületen keresztül, melynek sugara r és középpontját a pontszerű villamos töltés képezi.

Az $\vec{E}$ vektor derékszögben metszi a zárt felületet, tehát:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2$$

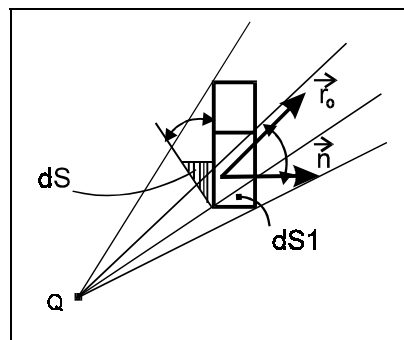
Az $\vec{E}$ vektor intenzitása egyforma a felület minden pontjában

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



A gömb sugara nem szerepel a jobb oldalon, s ez abból következik, hogy az E vektor intenzitása egyforma a felület minden pontjában. Be fogjuk bizonyítani, hogy a fluxus értéke nem fog megváltozni, ha az S akármilyen zárt felület amely magába foglalja a Q töltést! Képzeljük el, hogy a töltés körüli teret nagyszámú, tetszőleges keresztmetszetű gúla alakú metszetre osztottuk fel úgy, hogy a töltés a gúlatestek csúcsaiban helyezkedik el.

A képen látható gúla az elképzelt r sugarú gömbből az árnyékolt dS felületet metszi ki. Határozzuk meg az E vektor fluxusát a dS_1 felületen keresztül:



$$d\Phi_{EdS_1} = E dS_1 \cos(\vec{E}, \vec{S}_1) = E dS$$

Következtetés: az E vektor fluxusa a vékony gúla területén keresztül nem függ a szögtől, amelyet a metszettelület bezár az r_0 szakasszal:

$$d\Phi_E = E dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS}{r^2}$$

Vizsgáljuk meg mennyire függ a fluxus a Q töltésmennyiségtől való r távolságtól! Láthatjuk, hogy a fluxus nem függ az r távolság nagyságától. Más r' és r'' sugárnak különböző dS' és dS'' felel meg. Az össz gúla hasonlóságából megkaphatjuk, hogy:

$$\frac{dS'}{r'^2} = \frac{dS''}{r''^2} = \dots = \frac{dS}{r^2}$$

Képzeljünk el egy tetszőleges zárt felületet, amely magába foglalja a Q töltésmennyiséget. Elképzelt gúla ezt a zárt felületet kisebb dS_1 felületekre osztják. Ezek a dS_1 felületek különböző α szöget zárnak be az $\vec{r}_0$ vektorral és különböző távolságokra vannak a Q -tól. Bebizonyítottuk azonban, hogy a fluxus bármelyik felületeleмен keresztül független az α szögtől és az r távolságtól. Ezért számolásakor az össz felületelemnél vehetjük, hogy az $\alpha=0$ és ugyanazt az r -t is, vagyis a fluxust számíthatjuk egy elképzelt gömbre melynek középpontja a Q , a sugara pedig tetszőlegesen r :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{Az } S \text{ egy tetszőleges felület mely } Q \text{ töltést tartalmaz}$$

A levezetéskor feltételeztük, hogy a $Q > 0$, de a kifejezés természetesen vonatkozhat a $Q < 0$ esetre is:

$$\begin{aligned} \vec{E} d\vec{S} &= -|E|dS \\ \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= -|E| \oint_S dS = -\frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = -\frac{|Q|}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Tételezzük fel, hogy egy zárt S felületen belül n számú pontszerű töltés ($Q_1, Q_2, \dots, Q_n$) van. Az elektromos térerősség vektorai a terület egyes pontjaiban $E_1, E_2, \dots, E_n$. Az eredő E vektor fluxusa az S felületen keresztül:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 d\vec{S} + \dots + \oint_S \vec{E}_n d\vec{S}$$

Az egyenlet jobb oldalán levő összeg egyenlő: $\frac{Q_1}{\epsilon_0}, \frac{Q_2}{\epsilon_0}, \dots, \frac{Q_n}{\epsilon_0}$

$$Q_{\text{összesen az S-ben}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{összesen az S-ben}}}{\epsilon_0}$$

Bebizonyítjuk majd, hogy Gauss törvénye érvényben marad akkor is, ha az S felületen kívül helyezkedik el töltés. Figyeljük meg a képen látható gúlát!

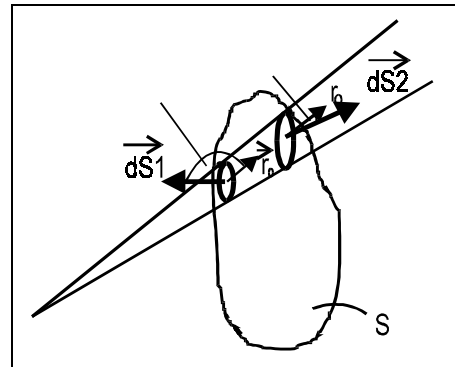
$$\alpha_1 > \frac{\pi}{2} \text{ (tompaszög)}$$

$$\cos \alpha_1 < 0 \rightarrow \text{negatív fluxus}$$

mivel

$$\alpha_2 < \frac{\pi}{2} \text{ (hegyesszög)}$$

$$\cos \alpha_2 > 0 \rightarrow \text{pozitív fluxus}$$



Mivel bebizonyítottuk, hogy a fluxus minden gúlán keresztül egyforma intenzitású (nem függ sem az α -tól sem az r -től) megkapjuk, hogy az össz fluxus a $dS1$ és $dS2$ felületelemen keresztül egyenlő nullával. Mivel ez vonatkozik minden gúlára, az össz fluxus az S felületen keresztül egyenlő nullával. A következtetés érvényes a töltések S felületen kívüli minden más eloszlásánál is.

2.2.4. VEZETŐK AZ ELEKTROSZTATIKUS TÉRBEN

A vezetők olyan anyagok, melyeknek nagyszámú szabad villamos töltésük (elektronjuk) van. Ezek a szabad töltések már a legkisebb elektromos erők hatására is irányított mozgást végeznek (vezető elektronok).

A vezetőknek óriási szerepe van az elektrotechnikában, nélkülük nem is létezne az elektrotechnika. Ezért nagyon fontos tudni, hogy mennyire befolyásolja a vezető az elektrosztatikus teret, hogyan viselkedik a vezető az ilyen térben és milyen lehetőségek léteznek a vezetők gyakorlati alkalmazására.

Az elektrosztatikus térben, a definíció szerint, nem létezik az elemi töltések irányított, makroszkópikus mozgása. Ez azt jelenti, hogy az elektrosztatikus térben elhelyezkedő vezető belsejében egyetlen pontban sem létezhet elektromos erő, mert az elemi töltések rendezett, makroszkópikus mozgásba kezdenének az erő irányában. Mivel az erő, amely a töltésekre hat, arányos a térerősség vektorával ($F=QE$), ezért mondhatjuk, hogy :

ha egy test az elektrosztatikus térben van, akkor a test minden (belső) pontjában az $E=0$.

(Ez a következtetés csak az elektrosztatikában érvényes) . Az elektromos vezető testeken kívül, tehát a vákuumban létezik elektromos tér.

Gauss törvénye alapján bebizonyítható, hogy a vezető belsejében sehol sincs makroszkópikus töltéstöbblet. Ebből a következő megállapítást adhatjuk:

az esetleges töltéstöbblet a vezetők felszínén nagyon vékony rétegben helyezkedik el.

A testek belsejében nincs töltéstöbblet.

Az elektrosztatikában az elektromos térerősség vektora mindig derékszöget zár be a vezető felületével, vagyis a vezető test felületei ekvipotenciálisak. Ha létezne az E vektornak tangenciális komponense, akkor az a töltések rendezett makroszkópikus mozgását idézné elő. Mivel az elektrosztatikában nincs ilyen mozgás, ezért az E vektornak nem is létezhet érintőleges összetevője a vezető felületén.

$$\vec{E}_{\text{tang}} = 0.$$

Az elektrosztatikában az E vektor derékszöget zár be a vezető felületével, ami azt jelenti, hogy a vezető test felületei ekvipotenciálisak.

A vezetőn belül minden pontban $E=0$, ami azt jelenti, hogy a test minden belső pontjának potenciálja megegyezik a test felületén lévő pontok potenciáljával.

2.5. Példa: Ezer egyforma, gömb alakú vízcseppet (sugaruk $r = 1 \text{ mm}$), külön-külön 100V-os potenciálra hoztunk. Ezután az összes vízcseppet egy nagy, gömb alakú cseppbe egyesítettük. Számítsuk ki a nagy vízcsepp potenciálját! (A vizet kezeljük vezetőként, mint ahogy azt általában az elektrosztatikában szokás).

Megoldás:

Minden csepp töltésmennyisége $Q = 4\pi\epsilon_0 rV$, mivel a $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Ha egyesül az össz vízcsepp, akkor a nagy csepp töltésmennyisége $Q_k = NQ$, ahol $N=1000$ vagyis a cseppek száma. A nagy csepp térfogata egyenlő a kis cseppek térfogatának összegével és így megkaphatjuk a sugarát $r_k = r \cdot \sqrt[3]{N}$, melynek segítségével aztán kiszámíthatjuk a potenciálját is: $V_k = \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 r_k} = 10kV$.

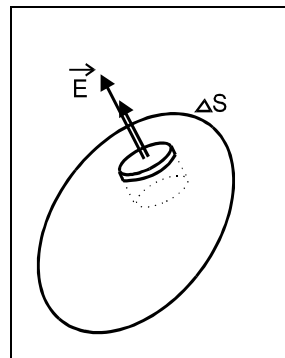
2.2.4.1. A vezető felszínén levő felületi töltéssűrűség és a felszín közelében levő térerősség kapcsolata

Tudjuk, hogy vákuumban az E derékszöget zár be a vezető test felületével. Figyeljünk meg egy elképzelt nagyon lapos egyenes hengert, melynek egyik alapja a vezetőben a másik pedig a vákuumban van. Alkalmazzuk Gauss törvényét a zárt hengerfelületre:

$$\oint_{\text{henger}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{alap a vezetőben}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{a henger burkolja}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{alap a vákuumban}} \vec{E} d\vec{S} = E \int dS = E_{\Delta} S = \frac{\sigma_{\Delta} S}{\epsilon_0}$$

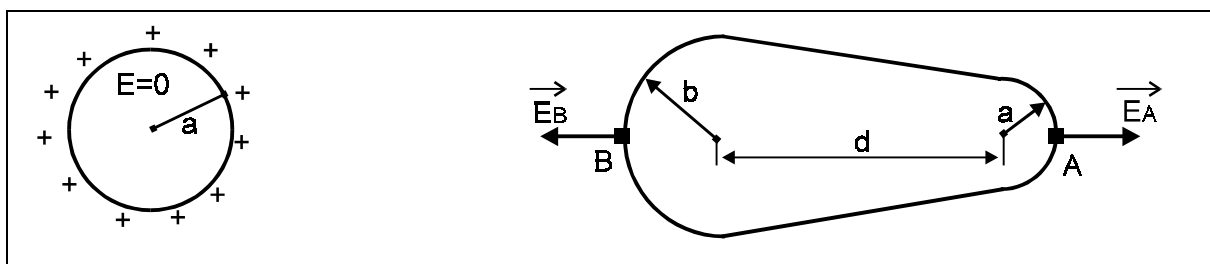
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

A légüres térben lévő vezetőknél, a vezetők közvetlen közelében lévő pontokban (a vákuumban) a térerősség vektora arányos a felületi töltéssűrűség helyi, lokális értékével (hiszen általános esetben a felületi töltéssűrűség a vezető felületi pontjaiban más és más).



2.2.4.2. A töltésmennyiség eloszlása különböző alakú magányos vezető testeken

Egy tojás alakú testen (melynek a B ponttal jelzett vége tompább, mint az A vége) figyeljük meg a felületi töltéssűrűség-eloszlást a vezető felszínének egyes pontjaiban. A felületi töltéssűrűség nagyjából egyenletes lesz az A illetőleg B pontok közvetlen közelében, persze a $\sigma_A \neq \sigma_B$. Durván a σ_A megközelítőleg akkora értékű, mint egy a sugarú gömbnél, a σ_B pedig mint egy b sugarú gömbnél.



$$V_{gömb\ b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$Q = \sigma 4\pi a^2$$

$$V_{gömb\ b} = \frac{a\sigma}{\epsilon_0}$$

Legyen a felület valamennyi pontjának potenciálja mondjuk V. Így felírhatjuk, hogy:

$$V \approx \frac{a\sigma_A}{\epsilon_0} \approx \frac{b\sigma_B}{\epsilon_0} \quad \text{vagyis} \quad \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \approx \frac{b}{a}$$

$$\text{vagy mivel } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \frac{E_A}{E_B} \approx \frac{b}{a}$$

A vezető felületén levő két pont felületi töltéssűrűsége megközelítően fordítottan arányos a pontokhoz tartozó görbék sugaraival. Következtetés:

Az magányos vezető testeken a villamos töltéssűrűség a test hegyes részein a legnagyobb. Ugyanezen részek közvetlen közelében, a vákuumban viszont a villamos térerősségnek van legnagyobb értéke.

Ezt a tényt a repülőiparban alkalmazzák. A repülők szárnyaira, a szárnyvégekre hegyes, antenneszerű fémrészeket erősítenek. A gép ugyanis repüléskor a levegővel való súrlódás következtében elektromossá válik, és leszálláskor erős tér alakulhat ki a géptest és a föld között. Ilyen esetekben elektromos kisülés keletkezhetne a repülőgéptest és a Föld között és ez tűzhöz vezethetne a repülőgéptesten. Az villamos térerősség azonban a szárnyvégek hegyes

toldalékainak közelében, a levegőben akkora értéket ér el, hogy ionizálja a levegőt és így a töltésmennyiség nagy része "elfolyik", elszivárog a levegőbe.

Másik ismert alkalmazási területe az előző ténynek a villámhárítónál van.

2.6. Példa: Egy kis, vezetőből készült gömb sugara $a = 0,5 \text{ cm}$, töltésmennyisége pedig $Q = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Nagyon messze ettől a kisméretű gömbtől egy másik, töltés szempontjából semleges, vezetőből készült gömb helyezkedik el, melynek sugara $b = 0,5 \text{ m}$. A kis gömböt a nagy közelébe visszük, megérintjük vele azt, majd visszavisszük az eredeti helyére. Számítsuk ki megközelítőleg a kis és a nagy vezetőgömb töltésmennyiségét és potenciálját a végső helyzetben, valamint a kis gömb potenciáljának pontos értékét a kezdő állapotban (az érintkezés előtt)!

Megoldás:

A kisméretű vezetőgömb potenciálja az érintkezés előtt:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V = \int_a^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = 413,4 \text{ V}$$

Ha a két vezetőgömb érintkezik, gyakorlatilag az össz töltés átáramlik a nagyobb gömbre, így a nagyobb vezetőgömb felületi töltéssűrűsége:

$$\sigma_b = \frac{Q}{4\pi b^2} = 73,2 \text{ pC/m}^2$$

Ha feltételezzük, hogy a töltésmennyiség egyenletesen oszlik el az érintkezés ideje alatt mindkét gömb felületén, akkor érvényes, hogy:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_b \cdot b}{a}$$

$$\sigma_a = 7,32 \text{ nC/m}^2$$

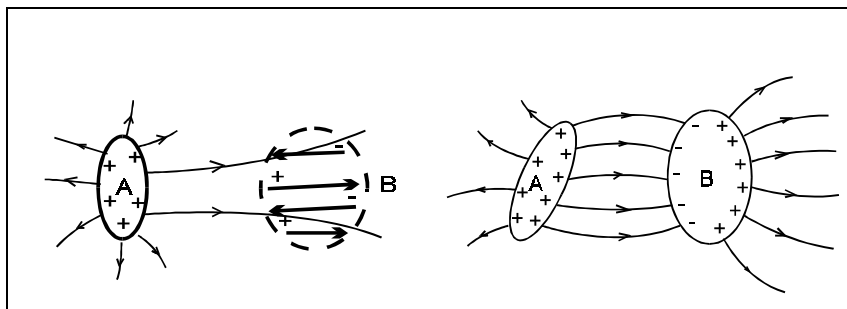
$$Q_1 = \sigma_a 4\pi \cdot a^2 = \frac{Qa}{b} = 2,3 \text{ pC}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} = 4,1 \text{ V}$$

A kapott érték természetesen csak hozzávetőleges, tehát pontatlan, mert feltételeztük, hogy az érintkezéskor az össz töltésmennyiség átvándorolt a nagyobb vezetőgömbre, ami természetesen csak megközelítően igaz.

2.2.4.3. Influenca (elektrosztatikus indukció vagy megosztás)

Figyeljünk meg egy magányos elektromosan töltött vezető testet (A test)! Képzeljük el, hogy ennek a testnek az erőterébe villámgyorsan beviszünk egy B semleges vezető testet. Tételezzük fel, hogy mindkét testben léteznek pozitív és negatív szabad elemi töltések. A B test felületén úgy fognak elrendeződni a különböző előjelű



töltések, hogy erőterükkel fokozatosan megsemmisítsék az **A** test töltései által a **B** test pontjaiban generált villamos teret. Ez a folyamat addig folytatódik míg a **B** test minden pontjában nullára nem csökken az elektromos térerősség. A **B** test töltései természetesen a testen kívül is létehoznak elektromos teret, és ezért az A testen is megváltozik a töltéseloszlás. A leírt átmeneti jelenség a vezetőknél nagyon rövid, csaknem azonnali. Magát a jelenséget, amikor a villamos szempontból semleges vagy akár töltött test két oldalán ellenkező előjelű, de azonos mennyiségű töltés jelenik meg egy másik, töltéssel rendelkező vezető test hatására, elektromos influenciának (elektrosztatikus indukciónak) vagy töltésmegosztásnak nevezzük. A töltéseket melyek az indukció eredményeként jönnek létre indukált (influált vagy megosztott) töltéseknek nevezzük. Ha a test nincs kapcsolatban a földdel vagy más vezető testtel, akkor az indukált töltések összege egyenlő nullával.

Nagyon fontos megérteni, hogy a semleges test megjelenése mindig megváltoztatja mind a térerősség értékeit a környező pontokban, mind a töltések elosztását azokon a testeken is, amelyektől az elektromos tér ered.

Alkalmazása:

1. Külső és belső elektrosztatikus tér árnyékolása (Faraday-féle ketrec)
2. Van de Graaff generátor
3. Az elektroszkóp.

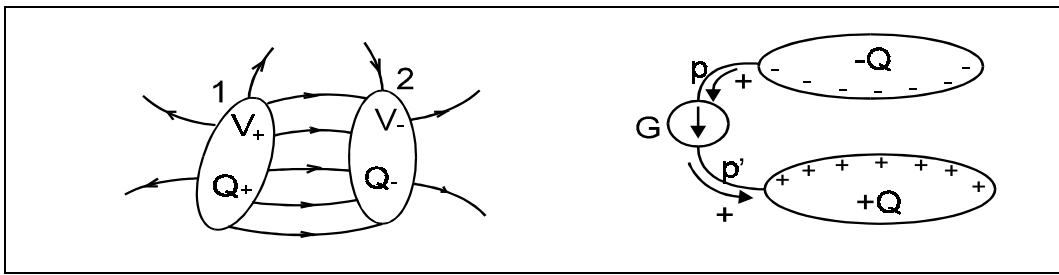
2.2.4.4. A vezető testek töltése és potenciálja közötti kapcsolat, kondenzátorok és azok kapacitása

Figyeljünk meg egy magányos elektromos töltéssel rendelkező vezető testet, amelynek töltésmennyisége Q , potenciálja pedig V . Mekkora lesz a potenciál ha a test töltésmennyiségét kQ -ra növeljük?

Legyen a testfelület pontjaiban a felületi töltéssűrűség értéke σ (pontról pontra változó). A σ -nak olyannak kell lennie, hogy a vezető felülete ekvipotenciális legyen és a test valamennyi pontjában az $E=0$. Az új kQ töltésmennyiséggel is ekvipotenciálisnak kell maradnia a vezető felületének, a test belsejében pedig maradnia kell az $E=0$ értéknek. Ez csak akkor lehetséges, ha az új felületi töltéssűrűség minden pontban k -szor lesz nagyobb, mint előtte. A testen kívül az villamos tér erőssége kE lesz (E a villamos térerősség értéke a Q töltésmennyiségnél) a test potenciálja pedig ugyancsak k -szor lesz nagyobb mint előtte. Arra a következtetésre jutottunk, hogy **a magányos vezető test töltése (töltésmennyisége) arányos annak potenciáljával:**

$$Q=CV.$$

Az arányossági tényező nem függ sem Q -tól sem V -től, hanem csak a test alakjától és ezt a test kapacitásának nevezzük (a C a testet körülvevő dielektrikum tulajdonságaitól is függ).



Figyeljünk meg két vezető testet (elektrodát), amelyek egyforma nagyságú, de különböző előjelű töltéssel rendelkeznek. Ilyen elektróda-elrendezéssel az elektrotechnikában sűrűn találkozunk. Ezeket kondenzátornak vagy sűrítőnek nevezzük. A kondenzátort alkotó vezető testeket vagy elektródákat a kondenzátor fegyverzetének is hívják. A kondenzátorok feltöltését a gyakorlatban az úgynevezett elektromos generátorok (G) végzik. A generátornak olyan tulajdonsága van, hogy az egyik kapcsáról a pozitív töltést képes átvinni a másik kapcsára a generátor belsejében ható nem villamos természetű erők segítségével. A "+" jellel megjelölt pólusra a + (pozitív) töltések átvitele addig tart, amíg az elektródákon felhalmazódott töltésektől eredő villamos teret a generátor le tudja győzni.

Hasonlóképpen mint a magányos vezető test esetében, itt is arra a következtetésre jutunk, hogy a potenciálkülönbség (V_+-V_-) az elektródák között és a pozitív elektródán elhelyezkedő Q töltésmennyiség a arányosak egymással:

$$Q = C(V_+ - V_-)$$

$$C \left[\frac{C}{V} \right] [F] [\text{farad}]$$

C - A kondenzátor kapacitása függ az elektródák alakjától, a két elektróda egymáshoz viszonyított helyzetétől és a dielektrikumtól, amely az elektródák közötti teret kitölti.

A kapacitás mértékegysége a farad. A farad nagyon nagy egység ($C_{\text{Föld}} = 0,708 \cdot 10^{-3} F$), a gyakorlatban a kapacitás értéke néhány pF-től néhány száz μF -ig terjed.

A kondenzátoroknak manapság a következő három legismertebb fajtája használatos:

1. változtatható kapacitású kondenzátor (trimer) (50-500 pF)
2. papír szigetelővel ellátott kondenzátor (10 pF-100 μF)
3. elektrolitikus kondenzátor (néhány 1000 μF).

2.7. Példa: Számítsuk ki az egymással párhuzamos kis sugarú hengeres elektródák (vezetékpár) kapacitását egységnyi hosszúságra, ha a vezetők sugara $a = 0,3 \text{ cm}$! Az elektródák $d = 0,5 \text{ m}$ távolságban vannak egymástól és hosszuk $l = 10 \text{ km}$. Mekkora az egységnyi hosszúságra eső töltésmennyiség a pozitív töltésű vezetőkön, ha a feszültség az elektródák között $U = 220 \text{ V}$?

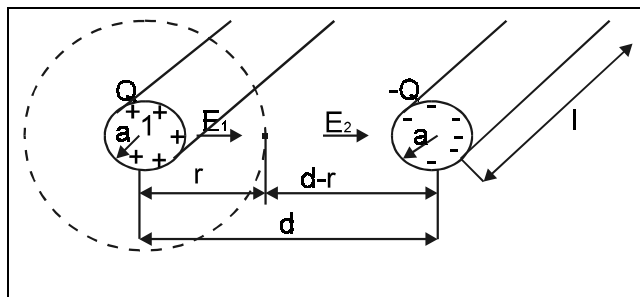
Megoldás:

$$a = 0,3 \text{ cm}$$

$$d = 0,5 \text{ m}$$

$$l = 10 \text{ km}$$

$$U = 220 \text{ V}$$



$$C = \frac{Q}{U}$$

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{az S-ben}}}{\epsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{Q'}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$U = \int_1^2 E dr$$

$$\int_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{az S-ben}}}{\epsilon_0}$$

$$E_2 \cdot 2\pi(d-r)l = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{-Q'}{2\pi \epsilon_0 (d-r)}$$

A vezetékpár közötti pontokban ez a két térerősség összeadódik, hiszen a vektorok ugyanolyan irányúak és irányításúak:

$$|\vec{E}| = E_1 + E_2 = \frac{Q'}{2\pi r \epsilon_0} + \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 r'} \quad r' = d - r$$

$$U = \int_a^{d-a} E \cdot dl = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0} \left(\int_a^{d-a} \frac{dr}{r} - \int_{d-a}^a \frac{dr'}{r'} \right) \quad \text{mivel } dl = dr = -dr'$$

$$U = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0} \left[\ln \frac{d-a}{a} - \ln \frac{a}{d-a} \right]$$

$$U = \frac{Q'}{\pi \epsilon_0} \cdot \ln \frac{d-a}{a}$$

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}}$$

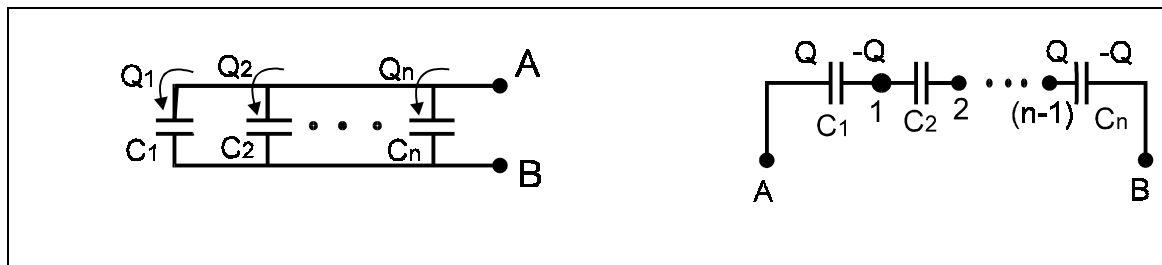
$$Q' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}} \cdot U$$

A konkrét számértékek a következő eredményeket adják:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d-a}{a}} = 54.43 \text{ nF} \quad \text{illetve} \quad Q = \frac{\pi l \epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}} \cdot U = 11.97 \mu\text{C}$$

2.2.4.4.1. A KONDENZÁTOROK SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KÖTÉSE

A gyakorlatban sűrűn találkozhatunk a kondenzátoroknak vezetőkkel különböző módon összekötött csoportjával. A kondenzátorok legelterjedtebb összekötési módja a párhuzamos és a soros kötés.



Mindkét esetben a kondenzátorok egész csoportját helyettesítjük egy ekvivalens (eredő) kondenzátorral (ennek a kapacitása egyenlő az egész csoport kapacitásával).

$$C = \frac{Q}{U}$$

Párhuzamos kötés (a kondenzátor elektródái között a potenciálkülönbség egyforma):

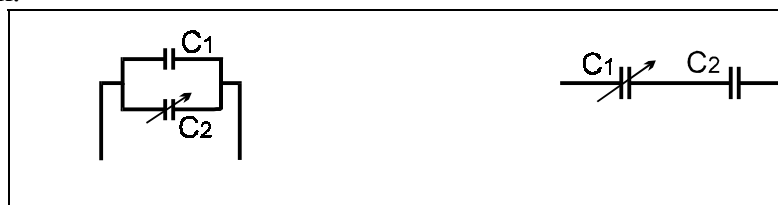
$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \\ &= C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) + \dots + C_n(V_A - V_B) \\ &= (C_1 + C_2 + \dots + C_n)(V_A - V_B) \\ C_{ekv} &= C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \end{aligned}$$

Soros kötés (az összes kondenzátor ugyanakkora töltésmennyiséggel rendelkezik):

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= U_{11} + U_{12} + \dots + U_{(n-1),B} \\ &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \\ \frac{1}{C_{ekv}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \end{aligned}$$

A következő ábrán (a bal oldali részen) az látható, hogy hogyan valósíthatók meg a nagy kapacitású és nagy pontosságú kondenzátorok, valamint (a jobb oldalon) a kis kapacitású de nagy pontosságú kondenzátorok.

Nagy kapacitású és nagy pontosságú kondenzátorokat a gyártási technológiai folyamat nem tesz lehetővé, így a kívánt pontos értéket egy, a nagy kondenzátorral párhuzamosan kapcsolt, aránylag kis kapacitású, de nagy pontosságú trimer kondenzátorral állíthatjuk be.



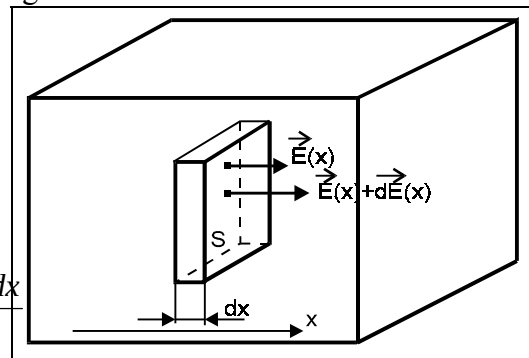
Nagyon kis kapacitású és pontos értékű kondenzátorok előállítása sem lehetséges, így a pontos értékre való "hangolást" egy viszonylag nagy, de pontos, a kis kapacitású és pontatlan kondenzátorral sorosan kapcsolt trimerrel végezzük.

Mindkét esetben érvényes, hogy $C_1 \gg C_2$

2.2.4.5. A potenciál és a térbeli töltéssűrűség-eloszlás közötti kapcsolat (Poisson egydimenziós egyenlete)

Némely gyakorlati esetben (elektroncsövek, ionsövek, katódsugárcső, plazmánál, vagy két félvezető kapcsolatánál) létezik térbeli töltéssűrűség, amely kihat a közelben levő pontok potenciálérték-változásaira. Azt az általános egyenletet, amely a potenciálfüggvény (pontosabban a potenciálfüggvény második deriváltja) és a térbeli töltéssűrűség-eloszlás közötti kapcsolatot kvantitatívan meghatározza, Poisson egyenletének nevezzük. A továbbiakban Poisson egyenletének egydimenziós formáját ismerjük meg.

Tételezzük fel, hogy a megfigyelt térrészen a töltéssűrűség csak az x tengely irányában változik. Ebben a térrészben képzeljünk el egy kis térfogatelemet, amint az a képen is látható, és alkalmazzuk erre Gauss törvényét.



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_{(x)}S' + [E_{(x)} + dE_{(x)}]S' = \frac{\rho_{(x)}S'dx}{\epsilon_0}$$

$$\frac{dE_{(x)}}{dx} = \frac{\rho_{(x)}}{\epsilon_0} \quad \text{mivel} \quad E = -\frac{dV_{(x)}}{dx}$$

$$\frac{d^2V_{(x)}}{dx^2} = -\frac{\rho_{(x)}}{\epsilon_0}$$

2.8. Példa: Két nagyméretű, párhuzamos, vezetőanyagból készült síklemez között a villamos töltéssűrűség értéke $\rho = 0$. A lemezek d távolságra vannak egymástól, az egyik nulla, a másik pedig V potenciálon van. Poisson egydimenziós egyenletéből kiindulva számítsuk ki a potenciált a lemezek között minden pontban!

Megoldás:

A Poisson egyenletből indulunk ki: $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$. Mivel a $\rho(x) = 0$, ezért a

következő egyenletet kell megoldanunk: $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 0$. Ha a potenciál második deriváltja nulla,

abból az következik (a függvényanalízisből ismeretes), hogy a potenciál első deriváltja állandó

(legyen mondjuk A_1), tehát: $\frac{dV(x)}{dx} = A_1$. Ha most az utóbbi kifejezés alapján a potenciál

értékét határozatlan integrál segítségével határozzuk meg, a következő kifejezést kapjuk: $V(x) = A_1x + A_2$. A két állandó értékét a határfeltételekből állapíthatjuk meg, tudniillik $x=0$ értékre a potenciál nulla, $x=d$ értékére pedig V . Behelyettesítve a határértékeket a potenciálok képletébe az állandókra a következőt kapjuk: $A_1 = V/d$, illetve $A_2 = 0$. Tehát a potenciál értéke a lemezek közötti pontokban:

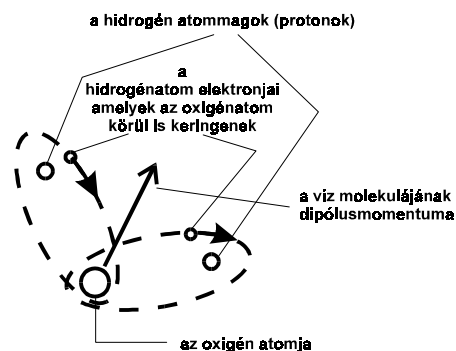
$$V(x) = \frac{V}{d} x.$$

2.2.5. SZIGETELŐK AZ ELEKTROSZTATIKUS TÉRBEN

Az elektromosan semleges test elektrosztatikus térbe való bevitelekor a testen az elsődleges tér hatására indukált töltések jelennek meg, amelyek egy kiegészítő villamos teret hoznak létre (amely a tér minden pontjában módosítja az elsődleges villamos teret). Ez a kiegészítő tér megváltoztathatja a töltéeloszlást magán az elsődleges tér forrásán is.

Hasonló jelenségre kerül sor akkor is, amikor egy dielektrikumot viszünk be az elektrosztatikus térbe azzal a különbséggel, hogy a nem kompenzált töltések keletkezése másmilyen.

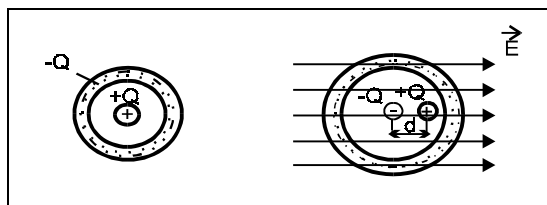
A szigetelő molekuláinak villamos tulajdonságai szerint a dielektrikumokat leggyakrabban két csoportba osztják. Az egyik csoportba tartoznak azok a szigetelők, amelyeknél a molekulák belső szerkezete azonos egy elektromos dipóluséval. Az ilyen molekulákat **dipólusmolekuláknak**, vagy **polarizált molekuláknak** nevezzük. Példa erre a víz molekulája, amely a képen is látható.



A villamos tér hiányában a molekulák kaotikus, termikus mozgása következtében a polarizált molekulák dipólusmomentumai a térben ugyancsak kaotikusan helyezkednek el. Egy ilyen dielektrikum bevitelekor az elektromos térben a következő jelenség játszódik le. A villamos tér hatására a polarizált molekulák (dipólusok) egy része orientálódik a tér irányába (a teljes orientációt megakadályozza a termikus mozgásuk). Elektromos tereik így már nem semlegesítik egymást, hanem az orientálódott polarizált molekulák következtében jelentkezik egy makroszkópikus villamos tér is és ez a tér hozzáadódik az elsődleges térhez, amely a dipólusok irányítását okozta.

A másik csoportba azok a szigetelők tartoznak, amelyeknél a molekuláknak nincs dipólusmomentuma. Az ilyen molekulákat **nem poláris molekuláknak** nevezzük. A nem poláris molekulák nagyobb távolságokban nem hoznak létre jelentősebb teret és így a képen látható modellel ábrázolhatók.

Ha az ilyen molekulát bevisszük a villamos térbe, akkor a pozitív magra a tér irányában hatnak az erők, míg a negatív elektronhéjra az ellentétes irányban. A belső erők ellenkeznek a deformációknak, de kis mértékben mégis deformálódik a molekula. Ez azt jelenti, hogy az elektromos tér hatására a nem poláris molekula is átalakul dipólussá, illetve ez esetben is kiegészítő villamos tér alakul ki, amelyet a nagyszámú orientált dipólus eredményez.



Habár a dielektrikumok bevitelekor a villamos térbe a dipólus kialakulásának mechanizmusa különbözik a poláris és a nem poláris molekulák esetében, a végső hatás ugyanaz. A szigetelőkben, amelyek egyébként nem hoznak létre makroszkópikus teret, külső elektromos tér hatására óriási számú irányított elemi dipólus jön létre, melyeknek a makroszkópikus terét már nem lehet elhanyagolni. **A dielektrikumok polarizációjának** nevezzük azt a folyamatot, amelynek eredményeként nagyszámú irányított dipólus jelenik meg a szigetelőanyagokban. A polarizációt a poláris molekulák esetében **dipóluspolarizációnak**, a nem poláris molekulák esetében pedig **elektron-polarizációnak** nevezzük. Elektronpolarizációról mindkét molekulafajtánál beszélhetünk, mert az elektronhéjak deformációjára mindig sor kerül. Ugyanolyan erős tér hatására a dipóluspolarizáció eredményeként nagyobb átlagos dipólusmomentum jön létre, mint elektronpolarizáció alkalmával.

A szilárd kristályos szigetelőknél létezik még egy fajta polarizáció. A kristályos dielektrikum egy pozitív és egy negatív ionból áll, amelyek a kristályszerkezetet alkotják. Idegen tér jelenléte nélkül az ionok úgy helyezkednek el, hogy nem alkotnak makroszkópikus teret. Az

idegen tér hatására a pozitív ionok elmozdulnak a tér irányába, a negatív ionok pedig az ellenkező irányba. Ezt a fajta polarizációt **ionos polarizációnak** nevezzük.

Az elektrosztatikus levegőtisztító működési elve

Ha nem homogén (inhomogén) villamos térben kis dielektrikum- vagy vezetőrészecskék vannak, akkor a szigetelődarabkák polarizálódnak, a vezetőkön pedig indukált villamos töltések influálódnak. A dipólusok különböző pólusai, illetve a vezetők ellenkező előjelű influált töltései némileg eltérő intenzitású villamos térben helyezkednek el. Az ilyen részecskékre olyan eredő erő hat, amely arra törekszik, hogy a részecskéket a nagyobb intenzitású térrészbe vonzza.

2.2.5.1 Az villamos polározás vektora (polarizációvektor)

A szigetelők viselkedését a villamos térben eddig csak szóbeli leírással ismertettük. A jelenség matematikai leírásához, vagyis a szigetelők polarizációjából eredő villamos tér számításához több új fogalmat kell még megismernünk. Ezek a fogalmak a szigetelők polarizációjához kapcsolódnak.

A villamos térnek a szigetelők jelenlétében való elemzésénél csak az elemi dipólusmomentumok meghatározására kell szorítkoznunk, hiszen a dipólusok az egyedüli forrásai annak a makroszkópikus villamos térnek, amely a szigetelőktől ered (az anyag többi tulajdonsága a villamos tér kialakulásának szempontjából nem játszik szerepet). Ezért ezeket a dipólusokat vákuumban kell elképzelnünk. Mivel ilyen dipólus a szigetelőben rengeteg van, külön-külön nem számolunk minden egyes dipólusmomentummal, hanem bevezetjük a dipólusmomentum-vektor sűrűségének, vagyis a villamos polarizációvektornak (polározási vektornak) a fogalmát.

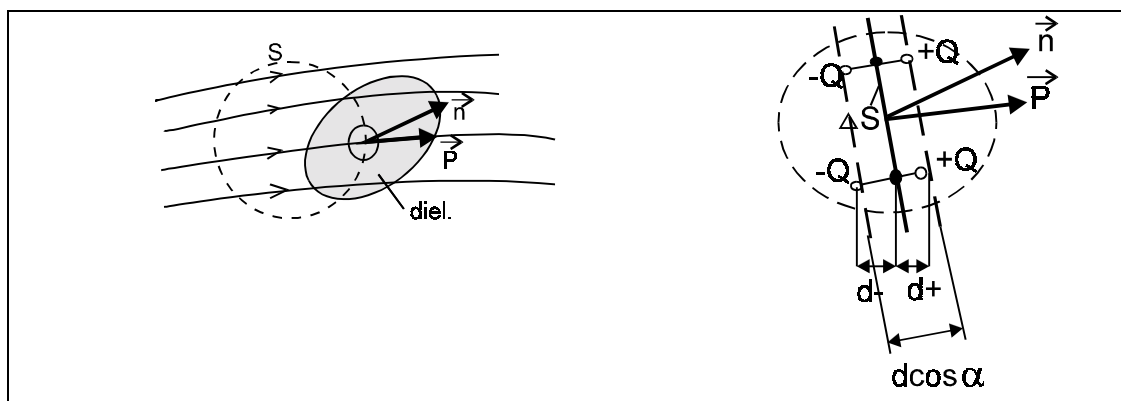
$$\vec{P} = \frac{(\sum \vec{p})_{a \text{ dV-ben}}}{dV}$$

Egy dV térfogatelemen belül a villamos polarizációvektor tehát az össz dipólusmomentum vektoriális összegével egyenlő.

A dV térfogatelemen belül az össz dipólusmomentum a következő módon számítható:

$$d\vec{p} = (\sum \vec{p})_{a \text{ dV-ben}} = \vec{P} dV$$

A polározási vektort, a P-t másképpen is értelmezhetjük. Figyeljünk meg egy szigetelődarabot, és képzeljünk el egy S felületet, amely a dielektrikumból kivág egy részt. A felület azon részén, amely a szigetelőben helyezkedik el, a villamos tér kialakulásakor (a polarizációs folyamat során) egy meghatározott mennyiségű villamos töltésmennyiség folyt át. Határozzuk meg ezt a töltésmennyiséget!



- fekete pontok - semleges molekulák a polarizáció előtt
- köröcskék - a kialakult dipólus pólusai

A polarizáció előtt a zárt S felületben az eredő töltésmennyiség (Q) nulla volt. A Q_- jelzéssel a polározás folyamán keletkezett dipólusok negatív töltését jelöltük. Ezek a Q_- dipólusvégek a polarizáció során behatolnak az S felületbe és ott negatív töltéstöbbletet hoznak létre. Ugyanakkor a Q_+ dipólusvégek eltávoznak az S felületből és így pozitív töltéshiány észlelhető. Az eredmény mindkét esetben ugyanaz, vagyis negatív töltés jelentkezik az S felületen belül.

$$\begin{aligned}\Delta Q_- &= N(-Q)\Delta S d_- \cos \alpha \quad (\text{jobbról balra}) \\ \Delta Q_+ &= NQ\Delta S d_+ \cos \alpha \quad (\text{balról jobbra})\end{aligned}$$

N - a semleges molekulák térsűrűsége

Az össz (pozitív) töltésmennyiség, amely a polározás folyamán balról jobbra elhagyja az S zárt felületet:

$$\begin{aligned}(\Delta Q)_{\text{az S-ből a } \Delta S\text{-en keresztül}} &= NQ\Delta S(d_+ + d_-) \cos \alpha = NQd\Delta S \cos \alpha \\ (\Delta Q)_{\text{az S-ből a } \Delta S\text{-en keresztül}} &= P\Delta S \cos \alpha = \vec{P} \cdot \vec{\Delta S} \Rightarrow P \left[\frac{C}{m^2} \right]\end{aligned}$$

A polarizációvektor másik magyarázata :

A polározási vektor intenzitása a szigetelőanyag valamely pontjában számbelileg a polarizáció irányára merőleges ΔS felületelemen áthaladó töltésmennyiség és a ΔS felületelem hányadosával egyenlő. A P vektor iránya egybeesik a pozitív töltések mozgásirányával. Itt feltételeztük, hogy a negatív töltések elmozdulása az egyik irányba ugyanazt jelenti, mintha a pozitív töltések mozdultak volna el az ellenkező irányba.

Ha a szigetelő minden pontjában ismerjük a polarizációvektor értékét, akkor könnyen meghatározhatjuk az eredő dipólusmomentumokat, amelyek megfelelnek a

térfogat minden egyes dV elemének. Így meghatározhatjuk a potenciálfüggvényt (V-t) és a térerősségvektort (E-t) is, amelyeket a polarizált szigetelő hoz létre. A P vektor értéke a megfigyelt pontban az össz térerősség (a primáris forrásoktól és a polarizált szigetelőanyagoktól eredő tér összege) vektorától függ.

Mérések bizonyítják, hogy a legtöbb dielektrikumnál a szigetelő egy pontjában a villamos polarizációvektor arányos az adott pontban jelentkező térerősség vektorával.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (\text{az elektromos szuszceptibilitás definíciója})$$

χ_e egy mértékegység nélküli szám, amely minden szigetelő anyagra különböző. Mivel a $\vec{P}$ iránya rendszerint egybeesik az $\vec{E}$ irányával, ezért $\chi_e > 0$.

$\chi_e = \text{const.}$ a dielektrikum minden pontjában $\Rightarrow$ homogén szigetelő

$\chi_e \neq \text{const.}$ a dielektrikum minden pontjában $\Rightarrow$ inhomogén szigetelő

Lineáris dielektrikumoknak nevezzük azokat a szigetelőket, amelyekre vonatkoztatható az előbbi egyenlet.

Nemlineáris dielektrikumoknak nevezzük azokat a szigetelőket melyekre nem vonatkozik az előbbi egyenlet.

Izotróp dielektrikumoknak nevezzük azokat a szigetelőket, amelyeknek egyforma villamos tulajdonságaik vannak bármilyen irányú legyen is a külső tér.

Anizotróp dielektrikumoknak nevezzük azokat a szigetelőket, melyeknek villamos tulajdonságaik változnak a külső tér irányától függően.

Léteznek olyan szigetelők, amelyeknél a P és az E vektorok csak akkor kollineárisak (megegyező irányúak) ha a térerősségvektor meghatározott szöget zár be a szigetelőanyag

molekuláinak kristálytengelyével. Ennek a szomszédos molekulák között fennálló erős kölcsönhatás az oka (pl. kvarckristálnál).

2.2.5.2 Kötött (látszólagos) villamos töltések

Az az össz pozitív töltésmennyiség, amely polarizáció alkalmával áthalad az S zárt felületen, így írható fel:

$$Q_{\text{az S-ből a polarizáció alatt}} = \sum \vec{P} \cdot \vec{\Delta S}$$

$$Q_{\text{az S-ből a polarizáció alatt}} = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad \text{mivel a } \vec{P} = 0 \text{ a dielektrikumon kívül}$$

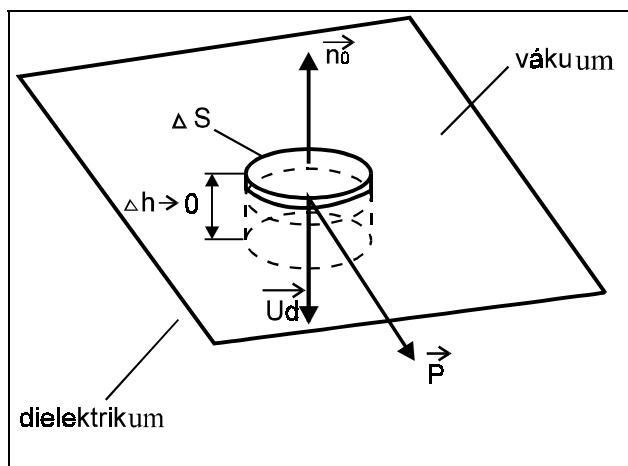
Mekkora töltés jelent meg az S zárt felületen a polarizáció ideje alatt? A válasz:

$$Q_p = Q_{\text{az S-ből a polarizáció alatt}} = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Az S zárt felületen belül ez az a valós töltéstöbbség, amelyet nem tudunk eltávolítani, mert az atomoknak és molekuláknak elválaszthatatlan részét képezi, éppen ezért **kötött villamos töltésnek**, vagy a polarizáció töltésének nevezzük.

Az előző egyenlet lehetővé teszi az össz kötött töltéstöbbség kiszámítását egy zárt S felületen belül, de semmit sem mond arról, hogy hol helyezkedik el ez a kötött töltéstöbbség. Ahhoz, hogy megtudjuk határozni a töltéstöbbség helyét, figyeljünk meg egy polarizált homogén szigetelőt. Ebben a dielektrikumban képzeljünk el egy zárt S felületet. Ha az S elég kicsi, akkor a P egyforma intenzitású és irányú az S minden pontjában, vagyis a P vektor fluxusa az S felületen keresztül egyenlő nullával.

Következtetés: A polarizált homogén szigetelőben nincs kötött töltéstöbbség, vagyis a szigetelő belsejében levő dipólusoktól eredő makroszkópikus villamos tér értéke (intenzitása) nulla. Ez azt jelenti, hogy az össz makroszkópikus villamos tér forrását a polarizált homogén szigetelőnél az anyag felületén elhelyezkedő kötött töltéstöbbség képezi. Határozzuk meg ezt a felületi töltéstöbbség-különbséget a következő kép segítségével:



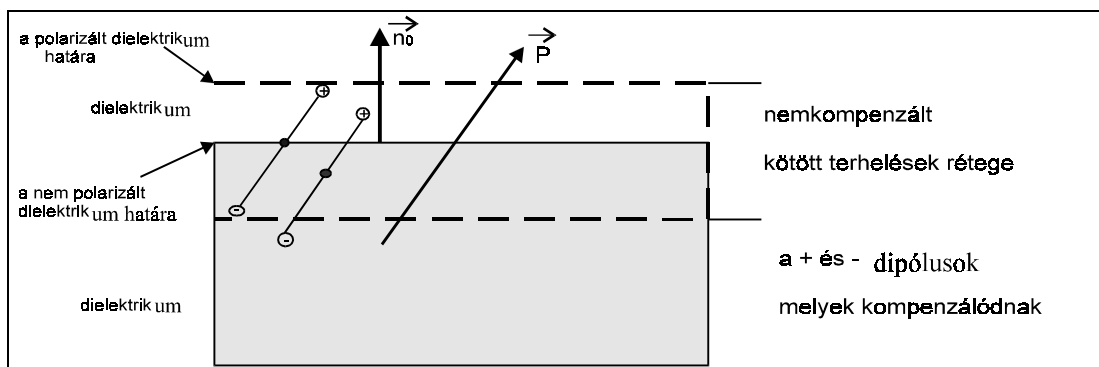
$$Q_p = - \oint_{\text{a henger S-e}} \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\text{az alap a vákumban}} \vec{P} \cdot d\vec{S} - \oint_{\text{burok}} \vec{P} \cdot d\vec{S} - \oint_{\text{alap a dielek.}} \vec{P} \cdot d\vec{S} =$$

$$= - \vec{P} \cdot \vec{n}_0 \Delta S + \vec{P} \cdot \vec{n}_0 \Delta S$$

$\vec{n}_0$ iránya a dielektrikumból a vákuum felé irányul

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{\Delta S} = \vec{P} \cdot \vec{n}_0$$

A polarizált szigetelőanyag fizikai modellje:



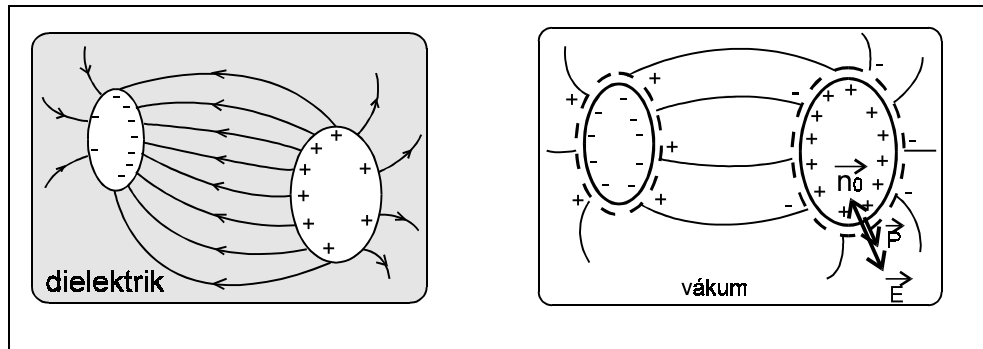
A $\sigma_p = P n_0$ egyenlet annak a töltéssűrűségnek az értékét határozza meg, amely a két szaggatott vonal között helyezkedik el, és amelyet, mint látjuk, teljes joggal felületi töltésnek tekinthetünk.

Következtetés: A polarizált homogén szigetelő villamos tere csak a felületen levő kötött töltésmennyiségtől függ. Mivel a dielektrikum többi része nem hoz létre makroszkópikus villamos teret ezért a felületen levő kötött töltésmennyiséget vákuumban kell elképzelnünk.

2.2.5.3 A villamos tér homogén szigetelőkben (az abszolút és relatív permittivitás)

Mivel a gyakorlatban leggyakrabban homogén szigetelőket használunk, ezért csak ezekkel foglalkozunk majd.

Figyeljünk meg néhány vezető a homogén dielektrikum belsejében úgy, hogy a szigetelőanyag teljes egészében kitöltse a teret a



villamosan töltött vezetők körül. A homogén szigetelőnek a villamos térre kifejtett hatása, mint tudjuk, helyettesíthető a dielektrikum felszínén elhelyezkedő kötött töltésmennyiség hatásával. Ez azt jelenti, hogy a rendszer minden pontjában a villamos tér a vezető felületén levő szabad töltésektől és a rájuk "ragadt" szigetelőanyagban elhelyezkedő kötött töltésektől ered, vagyis :

$$E = \frac{\sigma + \sigma_p}{\varepsilon_0}$$

Mivel az E vektor derékszöget zár be a vezető felületével és érvényes, hogy $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$, ezért a $\vec{P}$ vektor is derékszöget zár be a felülettel. Az $\vec{n}_0$ vektor a vezető felé irányuló (a dielektrikumból kifelé mutató) egységvektor, így a σ_p -re felírhatjuk, hogy:

$$\sigma_p = -P = -\varepsilon_0 \chi_e E \quad \text{és kibővítvé az előbbi egyenlettel}$$

$$\varepsilon_0 E = \sigma - \varepsilon_0 \chi_e E$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0(1 + \chi_e)}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad \text{a szigetelő r relatív permittivitásának definíciója}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{az abszolút permittivitás definíciója}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Határozzuk meg az össz felületi töltéssűrűséget ($\sigma + \sigma_p$):

$$\sigma + \sigma_p = \sigma - \varepsilon_0 \chi_e E = \sigma - \varepsilon_0 \chi_e \frac{\sigma}{\varepsilon} = \sigma \frac{\varepsilon - \varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon} = \sigma \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$

Következtetés: A felületi szabad és kötött töltéssűrűség (a szabad töltések a vezetőtest felületén, a kötött töltések pedig a dielektrikum felszínén helyezkednek el) összege a homogén, polarizált, ε_r relatív permittivitású szigetelőanyagok jelenlétében, ε_r -szer lesz kisebb a szabad, vákuumban elhelyezkedő fémtest felszínén elhelyezkedő töltéssűrűségtől.

Amikor a testek homogén dielektrikumban helyezkednek el, akkor a térerősség vektora, a potenciál, valamint a két pont közötti potenciálkülönbség is ε_r -szer kisebb, mint amikor a testek vákuumban vannak.

Következtetés: A kondenzátor kapacitása, amennyiben homogén és ε_r permittivitású szigetelő tölti ki a fegyverzetek (elektródák) közötti teret ε_r -szer lesz nagyobb mint az ugyanolyan méretű, de vákuum- illetve levegőszigetelésű kondenzátoré.

A legtöbb szigetelőanyagnál az ε_r 2 és 10 között mozog, néhány esetben lépheti túl a tízes értéket, de semmi esetre sem haladja meg a százat. Léteznek azonban sajátos és különös dielektrikumok, ún. ferroelektromos dielektrikumok vagy ferroelektikumok, melyeknél az ε_r sokkal nagyobb, mint a közönséges szigetelőanyagoknál. Náluk az ε_r összetett módon függ a villamos térerőtől.

A "dielektromos állandó" mint kifejezés vagy elnevezés, amelyet gyakran használnak a permittivitás szó helyett nem igazán szerencsés, mert a permittivitás értéke több tényezőtől is függ (hőmérséklet, nyomás, frekvencia, stb.).

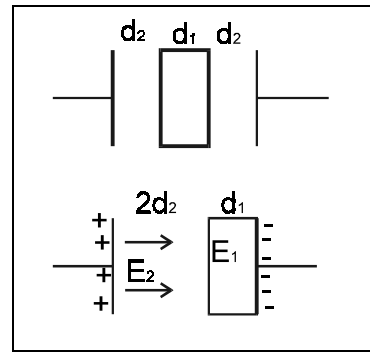
2.9. Példa: A síkkondenzátor (lemezes kondenzátor) dielektrikuma lizskun ($\varepsilon_0=5$). A lineáris szigetelőanyagnak tekinthető lizskun nem fekszik tökéletesen a lemezekre és ezért vékony levegőréteg keletkezik a lizskun és a lemez között. Ha a lizskunlemez szélessége $d_1 = 1 \text{ mm}$, a levegőréteg vastagságának középértéke pedig $d_2 = 0,1 \text{ mm}$, a lemez területe pedig $S = 1 \text{ dm}^2$, akkor határozzuk meg :

- az elektromos térerősség vektorának intenzitását a lizskunban és a levegőrétegben, ha a kondenzátort $U = 1000 \text{ V}$ feszültségre kapcsoljuk,
- a felületi szabad és kötött töltések sűrűségét,
- a kondenzátor kapacitását!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 1 \text{ mm} \\
 d_2 &= 0,1 \text{ mm} \\
 S &= 1 \text{ dm}^2 \\
 U &= 1000 \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= E_2 \cdot 2d_2 + E_1 d_1 \\
 D_1 &= D_2 \\
 D &= \epsilon_0 \epsilon_r E \\
 \epsilon_r &= 5
 \end{aligned}$$



$$U = E_2 \cdot 2d_2 + E_1 d_1 \qquad \epsilon_0 E_2 = E_1 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \Rightarrow E_1 = \frac{E_2}{\epsilon_r}$$

$$U = E_2 \cdot 2d_2 + \frac{E_2}{\epsilon_r} d_1$$

$$E_2 = \frac{U}{2d_2 + \frac{d_1}{\epsilon_r}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ V/m} \qquad E_1 = \frac{E_2}{\epsilon_r} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_s = E_2 \cdot \epsilon_0 = 22,135 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

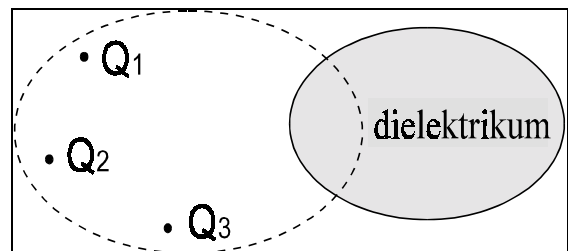
$$\sigma_p = P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_1 = 17,7 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$C_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \frac{S}{d_1} = 442,7 \text{ pF} \qquad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{2d_2} = 442,7 \text{ pF}$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_2 + C_1} = 221,35 \text{ pF}$$

2.2.5.4 Gauss törvényének általános alakja

Képzeljünk el egy zárt S felületet, amely részben magába foglal egy homogén szigetelőtestet, de ugyanakkor tartalmaz szabad töltéseket is (ahogy ez a képről is kivehető). Mint láttuk, a szigetelő hatását a vákuumban elképzelt, a dielektrikum felszínén fellelhető kötött töltésmennyiséggel helyettesíthetjük. Mindezek ismeretében alkalmazzuk Gauss törvényét a zárt S területre.



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{az } S\text{-ben}}}{\epsilon_0} = \frac{Q + Q_P}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q - \oint_S \vec{P} d\vec{S})$$

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = Q \qquad \text{Gauss törvényének általános alakja}$$

Az $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ vektorösszeg ugyancsak vektor, az elektromos indukció vektora (gerjesztettségi vektor, eltolási vektor, a dielektromos eltolódás vektora). Az eltolási vektornak jelentős tulajdossága van: fluxusa bármely zárt felületen keresztül egyenlő a felületen belül jelentkező össz szabad töltésmennyiséggel. Ezeket a szabad töltéseket elmozdíthatjuk vagy mérhetjük, míg a kötött töltésekkel nem manipulálhatunk, nem távolíthatjuk el őket kedvünk szerint, mert nem választhatók el az atomjaiktól. A dielektromos eltolódás vektora tehát, általános esetben, a következő összefüggéssel fejezhető ki:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{szabad az S-ben}}$$

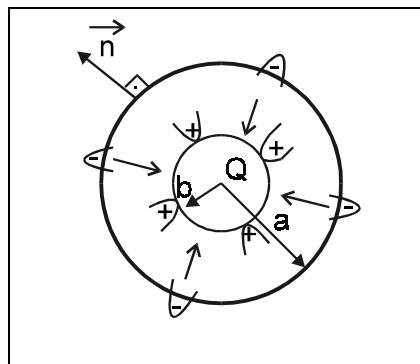
Az első kifejezés az eltolási vektor (gerjesztettségi vektor, az elektromos indukció vektorának) definíciója, a második pedig Gauss törvének általános alakja

A lineáris szigetelőanyagoknál felírhatjuk (a dielektrikum lehet inhomogén is):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Az elektromos polarizációvektor valamilyen módon a reális töltések elmozdulását jelzi a megfigyelt pontban és ezért gyakran illetik a következő névvel: **villamos elmozdulás a dielektrikumban**. Habár az $\epsilon_0 \vec{E}$ szorzat nem jelenti a reális villamos töltések semmiféle elmozdulását, mégis sűrűn azt mondják rá: **villamos elmozdulás a vákuumban**.

2.10. Példa: Egy kis gömb alakú test $Q = -1,8 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ töltésmennyiséggel rendelkezik, és egy magányos lineáris szigetelőanyaggal kitöltött gömb középpontjában helyezkedik el. A szigetelőanyag permittivitása $\epsilon = 3\epsilon_0$. Határozzuk meg az $\vec{E}$, $\vec{D}$ és $\vec{P}$ vektor intenzitását minden pontban, a kötött töltések felületi töltéssűrűségét a szigetelőanyag felületén és a potenciált minden pontban! Kiszámítható-e a potenciál a szigetelőgömbön kívüli pontokban anélkül, hogy ismernénk a szigetelőgömb belsejében a villamos tér változását? A szigetelőgömb sugara $a = 1 \text{ cm}$.



Megoldás:

A villamos eltolás vektorának intenzitása a szigetelőanyagban és a levegőben is megegyezik, és a következő törvényszerűség szerint változik:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_s$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2}$$

A polarizációvektor és az eltolási vektor természetesen különbözni fog egymástól a két környezetben, hiszen a szigetelőanyagban:

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r r^2} = \frac{Q}{4\pi \cdot 3\varepsilon_0 r^2}$$

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)E = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot 3\varepsilon_0 r^2} = 2 \cdot \frac{Q}{12\pi r^2} = \frac{Q}{6\pi r^2}$$

a levegőben pedig:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} .$$

$$P = 0$$

A kötött töltések felületi töltéssűrűsége a szigetelőanyag felületén:

$$\sigma_v = \vec{P}(a) \cdot \vec{n} = P(a) \cdot n \cdot \cos(\angle \vec{P}(a), \vec{n}) = P(a) \cdot 1 \cdot (-1) = -P(a) = -\frac{|Q|}{6\pi a} = 954.92 \text{ nC} .$$

A szigetelögömbön kívüli pontokban a potenciál számításához nem szükséges a villamos tér változásának ismerete, hiszen:

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi \cdot r \varepsilon_0} \quad V_{(a)} = \frac{Q}{4\pi \cdot a \varepsilon_0} = -1617.79 \text{ V} ,$$

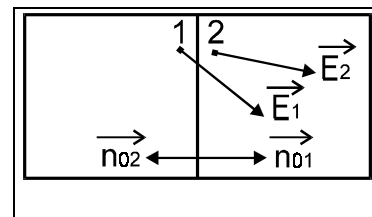
A szigetelőben a következő a potenciálváltozás változása:

$$V = \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{r} + V_{(a)} = \int_r^a \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr + V_{(a)} = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) + V_{(a)}$$

2.2.5.5. Az erővonalak törési törvényei (határfeltételek)

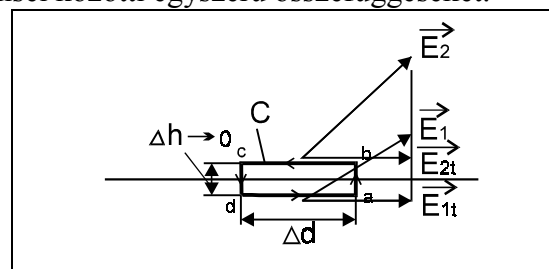
Figyeljünk meg egy felületet, amely két dielektrikumot választ el, és amelyek különböző értékű permittivitással (dielektromos állandóval) ε_1 és ε_2 -vel rendelkeznek. Ha a szigetelők polarizálódnak, akkor a határfelületen két réteg kötött felületi töltés jelenik meg, melyeknek össz felületi töltéssűrűsége:

$$\sigma_p = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_{01} + \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{02} = (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n}_{01}$$



A továbbiakban a határfelület különböző oldalain levő pontokban megkeressük az E és D vektor komponensei közötti egyszerű összefüggéseket.

Alkalmazzuk az $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ összefüggést egy kis lapított téglalap alakú zárt vonalra, mint ahogy az a képen is látható



$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_d^a \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_2 d\vec{l} = \int_d^a E_{1t} dl - \int_b^c E_{2t} dl =$$

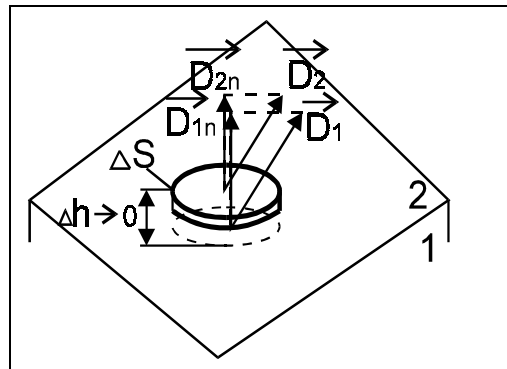
$$= E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

Alkalmazzuk Gauss általános törvényét egy kis lapított hengerre, melynek egyik alapja az egyes környezetben, a másik pedig a kettes környezetben van! Azzal a feltétellel, hogy a határfelületen nincs szabad töltés (mivel a $dh \rightarrow 0$, tehát megközelítőleg nulla, a D vektor fluxusa a henger palástján keresztül elhanyagolható) a kis lapított hengerre a következőket írhatjuk fel:

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \Delta S D_{2n} - \Delta S D_{1n} = 0 \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



Ha elképzeljük, hogy az 1 környezet vezető, akkor

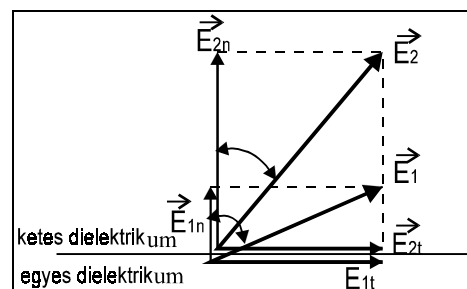
$$E_t = 0 \quad D_n = \sigma \quad \text{Gauss törvénye szerint} \quad \int_S \vec{D} d\vec{S} = D_{2n} \Delta S = \sigma \Delta S$$

Ha az E vektor erővonalai nem párhuzamosak vagy merőlegesek, a két dielektrikum határfelületére, úgy azok a határfelületen megtörnek. Az α_1 és az α_2 törési szögek között egyszerű kapcsolat áll fenn:

$$\tan \alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \vec{D}_{1n} = \epsilon_1 \vec{E}_{1n}$$

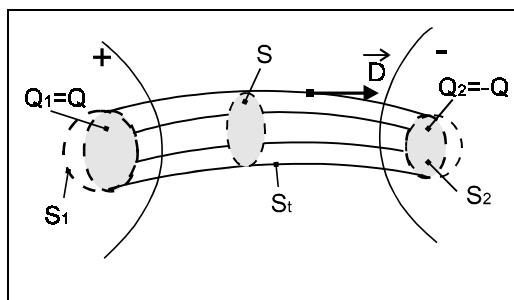
$$\tan \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \quad \vec{D}_{2n} = \epsilon_2 \vec{E}_{2n}$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\frac{D_{2n}}{\epsilon_2}}{\frac{D_{1n}}{\epsilon_1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



2.2.5.6. Az eltolási vektor fluxuscsatornája

Képzeljünk el egy cső alakú felületet, amelyet a D vektor erővonalainak sokasága alkot, és amely a pozitív villamos töltésű testtől a negatív töltésű testig húzódik (vezető testekről van szó, amelyek között a térben nincs szabad villamos töltés). Az ilyen cső alakú felületet, melyet a D -vonalak sokasága alkot, a gerjesztettségi vektor (eltolási vektor) fluxuscsatornájának nevezzük. Ez a



fluxuscsatorna a pozitív és a negatív felületi töltéseket tartalmazó vezetők felületén meghatározott töltésmennyiségre nyugszik, amelyek mennyiségileg egyforma nagyságúak de különböző előjelűek.

Alkossunk a fluxuscsatorna segítségével zárt felületet (ahogy ez a képen is látható) és alkalmazzuk rá Gauss törvényét:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{D} d\vec{S} = 0 = Q_1 + Q_2$$

S_1 meg S_2 a vezető belsejében van,
az S_1 -re pedig a D vektor érintő irányú.

A D vektor fluxusa a fluxuscsatorna minden metszetén keresztül egyforma.

A Gauss törvény alkalmazásának eredményéből kiderül, hogy $Q_1 = -Q_2$, vagyis, hogy a fluxuscsatorna különböző előjelű de azonos töltésmennyiségű töltéseket köt össze.

Ha az egész elektrosztatikus teret felosztjuk azonos fluxusú fluxuscsatornákra, és minden fluxuscsatornát felváltunk egy egyenessel, akkor a rajzon a D vektor vonalainak sokaságát kapjuk meg. Ezek a vonalak információt tartalmaznak a D vektor intenzitásáról is (ahol a vonalak sűrűbbek, ott a D intenzitása nagyobb). Ha az összes egyenes végére $+$ és $-$ jelet rakunk, akkor a vezetőkön a $+$ és $-$ jelek sűrűsége arányos lesz a felületi töltéssűrűséggel. Az így összesített kép a térről is és a töltéseloszlásról is felvilágosítást ad.

2.2.5.7. A szigetelők kritikus (átütési) térerőssége

A permittivitás (dielektromos állandó) mellett a szigetelők legfontosabb tulajdonsága az átütési térerőssége. Minden dielektrikum szigetelőként viselkedik egy meghatározott villamos térerősség eléréséig. Ezen a kritikus térerősségen felül a dielektrikumok elveszítik szigetelő tulajdonságaikat és átütésre kerül sor. A gáznemű dielektrikumokban átütés után nem marad károsodás. A szilárd szigetelőanyagok átütés után szigetelésre alkalmatlanok lesznek, a folyékonyaknak pedig romlik a minősége (átütés után gyengébb szigetelési tulajdonságokkal rendelkeznek).

Az átütési (kritikus) térerősséget úgy definiáljuk, mint a villamos térerősség legnagyobb értékét, amelyet a dielektrikum kibír anélkül, hogy elveszítené eredeti szigetelő tulajdonságait. Az átütési térerősség mértékegysége a V/m (kV/cm vagy kV/mm). A szigetelők kritikus térerőssége sok tényezőtől függ: a szigetelőanyag (alapanyag) tisztaságától, nedvességétől, a gyártás módjától, a szigetelőtest alakjától stb.

A térerősség nagy értékeinél megtörténhet, hogy a térerő a dielektrikum valamely részén nagyobb, mint az anyag átütési térerőssége. Az ilyen helyeken szikrázásokra kerül sor, vagy a gáznemű dielektrikumoknál kialakul egy réteg ionizált gáz (úgynevezett korona). Példa erre a kétszálal levegővezeték, amelyet nagyon magas feszültségre kapcsolnak. A levegő a vezeték közelében ionizálódik, és a sötétben ez a jelenség egy világító, szemmel látható henger alakú tér formájában nyilvánul meg. Átütésre nem kerül sor, mert a korona a vezető körül növeli a vezető effektív sugarát és ugyanazon töltés mellett csökken a térerősség értéke a korona felületén. Ez a folyamat (a korona vastagodása) addig folytatódik, míg az ionizált réteg sugara nem ér el akkora értéket, amelynél a térerősség értéke a korona felületén alacsonyabb nem lesz a levegő kritikus térerősségétől.

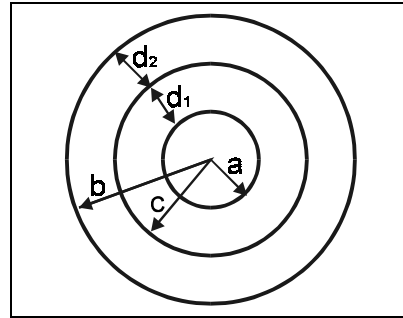
Összesítve: a szikrázások és a korona nemkívánatos jelenségek, mégis vannak esetek, amikor éppen arra törekszünk, hogy erre sor kerüljön (villámhárító, elektródák a repülő villamos töltésének "leválasztására").

2.11. Példa: A koaxiális kábel két rétegű lineáris szigetelőanyaggal van kitöltve (az egyik réteg permittivitása $\varepsilon_1 = 2,5\varepsilon_0$ a másiké pedig $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$). A belső elektróda sugara $a = 5$ mm, a külső elektróda belső sugara pedig 25 mm. Határozzuk meg a következőket:

- miként kell elhelyezni a szigetelőrétegeket és milyen vastagoknak kell lenniük azoknak ahhoz, hogy mindkét szigetelőrétegben azonos legyen a térerősség maximális értéke,
- a kábel vonalmenti (egységnyi hosszúságra eső) kapacitását,
- a legnagyobb feszültséget, amelyre a koaxiális kábel rákapcsolható, ha mindkét dielektrikum átütési térerőssége 200 kV/cm.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 2,5\varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 &= 4\varepsilon_0 \\ a &= 5 \text{ mm} \\ b &= 25 \text{ mm} \\ E_{\max} &= 200 \text{ kV/cm}\end{aligned}$$



- a. A maximális térerősségértékek kiegyenlítésével jutunk el a rétegek elhelyezési sorrendjéhez és a szükséges rétegvastagsághoz:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad E = \frac{Q}{2\pi \cdot r l \varepsilon} = \frac{Q'}{2\pi \cdot r \varepsilon} \quad Q' = \frac{Q}{l}$$

$$E_{I \max} = \frac{Q'}{2\pi \cdot a \varepsilon_1} \quad E_{II \max} = \frac{Q'}{2\pi \cdot c \varepsilon_2}$$

$$E_{I \max} = E_{II \max} \Rightarrow \frac{Q'}{2\pi \cdot a \varepsilon_1} = \frac{Q'}{2\pi \cdot c \varepsilon_2} \Rightarrow a \varepsilon_1 = c \varepsilon_2$$

Mivel $a < c$, nyilvánvaló, hogy:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 & \varepsilon_{II} &= \varepsilon_1 \\ c &= a \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 8 \text{ mm} \\ d_1 &= c - a = 3 \text{ mm} \\ d_2 &= b - c = 17 \text{ mm}\end{aligned}$$

b.

$$C' = \frac{Q'}{U}$$

$$U = \int_a^c E_1 \cdot dr + \int_c^b E_2 \cdot dr = \int_a^c \frac{Q'}{2\pi \cdot r \varepsilon_2} \cdot dr + \int_c^b \frac{Q'}{2\pi \cdot r \varepsilon_1} \cdot dr$$

$$U = \frac{Q'}{2\pi \varepsilon_2} \ln \frac{c}{a} + \frac{Q'}{2\pi \varepsilon_1} \ln \frac{b}{c}$$

$$C' = \frac{Q'}{\frac{Q'}{2\pi \varepsilon_2} \ln \frac{c}{a} + \frac{Q'}{2\pi \varepsilon_1} \ln \frac{b}{c}} = \frac{Q'}{\frac{Q'}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{c} \right)} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{b}{c}} = 97 \text{ pF}$$

c.

$$E_{\max} = \frac{Q'}{2\pi \cdot a \varepsilon_2} \Rightarrow Q' = E_{\max} \cdot 2\pi \cdot a \varepsilon_2 = 2,2252 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

$$V = \frac{Q'}{2\pi \cdot \varepsilon_2} \ln \frac{c}{a} + \frac{Q'}{2\pi \cdot \varepsilon_1} \ln \frac{b}{c} = 230 \text{ kV}$$

2.2.5.8. A visszamaradt polarizáció

A visszamaradt polarizáció az egyes szigetelőanyagok fontos tulajdonságát képezi. Ezenél a dielektrikumoknál a teljes polarizáció, illetve depolarizáció folyamata nem történik meg azonnal, mint általában a szigetelőanyagok legtöbbjénél, hanem néhány óráig, sőt napig is eltarthat. Az ilyen szigetelőanyagokkal rendelkező kondenzátorok esetében a fegyverzetek rövid időre történő rövidre zárása csak részben semlegesíti a szabad töltéseket, hiszen a visszamaradt polarizáció miatt a dielektrikum nem depolarizálódik teljesen, és ezért a szigetelőanyagban levő felületi kötött töltések fogva tartják a szabad töltéseket a kondenzátor elektródáin. Idő múltával a dielektrikum tovább (részlegesen) depolarizálódik és az elektródák között újra feszültség jelentkezik, amely a nagyobb kapacitású kondenzátoroknál veszélyes is lehet.

2.2.5.9. Ferroelektromos (szenyetto-elektromos) anyagok

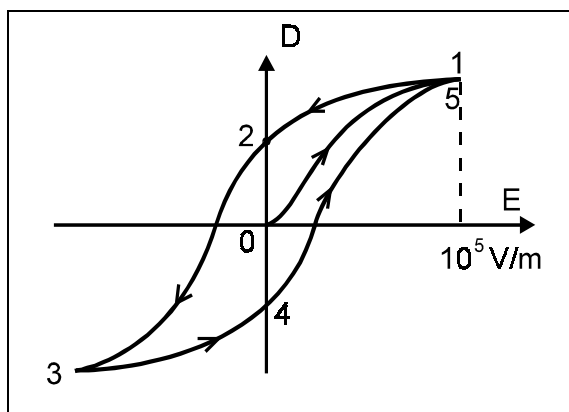
Néhány szigetelőanyagnál a dielektrikum egyes tartományai külső villamos tér nélküli állapotban is dipólusmomentummal rendelkeznek. A külső tér ezeket a tartományokat igyekszik saját irányába elfordítani. Az ilyen szigetelőknél lefolyó elektromos jelenségek nagy hasonlóságot mutatnak a ferromágneses anyagokban lejátszódó mágneses jelenségekkel. Innen ered a ferroelektromos jelenség elnevezés, jóllehet a jelenségnek a vashoz semmi köze sincs.

A szenyetto-elektromos anyagok elnevezés pedig a legrégebbi idő óta ismert ferroelektromos anyag, a Seignette-sótól (kémiai képlete: $\text{NaK}(\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6) \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) ered. Az ilyen

szigetelőanyagoknál a $\vec{P}$ vektor és az $\vec{E}$ vektor kapcsolata nem lineáris (vagyis $\vec{P} \neq \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$), és

mivel a $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, az eltolási vektor ($\vec{D}$) és a térerősségvektor ($\vec{E}$) kapcsolata sem lesz lineáris. A gerjesztettségi vektor és a térerősségi vektor összefüggését szokásos megfigyelni, nyomon követni a ferroelektromos anyagok esetében, mivel az izotróp dielektrikumok közé tartoznak, így tulajdonságaik nem függenek a polarizáció irányától (vagyis a villamos tér hatásának irányától).

A ferroelektromos anyagok viselkedésmechanizmusának magyarázata igen bonyolult. Ezért csak viselkedésük leírására szorítkozunk. Ha a lemezkondenzátor szigetelőanyaga ferroelektromos anyagból van, akkor pontról pontra követni tudjuk az összefüggést a fegyverzetek között uralkodó feszültség (U) és a fegyverzeteken elhelyezkedő töltésmennyiség (Q) között. Mivel a térerősségvektor arányos a



feszültséggel, a gerjesztettségi (eltolási) vektor pedig a szabad töltéshordozók felületi sűrűségével a fegyverzeteken, meghatározhatjuk az E és a D között fennálló összefüggést.

O - 1 A D nagyon gyorsan növekszik, de nem lineárisan. Más dielektrikumoknál a görbe egybevágó lenne az E tengellyel, mivel itt a $\frac{D}{\epsilon_0 E}$ hányados 1000-10000.

1 - 2 a feszültség csökkenésével a lemezek között a D nem csökken ugyanolyan módon, mint ahogy növekedett, hanem az 1-2 görbe szerint. A kettes pontban az $E=0$, de a $D \neq 0$, ami azt jelenti, hogy az anyag még mindig polarizált ($D = \epsilon_0 E + P$) és ebben a pontban van visszamaradt vagy remanens polarizáció.

2 - 3 Ezután, ha megváltoztatjuk a tér irányát és most azt a másik irányba növeljük, akkor az a pont, amely leírja a kapcsolatot a D és az E között a 2-3 görbén mozog. Nagy térerősség esetében újból jelentkezik a telítettség (hasonlóan mint az 1 ponton túl).

3 - 4 - 5 A tér csökkentésével, irányának megváltoztatásával és intenzitásának újbóli növelésével a 3-4-5 görbét kapjuk. Néhány ilyen ciklus után a görbe teljesen bezáródik. Ezt a zárt görbét nevezzük a megfigyelt ferroelektromos anyag histerézisgörbéjének.

Ferroelektromos anyagok: Seignette-só, egyes titanatok (pl. bárium metatitanat - kémiai képlete: BaOTiO_2), és néhány kristályos anyag, amelyek hasonlítanak a bárium metatitanatra, de amelyek tantált és ólomot tartalmaznak.

Alkalmazásuk:

1. Olyan kondenzátorok előállítására használják melyeknek kapacitása függ a rákapcsolt feszültségtől.
2. A ferroelektromos anyagok permittivitása bonyolult összefüggésben van a hőmérséklettel, és ez néhány nagyon fontos alkalmazást tesz lehetővé. A bárium metatitanat relatív permittivitásának hőmérsékleti tényezője például 25°C -on $+500/^\circ\text{C}$, 30°C hőmérsékleten pedig $-500/^\circ\text{C}$. Így a bárium titanátot felhasználhatjuk a hőmérséklet nagyon pontos mérésénél.

A ferroelektromos anyagok magasabb hőmérsékleten (Curie-pont) elveszítik a fent leírt tulajdonságaikat és közönséges szigetelőkké válnak (a bárium metatitanat például 120°C fölött válik közönséges szigetelővé).

2.2.5.10. Elektrettek

A permanens polarizációval bíró szigetelőanyagokat elektretteknek is nevezik Egyes (főleg angolszász) szerzők azonban az elektret elnevezést olyan szerves anyagokra (főleg gyanták, viasz- és kátránykeverékek, pl. kalafónium és karnaubi viasz) alkalmazzák, amelyek a következő érdekes tulajdonsággal rendelkeznek: ha ezeket az anyagokat olvasztott állapotban erős villamos térnek tesszük ki, majd ebben a térben hagyjuk kihűlni és megkeményedni őket, akkor polarizációjukat megtartják a tér megszűnése után is. Az ilyen polarizált állapotban lévő dielektrikumokat nevezzük elektretteknek. Gyakorlati alkalmazásuk nincsen, de mégis használjuk őket a villamos tér kísérleti kivizsgálásakor. Ha egy kis iránytű alakú elektretet, amely szabadon mozoghat a tengelye körül (hasonlóképpen mint a klasszikus iránytű) beviszünk valamilyen villamos térbe, akkor az arra fog törekedni, hogy a tér erővonalainak irányában helyezkedjen el.

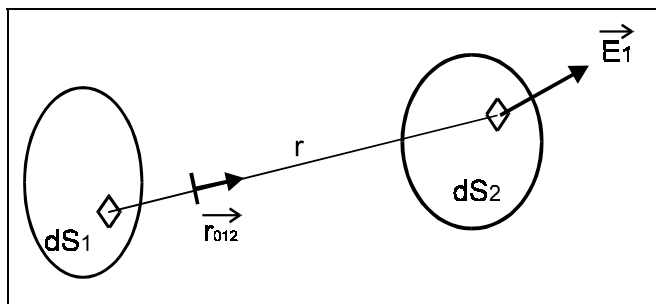
2.2.5.11. Dörzsölési elektromosság

Figyeljünk meg két dielektrikumot. Az erők, amelyek az elektronokat a külső elektronhéjakon tartják, különbözőek két különböző szigetelőanyagnál. Ha a dielektrikumokat "érintkezésbe" hozzuk egymással, akkor az "érintkező" felületen az elektronokra ható erők megváltoznak, az erőviszonyok megváltozása, illetve a környezetváltozás miatt. Ezek az erők olyanok lehetnek, hogy kiragadnak egy meghatározott számú elektront az egyes molekulákból. Ennek az eredménye az lesz, hogy, ha a két szigetelőanyagot eltávolítjuk egymástól, azok elektromosak maradnak. A dörzsölés erősíti ezt a jelenséget, mert nagyobb számú molekula kerül közeli kapcsolatba, de maga a dörzsölés nem elengedhetetlen ahhoz, hogy a fent leírt jelenség létrejöjjön.

2.2.6. ERŐK AZ ELEKTROSZTATIKUS TÉRBEN

A Coulomb-törvény a két pontszerű töltés között fellépő elektrosztatikus erőt határozza meg. Több pontszerű töltés esetén a kiválasztott testre ható erőt célszerű a villamos térerősség vektorának segítségével számítani. Több pontszerű töltés villamos terét a kiválasztott test helyén legcélszerűbb a szuperpozíció-elv alapján megállapítani.

Figyeljünk meg azonban két, elektromos szempontból töltött vezető testet, amelyek nem kicsik a köztük levő távolsághoz viszonyítva. Tételezzük fel, hogy a felületi töltéssűrűségeket valami módon sikerült meghatároznunk. Az 1-es indexszel rendelkező test által keltett össz villamos térerősségre a 2-es indexszel jelölt test egy pontjában felírhatjuk, hogy:



$$\vec{E}_1 = \oint_{S_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_1 dS_1}{r^2} \vec{r}_{012} \quad \text{- a különböző } dS_1 \text{ felületi elemeknek}$$

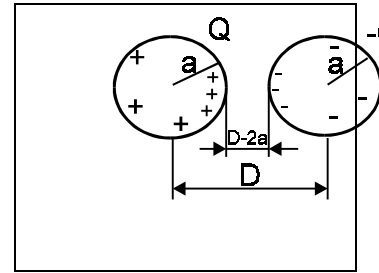
különböző σ_1 , r , $\vec{r}_{012}$ felel meg

Ha ilyen módon meghatároztuk az 1-es test által keltett térerősség vektorát a 2-es test minden pontjában, akkor az erő, amellyel az 1-es test a 2-es testre hat, egyenlő lesz:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{S_2} \sigma_2 dS_2 \vec{E}_1$$

Ez a módszer alkalmas az elektromos erők meghatározására két elektromosan töltött test között, függetlenül a testek alakjától, de sajnos a vezetők felületén elhelyezkedő töltések pontos (vagy megközelítő) eloszlását ismerni kell. Épp ez utóbbi feltétel miatt, mivel a vezetőkön a gyakorlatban csak a legritkább esetekben ismeretes a töltések pontos vagy megközelítő felületi eloszlása, e módszer alkalmazása igencsak korlátozott. Amennyiben a felületi töltéseloszlás ismeretlen számunkra, a két, pontszerűnek nem tekinthető villamosan töltött test esetében, az egymás között ható erők intenzitásának csupán durva becslését írhatjuk fel, mint a következő példában:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{D^2} < F < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(D-2a)^2}$$



2.2.6.1. A feltöltött kondenzátor energiája

Minden töltött kondenzátor rendelkezik egy meghatározott mennyiségű energiával. Figyeljünk meg egy üres (nem töltött) kondenzátort, melynek kapacitása C ($U=0$). Gondoljuk el, hogy a 2-es elektródáról valami módon $+\Delta Q$ töltésmennyiséget átvisszünk az 1-es elektródára és így a potenciálkülönbség $\Delta Q/C$ lett! Most az 1-es fegyverzeten $+\Delta Q$ a töltésmennyiség, a kettes fegyverzeten pedig $-\Delta Q$. Vigyünk most át ismét egy $+\Delta Q$ töltésmennyiséget a 2-es elektródáról az 1-es elektródára! Mivel ennél az átvitelnél már létezik potenciálkülönbség, így a villamos erők legyőzésére a következő munkát kell befektetnünk:

$$\Delta A_1 = \Delta Q \frac{\Delta Q}{C} \quad \text{a feszültség az elektódák között} \quad \frac{2\Delta Q}{C}$$

A következő (harmadik) átvitelkor a munka nagysága:

$$\Delta A_2 = \Delta Q \frac{2\Delta Q}{C}$$

A $(k+1)$ -edik átvitelkor pedig a munka

$$\Delta A_k = \Delta Q \frac{k\Delta Q}{C} \quad k = 1, 2, \dots$$

Legyen a pozitív elektróda végső töltése Q ($Q \gg \Delta Q$), az átvitelek száma pedig $n \gg 1$. Ekkor a $\Delta Q = \frac{Q}{n}$, az össz munka pedig:

$$A = \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \sum_{k=1}^n \Delta Q (k-1) \frac{\Delta Q}{C} = \frac{(\Delta Q)^2}{C} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{Q^2}{n^2 C} \frac{n(n-1)}{2}$$

$$A = \frac{Q^2}{2C}$$

Ezt a munkát az elektromos erők ellen kell végezni.

Az energia megmaradásának elve szerint, az az energia, amit a kondenzátor töltésére felhasználtunk (amely egyenlő a kiszámított A összmunkával) átalakult valamilyen más energiává, az elektrosztatikus tér energiájává, amelyet a kondenzátor tartalmaz:

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \quad Q = CU$$

A kondenzátor feltöltéséhez szükséges munkát egyszerűbben is levezethetjük, mégpedig integrálszámítással. Ha a fegyverzeteken $+q$ és $-q$ töltésmennyiség ($0 < q < Q$) van, akkor, a dq ($dq > 0$) töltésmennyiségnek a pozitív elektródáról a negatív elektródára való átvitele a következő munkával egyenlő:

$$dA = \frac{q}{C} dq$$

Az össz munka, amit be kell fektetni ahhoz, hogy a kondenzátor fegyverzeteit $+Q$ illetve $-Q$ töltésmennyiséggel lássuk el, a következőképpen kapható meg:

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

2.2.6.2. Az energiasűrűség az elektrosztatikus térben

Figyeljünk meg egy lemezkondenzátort, melynek karakterisztikus adatai a következők: S - a fegyverzetek felülete, d - a fegyverzetek egymásközi távolsága és ϵ - a szigetelőanyag permittivitása. A kondenzátort U értékű feszültségre kötjük. A kondenzátor energiáját, illetve a kondenzátoron lévő villamos tér energiáját egyszerűen felírhatjuk, és mivel a villamos tér is jól behatárolt ($S \cdot d$ a térfogata a fegyverzetek közötti térrésznek ahol a tér kimutatható) az energiasűrűség számítása is igen egyszerű, íme:

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{S}{d} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon S d \frac{U^2}{d^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d \quad E = \frac{U}{d}$$

$$v = Sd$$

$$w_e = \frac{W_e}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$$W_e = Sd w_e$$

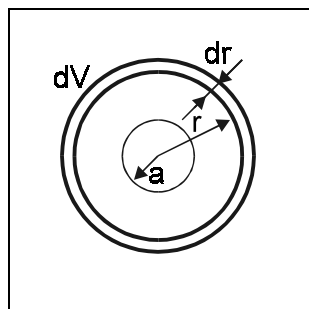
$$W_e = \int_v \frac{1}{2} \epsilon E^2 dv$$

- w_e az energiasűrűség az elektrosztatikus térben,
- W_e az elektromos tér energiája,
- v az a térfogatrész amelyben a tér elhelyezkedik.

2.12. Példa: Egy magányos vezetőgömb, melynek sugara $a = 10$ cm desztillált vízben van ($\epsilon_r = 81$), és $Q = 10^{-9}$ C töltéssel rendelkezik. Számítsuk ki az energiát, amelyet elhasználtunk a vezetőgömb feltöltésére !

Megoldás:

$$\begin{aligned} a &= 10 \text{ cm} \\ \epsilon_r &= 81 \\ Q &= 10^{-9} \text{ C} \\ W_e &= ? \end{aligned}$$



$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \cdot E^2$$

$$W_e = \int_v w_e \cdot dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2 \epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$W_e = \int_a^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{Q^2}{4^2 \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_r^2 r^4} \cdot 4r^2 \pi dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r a}$$

A keresett energia kiszámítható a vezetőgömbön elhelyezkedő töltésmennyiség és a vezetőgömb potenciáljának segítségével is:

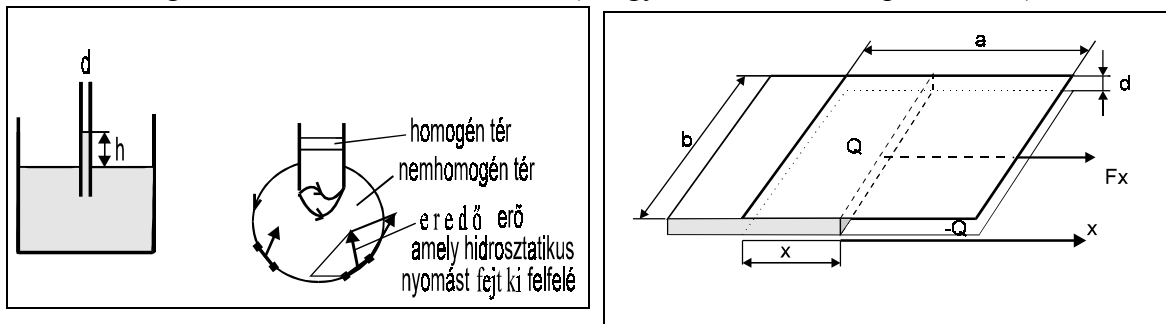
$$W_e = \frac{Q \cdot V}{2} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r a} \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r a}$$

A konkrét értékeket behelyettesítve az energia értékére $W_e = 554.8 \text{ pJ}$ eredményt kapunk.

2.2.6.3. Az elektrosztatikus erők számítása energia segítségével

Eddig az elektrosztatikus erőket úgy számoltuk ki, hogy ismertük a szabad töltések eloszlását. Mivel ez a gyakorlatban csak nagyon ritkán fordul elő, valamint az a tény, hogy az erők ilyen módon való számítása teljesen hamis eredményeket ad a szigetelőtestek esetében, más erőszámítási eljárást kell keresnünk.

Ha például egy feltöltött, levegő szigetelésű kondenzátor elektródáit valamilyen folyékony dielektrikumba süllyesztjük, észre fogjuk venni, hogy a folyékony szigetelőanyag szintje a két lemez között magasabb mint a lemezeken kívül (ahogy ez a bal oldali képen látható).



A jelenség magyarázata a nemhomogén térrészben jelenlevő dipólusokban rejlik, amelyek elhelyezkedésükkel fölfelé ható hidrosztatikus nyomást eredményeznek.

Lássunk azonban egy másik példát, melynek segítségével mennyiségileg is le tudjuk írni azt az erőt, amely a szigetelőanyagot felfelé nyomja.

Nézzük a jobb oldali képen a szilárd dielektrikumú kondenzátort, és tételezzük fel, hogy az elektromos F_x erőnek sikerült behúznia a szigetelőanyagot a kondenzátorba egy rövid dx hosszúságyra. Ebben az esetben az elektromos erők munkája a következőképpen írható le:

$$dA_{\text{el. erő}} = F_x dx$$

Ismeretlenek az elektromos F_x erő, valamint az általa elvégzett munka. Ezt a munkát számítjuk majd ki a kondenzátor vagy villamos tér energiakülönbségéből, amelyet az elmozdulás utáni energia és az elmozdulás előtti energia különbségeként fogunk értelmezni. Az ilyen hozzáállás két esetlehetőséget tartogat a számunkra.

Első eset: a töltésmennyiség a kondenzátor lemezein állandó (a fegyverzetek nem kapcsolódnak semmilyen feszültségforráshoz).

Az energia, amely elhasználódott a dielektrikum elmozdításakor csak a kondenzátorban levő elektromos energiából fedezhető (hiszen nincs kapcsolat semmilyen feszültségforrással),

így a kondenzátor energianövekménye természetesen negatív ($dW_e < 0$). Mivel azonban az elvégzett munka sohasem lehet negatív, írhatjuk, hogy:

$$dA_{\text{el.erő}} = -dW_e \quad \text{vagyis} \quad F_x = - \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{Q=\text{const.}}$$

Második eset: A kondenzátor lemezei között a feszültség az elmozdulás idején változatlan marad. A rendszer geometriájának megváltozásakor (szigetelőanyag behúzásakor a kondenzátor lemezei közé) megváltozik a kapacitás is, és mivel az $U = \text{const.}$ az elektródák töltésmennyisége meg kell, hogy változzon.

Tételezzük fel, hogy a kondenzátor lemezeinek töltésmennyisége dQ értékkel változott meg, vagyis a külső, nem elektromos erők $+dQ$ töltésmennyiséget vittek át a negatív elektródáról a pozitív elektródára és eközben a következő munkát végezték:

$$dA_{\text{külsőerők}} = U dQ$$

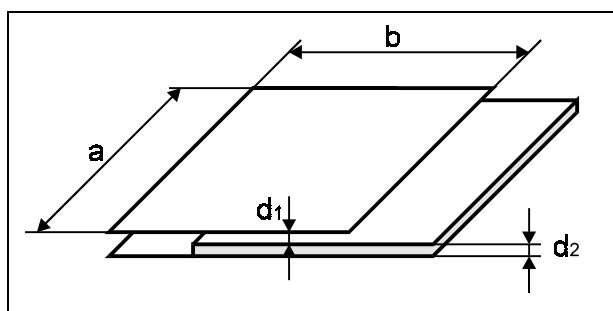
A kondenzátor energiája az elmozdulás előtt $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU$, az energianövekmény pedig (a fegyverzetek töltésmennyiségének növekedése miatt):

$$dW_{e \text{ kondenzátor}} = \frac{1}{2}(Q + dQ)U - \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}UdQ$$

Ez a mennyiség pontosan annak az energiának a fele, amelyet a külső energiaforrások (nem elektromos erők) befektettek a rendszerbe. Ezek szerint, a befektetett energia másik felét az elektromos erők használták el a mechanikai munka végzésekor (a szigetelőanyag elmozdításakor), vagyis:

$$dA_{\text{el.erő}} = \frac{1}{2}UdQ \quad F_x = \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{U=\text{const}}$$

2.13. Példa: Az U feszültségre kapcsolt levegőszigetelésű síkkondenzátor lemezei közé behelyeztünk egy d_2 vastagságú vezetőlemez, mint ahogy az a képen is látható. Számítsuk ki azt az erőt amely a behelyezett lemezre hat! Létezik-e az erőnek olyan komponense, amely felfelé hat? Külön számítsuk ki a feszültség legnagyobb értékét, amelyre még rákapcsolható a kondenzátor, ha $d_1 = 1 \text{ mm}$, $d_2 = 1 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$, a levegő átütési télerőssége pedig 30 kV/cm .



Megoldás:

Ha elhanyagoljuk az élek mentén jelentkező inhomogén teret, megkapjuk a kapacitást:

$$C = \frac{\epsilon_0 (b - x)a}{d_1 + d_2} + \frac{\epsilon_0 xa}{d_1}$$

ahol az x a vezetőlemez kondenzátorban elhelyezkedő részének a hossza. Az erő arra törekszik, hogy a lemezt behúzza a kondenzátorba, intenzitása pedig:

$$F = \frac{U^2 \left(\frac{dC}{dx} \right)}{2} = \frac{\epsilon_0 a d_2 U^2}{2 d_1 (d_1 + d_2)}$$

Ha elhanyagoljuk a tényt, hogy a villamos tér inhomogén a fegyverzetek élei körül, akkor a legnagyobb feszültség amelyre a kondenzátort kapcsolhatjuk $U_{\max} = d_1 E_{kr} = 3 \text{ kV}$, ahol az $E_{kr} = 3 \text{ MV/m}$, így a vezetőlemezre ható erő legnagyobb értéke: $F_{\max} = 3,62 \text{ mN}$.

2.2.7. A VÁLTOZÓ VILLAMOS TÉRBEN ELHELYEZKEDŐ DIELEKTRIKUMOK VESZTESÉGEI

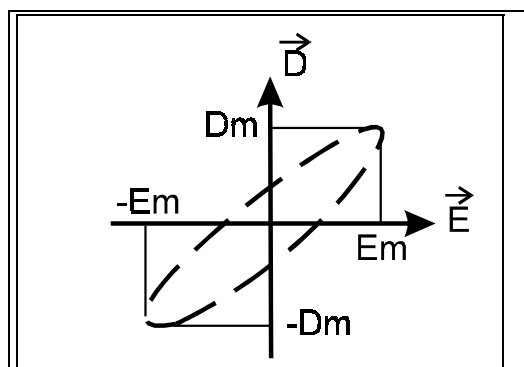
Az eddigiekben a szigetelők viselkedését csak az elektrosztatikus térben (az elektromos tér vagy állandó volt, vagy csak nagyon kicsit változott az idő folyamán) kísértük figyelemmel. A gyakorlatban viszont leginkább időben változó villamos térrel van dolgunk. A változó villamos térben elhelyezkedő dielektrikumban, a szigetelőanyag fajtájától függően különböző polarizációs folyamatok játszódnak le (elektron-polarizáció, dipóluspolarizáció és ionos polarizáció, illetve ezeknek a kombinációi).

A periódikusan változó villamos terek esetében a polarizáció intenzitása és iránya is periodikus. Ebben az esetben állandó energiacsere kerül sor a dielektrikum és tér között. A villamos tér munkát végez a szigetelőanyag periódikusan és ellentétes irányokba végzett polarizációjakor, a dielektrikum pedig ennek az elfogyasztott energiának a legnagyobb részét visszaszolgáltatja a depolarizációs periódusaiban. Az állandó energiacsere ideje alatt, az energia egy jelentéktelen része átalakul más fajta energiává (vagyis a dielektrikumokban léteznek veszteségek), például termikus energiává, illetve hővé.

A veszteségek mellett létezik még egy jelenség. A polarizáció irányának gyors váltakozása (több tíz- vagy százmilliószor másodpercenként) eredményeként a dielektrikum nem polarizálódik maximálisan mint az időben változatlan villamos tér esetében. Hogy mekkora százalékban fog a szigetelőanyag polarizálódni, az az anyag fajtájától és a frekvenciától (vagyis a tér változásának sebességétől) függ. Ezért a szigetelőanyagok tulajdonságai, de különösen a dielektromos állandó (permittivitás), nagy mértékben függ a frekvenciától.

Lineáris dielektrikumok esetében, nagyon lassú térváltozások mellett, a villamos térerősségvektor (E) és a gerjesztettségi (eltolási) vektor (D) közötti kapcsolat ugyancsak lineáris.

A gyakorlatban a villamos térerősség vektora (E) leggyakrabban szinuszfüggvényként változik vagyis $E_{(t)} = E_m \sin \omega t$, és ha lineáris szigetelőről van szó, úgy az eltolási vektor (D) is szinuszfüggvény szerint fog változni, de nem mint $\sin \omega t$, hanem mint $D_{(t)} = D_m \sin(\omega t - \delta)$. A D_m és a δ szög az anyag fajtájától és a frekvenciától függ. Ha lerajzolnánk a $D(t)$ és az $E(t)$ függvényét, akkor egy ferde ellipszist kapnánk. Bizonyítható, hogy az ellipszis területének értéke:



$$\pi E_m D_m \sin \delta$$

- E_m - a térerősség maximális értéke
- D_m - az E_m -nek megfelelő eltolási vektor-érték

A D_m/E_m és a δ szög változik a frekvenciával. A δ nagyságrendje $10^{-4} - 10^{-3}$ vagyis **a bemutatott ellipszis nagyon keskeny**, a D_m/E_m arány pedig nagy frekvenciatartományban megközelítőleg változatlan.

Az előző magyarázathoz kívánczik még a körülírt nagyságok szakmai berkekben közismert neve:

δ – veszteségek szöge

$\frac{D_m}{E_m}$ – dinamikus dielektromos állandó

A következő levezetéssel azt bizonyítjuk, hogy az időben periódikusan változó térbe helyezett dielektrikumoknál a veszteségek térbeli sűrűsége egy periódusidő alatt arányos az ellipszis területével.

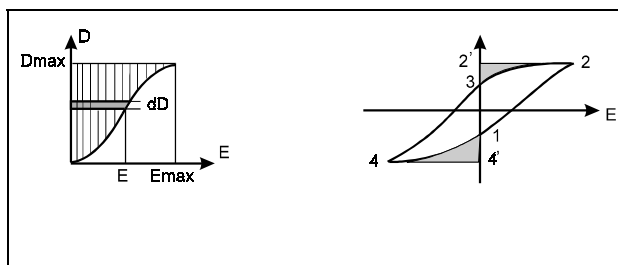
Vegyünk egy ismert méretű síkkondenzátort (lemezfelület nagysága S , lemezek közötti távolság d). Helyezzük el benne a szigetelőanyagot, melynek dinamikus tulajdonságait tanulmányozni kívánjuk. Ha a kondenzátorra kapcsolt feszültség szinuszosan változik, akkor a fegyverzetek töltése is a szinuszfüggvény szerint fog változni, hiszen:

$$E_{(t)} = \frac{u_{(t)}}{d}, \quad D_{(t)} = \frac{Q_{(t)}}{S}$$

Legyen a feszültség egy bizonyos pillanatban u . Ha ebben a pillanatban megnöveljük a lemezek töltését dQ -val, akkor a potenciál definíciója alapján a következő munkát kell végeznünk:

$$dA = u dQ = E dS dD = E dD S d$$

Mivel a skkondenzátorban a villamos tér homogén, az EdD szorzatot értelmezhetjük úgy is, mint a kondenzátor dielektrikumában szükséges energiasűrűség-növekedését abból a célból, hogy az adott E térerősség mellett az eltolásvektor növekedjen dD -vel. Ha a térerősség nullától $E_{\max}$ -ig változik, akkor az össz egységnyi térfogatra eső munka (energiasűrűség) amelyet be kell fektetnünk kifejezhető mint:



$$\frac{A}{Sd} = \int_D^{D_{\max}} E dD$$

Ez az egységnyi térfogatra eső munka egyenlő a polarizációs görbe és a D tengely közötti területtel (függőlegesen vonalkázott terület a képen).

Figyeljük meg a hiszterézisgörbét. A dielektrikum polarizációjához szükséges egységnyi térfogatra eső befektetett munka az 1 és 2 pont között arányos az 1-2-2' görbevonálú háromszög területével és mivel az $E > 0$ és $dD > 0$, következik, hogy $A > 0$ (ami arra utal, hogy a munkát külső energiaforrások végzik). A 2 és 3 pont közötti részen $E > 0$ de $dD < 0$, amiből látjuk, hogy $A < 0$, és a 2-2'-3 görbevonálú háromszög területével arányos munka illetve energia visszaszámazik az energiaforrásokhoz. A 3 és 4 pont közötti szakaszon $E < 0$ és $dD < 0$, vagyis a 3-4-4' görbevonálú háromszög területével arányos munkát ismét az energiaforrások végzik ($A > 0$). A 4 és 1 pontok között, mivel $E < 0$ és $dD > 0$, a 4-4'-1 görbevonálú háromszög területével arányos energia visszaszámazik a forrásokhoz ($A < 0$).

Az előzőekből egyértelműen kitűnik, hogy a teljes polarizációs ciklus alatt az energiaforrások által befektetett és vissza nem származtatott, egységnyi térfogatra eső energia (az elhasznált energiasűrűség) arányos a hiszterézisgörbe területével.

2.2.8. VILLAMOS TÖLTÉSEK MOZGÁSA ELEKTROSZTATIKUS TÉRBEN

2.2.8.1. Villamos töltések mozgása homogén villamos térben

Figyeljünk meg egy makroszkópiusan mozdulatlan elektromosan töltött részecskét, melynek töltésmennyisége $Q > 0$ és tömege m , a homogén térben, melynek térerőssége $\vec{E}$. A részecskére ható erő nagysága, mint tudjuk:

$$\vec{F} = Q \vec{E}$$

Ha a töltésre ható gravitációs erő elhanyagolható (a részecske kis tömege miatt) a Coulomb erőhöz viszonyítva, akkor a magára hagyott töltés az $\vec{E}$ vektor valamely erővonalán fog mozogni az $\vec{E}$ vektor irányába. A t pillanatban a részecske mondjuk v sebességgel rendelkezik, a $t + \Delta t$ pillanatban pedig $v + \Delta v$ sebességgel. Mindamellett, hogy sem a v , sem a Δv értékét nem ismerjük tudjuk, hogy a töltés a sebességét a fent felírt erő hatására változtatta meg. Ennek az erőnek a munkája a Δt időtartamra:

$$\Delta A = F \Delta s = F v \Delta t = Q E v \Delta t$$

Az energia megmaradásának törvénye szerint, az energia amely elhasználódott a részecske felgyorsulásakor átalakult annak kinetikus energiájává:

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{kinetikus}} &= \frac{1}{2} m (v + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} m [v^2 + 2v\Delta v + (\Delta v)^2] - \frac{1}{2} m v^2 \approx m v \Delta v \end{aligned}$$

mivel a Δt kicsi a $\Delta v \ll v$

$$m v \Delta v = Q E v \Delta t$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{Q E}{m}$$

A sebesség növekménye állandó, mivel a Q , m és E értékei nem változnak. Ezért felírható, hogy:

$$v = \frac{Q E}{m} t \quad \text{a kezdősebesség egyenlő } 0 - \text{val.}$$

vagyis:

$$v = \frac{Q E}{m} t + v_0 \quad v_0 \text{ a kezdősebesség a } t = 0 \text{ pillanatban. A } \vec{v}_0 \text{ és az } \vec{E} \text{ iránya egyforma}$$

és ugyanúgy:

$$v = \frac{QE}{m}t - v_0$$

$\vec{v}_0$ és $\vec{E}$ ellenkező irányú

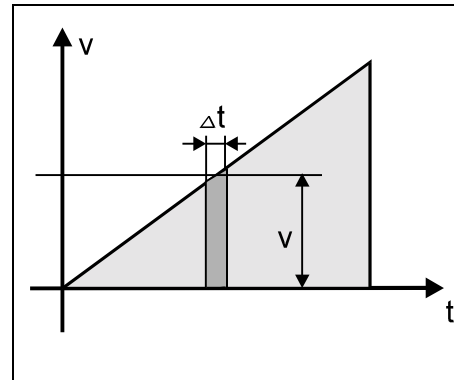
Legyen az E vektor iránya megegyező az x tengely irányával! Tételezzük fel, hogy a részecske a $t=0$ pillanatban az $x=0$ és $y=0$ pontban helyezkedik el, valamint, hogy a kezdősebessége egyenlő nullával.

Egy rövid Δt időtartam alatt, a t pillanat közelében (amelyben a részecske v sebességgel mozog) a részecske $\Delta x = v \Delta t$ utat tesz meg. Ezt a szorzatot a képen a sötét téglalap képviseli. Az össz út melyet a részecske megtesz $t=0$ -tól valamely t pillanatig egyenlő az össz ilyen téglalap összegével, vagyis a háromszög területével.

$$x = \frac{1}{2}vt = \frac{QE}{2m}t^2$$

Amikor az elektromos részecske kezdősebessége nem egyenlő nullával, akkor az út, melyet a részecske megtesz:

$$x = \frac{QE}{2m}t^2 \pm v_0t$$

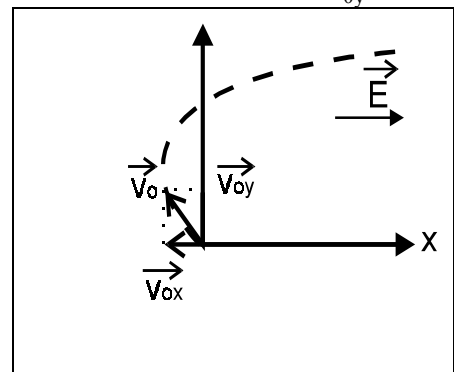


Ha a kezdősebesség iránya nem egyezik meg az E vektor irányával, akkor a v_0 sebességet felbonthatjuk v_{0x} komponensre amely egybevágó az E vektor irányával és a v_{0y} komponensre amely derékszöget zár be erre az irányra:

$$x = \frac{QE}{2m}t^2 - v_{0x}t$$

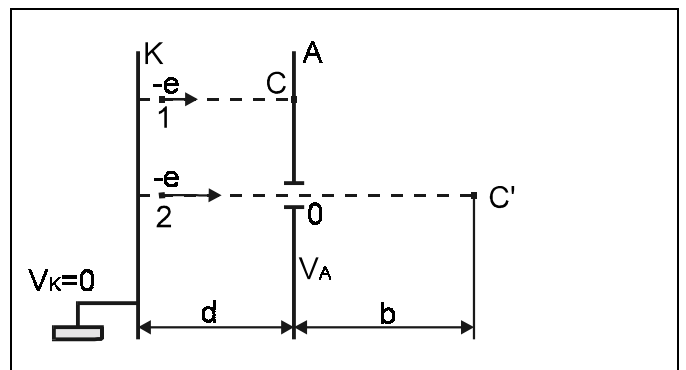
$$y = v_{0y}t$$

Tehát a részecske parabolikus pályán mozog.



2.14. Példa: Az elektronok a K elektródáról indulnak és az A elektróda felé gyorsulnak, mint ahogy az a képen látható. Az A elektródán van egy kis O nyílás. A rendszer dimenziói és az elektróda potenciálja a képen látható. Határozzuk meg:

- Az időt, amely szükséges ahhoz, hogy az 1 jelölésű elektron a K elektródáról az A elektródára érjen, valamint a C pontban az elektron sebességét abban a pillanatban mikor az A elektródába ütközik.
- A 2 jelölésű elektron sebességét a C' pontban, és az időt amely szükséges ahhoz, hogy ez az elektron a K elektródáról a C' pontba érjen.



- c. Számítsuk ki az össz keresett értékeket, ha a $V_A = 20 \text{ V}$, $d = 1 \text{ cm}$, és $b = 2 \text{ cm}$. Az elektron tömege $m_e = 9,1083 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, töltésmennyisége pedig $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Megoldás:

a.

$$F = -e \cdot E$$

$$A = QU = e \cdot U = E_k$$

$$\frac{m_e \cdot v_{1C}^2}{2} = e \cdot U$$

$$v_{1C} = \sqrt{\frac{2e \cdot U}{m_e}} = 2,65 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_e a = eE$$

$$v = v_0 + at$$

$$v_0 = 0$$

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

$$v_{1C} = a \cdot t_{1C}$$

$$a = \frac{eU}{m_e d}$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m_e}} = \frac{e \cdot U}{m_e \cdot d} \cdot t_{1C}$$

$$t_{1C} = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot d^2}{e \cdot U}} = 7,54 \text{ ns}$$

- b. Az O nyíláson áthaladva az elektron nem gyorsul tovább, hanem v_{1C} sebességgel halad tovább a C' pontig:

$$v_{2C'} = v_{1C}$$

$$t_{2C'} = t_{1C'} + t_2 = t_{1C'} + \frac{b}{v_{1C}} = 15,09 \text{ ns}$$

2.2.8.2. A villamos töltések mozgása inhomogén villamos térben

Az elektromos részecske útjának kiszámítása a nemhomogén elektromos térben lényegében nagyon bonyolult. Sok esetben csak a Q töltés sebességének intenzitása érdekel bennünket. Ilyen esetekben ismerjük a villamosan töltött részecske töltésmennyiségét (Q), tömegét (m), és azt is tudjuk, hogy mekkora potenciálkülönbségen ($V_1 - V_2$) haladt át.

Legyen a kezdőpontban $v_1 = 0$ (a részecske kezdősebessége), és ugyancsak $V_1 = 0$ (a potenciál a kezdőpontban). Az elektromos erők hatására a részecske eljutott a 2-es pontba ahol V_2 a potenciál értéke. Az út minden pontjában a részecskére hatott az $F = QE$ elektromos erő. A villamos erő az út kis dl részén végzett ($dA_{\text{el.erő}}$), illetve az össz elvégzett ($A_{\text{el.erő}}$) munkája:

$$dA_{\text{el. erő}} = \vec{F} d\vec{l} = Q \vec{E} d\vec{l}$$

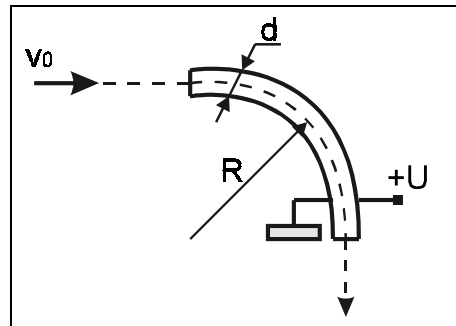
$$A_{\text{tér ereje}} = \int_1^2 Q \vec{E} d\vec{l} = Q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = Q(V_1 - V_2)$$

Az energiamegmaradási törvény értelmében ez a munka egyenlő kell, hogy legyen a kinetikus energiával, mellyel ez a részecske rendelkezik a kettes pontban (mivel nyugalmi állapotból indult el):

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = Q(V_1 - V_2) \quad (v_1 = 0)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Q(V_1 - V_2)}{m}}.$$

2.15. Példa: Egy pozitív elektromossággal töltött részecskét, melynek tömege m , töltése pedig Q , felgyorsítottunk v_0 sebességre. Ezután a részecske keresztülhalad két közeli, görbe vezetőlemez között (lásd az ábrát!). Határozzuk meg a feszültséget a lemezek között úgy, hogy a részecske a képen megjelölt félkör alakú pályán mozogjon! Tételezzük fel, hogy a tér a lemezek között homogén (egyforma intenzitású minden pontban) melynek hozzávetőleges értéke U/d és sugár irányú (radiális), mint a koaxiális kábelben. Számítsuk ki az U feszültség értékét arra az esetre, ha a részecske egy proton, melynek gyorsítását az $U_0 = 1000 \text{ V}$ feszültség segítségével végeztük, ha az $R=10 \text{ cm}$, a $d=1 \text{ cm}$, az elemi töltés $e=1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, a proton tömege pedig $m_p=1,67239 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.



Megoldás: Általános esetben érvényes, hogy a centrifugális és az elektrosztatikus erő egyensúlyban vannak. A centrifugális erő számításához azonban ismernünk kell a részecske v_0 sebességét, amellyel a görbe vezetőlemezek közé repül:

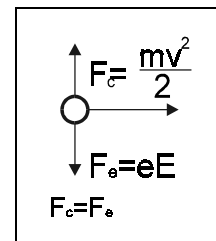
$$A = eU_0$$

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_K = A$$

$$eU_0 = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$



Ezek után már felírható az erőegyensúly:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{U}{d} \cdot e$$

$$U = \frac{mv^2 \cdot d}{eR} = \frac{2 \cdot U_0 \cdot d}{R}$$

Behelyettesítve a konkrét értékeket, az U feszültségre a következő értéket kapjuk:

$$U = \frac{2 \cdot U_0 \cdot d}{R} = 200 \text{ V}.$$

2.3. Ellenőrző kérdések

1. Milyen villamos töltéseket ismersz?
2. Mivel magyarázható a kétfajta töltés létezése?
3. Mekkora az atomok és az atommagok?
4. Hogyan érintkeznek egymással a testek?
5. Hogyan oszthatók csoportokra az anyagok a villamosságtan szempontjából?
6. Melyek az SI mértérendszer alapegységei és –mértékegységei?
7. Milyen előtagokat (előragokat) használunk a választott egységek többszöröseinek és törtrészeinek kifejezésére?
8. Mi a makroszkópikus és mikroszkópikus vizsgálati szint?
9. Hogyan szól Coulomb törvénye?
10. Mi a permittivitás (dielektromos állandó)?
11. Mikor alkalmazható a szuperpozíció-elv?
12. Mi a villamos tér, mikor jelentkezik és milyen természetű?
13. Mi a próbatöltés?
14. Hogyan ábrázolható grafikusan a villamos tér?
15. Mit takar a villamos tér erővonalai fogalom?
16. Hogyan utal a grafikusan ábrázolt villamos tér a térintenzitásra?
17. Milyen a felületi és térbeli töltésseloszlás és hol fordul elő?
18. Hogyan fejezhető ki a villamos tér vektora felületi és térbeli töltésseloszlás esetén?
19. Hogyan fejezhető ki a villamos erők által elvégzett munka?
20. Mi a skalárszorzat?
21. Miért örvénymentes (cirkulációmentes) az elektrosztatikus tér?
22. Miért forrásos a villamos tér?
23. Mi a potenciál?
24. Mi a feszültség?
25. Mik az ekvipotenciális felületek (szintfelületek, nívófelületek)?
26. Mi az összefüggés a villamos térerősség és a potenciál között?
27. Ábrázolható-e az elektrosztatikus tér szintfelületekkel?
28. Hogyan állapítható meg a villamos térerősség vektorának iránya, irányítása és nagysága a szintfelületek rendszerével ábrázolt elektrosztatikus tér esetében?
29. Hogyan számítható a dipólus potenciálja és térerősség vektora?
30. Milyen az alakja a potenciál kifejezésének a felületi és térbeli töltésseloszlás esetében?
31. Mi a fluxus?
32. Hogyan szól Gauss törvénye?
33. Milyen az egyenletes felületi töltéssűrűségű (Q töltésű) gömb villamos tere és potenciálja (grafikus ábrázolással is!)?
34. Milyen az egyenletes térbeli töltéssűrűséggel töltött (Q töltésű) gömb elektrosztatikus tere és potenciálja (grafikus ábrázolással is!)?
35. Hogyan változik a henger alakú (a keresztmetszete a sugarú kör), egyenletes felületi töltéssűrűségű (+σ) vezető elektrosztatikus tere és potenciálja a tengelyétől való távolság függvényében?
36. Milyen módon változik a végtelen nagy, vékony síkfelületen elhelyezkedő pozitív töltésektől (+σ felületi töltéssűrűségtől) eredő villamos térerősség?
37. Milyen a térerősség változása az ellenkező előjelű, de azonos töltésmennyiséggel (σ felületi töltéssűrűséggel) ellátott két nagy vékony síkfelület környezetében elhelyezkedő pontokban?

38. Mely három megállapítás érvényes az elektrosztatikus térre a vezetők jelenlétében?
39. Mi a kapcsolat a vezető felszínén lévő felületi töltéssűrűség és a vezetőfelszín közelében mérhető térerősség között?
40. Hogyan oszlik el a villamos töltés a különböző alakú magányos vezető testeken?
41. Hol alkalmazzák és hogyan az előző kérdésben taglalt különböző alakú vezetőtesteket (az egyenetlen töltéseloszlást)?
42. Mi az influencia (az elektrosztatikus indukció v. elektromos megosztás)?
43. Hogyan árnyékolható az elektrosztatikus tér (Faraday-féle ketrec)?
44. Milyen elven és hogyan működik az elektroszkóp?
45. Mi a kapcsolat a magányos vezető testek töltése és potenciálja között?
46. Mi a kondenzátor és mivel jellemezhető?
47. Milyen kondenzátorfajták használatosak manapság?
48. Mekkora a magányos r sugarú vezetőgömb kapacitása?
49. Hogyan számítható a síkkondenzátor kapacitása?
50. Mekkora az adott méretekkel rendelkező gömbkondenzátor kapacitása (C), mely pontokban a legnagyobb a térerősség ($E_{\max}$), és mekkora a legnagyobb megengedett feszültség ($U_{\max}$), amelyre a kondenzátor rákapcsolható, ha ismerjük a szigetelőanyag átütési térerősségét?
51. Hogyan számítható az adott méretekkel rendelkező koaxiális, hosszegységenként ellenkező előjelű, Q' abszolút értékű töltéssel ellátott hengerek (koaxiális kondenzátor) esetére a vonalmenti (hosszegységre eső) kapacitása (C'), hol a legnagyobb a villamos tér ($E_{\max}$), és mekkora a legnagyobb megengedett feszültség ($U_{\max}$), amelyre a kondenzátor rákapcsolható, ha ismerjük a szigetelőanyag átütési térerősségét?
52. Milyen kifejezésekkel számítható az adott méretekkel körülírt, két párhuzamos, hosszegységenként ellenkező előjelű, Q' abszolút értékű töltéssel ellátott henger keresztmetszetű vonal hosszegységre eső kapacitása (C'), mely pontokban a legnagyobb a villamos tér ($E_{\max}$), és mekkora a legnagyobb megengedett feszültség ($U_{\max}$), amelyre az ilyen "kondenzátor" rákapcsolható, ha ismerjük a szigetelőanyag átütési térerősségét?
53. Milyen eredő kondenzátorral helyettesíthető egy soros kapcsolású kondenzátorcsoport?
54. Hogyan számítható a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása?
55. Hogyan valósíthatók meg a nagy kapacitású és nagy precizitású kondenzátorok?
56. Milyen módon állítják elő a kis kapacitású, de nagy precizitású kondenzátorokat?
57. Mi a kapcsolat a potenciál és a térbeli töltéssűrűség-eloszlás között (Poisson egydimenziós egyenlete)?
58. Mi a szigetelőanyagok polarizációja (polározása)?
59. Hány fajta polarizáció létezik és mi jellemzi őket?
60. Melyik fajta polarizáció hatása a legkifejezőbb?
61. Hogyan tisztít az elektrosztatikus levegőtisztító?
62. Mi a polarizációvektor (a villamos polározás vektora) elsődleges értelmezése?
63. Mi a polarizációvektor másik értelmezése?
64. Milyen a homogén szigetelőanyag?
65. Mivel jellemezhető a lineáris dielektrikum?
66. Mi az elektromos szuszceptibilitás és milyen értékű lehet?
67. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az izotróp szigetelőanyag?
68. Mi jellemzi a nemhomogén (inhomogén) szigetelőt?
69. Mi mondható el a nemlineáris dielektrikumokról?
70. Melyek a kötött vagy látszólagos villamos töltések?
71. Hogyan számítható a polarizációs (látszólagos) töltések felületi töltéssűrűsége?
72. Milyen a polarizált szigetelőanyag fizikai modellje?
73. Milyen a villamos tér a homogén és lineáris dielektrikumokban?
74. Mi a relatív permittivitás (relatív dielektromos állandó)?
75. Mi az abszolút dielektromos állandó?

76. Hogyan változik meg a kondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetei között levegő helyett más, jobb minőségű (ϵ_r relatív permittivitású) szigetelőanyag helyezkedik el?
77. Mi az általános Gauss törvény?
78. Mi az elektromos indukció vektora (eltolási vektor)?
79. Mi a villamos elmozdulás a dielektrikumban?
80. Mit értenek a villamos elmozdulás alatt a vákuumban?
81. Hogyan törnek meg az erővonalak a határfelületeken?
82. Mi az eltolási vektor fluxuscsatornája és milyen ismeretet hordoz?
83. Hogyan fogalmazható meg a szigetelők kritikus (átütési) térerőssége?
84. Mi történik a gázhalmazállapotú szigetelőanyagok esetében, ha a térerősség értéke meghaladja a szigetelőanyag átütési térerősségét?
85. Mi a visszamaradt polarizáció?
86. Mi jellemzi a ferroelektromos szigetelőanyagokat?
87. Milyen a ferroelektromos dielektrikum hiszterézisgörbéje?
88. Mik az elektrettek?
89. Mivel egyenlő a feltöltött kondenzátor energiája?
90. Hol helyezkedik el az energia a kondenzátorban?
91. Mivel arányos az energia térfogatsűrűsége az elektrosztatikus térben?
92. Hogyan számíthatók az elektrosztatikus erők az energia segítségével, ha a töltésmennyiség a fegyverzeteken állandó marad?
93. Mivel egyenlő az erő, ha a testek potenciálja állandó?
94. Milyen veszteségek jelentkeznek a változó villamos térben lévő szigetelőanyagban?
95. Milyen lehet a villamos töltések mozgása a homogén villamos térben?
96. Hogyan számítható a villamos töltés sebessége az inhomogén villamos térben?

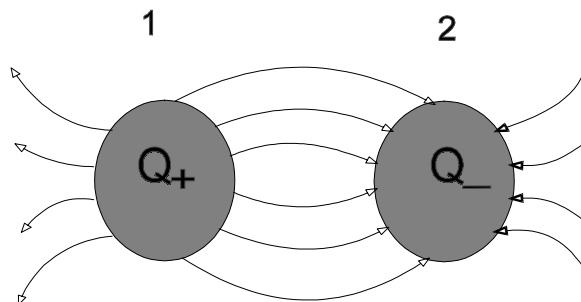
3. EGYENÁRAMOK - ELEKTROKINEMATIKA

Az elektrosztatika a mozdulatlan, illetve a makroszkopikusan rögzített villamos töltések által létrehozott villamos tér elemzésével foglalkozik. Az elektrokinematika tárgya a töltött részecskék villamos tér hatására történő mozgásának tanulmányozása. A töltések rendezett mozgása a folyadékok áramlásához hasonlítható ezért a mozgó elektromos (villamos) töltéseket elektromos áramnak nevezzük. Ha az elektromos áram nem függ az időtől, vagyis a villamos töltések sebessége állandó, akkor azt időben állandó elektromos áramnak vagy egyenáramnak nevezzük.

A villamos töltések makroszkopikus mozgása lehet időben változó, és akkor ezt váltakozó áramnak illetve váltóáramnak hívjuk. A váltóáramnak nagyobb a technikai jelentősége, mint az egyenáramnak, de az egyenáramok elemzése sokkal egyszerűbb és az elemzés eredményei részben felhasználhatók a váltóáramok tanulmányozásakor is.

3.1. Elektromos áram szilárd és folyékony vezetőkben

Helyezzünk a szilárd vagy folyékony dielektrikum (szigetelőanyag) belsejébe két villamos töltéssel ellátott vezetőtestet! A vezető felületén elhelyezkedő töltések villamos teret létesítenek a dielektrikumban. A dielektrikum polarizálódik, de mivel nincs szabad töltéshordozó, nem indulhat meg a töltések áramlása. Most tételezzük fel, hogy egy $\Delta Q > 0$ töltés eltávozott az első test felszínéről (ez a töltés most a dielektrikum molekulái közötti vákuumban helyezkedik el).



3.1. ábra.

A szabad töltés mozgását a villamos térerősség vektora határozza meg, de ehhez a térhez még hozzáadódnak a közvetlen közelben levő dielektrikum atomjainak és molekuláinak a mikroszkopikus villamos terei is. Ezért a töltések mozgása (pályája) igen összetett (bonyolult). Ez esetben megelégedhetünk egy leegyszerűsített elemzéssel is. Tegyük fel, hogy az M pontban a szabad töltésre $\Delta F = \Delta QE$ erő hat. Az erő hatására a töltés felgyorsul (az E vektor irányába), majd rövid idő után a töltés összeütközik egy semleges atommal (mivel a molekulák igen közel vannak egymáshoz) és megáll. A folyamat ezután ismétlődik. Gyorsulás...ütközés...megállás.

Makroszkopikusan szemlélve a folyamatot a töltés egy E erővonal mentén halad mindaddig, amíg nem jut el a másik testen levő N pontba, ahol végül is semlegesítődik.

Most tételezzük fel, hogy a két vezetőtest közötti térrészt nagy fajlagos ellenállású anyag (rossz vezető) tölti ki (például konyhasó híg oldata). Az oldatban nagyszámú mozgékony pozitív és negatív ion van, amelyekre hat a villamos erőter. A pozitív ionok a villamos tér vektorának irányába, míg a negatív ionok a villamos tér vektorával ellentétes irányba mozdulnak el.

Fontos megjegyezni, hogy az ionoknak ez a mozgása nem idéz elő makroszkopikus töltésfelgyülemleést (töltésfelhalmozódást) az oldat egyetlen pontjában sem. Ha ugyanis egy töltés elmozdul, a villamos tér hatására rögtön a helyébe érkezik a szomszédos töltés, amely szintén a villamos tér hatására végzi a mozgását.

A töltések ilyen mozgása lassan a két vezető test semlegesítéséhez vezet. A villamos tér fokozatosan gyengül, a töltések áramlása csökken és végül teljesen megszűnik. Az előbbi meghatározás szerint ez a folyamat nem nevezhető időben állandó áramnak.

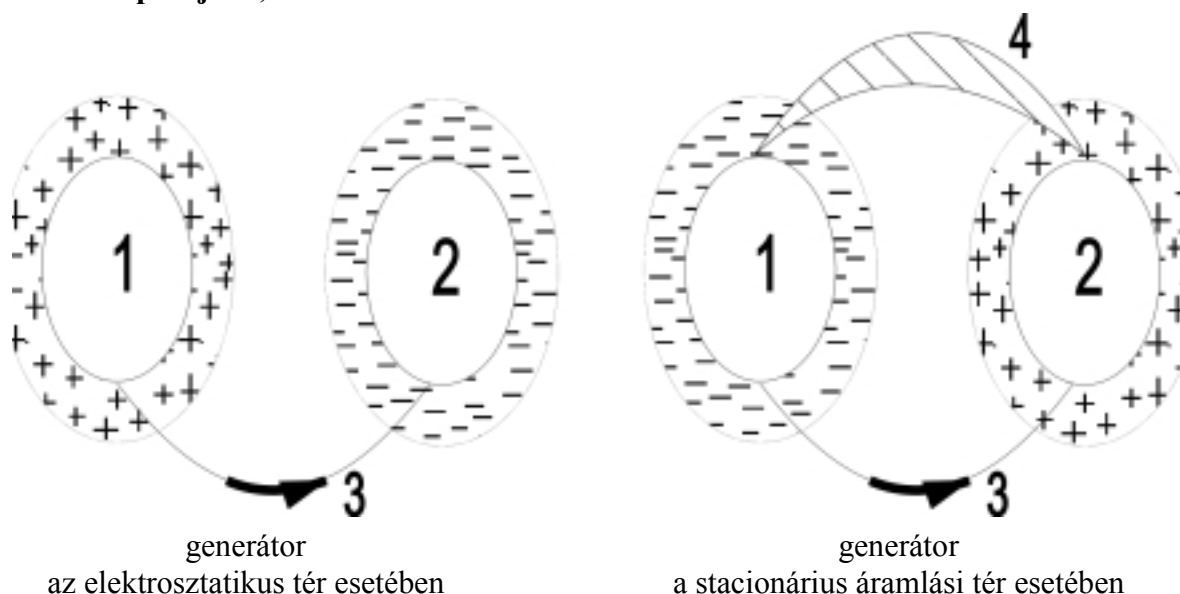
Hogyan lehetséges tehát időben állandó áramot megvalósítani az oldatban?

Ahhoz, hogy létrejöhessen az egyenáram, a két testen a villamos töltések számát (a töltésmennyiséget) állandó szinten kell tartani. Ez a cél több módon is elérhető, de valamennyi módszernek egy és ugyanaz a lényege. Valamilyen módon a töltéseket az egyik testről át kell vinni a másik testre (illetve vissza kell vinni a másik testre). Ha ezt a folyamatot állandósítjuk beáll egy egyensúly: a testen, az egységnyi idő alatt semlegesítődött töltéseket pontosan ugyanolyan számú és előjelű töltéssel pótoljuk ugyanazon időegység alatt, így a töltésmennyiség az adott testen állandó marad.

A fent leírt folyamat alkalmazható az időben állandó áramok fenntartására mind a szilárd, mind a folyékony közegekben, ahol a töltések “szabad útja” (a két ütközés között megtett útszakasz) mikroszkopikus méretű.

A fent leírt egyszerűsített modell alapján három fontos következtetést vonhatunk le:

- A villamos tér hatására a szabad töltések a vezetőben a két ütközés között felgyorsulnak.
 - A munka, amelyet a villamos tér végez a szabad töltések felgyorsításakor, a töltések kinetikai energiájává alakul át.
 - Ütközés alkalmával a villamos töltések kinetikai energiájukat átadják a semleges atomoknak. Ennek következtében az atomok termikus mozgása felgyorsul. (A vezető felmelegszik.)
- Bármely vezetőben, amelyben villamos áram folyik, a villamos energia egy része hőenergiává alakul át (Joule féle hőveszteség jelensége.)**
 - Az időben állandó áramok fenntartásához elengedhetetlenül szükséges, hogy a töltésmennyiséget a testen valamilyen módon állandó szinten tartsuk. A pozitív töltésnek a negatív töltésű testről történő eltávolításához és a pozitív töltésű testre való átviteléhez szükséges egy külső (nem elektromos) erő, amely a villamos erő ellen fejt ki hatását.
 - Ahhoz, hogy egy adott vezetőben az egyenáramot fenntarthassunk, feltétlenül szükséges egy “külső”, nem villamos erő jelenléte (közreműködése), amely erő a villamos töltéseket a villamos tér hatása ellen mozgatja.**
 - Az elektromos energia egy része a vezető minden pontjában, ahol áram folyik, hővé alakul át. Tehát a generátor elsődleges energiája nem csak egyszeres átalakuláson megy át (a villamos tér energiájává), hanem az energia egyúttal el is szállítódik a vezető minden pontjába, és ott másodszori átalakuláskor hővé válik.**



3.2. ábra.

A 3.2. ábrán nyíl jelöli a generátort, illetve a külső erőket, amelyek arra törekszenek, hogy a pozitív töltéseket “átvigyék” a generátoron keresztül a nyíl irányában, a negatív töltéseket pedig a nyíllal ellenkező irányban. A generátor vezetékekkel (3) csatlakozik a villamosan töltött vezető testekhez (1 és 2).

A töltések áramlása a generátoron keresztül addig tart, amíg a villamos erőhatás (amely az 1, 2 és 3 testekre felgyülemelő töltésektől ered), ki nem egyenlítődik a külső (nem elektromos erők által kifejtett) erőhatással. Ha most a két vezető testet összekötjük egy vezetékkal (4), a villamos tér, amely az 1 és 2 testen lévő töltésektől ered megindítja a szabad töltések mozgását a 4 vezetéken keresztül.

Ennek a folyamatnak kettős következménye lesz. Az egyik az, hogy a villamos tér munkát végez a szabad töltések felgyorsításakor (ennek az energiának egy része mint mondtuk átalakul hőenergiává). Így tehát a villamos tér energiája csökken, mert a töltések egy része semlegesítődött, és ezáltal a villamos tér értéke is csökken. Ezért (és ez a második következmény) a külső erők újra képesek folytatni a töltések mozgását a villamos térrel ellentétes irányban és így pótolják az 1 és 2 jelölésű testről eltávozott töltéseket. Így beáll egy egyensúly, amelyben a generátor folyamatosan pótolja az 1 és 2 testről a 4 vezetőkön át eltávozó töltésmennyiséget. Ennek az az eredménye, hogy a 4 vezetőkön keresztül időben állandó (stacionális) áram vagyis egyenáram folyik.

Egyenáramok esetén a töltések eloszlása a vezetők felületén makroszkopikusan szemlélve változatban marad. Ez szerint:

Az egyenáramokat létrehozó villamos tér ugyanolyan tulajdonságokkal bír mint az az elektrosztatikus tér amely ugyanolyan eloszlású sztatikus (mozdulatlan) töltésektől ered.

Az elektrosztatikában meghatározott fogalmak közül a villamos térerősség, a potenciál és a feszültség érvényesek itt is, a stacionális áramok villamos térében vagyis az egyenáramoknál. Egyetlen fontos különbség az elektrosztatikus tér és az egyenáramoknál jelentkező villamos tér között, hogy az utóbbi a vezetők belsejében is létezik (fennáll). Könnyen belátható, hogy tulajdonképpen ez a villamos tér okozza a szabad töltések mozgását a vezetőkben, és ennek további következménye az, hogy az egyenáramok esetében a vezetők felülete nem ekvipotenciális felület.

További fontos észrevétel, hogy a villamos tér egyidőben közvetítő és “tároló” szerepet is játszik az energia átvitelében a generátor és a fogyasztó között, illetve a generátor és az a pont között, ahol a villamos tér energiája átalakul, és valamilyen más energiaformát ölt. Az energia folyamatosan alakul át a fogyasztón miközben a generátor biztosítja a villamos energia utánpótlását. A sebesség, amellyel az energia a fogyasztókon átalakul, igen nagy értékeket vehet fel (10^6 J/s). Másfelől a villamos tér energiája a gyakorlatban aránylag kis értékeket képvisel (10^1 J). Ez azt jelenti, hogy az egyenáramoknál jelentkező villamos tér igen kisméretű energiatarolónak mondható, amely azonnal újra töltődik mihelyt egy kicsit is “kiürül”.

Maga a villamos tér, amely az energiaszállító közeg szerepét játssza nem igényel külön időt a feltöltésre, mert az energiabefogadó képessége igen kicsiny. Ezért, a villamos tér segítségével lehetséges az energia átvitele nagy távolságra és, ami gyakorlatilag sokkal fontosabb, hogy az energiaátviteli sebesség (teljesítmény) változtatása rendkívül széles skálán szinte késleltetés nélkül bonyolítható.

3.1.1. AZ ÁRAM SŰRŰSÉGE ÉS AZ ÁRAM ERŐSSÉGE

A villamos áram, illetve a villamos töltések rendezett mozgása két fizikai egységgel jellemezhető:

Az áramsűrűség vektormennyiség, amely a villamos töltések rendezett mozgását írja le a tér egy adott pontjában.

Az áram erőssége skaláris mennyiség, amely egy adott makroszkopikus felületen áthaladó szabad villamos töltések mozgását jellemzi.

A tér egy meghatározott részét, amelyben villamos áram folyik, áramlási térnek nevezzük.

Példaként jelöljük meg egy pontot a stacionáris áramlási térben. Tételezzük fel továbbá, hogy a villamos töltéshordozók mind azonosak (pl. a fém vezetőben a szabad elektronok mind egyenlő töltéssel rendelkeznek). Jelöljük továbbá a szabad töltéshordozók töltésmennyiségét Q -val ($Q>0$ V $Q<0$), N -nel pedig a töltéshordozók koncentrációját.

$$N = \frac{\text{a szabad töltéshordozók száma az elemi } \Delta V \text{ térfogatelemben}}{\Delta V}$$

Jelöljük $\vec{v}$ -vel a szabad töltéshordozók tér hatására létrejött mozgásának átlagsebességét. Az áramsűrűség vektorát e három mennyiség (Q N $\vec{v}$) szorzata határozza meg.

$$\vec{J} = Q \cdot N \cdot \vec{v}$$

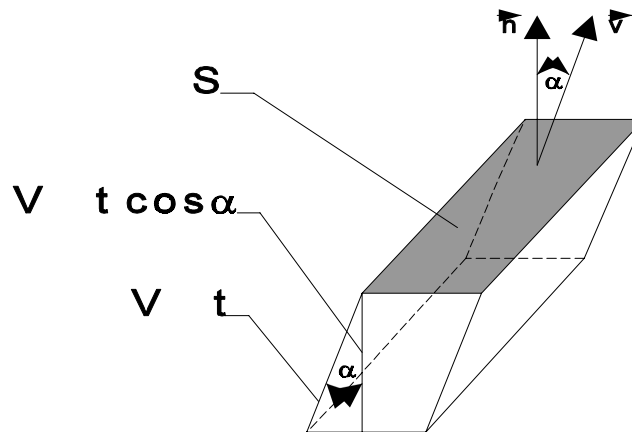
A definíció szerint a pozitív töltések egy adott irányba történő áramlása, illetve ugyanolyan töltésmennyiségű negatív töltések ellentétes irányba történő áramlása eredményeként ugyanazt az áramsűrűséget kapjuk.

$$N(-Q)(-\vec{v}) = N Q \vec{v}$$

Egyes vezetőkben létezhetnek különböző töltésmennyiséggel rendelkező szabad töltéshordozók (pl. egy oldat többféle + és - ionnal). Ez esetben az áramsűrűség vektorát egy adott pontban a különböző N_k Q_k $\vec{v}_k$ szorzatok vektoriális összegeként kaphatjuk meg:

$$\vec{J} = \sum_{k=1}^n N_k \cdot Q_k \cdot \vec{v}_k$$

Figyeljünk meg az áramlási térben egy tetszés szerinti kicsiny ΔS sík felületet, az N Q és $\vec{v}$ mennyiségeknek most is ugyanaz az értelmezésük, mint az áramsűrűség vektorának a meghatározásakor. Tételezzük fel továbbá, hogy a felületelemre merőleges vektor és a $\vec{v}$ vektor egy α szöget zárnak be. Most határozzuk meg azt a töltésmennyiséget, amely az elemi ΔS felületen Δt idő alatt áthalad.



3.3. ábra.

A töltéshordozók a Δt idő alatt $\vec{v} \Delta t$ utat tesznek meg, ami azt jelenti, hogy az összes töltéshordozó, amely a kis ferde hasábon belül helyezkedik el, a t és a $t+\Delta t$ időközben áthalad a ΔS felületen. A ferde hasáb térfogata nem más mint $\Delta S \cdot \vec{v} \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha$ és így:

$$\Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} = N \cdot Q \cdot \vec{v} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} = J \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S} \cdot \Delta t$$

(ahol a $\Delta \vec{S} = \Delta S \cdot \vec{n}$, a felületelemet, mint vektort szemléljük)

Az áram erősségét a ΔQ szabad töltéshordozóknak a ΔS felületelemen Δt idő alatt áthaladt mennyisége és a Δt időköz hányadosaként határozhatjuk meg. Ez tehát a ΔS felületelemen áthaladó szabad töltéshordozóknak a töltésmennyisége egységnyi idő alatt.

$$\Delta I_{\Delta S\text{-en át}} = \Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} / \Delta t$$

$$\Delta I_{\Delta S\text{-en át}} = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S}$$

Vegyünk most egy S felületet, (amely nem szükségszerűen sík felület). Az ezen a felületen áthaladó áram erősségét úgy határozhatjuk meg, hogy az S felületet kicsiny ΔS felületelemekre osztjuk fel, és minden egyes felületelemen keresztül meghatározzuk az áram erősségét.

$$\Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} = \sum_S \Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} = \sum_S \vec{J} \cdot \Delta \vec{S} \cdot \Delta t$$

$$\Delta I_{\Delta S\text{-en át}} = \Delta Q_{\Delta S\text{-en át } \Delta t \text{ alatt}} / \Delta t$$

$$\Delta I_{\Delta S\text{-en át}} = \sum_S \vec{J} \cdot \Delta \vec{S}$$

Ha az áramsűrűség az S felületen pontról pontra változó, akkor a fenti képlet által kapott eredmény akkor lesz egyre pontosabb, ha a ΔS elemi felületek nagyságát minden határon túl csökkentjük. Végül is ΔS helyett dS írhatunk és a Σ jel helyett az integrálás jelét $\int$ írjuk.

$$I_{S\text{-en át}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Mértékegységek:

– az áramerősség mértékegysége a

coulomb
másodperc

amit ampernek nevezünk, a jele pedig: A.

– az áramsűrűség (vektorának) egysége az

amper
 m^2

és nincs külön egysége valamint jele, de a gyakorlatból tudjuk róla, hogy nagyon kis egységnek számít. Ebből kifolyólag az SI mértékrendszer használatának ajánlása mellett is gyakran előfordul, hogy az áramsűrűséget A/mm^2 -es egységben fejezik ki. Ez természetesen helytelen és nem ajánlott.

Az áramerősség kifejezés helyett gyakran csak az áram megnevezést használjuk, ami természetesen helytelen, mivel az áram fogalma sokkal általánosabb: a szabad töltéshordozók rendezett mozgását jelenti.

Az áram erősségét árammérő műszerrel (amperméterrel) mérjük. A mérést úgy végezzük, hogy megszakítjuk a vezetőt, amelyben az áram erősségét mérni akarjuk, és a mérőműszert bekötjük a megszakított helyre. A gyakorlatban sokféle árammérő műszer létezik, egyesek érzékenyek az áram irányára, mások nem.

Íme néhány méréssel megállapított adat az áramerősség tipikus értékére:

galvanométerrel mérhető legkisebb érték	kb. 1 pA
idegimpulzus	kb. 0,01 nA
halálos érték, ha az emberi szervezeten keresztül folyik	kb. 0,02 A
zseblámpa	0,2 A
izzólámpa	0,2-0,6 A
vasaló	2 A
villanytűzhely	10-20 A
mikrohullámú sütő	10 A
villamos	50 A
elektromos hegesztőkészülék	50-600 A
elektromos angolna	100 A
villanymozdony	2 kA
olvasztókemence	15 kA
Villámcsapáskor (amely kb. 50μs tart)	20-100 kA

3.1. Példa: Ha a rézben atomonként átlagban egy szabad elektronnal számolunk, akkor a szabad elektronok koncentrációja $8,4 \cdot 10^{22} \text{ [e-/cm}^3\text{]}$. Számítsuk ki egy elektron átlagos sebességét, ha az áramsűrűség értéke $J=10 \text{ [A/mm}^2\text{]}$ (ez az érték a rézben aránytalanul nagy; a megszokott értékek a réz vezetőkben nem haladják meg az $5 \text{ [A/mm}^2\text{]}$ értéket).

Megoldás:

$$\vec{v} = \frac{\vec{J}}{N \cdot e} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{8,4 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,744 \cdot 10^{-3} \text{ [m/s]} = 0,744 \text{ [mm/s]}$$

Tehát az elektronnak 22,5 percre van szüksége ahhoz, hogy a villamos tér hatására 1 m utat tegyen. Ezzel szemben a fémekben a szabad elektronok termikus mozgásának sebessége szobahőmérsékleten 100 km/s nagyságrendű.

3.2. Példa: Tegyük fel, hogy egy egyenes és kör keresztmetszetű ($d=2\text{mm}$) réz vezetőben 5A erősségű egyenáram folyik. Számítsuk ki az áramsűrűség vektorának intenzitását a vezetőben, és a vezető keresztmetszetén egy másodperc alatt áthaladó elektronok számát.

Megoldás:

A villamos tér homogén az egyenes és henger alakú vezetékben ezért az áramsűrűség vektortere is homogén a vezeték belsejében.

$$J = \frac{I}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} = 1,592 \cdot 10^6 \text{ [A/m}^2\text{]} = 1,592 \text{ [A/mm}^2\text{]}$$

A villamos töltésmennyiség, amely egy másodperc alatt a vezető keresztmetszetén áthalad:

$$(Q)_{1s} = I \cdot 1 \text{ [s]} = 5 \text{ [C]}$$

Legyen n a vezető keresztmetszetén egy másodperc alatt áthaladó elektronok száma:

$$n = (Q)_{1 \text{ sek}} / e = 5 / 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,13 \cdot 10^{19}$$

3.2. Kirchhoff első törvénye

A vezetőben lévő stacionáris áramlási térben figyeljünk meg egy zárt S felületet. Ez az S felület ki is metszheti a vezető egy részét. Az áramerősség definíciója minden esetben érvényes lesz. A zárt felületre húzott merőleges pozitív iránya a megegyezés szerint a felületből kifelé mutat. Az S felületen áthaladó áramot pozitívnak tekintjük, ha a “+” töltések a felületből kifelé haladnak illetve ha a “-” töltések a felület által körülzárt térbe befelé áramlanak.

A töltések makroszkopikus mozgása és eloszlása esetünkben (az időben állandó villamos áram esetében) időfüggetlen. Ebből az következik, hogy amennyi pozitív vagy negatív töltés bejut a zárt S felület által körülzárt térbe, pontosan ugyanannyi töltésnek ki is kell jutnia az S felület által körülzárt térből. Ellenkező esetben a pozitív vagy negatív töltések felhalmozódása következne be az S felület által körülzárt térben. Ezáltal megváltozna a szabad töltések eloszlása illetve maga a villamos tér is, amely a töltések áramlását előidézte. Ennek következményeként maga a villamos áram is változna és nem beszélhetnénk többé egyenáramról. Tehát:

Az időben állandó áram vagyis az egyenáram esetében az áram intenzitása minden zárt felületen keresztül nullával egyenlő. Kirchhoff első törvényének matematikai alakja a legáltalánosabb esetben:

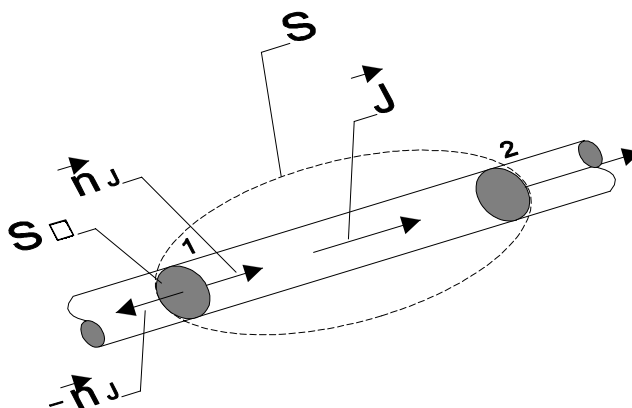
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Szemléljünk most egy fém vezetőt, amelyben az áramsűrűség vektora J , a keresztmetszet pedig S .

Az S keresztmetszeten keresztül folyó áramerősség számításakor, meg kell határozni a felületre merőleges vektor irányítását. Az S felületre felvehetjük az $\vec{n}$, illetve $-\vec{n}$ vektorokat a felület pozitív “merőlegeseként” (így lesznek pozitív és negatív áramok).

Az áramerősség I skaláris, algebrai mennyiség (lehet pozitív vagy negatív előjelű). Az áramerősség algebrai előjele függ az áramsűrűség vektorának vezetőbeni irányától és az S felületre tetszőlegesen felvett merőleges irányától, az úgynevezett vonatkoztatási iránytól vagy referenciairánytól.

Az áram erőssége egy adott keresztmetszetre (vagy egy adott vezetőben) csak akkor értelmezett, ha ismert az áram tetszőlegesen felvett vonatkoztatási- vagy referenciairánya. Az áram referenciairányát általában a vezető mellett berajzolt nyíllal tüntetjük fel.

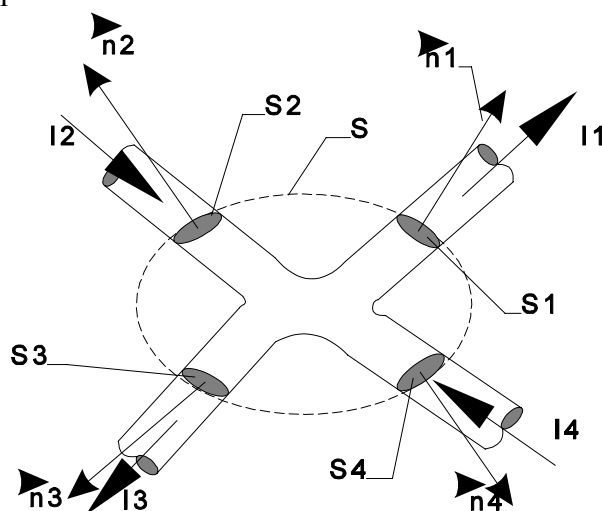


3.4. ábra. I az 1-es metszeten át S -be $= I$ a 2-es metszeten át az S -ből

Sokszor beszélünk az áram irányáról egy adott vezetőben, habár az áram erőssége skaláris mennyiség és mint ilyen, nincs iránya. Az áram iránya fogalom definíció szerint az áramsűrűség ($\vec{J}$) vektorának irányát jelenti, illetve a pozitív töltéshordozók mozgásirányát.

Ebben az értelemben a fémekben az áram iránya és a töltések valódi mozgásiránya ellentétes (mivel a fémekben elektronok a töltéshordozók).

Kirchhoff első vagy csomóponti törvényének a leggyakrabban használt alakja a több vezetőt összekötő csomópontokra vonatkozik:



3.5. ábra.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S3} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S4} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \sum_{k=1}^4 I_k = 0$$

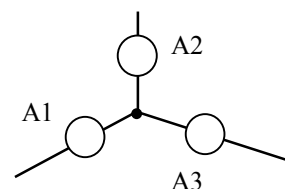
Minden egyes kifejezés (integrál) az áramerősség meghatározására szolgál a hozzárendelt vezetők keresztül, mégpedig a zárt felületből kifelé mutató merőlegeshez mint referenciairányhoz viszonyítva. Ha ez a referencia-, illetve vonatkoztatási irány helyett most valamelyik vezetők ellentétes vonatkoztatási irányt veszünk fel, a hozzátartozó kifejezés (integrál), illetve az áram erőssége csak előjelet vált. Az 5. ábrán feltüntetett áramirányok mellett az előző egyenlet a következő alakot ölti:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

$$\sum_{k=1}^4 I_k = 0$$

Kirchhoff első vagy csomóponti törvényét és a vonatkoztatási irányokat az 5-ös ábra szemlélteti. A referenciairányok a csomópontból “kifelé” irányulnak. Ez azt jelenti, hogy a csomópontba folyó áramokat negatív, a csomópontból elfolyó v. kifolyó áramokat pedig pozitív algebrai előjellel vesszük számba a Kirchhoff első törvényét rögzítő egyenletben (kifejezésben).

3.3. Példa: A képen látható amperméterek csak az áramerősség abszolút értékét tudják mérni és kimutatni. Ha az A_1 és A_2 amperméterek $|I_1|=5[A]$ és $|I_2|=8[A]$ értékeket mutatnak, milyen érték(ek)et mutathat az A_3 -as amperméter?



Megoldás: Mivel ilyen feltételek mellett az A_3 -as amperméteren keresztül $+13[A]$, $+3[A]$, $-3[A]$ vagy $-13[A]$ áram folyhat, de ez az amperméter is csak az áramerősség abszolút értékét mutatja, így $|I_3|=3[A]$, vagy $|I_3|=13[A]$.

3.3. Az elektromos áram áramlási tere

Mint már tudjuk, a tér azon részét, amelyben villamos áram folyik, áramlási térnek, vagyis a villamos áram áramlási terének nevezzük. Nézzük most meg, hogy mi jellemző erre az áramlási térre általánosan, és hogyan írható le akkor, ha az áramlási tér vezetőben, elektrolitban vagy szigetelőben fordul elő.

3.3.1. A FAJLAGOS ELLENÁLLÁS ÉS FAJLAGOS VEZETŐKÉPESSÉG

A villamos áram fenntartásához szükséges, hogy a vezeték minden pontjában létezzen villamos tér. A vezető minden pontjában a villamos tér és az áramsűrűség vektora között egy egyszerű összefüggés áll fenn. Az $\vec{E}$ és $\vec{J}$ vektornak megegyező az irányuk és az irányításuk is. Egyszerű méréssel meggyőződhetünk arról, hogy a legtöbb vezető esetében az áramsűrűség vektora $\vec{J}$ arányos a villamos tér $\vec{E}$ vektorával a vezető minden pontjában.

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ ahol σ a fajlagos vezetőképesség jele.

$$\sigma = \frac{\vec{J}}{\vec{E}} \left[\frac{\frac{A}{m^2}}{\frac{V}{m}} \right] \rightarrow \left[\frac{A}{Vm} \right] \rightarrow \left[\frac{S}{m} \right]$$

A fajlagos vezetőképesség egysége simens méterenként, vagyis simens/méter.

A gyakorlatban gyakran használjuk a fordított összefüggést is:

$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$ ahol ρ a fajlagos ellenállás jele.

$$\rho = \frac{\vec{E}}{\vec{J}} \left[\frac{\frac{V}{m}}{\frac{A}{m^2}} \right] \rightarrow \left[\frac{Vm}{A} \right] \rightarrow [\Omega \cdot m]$$

A fajlagos ellenállás egysége ohm-méter, vagyis ohm·méter.

3.1.2. A VEZETŐKBEN HŐVÉ ALAKULÓ VILLAMOS ENERGIA TELJESÍTMÉNYSŰRŰSÉGE

A vezetőben, amelyen keresztül villamos áram folyik, a villamos energia a vezető minden pontjában folytonosan hővé alakul át. Így meghatározhatjuk azt a kifejezést, amelynek segítségével az energiaátalakulás teljesítményének sűrűségét kiszámíthatjuk. Nézzünk most egy vezetőt, amelyben a szabad töltéshordozók koncentrációja N , a töltéshordozók villamos töltése Q , és az $\vec{E}$ villamos tér hatására létrejött átlagsebességük $\vec{v}$. Az $\vec{E}$ és $\vec{v}$ vektorok egy irányúak de az irányításuk lehet ellentétes is, attól függően, hogy a Q töltés értéke $Q > 0$ vagy pedig $Q < 0$.

Vegyünk egy tetszőleges kicsiny ΔV térfogatelemet és számítsuk ki azt a munkát, amelyet a villamos erők végeznek a ΔV térfogatelemben levő töltések Δt idő alatti elmozdításával.

$$\Delta A_{\text{el.erők}} = F_{\text{el.erők}} \cdot \Delta s_{\text{a } \Delta t \text{ idő alatt}} \cdot \text{a töltések száma } \Delta V\text{-ben}$$

$$\Delta A_{\text{el.erők}} = Q E \bar{v} \Delta t N \Delta V$$

$$\Delta A_{\text{el.erők}} = J E \Delta V \Delta t$$

Ez a munka (amelyet természetesen joule-ban fejezünk ki) a szabad töltéseknek a folyamatos ütközések közötti felgyorsítására használandó el. Az energiamegmaradás törvényének értelmében ez a munka egyenlő azzal az energiameennyiséggel, amely a ΔV térfogatban a Δt idő alatt hővé alakul.

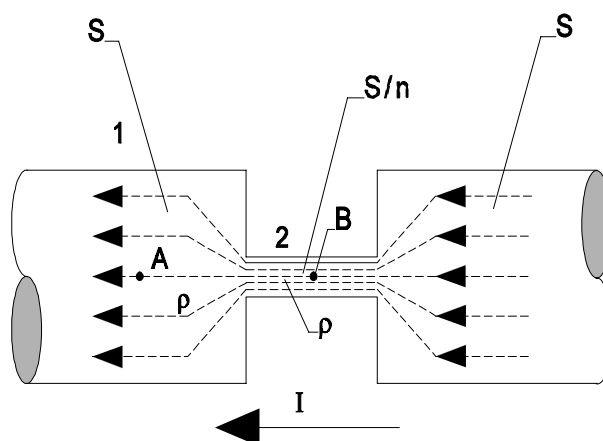
A villamos erők teljesítménye ΔP a ΔV térfogategységben: $\Delta P = \frac{\Delta A_{\text{el.erők}}}{\Delta t}$

Figyelembe véve, hogy $E = \rho J$ és ΔP arányos ΔV -vel megkapjuk a térfogatelemben hővé alakuló teljesítmény sűrűségét, illetve a Joule-féle hőveszteség teljesítménysűrűségét:

$$\frac{\Delta P}{\Delta V} = J \cdot E = \rho \cdot J^2 \quad (\text{Joule törvénye az áramlási térre})$$

A Joule-féle hőveszteség teljesítménysűrűsége nem más, mint a hőveszteség teljesítményének térfogatsűrűsége, ami természetesen a fenti kifejezésből is leszűrhető, és ennek watt köbméterenként, vagy watt/köbméter (W/m^3) az egysége.

Nézzük most a 3.6. ábrán lévő változó keresztmetszetű vezetőt:



3.6. ábra.

Az áram sűrűsége egy A pontban, amely pont elegendő távol van a keresztmetszetváltozás síkjától, egyenlő lesz $J_1 = I/S$. A vékonyabb keresztmetszetű rész B pontjában pedig az áramsűrűség $J_2 = I/(S/n) = n I/S$.

A Joule féle hőveszteség teljesítménysűrűsége az A és B pontokban:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_A = \rho \cdot J_1^2 ; \quad \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_B = n^2 \cdot \rho \cdot J_1^2$$

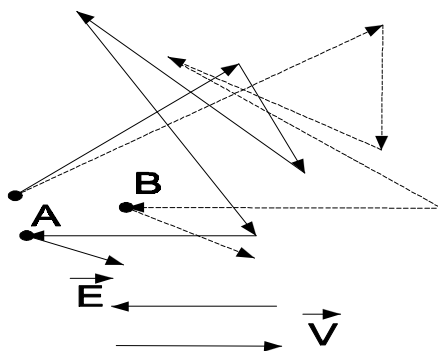
Ha az I áramerősség növekszik a felszabaduló hőmennyiség térfogatelemkénti értéke a vezető második, szűkített keresztmetszetű részében mindig n^2 -szer lesz nagyobb, mint az első nagyobb keresztmetszetű részben. Ezért a 2-es rész sokkal intenzívebben fog melegedni, mint a vezető 1-es, nagyobb keresztmetszetű része (lásd a 3.6. ábrát). Nagyobb áramerősségek esetében a vezető még el is olvadhat, sokkal előbb, mielőtt még a nagyobb keresztmetszetű rész egyáltalán komolyabban felmelegedne. Ezt a jelenséget használják fel az áramkörök megszakítására olvadó biztosítékok segítségével. Ezek mint tudjuk, védik a vezetékeket a túlzottan nagy áramerősségektől, a túlmelegedéstől.

3.1.3. A $\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$ KIFEJEZÉS ELMÉLETI LEVEZETÉSE

A villamos áram mechanizmusának eddig ismertetett modellje vezetőkben igen egyszerű (a töltéshordozók gyorsulása-ütközése-leállása-gyorsulás-ütközés-leállás-...). Valamivel jobb megközelítés (de a valóságtól még igen távoli) a következő.

A töltéshordozók kaotikus hőmozgása (a gázrészecskék Brown-féle mozgásához hasonlítható) a makroszkopikus villamos tér jelenléte nélkül is fennáll a vezetőkben (hasonlóan, mint a gázmolekulák kaotikus mozgása, minden külső erő és egyéb hatás hiányában).

Ez a hőmozgás makroszkopikus méretekben nem eredményezi a töltéshordozók rendezett mozgását.



3.7. ábra.

Szemléljük most egy fém vezetőt, amelyben a töltéshordozók a szabad elektronok. Az elektronok hőmozgásának átlagsebessége a fémekben igen nagy értékeket vehet fel (a réz esetében szobahőmérsékleten $v=1600$ km/s, ami 10^{10} -szer nagyobb, mint a villamos tér hatására végzett rendezett mozgás átlagsebessége).

$$\tau = \lambda / v_t,$$

ahol λ a két ütközés közötti átlagos úthossz,
 τ a két ütközés között eltelt átlagos időtartam,
 v_t pedig az elektronok hőmozgásának átlagsebessége.

Ha a fémekben makroszkópikus villamos tér is jelen van, akkor a szabad elektronok rendezetlen hőmozgása módosul olyan értelemben, hogy a szabad elektronok a jelenlévő makroszkopikus villamos tér irányába elmozdulnak. A töltött részecskék gyorsulásának értékét már a stacionáris villamos tér esetében meghatároztuk:

$$a = \frac{Q \cdot E}{m}$$

A töltött részecske (az elektron) a τ idő alatt egyenletesen gyorsulva mozog a következő ütközésig. A részecske sebessége az időintervallum végén $a\tau$, és mivel a kezdősebesség nulla volt, az átlagsebesség értékét egyszerűen $a\tau/2$ -nek vehetjük. A villamos tér hatására az elektronok a fémekben a következő átlagsebességgel mozognak:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \tau = \frac{e \cdot \tau}{2 \cdot m_e} \cdot \vec{E},$$

$$\vec{J} = N \cdot Q \cdot \vec{v} = \frac{e^2 \cdot N \cdot \tau}{2 \cdot m_e} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{2 \cdot m_e}{e^2 \cdot N \cdot \tau}$$

Az egyvegyértékű fémek esetében (réz, ezüst) a számítással kapott fajlagos ellenállásértékek legalább 100-szor nagyobbak a méréssel megállapított valós értékektől. Tehát a klasszikus elmélet nem képes pontosan meghatározni a fajlagos ellenállás értékét. A kvantumelmélet felhasználásával a gyakorlati mérésekkel megegyező eredmények érhetők el, de annak ismertetése már túllépi a villamosságtan alapjaira kiszabott keretet.

3.4. Példa: Számítsuk ki az elektronok két egymásután következő ütközésének az átlagidejét a rézvezetékben, ha az elektronkoncentráció $N = 8,4 \cdot 10^{22} \text{ 1/cm}^3$, az elektron töltésmennyisége $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, a réz fajlagos ellenállása 0°C -on pedig $\rho_0 = 1,588 \cdot 10^{-8} [\Omega\text{m}]$.

Megoldás: A klasszikus elmélet és az áramvezetés egyszerűsített modellje alapján a fajlagos ellenállás a következő kifejezés szerint számítható ki:

$$\rho_0 = \frac{2 \cdot m_e}{e^2 \cdot N \cdot \tau}$$

A képletből egyszerűen kifejezhető és kiszámítható az ütközések átlagidejének (τ) az értéke:

$$\tau = \frac{2 \cdot m_e}{e^2 \cdot N \cdot \rho_0} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} [\text{kg}]}{(1,602 \cdot 10^{-19} [\text{C}]) \cdot 8,4 \cdot 10^{28} [\text{1/m}^3] \cdot 1,588 \cdot 10^{-8} [\Omega\text{m}]} = 5,32 \cdot 10^{-14} [\text{s}].$$

3.1.4. A FÉMEK FAJLAGOS ELLENÁLLÁSA

A fémek a vezetők legfontosabb osztályát képezik (a réz, alumínium, ezüst, wolfrám és a különféle ötvözetek). A legtöbb vezető esetében, (így a fémeknél is) a fajlagos vezetőképesség (σ) és a fajlagos ellenállás (ρ) nem függ a villamos tér nagyságától (lineáris karakterisztikájú vezetők). Ezzel szemben a σ és a ρ is igen nagy mértékben függ a hőmérséklettől. A szobahőmérséklet környezetében azonban a fajlagos ellenállás értékének hőfokfüggése gyakorlatilag egyenesnek tekinthető:

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

ez a kisebb hőmérséklettartományokra érvényes összefüggés ahol:

ρ_t a fajlagos ellenállás $t^\circ\text{C}$ -on,

α a fajlagos ellenállás hőfoktényezője (hőkoeficiense),

ρ_0 a fajlagos ellenállás 0°C -on.

Általános érvényű és a nagyobb hőmérséklettartományokra érvényes összefüggés:

$$\rho_t = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2 + \gamma \cdot t^3)$$

Az előző kifejezés jelölései itt is érvényesek. Az α, β és γ tényezőket (hőkoeficienseket) kísérleti mérésekkel állapítják meg külön minden egyes fémre. Az α, β és γ tényezők értékeit

táblázatokba rendezik a fémek, ötvözetek és hőmérsékleti tartományok szerint. Kivonatos hőfokoefficiens-táblázat található a könyv végén a függelékben.

Ha megnézzünk néhány ilyen táblázatot, észrevehetjük, hogy a legtöbb esetben a hőfoktényezőnek pozitív az értéke. Ez azt jelenti, hogy a fémek és ötvözetek fajlagos ellenállása növekszik a hőmérséklettel. Ennek a jelenségnek van egy leegyszerűsített magyarázata: magasabb hőmérsékleten az elektronok termikus mozgása felélénkül és ezért nehezebb őket a villamos tér segítségével rendezett mozgásra bírni.

Léteznek olyan anyagok is, amelyeknél a fajlagos ellenállás hőfoktényezője negatív, illetve, amelyeknél a fajlagos ellenállás értéke csökken a hőmérséklet növekedésével.

Egyes ötvözeteknél (pl. konstantán és manganin) sokkal kisebb a fajlagos ellenállás hőfoktényezője (igaz ugyan, hogy náluk valamivel nagyobb maga a fajlagos ellenállás mint más anyagoknál), mint a többi fémeknél, és ezért ezeket az ötvözeteket igen pontos ellenállások készítésére és precíziós mérésekre használják.

3.5. Példa: Számítsuk ki a villamos térerősség nagyságát 20°C-on az alumínium- és rézvezetékben, ha körkeresztmetszetűek, $d=1[\text{mm}]$ átmérővel és $I=2[\text{A}]$ erősségű áram folyik keresztül rajtuk. Ismertek még a következő adatok: az alumínium fajlagos ellenállása 0°C-on $2,62 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}]$, a réz fajlagos ellenállása 0°C-on $1,588 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}]$, az alumínium hőmérsékleti tényezője $4,46 \cdot 10^{-3} [1/^\circ \text{C}]$, a rézé pedig $4,27 \cdot 10^{-3} [1/^\circ \text{C}]$.

Megoldás: Ismert számunkra a villamos térerősség és az áramsűrűség vektora közötti összefüggés: $E = \rho \cdot J$, valamint a $J = \frac{I}{S}$ kifejezés is. Ezek alapján felírhatjuk, hogy a villamos tér értéke 20°C-on: $E = \rho_{[20^\circ \text{C}]} \cdot \frac{I}{S}$

$$\rho_{Al[20^\circ \text{C}]} = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) = 2,62 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}] \cdot (1 + 4,46 \cdot 10^{-3} [1/^\circ \text{C}] \cdot 20 [^\circ \text{C}]) \approx 2,854 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}]$$

ugyanaz a számítás a rézre a következő eredményt adja: $\rho_{Cu[20^\circ \text{C}]} \approx 1,724 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}]$.

Így a villamos térerősség az alumíniumvezetékben:

$$E = \rho_{Al} \cdot \frac{I}{S} = 2,854 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}] \cdot \frac{2[\text{A}]}{\frac{10^{-6} [\text{m}^2]}{4} \cdot 3,14} = 2,854 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{8}{3,14 \cdot 10^{-6}} = 0,0727 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right],$$

a rézvezetékben pedig:

$$E = \rho_{Cu} \cdot \frac{I}{S} = 1,724 \cdot 10^{-8} [\Omega \text{m}] \cdot \frac{2[\text{A}]}{\frac{10^{-6} [\text{m}^2]}{4} \cdot 3,14} = 1,724 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{8}{3,14 \cdot 10^{-6}} = 0,04 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right].$$

3.6. Példa: A vízmelegítő fűtőteste $d=0,5[\text{mm}]$ átmérőjű, körkeresztmetszetű krómnikkel-huzalból készült. Határozzuk meg annak a messzingből készült vezetéknek a keresztmetszetét, amelyen keresztül a fűtőtest a villamos hálózathoz csatlakozik azzal a feltétellel, hogy a messzing vezetékben a Joule-veszteségek teljesítménysűrűsége 1%-át tegye ki a fűtőtest huzalaiban keletkező Joule-veszteségek teljesítménysűrűségének! A fűtőtest munkahőmérséklete

850⁰C], a messzingvezetéké pedig 30⁰C]. $\rho_{0k-n} = 137 \cdot 10^{-8} [\Omega m]$, $\rho_{0m} = 7,5 \cdot 10^{-8} [\Omega m]$, $\alpha_{k-n} = 0,0000002 [1/^{\circ}C]$ és $\alpha_m = 0,0016 [1/^{\circ}C]$.

Megoldás: A Joule veszteségek teljesítménysűrűségéből $\frac{\Delta P}{\Delta V} = J \cdot E = \rho \cdot J^2$ kiindulva a messzingből és a krómnikkelből készült huzalokra nézve fölírhatjuk, hogy $\rho_m \cdot J_m^2 = 0,01 \cdot \rho_{k-n} \cdot J_{k-n}^2$. Az áramerősség nyilvánvalóan megegyezik mind a két vezetékben, tehát $J_{k-n} \cdot d^2 = J_m \cdot d_m^2$, viszont a fajlagos ellenállásokat ki kell számolni a megfelelő munkahőmérsékletre: $\rho_m = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_m)$ és $\rho_{k-n} = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_{k-n})$. Ezután már csak a behelyettesítés és a keresett érték kifejezése marad hátra:

$$\frac{\rho_m \cdot J_m^2}{\rho_{k-n} \cdot J_{k-n}^2} = 0,0574 \frac{d^4}{d_m^4} 0,01 \cdot$$

ebből aztán már egyszerű kifejezni a keresett átmérőt, hiszen $d_m = 1,548 \cdot d = 0,774 [mm]$.

3.1.5. AZ ELEKTRONOK MOZGÉKONYSÁGA A FÉMEKBEN

Az áramsűrűség vektorának definíciója alapján:

$$\vec{J} = N \cdot Q \cdot \vec{v}; \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho},$$

és mivel a fémekben $Q = -e$ ebből következik, hogy:

$$\vec{v} = -\frac{1}{N \cdot e \cdot \rho} \cdot \vec{E}$$

Ezt az összefüggést általában a következőalakban írjuk:

$$|\vec{v}| = \mu \cdot |\vec{E}|$$

ahol μ arányossági tényezőt az elektronok mozgékonyságának nevezzük:

$$\mu = \frac{1}{N \cdot e \cdot \rho}.$$

A különféle szabad töltéshordozók mozgékonyságát a vezetőkben a fentihez hasonló módon határozhatjuk meg.

3.1.6. A SZUPRAVEZETŐK

Egyes fémek esetében (pl. réz) a fajlagos ellenállás csökkenése a hőmérséklet függvényében szabályos (törés nélküli). Míg más fémeknél, az igen alacsony hőmérsékleteken (az abszolút nulla fok, -273,16⁰C közelében) a fajlagos ellenállás hirtelen elenyésző nagyságra (praktikusan nullára) csökken. Az ilyen vezetőre azt mondjuk, hogy ideális vezetővé vagy szupravezetővé válik. Ez a különböző fémeknél más és más hőmérsékleten következik be, pl:

ólom (Pb)	7,26	⁰ K
tantál (Ta)	4,38	⁰ K
higany (Hg)	4,12	⁰ K

ón (Sn)	3,69	⁰ K
alumínium (Al)	1,14	⁰ K
cink (Zn)	0,79	⁰ K
kadmium (Cd)	0,54	⁰ K
hafnium (Hf)	0,35	⁰ K

A szupravezetők másik, jellemző tulajdonsága, hogy „kilökik” magukból a mágneses indukcióvonalakat (Meissner-effektus), vagyis úgy viselkednek, mint egy ideális diamágneses anyag (a mágnesességgel, a mágneses anyagokkal a könyv következő két fejezete foglalkozik).

A fémek 4,2 ⁰K fok alá történő lehűtése folyékony hélium segítségével történik, és ma már nem jelent különösebb technológiai nehézséget.

Alkalmazás: az aránylag kisméretű szupravezetőben lehetséges igen nagy áramok fenntartása veszteség nélkül, hiszen meleg nem fejlődik, tehát nincs veszteség, ami felemésztené az energiát. Ennek segítségével igen erős mágneses teret lehet létesíteni. Szupravezetőkkel megoldható a veszteségmentes energiaszállítás.

A szupravezetés jelenségét Kammerlingh-Onnes (Heike Kammerlingh-Onnes 1853 – 1926 holland fizikus) fedezte fel 1911-ben. A jelenség elméleti magyarázata igen bonyolult és csak jóval később, 1957-ben sikerült megadni (Bardeen –Cooper –Schrieffer), megmozgatva a kvantummechanika teljes fogalmi és számítástechnikai apparátusát.

3.1.7. AZ ELEKTROLITOK VEZETŐKÉPESSÉGE

A sók, savak, lúgok vizes oldatait, amelyeket más szóval elektrolitoknak nevezünk, a viszonylag jó vezetők csoportjába sorolhatók. Az érdekesség ebben csupán az, hogy sem a víz (ha desztillált) sem a fent említett anyagok (savak, lúgok, sók) nem tartoznak a vezetők közé, tehát nem vezetik az elektromos áramot. Az oldatok fajlagos ellenállása, illetve fajlagos vezetőképessége függ:

1. az oldószer fajtájától,
2. az oldott anyag fajtájától és
3. az oldat koncentrációjától.

A hőmérséklet emelkedésével az elektrolitok disszociáció foka növekszik (a disszociáció foka alatt az adott pillanatban az ionokra felbomlott molekulák százalékarányát értjük), de ezzel ellentétben csökken az ionok mozgékonyága. Végül mégis csak az első hatás az erősebb és így az oldat fajlagos vezetőképessége növekszik a hőmérséklet emelkedésével:

$$\sigma_{t_2} = \sigma_{t_1} \cdot [1 + \alpha_{\sigma} \cdot (t_2 - t_1)],$$

ahol az α_{σ} a hőfoktényező vagy hőkoefficiens.

Az elektrolitikus oldat fajlagos vezetőképessége igen tág határok között független a villamos tér értékének a változásaitól, tehát akár csak a szilárd vezetők, az elektrolitok is lineáris vezetőknek tekinthetők. Ki kell azonban hangsúlyozni, hogy a villamos áram áthaladásakor, az oldatokban fellép az elektrolízis jelensége is. Ennek következményeként az elektródák és az elektrolit határfelületén, a szabad töltésekre a villamos erők mellett kémiai eredetű kötőerők is hatnak. Ebből az következik, hogy a villamos áram áthaladása az oldatokon igencsak összetett folyamat.

3.1.8. A DIELEKTRIKUMOK (SZIGETELŐK) VEZETŐKÉPESSÉGE

A természetben nem létezik dielektrikum, amely tökéletes szigetelőanyag lenne, mindegyik dielektrikumnak van egy bizonyos (igen kicsiny) fajlagos vezetőképessége, illetve igen nagy (de nem végtelen) fajlagos ellenállása. Ami a villamos áram vezetési mechanizmusát illeti kétféle dielektrikumot különböztethetünk meg:

1. a szabad elektronok elszakadnak a dielektrikum molekuláitól egy külső ok (általában igen nagy villamos tér) hatására és
2. egy bizonyos számú molekula szétesik ionokra, hasonlóképpen, mint az oldatoknál (ez a gyakoribb eset).

A dielektrikumokban a szabad töltések koncentrációja sokkal kisebb, mint a fémekben vagy az elektrolitokban, a fajlagos ellenállás sokkal nagyobb, mint a fémek és elektrolitok fajlagos ellenállása. Így a dielektrikumokban fennálló villamos áramok is sokkal kisebbek, mint a vezetőkben és általában a vezetők áramához viszonyítva elhanyagolhatók (kivételt képeznek az igen erős villamos terek, amikor is a dielektrikum árama nagyobb értékeket vehet fel és számolnunk kell vele).

A legtöbb dielektrikum vezetőképessége nem függ a villamos térerősségétől, tehát ezek a dielektrikumok, illetve szigetelők igen rosszminőségű, de lineáris vezetőknek tekinthetők.

Azoknál a dielektrikumoknál, amelyek vezetési mechanizmusa hasonlít az elektrolitok vezetési mechanizmusához, a fajlagos ellenállás a hőmérséklet növekedésével érezhetően lecsökken. Megfelelő erejű villamos tér hatására elektromos áram léphet fel, és a dielektrikum belseje ennek következtében felmelegszik. Mivel a dielektrikumok egyben rossz hővezetők is, a fejlődő hő lassan vezetődik el. Tehát a hőmérséklet tovább emelkedik, ami a fajlagos ellenállás még nagyobb csökkenését idézi elő, ami természetesen méginkább az áram növekedéséhez vezet. E folyamat végül is a dielektrikum olvadásához és kémiai széteséséhez vezet. A dielektrikum elveszti szigetelő tulajdonságát és vezetővé válik. Ezt a jelenséget a dielektrikum (szigetelő) átütésének (hőátütésének) nevezzük.

A dielektrikum fajlagos ellenállását nagymértékben befolyásolja:

1. a dielektrikum szennyezettségi foka,
2. a dielektrikum nem egyöntetű (inhomogén) felépítése,
3. a dielektrikum nedvességtartalma stb.

A legtöbb esetben a dielektrikumok fajlagos ellenállásának csak a megközelítő értékét adjuk meg. A szennyezettség jelenléte szinte kivétel nélkül jelentős mértékben csökkenti a dielektrikum (szigetelő) fajlagos ellenállását. A szigetelőknél külön figyelmet kell fordítani a felületi fajlagos ellenállásra, mivel a szigetelők felülete a környezettel érintkezve szennyeződésre igencsak hajlamos. A szennyezett vagy nedves felületek esetében a szigetelők felületi árama sokkal nagyobb értékeket vesz fel mint a szigetelők belső árama.

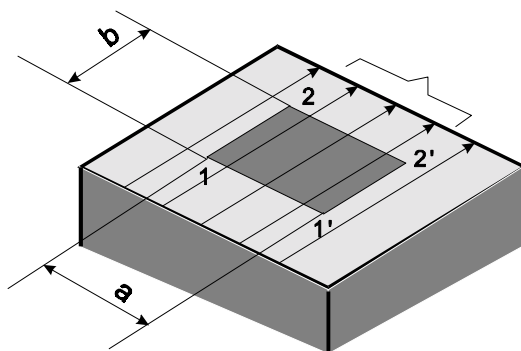
A felületi fajlagos ellenállás meghatározása a következő módon történik. Tételezzük fel, hogy az áram igen vékony rétegben folyik a dielektrikum felszínén, ezért először a felületi áramsűrűség vektorát $\vec{J}_s$ határozzuk meg. E vektor irányítása megegyezik a pozitív töltéshordozók haladási irányával.

$$J_s = \frac{\Delta I_{\Delta a}}{\Delta a \text{ szélességben}}$$

mivel a felületi áramsűrűség vektora, a $\vec{J}_s$ arányos a térerősség felületi (tangenciális) összetevőjével (komponensével), az $\vec{E}_t$ vektorral ebből az következik, hogy:

$$\vec{E}_t = \rho_s \cdot \vec{J}_s,$$

ahol $\rho_s [\Omega]$ a felületi fajlagos ellenállás.



3.8. ábra.

Az 1-1' és 2-2' szakaszok merőlegesek a felületi áramsűrűség J_s vektorára és ezért ekvipotenciális szakaszoknak tekinthetők. A feszültség a két szakasz pontjai között:

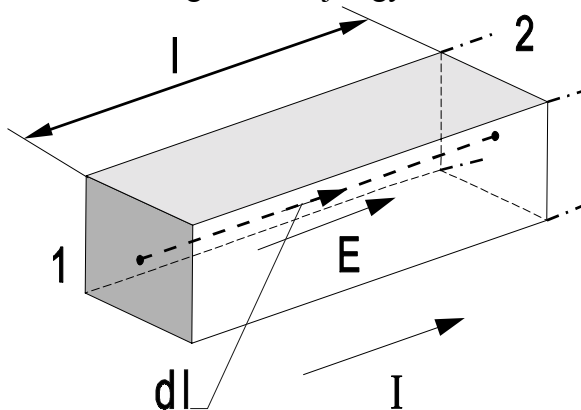
$$U_{12} = E_t \cdot \Delta b = \rho_s \cdot J_s \cdot \Delta b = \Delta I_{\Delta a \text{ szélességben}} \cdot \left(\rho_s \cdot \frac{\Delta b}{\Delta a} \right)$$

Az egyenlet útmutatást nyújt ahhoz, hogy hogyan lehet a felületi fajlagos ellenállást megmérni. Helyezzünk el két "a" hosszúságú elektródát párhuzamosan egymással, "b" távolságra egymástól ($b \ll a$) a szigetelő felületén (ily módon homogén villamos teret kapunk az elektródák között). Ezek után mérjük meg a feszültség és az áramerősség értékét a két elektróda között. Ez a mérési eljárás igencsak "körülmenyes", és a kapott eredmények is csak tájékoztató jellegűek.

3.4. Az elektromos ellenállás és Ohm törvénye

Vegyünk egy tetszőleges S keresztmetszetű igen hosszú egyenes vezetőt. Tételezzük fel továbbá, hogy a vezető homogén szerkezetű, fajlagos ellenállása ρ , és I erősségű áram folyik keresztül rajta. A villamos tér vektora E a vezető belsejében homogén és iránya párhuzamos a vezető tengelyével.

Az előzőekben elmondottak alapján következik, hogy a vezető minden merőleges keresztmetszete ekvipotenciális felületnek tekinthető. Most határozzuk meg az 1 és 2 keresztmetszetek közötti feszültségkülönbséget, ha a vezetőben I erősségű áram folyik. Azt már előzőleg megállapítottuk, hogy az időben állandó áram esetén a villamos tér ugyanolyan természetű, mint az elektrosztatikus tér esetében, amely azonos eloszlású, de nyugvó töltéshordozóktól ered. Ezért a feszültség definíciója ugyanaz marad mint az elektrosztatikában:



3.9. ábra.

Mivel

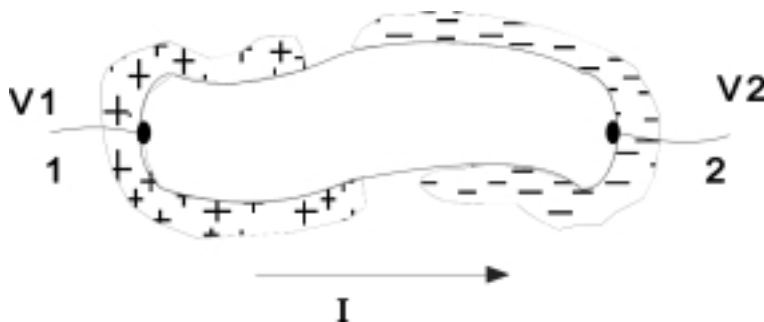
$$E = \rho \cdot J, \quad J = I/S$$

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 E \cdot d\ell = E \cdot \ell = \rho \cdot \frac{\ell}{S} \cdot I$$

Mint a kifejezésből látjuk, a két pont közötti feszültség arányos a közöttük folyó áram erősségével. A fenti kifejezés $U = R \cdot I$ formában felírt alakja Ohm törvényeként ismert. Az arányossági együtthatót Ohm törvényében elektromos ellenállásnak (vagy egyszerűen csak ellenállásnak) nevezzük. Az ℓ hosszúságú, homogén szerkezetű, ρ fajlagos ellenállású vezető ellenállása tehát $R = \rho \ell / S$.

Az elektromos ellenállás jele R , mértékegysége pedig a volt/amper, amelynek külön nevet is adtak: ohm $\left(\frac{V}{A}, \Omega\right)$. Az $R = \rho \ell / S$ kifejezésből a fajlagos ellenállás mértékegysége szűrhető le könnyen, ami $\Omega \cdot m$.

Vegyünk most egy tetszőleges alakú szilárd vezetőtestet, amelynek két jó vezetőből készült (fémvezető) kivezetése van. Tegyük fel továbbá, hogy a vezetőtest fajlagos ellenállása ρ sokkal nagyobb a fémvezető fajlagos ellenállásánál $\rho_{\text{fémvez}}$, tehát $\rho \gg \rho_{\text{fémvez}}$.



3.10. ábra.

Az ilyen elemet, amely egy adott fajlagos ellenállású testből, és két jó minőségű vezetőből készült kivezetésből áll "ellenállásnak" nevezzük. Tételezzük fel továbbá, hogy az adott "ellenállástest" lineáris anyagból készült, tehát a fajlagos ellenállása nem függ a rajta keresztül folyó áram erősségétől, az áramsűrűség vektorától illetve a villamos térerősségvektortól, vagyis felírható, hogy:

$$\rho \neq f(I) \text{ és } \rho \neq f(J), \text{ illetve } \rho \neq f(E).$$

Ez azt jelenti, hogy a vezetőtest valamennyi pontjában az áramsűrűség vektora arányos az áramerősséggel, és akkor felírhatjuk, hogy:

$$\vec{J} = I \cdot \vec{\omega} \text{ illetve } \vec{E} = I \cdot \rho \cdot \vec{\omega} \text{ ahol } \vec{\omega} \left[\frac{1}{\text{felület}} \right]$$

A $\vec{\omega}$ vektor (melynek 1/felület az egysége) iránya és irányítása pontról pontra változó a szigetelőtestben. Vegyük észre, hogy eddig csak a szigetelőtest anyagának linearitását kötöttük ki, vagyis a test anyagának összetétele nem szükségszerűen homogén (a ρ minden pontban lehet más és más). Ha most a kapott térerősség alapján számítjuk a feszültséget az 1 és 2 pontok között, a következő kifejezést kapjuk:

$$U_{12} = I \cdot \int_1^2 \rho \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\ell} = I \cdot R, \text{ ahol } R = \int_1^2 \rho \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\ell}$$

Az integrálást tetszőleges útvonal mentén végezhetjük, mivel a feszültség értéke független a vonalintegrál integrálási útvonalától (amelyen az 1-es pontból a 2-es pontba jutunk - ez az elektrosztatikus villamos tér egyik jellegzetes tulajdonsága).

Ahogy az a fenti képletből is látszik, az ellenállás értéke nem függ az áram erősségétől. Azokat az ellenállásokat, amelyek értéke független az áram erősségétől, illetve a kivezetések közötti feszültség értékétől amíg más körülmények (hőmérséklet, nedvesség stb.) meg nem változnak, lineáris ellenállásoknak nevezzük. Azokat az ellenállásokat, amelyek nem teljesítik az előző feltételt nemlineáris ellenállásoknak nevezzük.

Amennyiben az ellenállás értéke szokványos üzemmódban (áramerősségértékeken) közvetlenül független is az áramerősség értékétől, ez a függetlenség közvetve nem áll fenn. Ha ugyanis az ellenállásnak nincs megfelelő hűtése, akkor az ellenállás értéke idővel változni fog, mert a végső hőmérsékleti értéket az adott áramerősség és a hűtés viszonya határozza meg. Ha az ellenállás értékének változása csak késve követi az áramerősség változását, akkor azt mondhatjuk, hogy az ellenállás lineáris, mert az értéke csak a hőmérséklet változása miatt módosult. De ha az áramerősség változását az ellenállás változása csak jelentéktelen késéssel követi, (mint pl. a wolfram izzószálas izzólámpa esetében), akkor nemlineáris ellenállásról beszélünk.

Léteznek olyan anyagok is, amelyeknek a fajlagos ellenállásértéke a villamos tér értékétől függ. Ezekből az anyagokból készíthetők a nemlineáris jellegű ellenállások.

A tetszőleges alakú ellenállás értékének meghatározására egyetlen mód a közvetlen mérés. A feszültséget az ellenállás két végpontja között voltméterrel mérjük, a rajta átfolyó áramerősséget pedig amperméterrel úgy, hogy megszakítván az áramkört az ampermétert sorbakötjük az ellenállással és újra zárjuk az áramkört. A keresett ellenállásértéket Ohm törvényéből kapjuk meg:

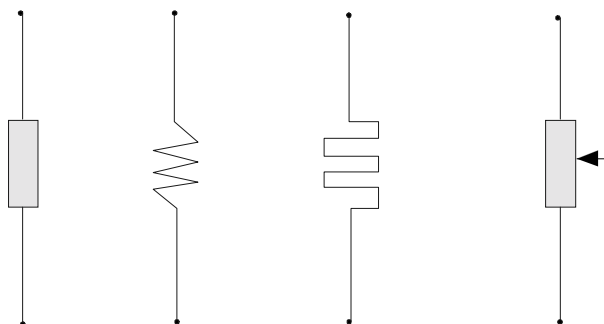
$$R = \frac{U}{I}$$

Több tetszőlegesen összekapcsolt ellenállás, amelynek két kivezetése van, minden esetben egy eredő (ekvivalens) ellenállással helyettesíthető. Az ellenállások ábrázolására leggyakrabban a 3.11. ábrán látható szimbólumok használatosak:

Az ellenállás mint áramkört elem jellemzésére az ellenállás helyett gyakran az ellenállás reciproka értékét használjuk, amit vezetésnek nevezünk. Ilyenkor a fajlagos ellenállás fogalma helyett a fajlagos vezetőképességet használjuk.

$$G = \frac{1}{R} \quad \left[\frac{1}{\Omega} \right] \left[\frac{A}{V} \right] [S], \quad \sigma \left[\frac{S}{m} \right]$$

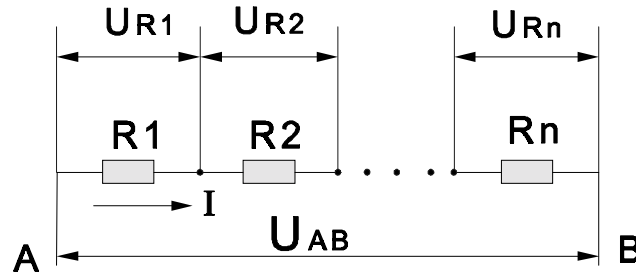
Az elektromos vezetés jele, mint a fenti kifejezésből kitűnik, G, az egysége pedig siemens (S). Az egység a nevét Siemensről (Ernst Verner von Siemens 1816 – 1892, német elektrotechnikus, feltaláló, gyáros) kapta.



3.11. ábra.

3.1.1. AZ ELLENÁLLÁSOK SOROS, PÁRHUZAMOS ÉS VEGYES KAPCSOLÁSA

A gyakorlatban különféle okokból az ellenállásokat sokszor igen összetett módon kapcsoljuk össze. Minden ilyen kapcsolás, amelynek két kivezetése van, egy ekvivalens (eredő) ellenállásként kezelhető.



3.12. ábra.

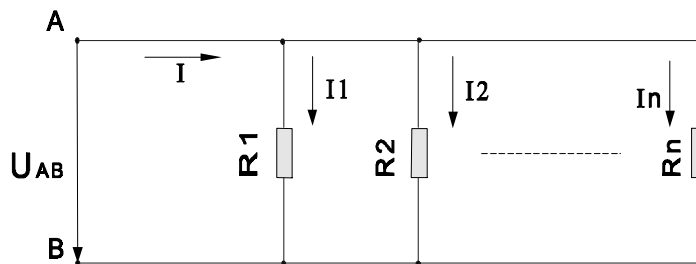
A sorbakapcsolt ellenállásokra, a fenti 3.12. ábra alapján felírható, hogy:

$$U_{AB} = U_{R_1} + U_{R_2} + \dots + U_{R_n} = I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

$$\frac{U_{AB}}{I} = R_{ekv} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$\frac{1}{G_{ekv}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_n}$$

A kapott kifejezésből látható, hogy R_{ekv} értéke minden esetben nagyobb, mint a legnagyobb sorbakötött ellenállás értéke. Az eredő vezetésről azt tudjuk, hogy kisebb, mint a sorbakapcsolt vezetések legkisebbike.



3.13. ábra.

A 3.13. ábra alapján Kirchhoff első törvényét alkalmazva az A pontra felírható, hogy:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \dots + \frac{U_{AB}}{R_n}$$

$$R_{ekv} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

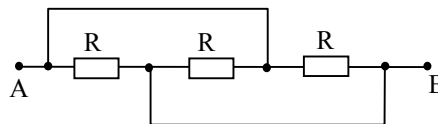
$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_{ekv} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

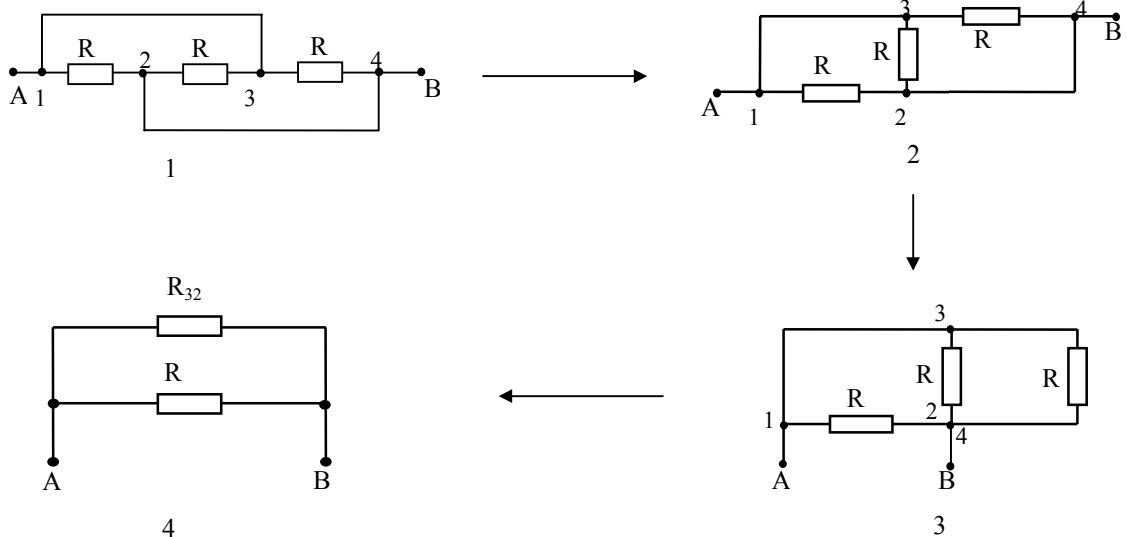
Párhuzamos kapcsolás esetén az R_{ekv} értéke minden esetben kisebb, mint a legkisebb párhuzamosan kötött ellenállás értéke. Mivel pedig az elektromos vezetések összeadódnak a sorbakapcsolt ellenállások esetében, így elmondható, hogy az eredő vezetés nagyobb, mint a legnagyobb párhuzamosan kapcsolt vezetés.

Az ellenállások vegyes kapcsolása alatt, azt az összetett kapcsolási módszert értjük, amikor mind a soros mind a párhuzamos kapcsolás esete fennáll és a vegyes kapcsolású résznek csak két kimenete van. A vegyes kapcsolású kétpólusok eredő ellenállását a soros és párhuzamos ellenálláscsoportok fokozatos, egyenkénti helyettesítésével oldjuk meg.

3.7. Példa: Számítsuk ki az eredő (ekvivalens) ellenállást az A és B pont között (lásd a mellékelt ábrát), ha $R=10[\Omega]$!



Megoldás:



A jelzett transzformációk (átalakítások) alapján, az A és B pontok közötti ellenállásra azt kapjuk, hogy (tulajdonképpen három párhuzamosan kapcsolt ellenállásunk van, hiszen ha jobban megnézzük, könnyen belátjuk, hogy mindhárom ellenállásnak az egyik kapcsa az A, a másik a B ponthoz csatlakozik):

$$R_{AB} = R_{32} \parallel R = \frac{R}{2} \parallel R = \frac{R}{3} = 3,33 [\Omega].$$

3.1.2. AZ ELLENÁLLÁS HŐFOKFÜGGÉSE

Vegyünk egy tetszőleges alakú, homogén és lineáris anyagból készült ellenállást. Ez

esetben a fajlagos ellenállás, a ρ , az $R = \int_1^2 \rho \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\ell}$ kifejezésben kiemelhető az integrálás

jele elé. A homogén anyagból készült ellenállás értéke arányos az adott anyag fajlagos ellenállásával és értéke ugyanúgy függ a hőmérséklettől, mind a felhasznált anyag fajlagos ellenállása, tehát:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t)$$

az alacsonyabb hőmérsékletek esetén (a szobahőmérséklet környezetében). Viszont nagyobb hőmérsékletkülönbségek esetén:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3),$$

ahol: R_0 az ellenállás értéke 0°C -on

R_t az ellenállás értéke $t^\circ\text{C}$ -on

α , β és γ az anyagra jellemző hőfoktényezők (hőkoeficiensek).

Ha az ellenállás nem homogén anyagból készült ezek a képletek nem érvényesek. Az ellenállás és a hőmérséklet közötti összefüggés ez esetben csak kísérleti úton (méréssel) állapítható meg.

3.8. Példa: Egy $P=100$ [W]-os, $U=220$ [V] feszültségre előrelátott izzószálhoz 45 [mg] wolframot használtak fel. A wolframból készült izzószál munkahőmérséklete 2400 [$^\circ\text{C}$], tömegsűrűsége pedig $\rho_m=19,3$ [g/cm³], fajlagos ellenállása $\rho_0=5 \cdot 10^{-8}$ [Ωm], a hőmérsékleti tényezők pedig: $\alpha=5,238 \cdot 10^{-3}$ [1/ $^\circ\text{C}$] $\beta=0,7 \cdot 10^{-6}$ [1/ $^\circ\text{C}^2$] és $\gamma=0,062 \cdot 10^{-9}$ [1/ $^\circ\text{C}^3$]. Határozzuk meg az izzószál hosszát és átmérőjét!

Megoldás: A wolfram fajlagos ellenállása 2400°C -on:

$$\rho_{2400} = \rho_0 (1 + \alpha \cdot t + \beta \cdot t^2 + \gamma \cdot t^3) = \rho_0 (1 + 5,238 \cdot 10^{-3} \cdot 2400 + 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot (2400)^2 + 0,062 \cdot 10^{-9} \cdot (2400)^3)$$

$$\rho_{2400} = 18,46 \cdot \rho_0 = 0,923 \mu\Omega\text{m}$$

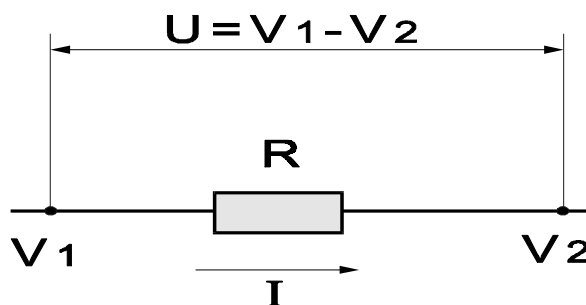
Az izzószál ellenállása a munkahőmérsékleten $R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P} = 484$ [Ω], másrésről bármely

huzal ellenállása, így a wolframé is 2400°C -on $R = \rho_{2400} \cdot \frac{\ell}{S}$, és ez az első egyenletünk, amely

két ismeretlent tartalmaz. A második egyenlet $m = \rho_m \cdot S \cdot \ell$, amely ugyanazt a két ismeretlent tartalmazza mint az első. Az egyenletrendszer megoldása után a következő értékeket kapjuk: az izzószál hossza $\ell=1,1$ m az átmérője pedig $d=0,052$ mm.

3.4.3. A FESZÜLTÉS REFERENCIAIRÁNYA AZ ELLENÁLLÁSOKON

Az villamos áram irányával kapcsolatos megegyezés szerint mi az elektronok mozgásával ellentétes irányt tekintjük az áram pozitív irányának. (Az elektromos áram pozitív irányának a meghatározása teljesen megegyezés dolga, viszont az egész világon így definiálják az áram pozitív irányát.) Az áram valódi iránya az ellenállás magasabb potenciálú csatlakozása felől az alacsonyabb potenciálú csatlakozása felé mutat (3.14. ábra).



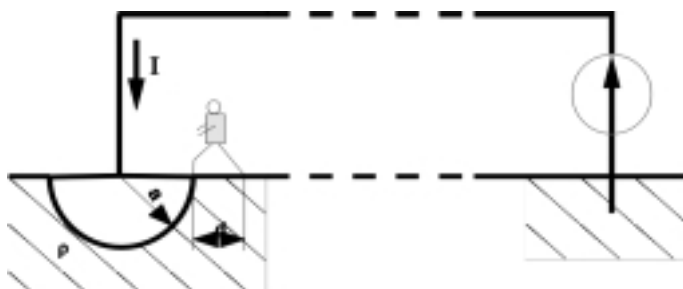
3.14. ábra

Általános esetben, amikor egy villamos hálózatot analizálni kezdünk nem tudjuk előre meghatározni az áram valódi irányát. Ezért nem tudhatjuk, hogy az ellenállás melyik csatlakozása van magasabb potenciálon. Ilyen esetekben kiválasztunk egy irányt a két lehetséges közül, és ezt az önkényesen választott irányt az áram vonatkoztatási- vagy referenciairányának nevezzük. A számítás végén az áramerősség értékére pozitív vagy negatív eredményt kapunk, attól függően, hogy az áram valódi iránya és a kiválasztott referenciairány megegyezik-e vagy sem.

1. Ha most feltételezzük, hogy az áram valódi iránya és a választott referencia irány megegyeznek, akkor $I > 0$. Ohm törvénye érvényben lesz a $V1-V2$ -re, mert $U = (V1-V2) > 0$
2. Ha pedig a felvett vonatkoztatási irány és az áram valódi iránya nem egyeznek meg, akkor $I < 0$. Ohm törvénye ez esetben is érvényben lesz a $V1-V2$ -re, mert most $U = (V1-V2) < 0$.

Ezek szerint a feszültséget az ellenállás kivezetései között mindig úgy számoljuk, mint a ($V1-V2$) potenciálkülönbséget. $V1$ az ellenállás azon kivezetésének potenciálja, amelynek potenciálértéke akkor lenne magasabb, ha az áram referenciairánya és a valós iránya megegyezne. Más szóval minden esetben azt feltételezzük, hogy az az ellenállásvég van magasabb potenciálon, amelyre az áram választott referenciairánya rámutat (amely ellenállásvégbe a referenciairányt jelző nyíl behatol). Ez esetben Ohm törvénye $U=R \cdot I$ mindig érvényben lesz függetlenül a felvett vonatkoztatási áramiránytól. Az így módon meghatározott feszültség- és áramirányt összehangoltnak is nevezzük.

3.4.4. FÖLDELÉSEK ELLENÁLLÁSA

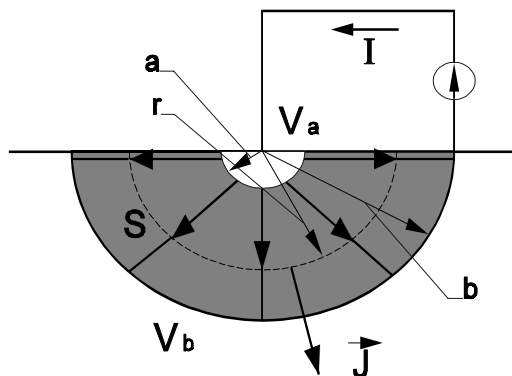


3.15. ábra.

A gyakorlatban a fogyasztók túlnyomó többségét leföldelik, illetve egy vezetőn át összekötik a földdel. Sok esetben ez biztonsági okokból elengedhetetlen, mint például a háztartási gépeknél. Ha a feszültség alatt lévő vezeték és a gép (fogyasztó) fémszerkezete között valamilyen okból (meghibásodás) zárlat keletkezik, akkor a földeléstest és a földvezeték megakadályozza, hogy a fémszerkezet a földhöz viszonyítva magas potenciálértéket vegyen fel. A gyakorlatban a földelést úgy végezzük, hogy egy viszonylag nagy felületű jó vezetőből készült tárgyat (földeléstestet) leásunk, vagy leszúrunk (leverünk) a földbe. Ezután azt a fémszerkezetet, amelyet földelni szándékozunk jó vezető segítségével összekötjük a földeléstesttel.

Vegyünk egy félgömb alakú földeléstestet, amelynek sugara a és tételizzük fel, hogy a vezetőben, amely a földeléshez van kötve I erősségű áram folyik (az áram a meghibásodott berendezés fémszerkezete és a feszültség alatt lévő vezeték közötti rövidzárlat miatt folyik). Tételizzük fel továbbá, hogy a villamos energiát szolgáltató generátor igen távol van, és ugyancsak le van földelve. Ez esetben az áramkör a földön keresztül záródik s így a földet, valamint a fogyasztó és a generátor ellenállástestét ellenállásnak tekinthetjük (3.15. ábra). Ennek az ellenállásnak a föld az ellenállástest, a fogyasztó és a generátor földelései pedig a kivezetései (kapcsai), és ennek az ellenállásnak az értékét tekintjük földelési ellenállásnak.

A gyakorlatban a generátor földelése nagyságrendekkel jobb kivitelezésű, mint a fogyasztó földelése, vagyis a generátor földelésének sokkal nagyobb a felülete, mint a fogyasztó földelésének a felülete. Ez a feltételezés módot nyújt egy egyszerűsített elemzésre. A generátor földelését (földeléstestét) úgy is elképzelhetjük, mint egy félgömb, amelynek sugara (b) sokkal nagyobb, mint a fogyasztó földelésének sugara (a), vagyis $b \gg a$ (3.16. ábra). Ami a fajlagos ellenállásokat illeti $\rho_{\text{fém}} \ll \rho_{\text{föld}}$, ezért mind a két félgömböt ekvipotenciális felületnek tekinthetjük. Az áramsűrűség vektora J jó megközelítéssel radiálisnak mondható. Ezek alapján a földelés (a föld) ellenállása a következő módon számítható:



3.16. ábra.

$$S = 2 \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{2 \cdot r^2 \cdot \pi}$$

$$E = \rho \cdot J = \rho \cdot \frac{I}{2 \cdot r^2 \cdot \pi}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \rho \cdot \frac{I}{2 \cdot r^2 \cdot \pi} \cdot dr = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cong \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

$$R_{\text{föld.}} = \frac{V_a - V_b}{I} = \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

Lássunk mindjárt egy gyakorlati példát a földelés ellenállásának számítására.

3.9. Példa: Hogy reális képet alkothassunk a földelés ellenállásának értékéről tegyük fel, hogy a föld fajlagos ellenállása $\rho=10^2 \Omega\text{m}$ (nedves föld) és legyen $a=1\text{m}$. Az előbbi $R = \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot a}$ egyenlet alapján kapjuk, hogy:

$$R_{\text{föld}} = \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{10^{12}}{2 \cdot \pi \cdot 1} = 15,92 [\Omega]$$

10 Ω -nál kisebb értékeket nehezen valósíthatunk meg a földelésellenállás értékére. A legjobb földeléseket fémlemezek édes ($R_{\text{föld}}=1\Omega$), illetve sós ($R_{\text{föld}} \ll 1 \Omega$) talajvizbe való süllyesztésével kaphatjuk.

Ha a földelés értéke kicsi, rövidzárlat esetén nagy áramerősségek lépnek fel a földvezetéken keresztül. Az előírások szerint a magasfeszültségű vezetékeket olvadó- vagy más fajta biztosítékokkal kell ellátni, és rövidzárlat esetén ezek a biztosítékok reagálnak (leválasztják a zárlatos fogyasztót a magasfeszültségű vezetékekről). Az előbbi példából viszont azt is láthatjuk, hogy az $U=220 \text{ V}$ feszültség esetén az áram erőssége a földvezetéken keresztül $I=U/R_{\text{föld}}=220/15,92=13,82 \text{ A}$ lesz. A háztartásokban használt olvadóbiztosítékok gyakran 16 A-os vagy még nagyobb áramerősségekre reagálnak, tehát a földelés nem minden esetben nyújt biztonságos védelmet az áramütéstől, amit igencsak szem előtt kell tartanunk.

3.4.4.1. A lépésfeszültség

Esetenként a földelésen keresztül igen nagy áramok folyhatnak. Több ezer amper nagyságrendűek (villámcsapás alkalmával, illetve a magas feszültségű távvezetékek földzárlatakor) is lehetnek ezek az áramok. Ha a közeg (a talaj), amelyben a földelés van rossz vezető (száraz talaj) a villamos tér értéke a földelés közelében igen nagy értékeket vehet fel. Ennek eredményeként a feszültség a talaj két pontja között a földeléstest körül igen nagy, sőt néha életveszélyes értékeket érhet el.

A földelés közelében lépéstávolságra, d távolságra sugárirányban (kb. 0,75 m) elhelyezkedő két pont közötti potenciálkülönbséget lépésfeszültségnek nevezzük. A lépésfeszültség értéke függ a földelés fajtájától, a rajta áthaladó áramerősségtől és a környezetében lévő talaj fajlagos ellenállásától.

Természetesen a lépésfeszültség legnagyobb lehetséges értéke fontos jellemzője a földelésnek, ezért a lépésfeszültség alatt legtöbbször a lépésfeszültség legnagyobb értékét értjük az adott földelésre:

$$V_a - V_{a+d} = \int_a^{a+d} \rho \cdot \frac{I}{2 \cdot r^2 \cdot \pi} \cdot dr = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} \right) = \frac{\rho \cdot I \cdot d}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot (a+d)}$$

3.10. Példa: A lépésfeszültség, mint már mondtuk, egyes esetekben igen nagy értékeket vehet fel. Szemléltetésképpen most határozzuk meg a lépésfeszültség értékét egy félgömb alakú földeléstest esetére. Legyen $\rho=10^2$ (nedves talaj), továbbá $a=1\text{m}$, a lépéshossz $d=0,75\text{m}$ és az áram erőssége $I=1250 \text{ A}$ (ami megközelítőleg egy 20 kV-os magasfeszültségű hálózat földzárlati áramának felel meg). Ekkor a lépésfeszültség értéke:

$$U_{\text{lép}} = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} \right) = \frac{\rho \cdot I \cdot d}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot (a+d)} = \frac{10^2 \cdot 1250 \cdot 0,75}{2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot (1+0,75)} = 8526 [\text{V}]$$

Amint látható, ez igen nagy érték.

3.5. Joule törvénye

Joule törvénye alatt azt a kifejezést értjük, amelynek segítségével az adott ellenálláson egy meghatározott időegység alatt hővé átalakuló villamos energia értékét kiszámítjuk.

Vegyünk egy tetszőleges ellenállást, amelynek értéke R , tételezzük fel, hogy az ellenálláson keresztül I erősségű egyenáram folyik keresztül és a kapcsai közötti feszültség értéke U .

A t idő alatt az R ellenálláson áthaladó villamos töltés mennyisége $Q=I \cdot t$ értéket tesz ki. Ezeket a töltéseket a villamos erők "vitték át" az ellenálláson keresztül munkát végezve ezzel, miközben a munkát a villamos tér energiájának „számlájára” (rovására) végezték el, és ez az energiamennyisége az ellenálláson hővé alakult:

$$A_{\text{vill. erők}} = Q U I t$$

Az energiamegmaradás törvényének értelmében az ellenálláson hővé alakult energia mennyisége éppen ezzel a munkával egyenlő.

$$W = U \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

A t idő alatt az R ellenállásban hővé alakult villamos energia mennyiségének megállapításához használatos fenti összefüggést JOULE törvényének nevezzük.

Mivel egyenáramokról van szó, az energiaátalakulás folyamata állandó (folytonos), ezért átosztva az idővel az átalakulás teljesítményét kapjuk:

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Az ellenállásban hővé alakuló villamos energia teljesítményének számításához szolgáló fenti kifejezést ugyancsak JOULE törvényének nevezzük.

Igen gyakran az ellenálláson hővé alakuló villamos energia teljesítményét röviden csak a fogyasztó (ez esetben az ellenállás) teljesítményének nevezzük.

Az energia jele: W , mértékegysége pedig a joule, melynek jele: J . A joule nem más, mint watt-szekundum [Ws]

A teljesítmény jele: P , mértékegysége a watt, melynek jele: W . A watt viszont J/s .

Az energiát nemcsak joule-okban fejezik ki, mint például az elhasznált elektromos energia elszámolásánál, ahol az energiát kWh (kilówattórákban) fejezik ki. Ennek az egységnek a joule-hoz való viszonya:

$$1 [kWh] = 1000 \cdot 3600 [W \cdot s] = 3,6 \cdot 10^6 [J].$$

A hőmennyiség (hőenergia) mérésére gyakran használt mértékegység a kalória [cal]. A meghatározás szerint a kalória az a hőmennyiség, amely egy gramm víz hőmérsékletét $1^\circ C$ -al ($14,5^\circ C$ –ről $15,5^\circ C$ –ra) emeli. Kísérletileg megállapították, hogy:

$$1 [cal] = 4,186 [J],$$

vagy megfordítva:

$$1 [J] = 0,239 [cal].$$

3.11. Példa: Határozzuk meg, hogy milyen hosszú krómnikkel huzalok szükségesek az $1500[W]$, $1000[W]$ és $500[W]$ teljesítményű fűtőtestek elkészítéséhez. A fűtőtesteket $U=220[V]$ feszültségen működtetik, $d=0,6[mm]$ keresztmetszetű huzal áll a rendelkezésünkre, a fűtőtest

munkahőmérséklete pedig $850\text{ }^{\circ}\text{C}$. Milyen teljesítményű fűtőtesteket kaphatunk e három fűtőtest soros-, párhuzamos- és vegyes kapcsolásával (természetesen ezeket a különböző kapcsolásokat is $U=220\text{[V]}$ feszültségen tervezik működtetni) ?

Megoldás: A keresett huzalhossz a következő módon számítható ki:

a $P_1=1500\text{[W]}$ teljesítményű fűtőtest esetében:

$$P_1 = U \cdot I \Rightarrow I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{1500\text{[W]}}{220\text{[V]}} = 6,82\text{[A]}$$

$$U = I_1 \cdot R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{220\text{[V]}}{6,82\text{[A]}} = 32,258\text{[}\Omega\text{]} \approx 32\text{[}\Omega\text{]}$$

$$\begin{aligned} \rho_{850} &= \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) = 137 \cdot 10^{-8}\text{[}\Omega\text{m]}\cdot \left(1 + 2 \cdot 10^{-7}\left[\frac{1}{^{\circ}\text{C}}\right] \cdot 850\text{[}^{\circ}\text{C}]\right) = \\ &= 137,02 \cdot 10^{-8} \approx 137 \cdot 10^{-8}\text{[}\Omega\text{m]}\end{aligned}$$

$$R_1 = \rho_{850} \cdot \frac{\ell_1}{S} \Rightarrow \ell_1 = S \cdot \frac{R_1}{\rho_{850}} = \frac{(0,6 \cdot 10^{-3}\text{[m]})^2}{4} \cdot 3,14 \cdot \frac{32\text{[}\Omega\text{]}}{137 \cdot 10^{-8}\text{[}\Omega\text{m]}} = 6,6\text{[m]}$$

a $P_1=1000\text{[W]}$ teljesítményű fűtőtest esetében:

$$I_2 = \frac{P_2}{U} = \frac{1000\text{[W]}}{220\text{[V]}} = 4,545\text{[A]}$$

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{220\text{[V]}}{4,545\text{[A]}} = 48,4\text{[}\Omega\text{]}$$

$$\ell_2 = S \cdot \frac{R_2}{\rho_{850}} = \frac{(0,6 \cdot 10^{-3}\text{[m]})^2}{4} \cdot 3,14 \cdot \frac{48,4\text{[}\Omega\text{]}}{137 \cdot 10^{-8}\text{[}\Omega\text{m]}} = 9,98\text{[m]} \approx 10\text{[m]}$$

a $P_1=500\text{[W]}$ teljesítményű fűtőtest esetében:

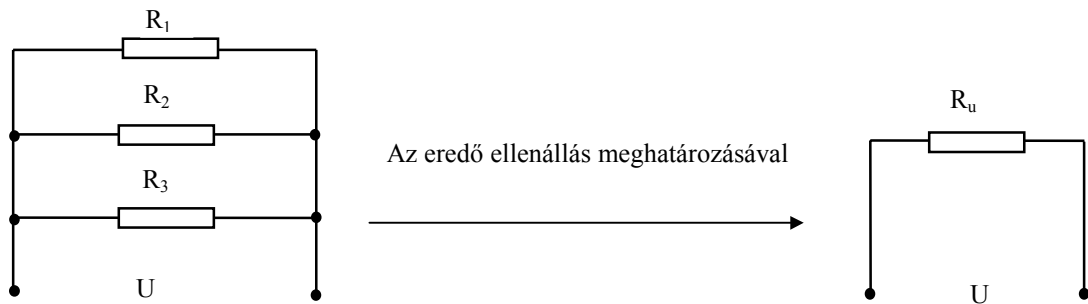
$$I_3 = \frac{P_3}{U} = \frac{500\text{[W]}}{220\text{[V]}} = 2,27\text{[A]}$$

$$R_3 = \frac{U}{I_3} = \frac{220\text{[V]}}{2,27\text{[A]}} = 96,92\text{[}\Omega\text{]} \approx 97\text{[}\Omega\text{]}$$

$$\ell_3 = S \cdot \frac{R_3}{\rho_{850}} = \frac{(0,6 \cdot 10^{-3}\text{[m]})^2}{4} \cdot 3,14 \cdot \frac{97\text{[}\Omega\text{]}}{137 \cdot 10^{-8}\text{[}\Omega\text{m]}} = 20\text{[m]}$$

Ha mindhárom melegítőtest szerepel a kapcsolásokban, akkor a következő esetek fordulnak elő:

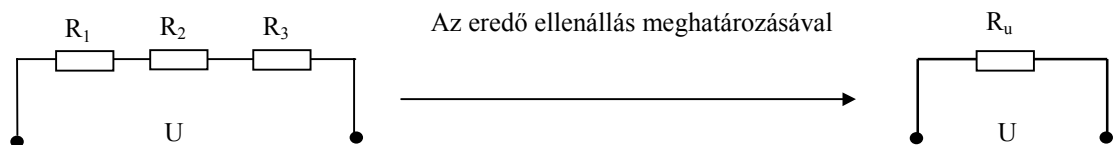
A fűtőtestek párhuzamos kapcsolása



$$R_u = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} = 16,072 \approx 16[\Omega], \text{ az ennek megfelelő } P_u \text{ teljesítmény}$$

$$P_u = \frac{U^2}{R} = \frac{220[V]^2}{16[\Omega]} = 3025[W]$$

A fűtőtestek soros kapcsolása

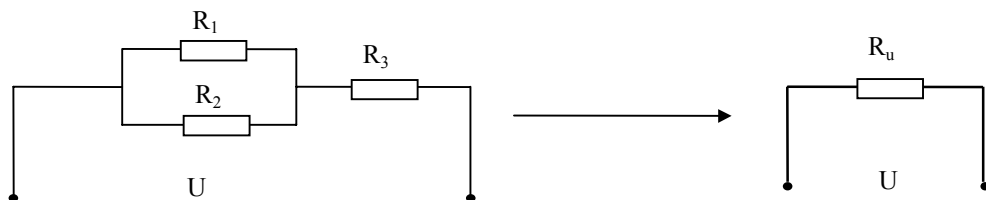


$$R_u = R_1 + R_2 + R_3 = 177[\Omega], \text{ ez esetben a teljesítmény}$$

$$P_u = \frac{U^2}{R_u} = \frac{220[V]^2}{177[\Omega]} = 272,829 \approx 273[W]$$

A fűtőtestek vegyes kapcsolása

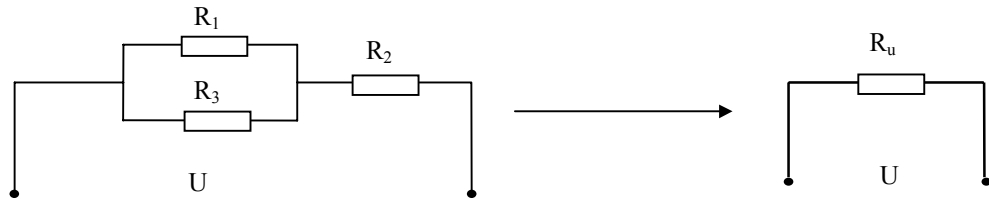
a)



$$R_u = R_{12} + R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} = 116,26[\Omega], \text{ a teljesítmény pedig}$$

$$P_u = \frac{U^2}{R_u} = \frac{220[V]^2}{116,26[\Omega]} = 416,3[W]$$

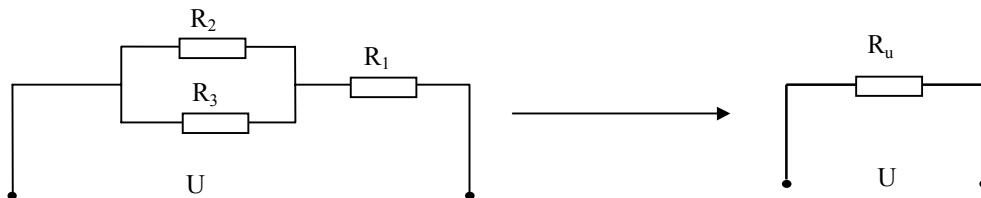
b)



$$R_u = \frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_3} = 72,46[\Omega], \quad \text{az ennek megfelelő teljesítmény}$$

$$P = \frac{U^2}{R_u} = 667,95 \approx 668[W]$$

c)



$$R_u = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3} = 290,13[\Omega], \quad \text{a teljesítmény itt}$$

$$P = \frac{U^2}{R_u} = 166,82 \approx 167[W].$$

Még három kombináció hiányzik a három fűtőtestet tartalmazó vegyes kapcsolások halmazából!
Melyek ezek a kapcsolások?

Gyakorlásképpen kiszámíthatók még az ellenállások és a teljesítmények azokra az esetekre is, amikor a három fűtőtest közül csak kettőt kapcsolunk sorosan illetve párhuzamosan!

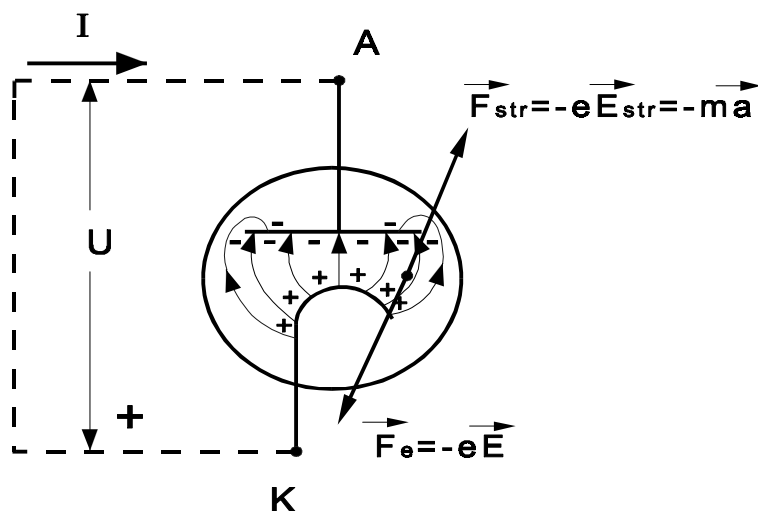
3.6. Villamos generátorok

Az időben állandó áramok fenntartásához (a vezetőkben) elengedhetetlenül szükséges egy külső, idegen, nem villamos erő jelenléte, amely a töltéseket szétválasztja, és a villamos erő hatásával ellentétes irányban mozgatja. Először analizáljunk egy generátort, amely mint közvetlen átalakító működik, hőenergiát alakít át villamos energiává. E generátor hatásfoka mindössze néhány század százalék, ezért a gyakorlatban igen ritkán alkalmazzuk, de az idegen (nem villamos) erők hatását ezen a példán jól érzékelhetjük.

Ha egy fémvezetőt hevítünk, a szabad elektronok termikus sebessége megnövekszik, és egy bizonyos hőmérsékleten az elektronok átlagsebessége annyira megnövekszik, hogy képesek legyőzni az őket az anyaghoz kötő villamos erőket. Tehát az elektronok elhagyják a fém

(termikus elektronemisszió). Az elektronok sebessége a fém elhagyásakor függ a fém fajtájától és a hőmérséklettől.

Nézzünk most egy vákuumdiódát, amelynél a katód hevítésekor termikus elektronemisszió kezdődött. Ennek következtében az elektronok fokozatosan elhagyják a katódot, és közülük egy bizonyos számú elektron az anódra jut. Ezáltal az anódon negatív, a katódon pedig pozitív töltésfelesleg halmozódik fel.



3.17. ábra.

A felhalmozódott töltésfelesleg természetesen villamos teret létesít, amely akadályozza az elektronok áramlását az anódra. Az elektronok átvándorlása az anódra csak akkor szűnik meg, mikor az elektronok átjutásához szükséges munka kiegyenlítődik az elektronok kinetikus energiájával. ($\frac{1}{2}mv^2 = eU$)

Ekkor tehát az elektronoknak a katódról az anódra való átjutásához szükséges energiamennyiség pontosan megegyezik a fémből kilépő elektronok kinetikus energiájával.

Ha az anódot és a katódot egy vezetővel összekötjük, akkor a vezetőn át áram folyik. Ezáltal csökken az anód és a katód töltése, a villamos tér legyengül és az elektronok kezdősebessége ismét elegendő lesz arra, hogy az anódra jussanak (a jelenlévő villamos fékezőerő ellenére is). A beállt egyensúlyi helyzet után, az elektronok száma amelyek a katódról az anódra jutnak a vákumon keresztül, megegyezik az elektronoknak a vezetőn keresztül a katódra visszatérő számával.

Ebben az esetben tehetetlenségi erő az az idegen, nem villamos erő, amely a töltéseket a villamos térrel szemben mozgatja. Ennél a generátornál az idegen erő az elektródák közötti útszakasz teljes hosszán hat az elektronokra (ez nem mindegyik generátortípusnál van így).

$$\vec{F}_e = -e \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}$$

Newton törvénye értelmében a két erő vektoriális összege minden pillanatban nullával egyenlő, ezért felírhatjuk, hogy:

$$\vec{F}_{\text{össz.}} = \vec{F}_e + \vec{F}_i = -e \cdot \vec{E} - m \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{F}_{\text{össz.}} = -e \cdot \left(\frac{\vec{F}_e}{-e} + \frac{\vec{F}_i}{-e} \right) = -e \cdot \left(\vec{E} + \frac{m \cdot \vec{a}}{e} \right) = 0$$

Az m/e kifejezésnek ugyanaz a mértékegysége, mint a villamos térerősségnek, de ez nem villamos térerősség, hanem egy idegen külső erőből eredő tér erőssége. Az idegen erő értékét úgy kapjuk meg, hogy ezt az idegen térerősséget megszorozzuk az elektron töltésével. Ez a meghatározás azonos a villamos térerősség definíciójával, ezért is kapta az idegen térerősség vektora (idegen- vagy generátortér) elnevezést.

$$\vec{E}_{i.} = \frac{\vec{F}_{i.}}{Q}$$

Elemezzük most a kémiai áramforrások (generátorok) galvánelemek és akumulátorok működési elvét. Nézzük meg, hogy mi fog történni, ha egy vezetőt az elektrolitba süllyesztünk. Mint tudjuk az oldatban pozitív és negatív ionok vannak jelen. Ha a jelenlévő ionok közül egyik fajta sem reagál kémiaiilag a vezető (elektróda) anyagával, semmi sem fog történni, de ha az elektróda anyaga kémiaiilag reagál az oldatban jelenlévő ionokkal, akkor egy új molekula keletkezik. Az elektróda és az elektróda felülete mellett az elektrolitnak egy vékony rétege feltöltődik ellentétes töltéshordozókkal. A töltéshordozók fajtája az elektródán és az oldatban az oldat és az elektróda anyagától függ. Rövid idő után a villamos erők, amelyek az elektródán és az oldatban felhalmozódott töltésektől erednek, megakadályozzák az ionokat, hogy az elektróda felületével érintkezzenek és így a folyamat leáll.

Két azonos anyagból készült elektróda ugyanabban az oldatban azonos fajtájú töltéshordozókkal töltődik fel.

Ha a másik elektróda más anyagból készült mint az első, akkor az, az oldathoz viszonyítva más potenciálon lesz, mint az előző elektróda. Függetlenül attól, hogy ez a másik elektróda kémiaiilag reagál-e vagy sem az elektrolittal. Ha most a két elektródát egy vezetővel összekötjük, az így zárt áramkörön keresztül megindul a villamos áram. Tehát két különböző anyagú elektróda ugyanabba az oldatba süllyesztve, úgy viselkedik, mint egy áramforrás (villamos generátor).

Ennél a generátornál az idegen, nem villamos erők, illetve a töltésekre ható szétválasztó erők, (amelyek nem a villamos tértől erednek) a kémiai kötőerők. Ezek a kémiai kötőerők csak az elektróda és az elektrolit érintkezési felületén hatnak. Ezek az erők az oldatban lévő ionokat és az elektróda anyagának atomjait igyekeznek egy új vegyületté összekapcsolni.

Valamennyi kémiai generátor a fenti elv alapján működik. A kémiai kötőerők csak meghatározott helyen (az elektróda felszínén) hatnak.

3.6.1. A FESZÜLTSGGENERÁTOR FORRÁSFESZÜLTSGE ÉS BELSŐ ELLENÁLLÁSA

Az előzőekben a galvánelem felépítését és működését írtuk le. Ez a fajta áramforrás (vagy villamosenergia-forrás) rendelkezik azzal a jó tulajdonsággal, amivel a hálózati feszültség is: jó közelítéssel a terheléstől függetlenül "tartja" a feszültségét. Az ilyen áramforrásokat feszültséggenerátoroknak nevezzük. A generátorok alkalmazásának szemszögéből nézve, lényegtelen az idegen töltésmozgató erők természete és eredete, amelyek a generátorokban a villamos töltésekre hatnak. A feszültséggenerátorokat két mennyiség segítségével jellemezhetjük: a generátor forrásfeszültségével (elektromotoros erővel) és a belső ellenállással.

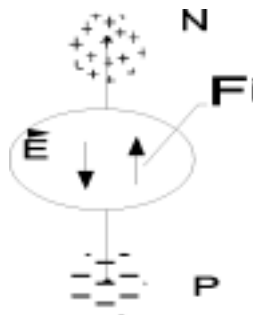
Vegyünk most egy "nyitott kapcsú" (üresjáratú) feszültséggenerátort (3.18. ábra). Az idegen (nem elektromos, külső erők által létrehozott) tér irányát a felfelé mutató nyíl jelzi. Az idegen tér hatására a pozitív töltéshordozók a P elektródán halmozódnak fel, a negatív töltéshordozók pedig az N-el jelölt elektródára jutnak.

A felhalmozódott töltések villamos terét a lefelé irányuló nyíl szemlélteti. A pólusok feltöltése (töltési folyamata) akkor szűnik meg, amikor a villamos erők hatása kiegyenlítődik az idegen, töltésszétválasztó erők hatásával:

$$\vec{F}_i + \vec{F}_e = 0 \quad \text{és mivel a definíció szerint,}$$

$$\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}, \quad \text{az} \quad \vec{F}_i = Q \cdot \vec{E}_i \quad \text{ekkor felírhatjuk a következő egyenletet:}$$

$\vec{E} + \vec{E}_i = 0$, amely érvényes az üresjáratú generátor minden pontjában ahol idegen erők hatnak.



3.18. ábra.

A generátor forrásfeszültsége a definíció szerint a töltésszétválasztó erők által végzett munka, és a ΔQ töltésmennyiség hányadosával egyenlő. A töltésszétválasztó erők, az előző mondatban említett munkát akkor fejtik ki, amikor a ΔQ töltésmennyiséget a generátorban a negatív pólusról a pozitív pólusra viszik át, vagyis:

$$E = \frac{\text{az idegen erők által kifejtett munka, amellyel a } +\Delta Q \text{ töltésmennyiséget, a generátorban, a negatív pólusról a pozitív pólusra juttatják}}{\Delta Q}$$

A töltésszétválasztó erők (F_i) által végzett munka az F_i vektor vonallintegráljával egyenlő az N és P elektródák között, és mivel $F_i = \Delta Q E_i$:

$$E = \int_N^P \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell}$$

A töltésszétválasztó, idegen erők nagysága a definíció szerint nem függ a generátor elektródáin (pólusain) lévő töltésmennyiségtől, sem a generátoron áthaladó áramerősségtől. Ezért a generátor elektromotoros erejét (forrásfeszültségét) számíthatjuk a generátor bármilyen üzemmódjára, tehát az üresjáratra is:

$$E = - \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_P^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_R^N \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_P - V_N$$

és a kifejezés értéke független az integrálás útvonalától.

Az integrálást a "generátoron kívüli úton" is el lehet végezni a környező dielektrikumon át. Mivel $E=V_p-V_n$, tehát a generátor forrásfeszültsége (elektromotoros ereje) egyenlő az üresjáratú generátor pozitív és negatív elektródái közötti potenciálkülönbséggel, illetve feszültséggel.

A gyakorlatban tehát a generátor forrásfeszültségét igen egyszerűen megmérhetjük, hiszen elég ha megmérjük a generátor üresjárási kapocsfeszültségét.

Az elektromotoros erő skaláris mennyiség és nincs iránya. Mégis bevezetjük a generátor forrásfeszültségének irányának fogalmát, és alatta a töltésszétválasztó erők által, a generátor belsejében a pozitív töltésekre kifejtett erő irányát értjük. Ez az irány az "N" kivezetéstől a "P" kivezetés felé mutat.

A generátorban ható idegen erők munkája a ΔQ töltésmennyiségnek az "N" elektródáról a "P" elektródára történő átvitelekor:

$$\Delta A_g = \Delta Q \cdot E$$

Mivel, az időben állandó áram erőssége I , és az áram valós iránya a generátorban a negatív elektródától a pozitív elektróda felé mutat, akkor $\Delta Q = I \Delta t$, ahol Δt , az az időtartam, amely alatt a generátoron áthalad a ΔQ töltésmennyiség. Így a generátor által végzett munka a Δt időtartam alatt:

$$\Delta A_g = E \cdot I \cdot \Delta t$$

Ez alapján a feszültséggenerátor teljesítménye:

$$P_g = \Delta A_g / \Delta t = EI$$

Ez a teljesítmény lényegében annak az energiaátalakulásnak a sebessége, amellyel a generátor a rendelkezésére álló idegen, nem villamos eredetű energiát a villamos tér energiájává alakítja át. Meg kell jegyezni, hogy ez a képlet csak akkor érvényes, az áram referenciáiránya a generátor pozitív kapcsából (kivezetéséből) "kifelé" mutat.

Mivel a generátoron áram folyik keresztül, így a villamos energiának egy része, ugyanúgy mint bármely más ellenállás esetében, hővé alakul át. A Joule-féle hőveszteség teljesítménye az áram értékének a négyzetével arányos. A generátor belső ellenállását pedig a következő egyenletből határozhatjuk meg:

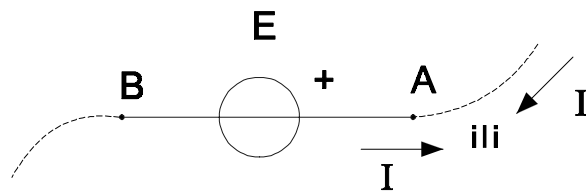
$$P_{j \text{ a gen.}} = R_g \cdot I^2$$

A generátor belső ellenállását sok esetben nem lehet kiszámítani, mert a számításhoz ismernünk kell a pontos árameloszlást, és a fajlagos ellenállás pontos értékét az egész útvonal mentén a generátor minden pontjában. Ez legtöbbször ismeretlen, de a feszültséggenerátor belső ellenállása aránylag könnyen megmérhető, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk.

3.6.2. A GENERÁTOR KAPOCSFESZÜLTSGE

Az elhanyagolható belső ellenállású feszültséggenerátor (ideális feszültséggenerátor) esetében az áramerősség $I=E/R$, a feszültség értéke pedig a generátor, és az ellenállás végpontjai között is $U_R=RI=E$.

Az ideális feszültséggenerátor kapocsfeszültsége mindig állandó és egyenlő a generátor elektromotoros erejével (forrásfeszültségével).



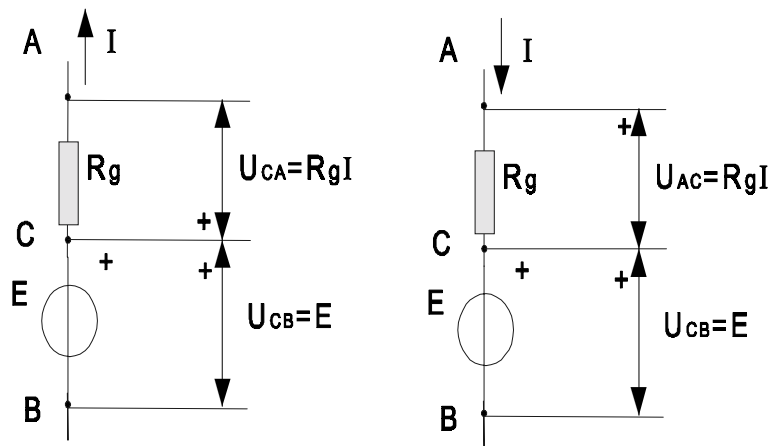
$$U_{AB} = E, U_{BA} = -E$$

3.19. ábra.

$$U_{AB} = V_A - V_B = +E$$

$$U_{BA} = V_B - V_A = -E$$

Nézzünk most egy valós feszültséggenerátort, mégpedig két esetben: az elsőben az ágba folyó áram iránya megegyezik a forrásfeszültség irányával, a másodikban pedig ellentétes vele. Írjuk fel most a kifejezéseket a generátor kapcsain mérhető feszültségre (az A és B pontok között), mégpedig mind az U_{AB} , mind az U_{BA} feszültséget, előbb az első (a kép bal oldalán elhelyezkedő), majd a második esetre is!



3.20. ábra.

$$U_{AB} = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = U_{AC} + U_{CB} = -R_g \cdot I + E$$

$$U_{BA} = U_{BC} + U_{CA} = -E + R_g \cdot I$$

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = R_g \cdot I + E$$

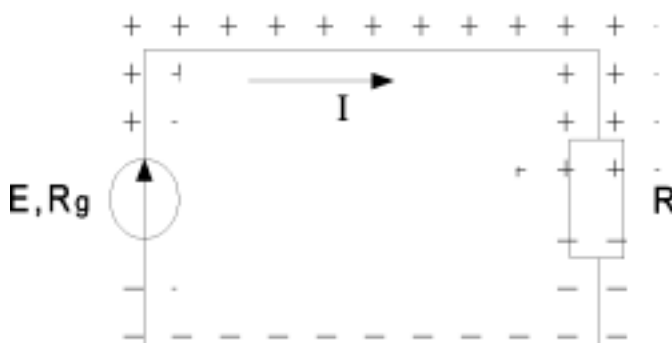
$$U_{BA} = U_{BC} + U_{CA} = -E - R_g \cdot I$$

A fenti egyenletekben a generátoron keresztül folyó áram algebrai értékét I -vel jelöltük, a referenciairányok a 24. ábrán láthatók. I értéke lehet úgy pozitív mint negatív ezekhez a referenciairányokhoz viszonyítva.

3.7. Áramerősség és feszültség az áramkörben

3.7.1. AZ ÁRAMERŐSSÉG MEGHATÁROZÁSA AZ EGY GENERÁTORBÓL ÉS EGY ELLENÁLLÁSBÓL ÁLLÓ ÁRAMKÖRBE

A generátornak és az ellenállásnak a 20. ábrán látható kapcsolását áramkörnek nevezzük. Tételezzük fel, hogy a feszültséggenerátor forrásfeszültsége E , belső ellenállása R_g , a rákapcsolt fogyasztó pedig R ellenállású. Az áramkörben ismeretlen erősségű áram folyik. Az áram erősségét a következő módon határozhatjuk meg. Tételezzük fel, hogy az áram erőssége I , akkor a generátor teljesítménye $P_g = EI$ a Joule-féle hővesztesség teljesítménye pedig $P_{jg} = R_g I^2$ és $P_{jf} = R I^2$.



3.21. ábra.

Az energiamegmaradás törvénye értelmében a generátor teljesítménye egyenlő a Joule-féle hővesztések teljesítményeinek az összegével:

$$E \cdot I = R_g \cdot I^2 + R \cdot I^2$$

ebből az I -vel való egyszerűsítés után:

$$I = \frac{E}{R_g + R}.$$

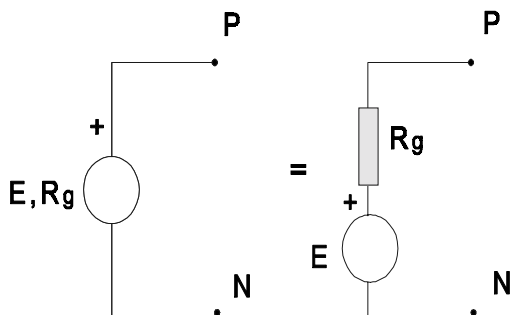
Ha a külső ellenállás értéke $R=0$, akkor rövidre zárt generátor esetével állunk szemben:

$$I_{\text{rövidzárlat}} = \frac{E}{R_g}$$

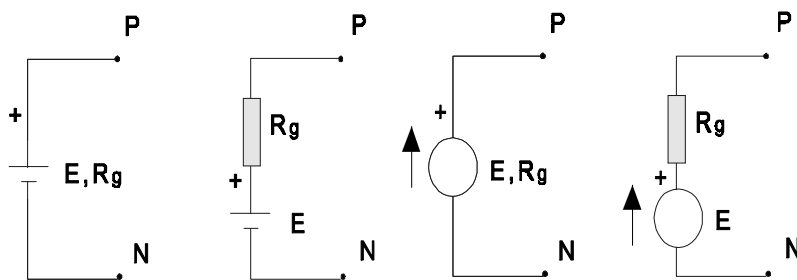
$$R_g = \frac{U_{\text{üresjárat}}}{I_{\text{rövidzárlat}}}$$

A fenti kifejezés alapján állapítható meg a generátor belső ellenállása a lemerült üresjáratú feszültségből (forrásfeszültségből) és rövidzárlati áramból. Ez a generátor belső ellenállásának a meghatározására a legegyszerűbb módszer, viszont nem a legszerencsésebb is, mert sokszor lehetetlen a rövidzárlat körülményeit a mérés időtartalmára a generátorban fenntartani anélkül, hogy a generátor meg ne károsodna. Sokkal kedvezőbb módszer, ha a generátor pólusaira (kapcsaira) egy ismert értékű ellenállást kötünk és megmérjük az áramkörben folyó áram erősségét. A generátor belső ellenállását ezután a fent ismertetett képlet segítségével számítjuk ki.

A feszültséggenerátor belsejében az a térrész, amelyben a villamos energia hővé alakul, legalább részben egybeesik a térséggel, ahol az idegen, töltésszétválasztó erők hatnak. Tehát a generátor belső ellenállása a valóságban is magában a generátorban helyezkedik el. Az egyszerűség kedvéért azonban a feszültséggenerátort egy ideális (belső ellenállás nélküli) feszültséggenerátor és egy R_g belső ellenállás soros kapcsolásának tekinthetjük (ahogy azt a 3.22. ábra mutatja). Egyéb jelölésmódok a 3.23. ábrán láthatók.



3.22. ábra.



3.23. ábra.

3.12. Példa: A maximális teljesítményleadás feltétele (teljesítményillesztés). A generátorra kapcsolt R_x ellenállás mely értékére lesz az R_x ellenálláson a Joule-féle hőveszteség értéke a legnagyobb?

Megoldás: Mivel az áram erőssége a fent leírt egyszerű körben:

$$I = \frac{E}{R_g + R_x},$$

a Joule-féle hőveszteség értéke az R_x ellenálláson az ellenállás értékének a függvénye:

$$P_{R_x} = R_x \cdot I^2 = E^2 \cdot \frac{R_x}{(R_g + R_x)^2}.$$

A teljesítmény legnagyobb értékét úgy kapjuk meg, hogy megkeressük a teljesítményfüggvény (az R_x -nek a függvénye) maximumát. A maximumfeltételben ugyancsak szerepel az R_x ismeretlen ellenállás, amelynek a kifejezése már nem jelent komolyabb gondot, amit a következő rövid levezetésből is látni lehet.

A függvény extremitásának feltétele:

$$\frac{dP_{R_x}}{dR_x} = 0$$

amely feltétel alapján aztán felírható, hogy:

$$E^2 \cdot \frac{(R_g + R_x)^2 - R_x \cdot 2 \cdot (R_g + R_x)}{(R_g + R_x)^4} = 0$$

$$E^2 \cdot \frac{R_g^2 + 2 \cdot R_g \cdot R_x + R_x^2 - 2 \cdot R_g \cdot R_x - 2 \cdot R_x^2}{(R_g + R_x)^4} = 0$$

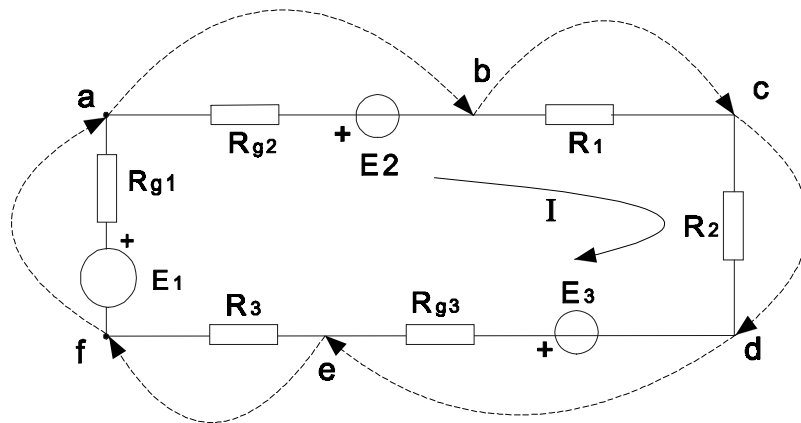
$$R_g^2 - R_x^2 = 0 \Rightarrow R_x = R_g$$

Ebből látjuk, hogy ha az $R_x = R_g$ feltétel teljesül, akkor a Joule-féle hőveszteség teljesítményének értéke a generátoron és az ellenálláson egyenlő. Vajon a kapott extrémítási pont valóban a függvény maximumát, és nem minimumát jelöli? Ellenőrizzétek le matematikailag!

A nagy teljesítmények esetében ez a feltétel igen kedvezőtlen és nem használjuk. Kis teljesítményeknél azonban, ahol az a célunk, hogy a fogyasztónak minél nagyobb teljesítményt biztosítsunk, rendszerint ehhez a föltételhez nyúlunk, (ez az ún. teljesítményillesztés).

3.7.2. A TÖBB ÁRAMFORRÁST ÉS TÖBB ELLENÁLLÁST TARTALMAZÓ ÁRAMKÖRÖK ÁRAMERŐSSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Azt már láttuk, hogy az időben állandó áramok villamos tere, illetve a stacionárius áramlási tér ugyanolyan tulajdonságokkal bír, mint az elektrosztatikus villamos tér, ha hasonló eloszlású töltésektől ered. Ezért a stacionárius áramlási térben is érvényes az a megállapítás, hogy egy tetszőleges zárt vonal mentén a villamos tér vonalintegrálja nullával egyenlő.



3.24. ábra.

$$\oint_{abcdefa} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{ef} + U_{fa} = 0$$

$$R_{g_2} \cdot I + E_2 + R_1 \cdot I + R_2 \cdot I - E_3 + R_{g_3} \cdot I + R_3 \cdot I - E_1 + R_{g_1} \cdot I = 0$$

Az utolsó kifejezésből számítva az áramerősséget a következőket kapjuk:

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_{g_1} + R_{g_2} + R_{g_3} + R_1 + R_2 + R_3}$$

Ezek alapján általánosan felírható, hogy az áramerősség milyen képlettel is számítható:

$$I = \frac{\sum \pm E}{\sum R}$$

Amennyiben az áram feltételezett referenciáiránya és az elektromotoros erő iránya megegyeznek, az E előtt a pozitív algebrai előjel érvényes, ellenkező esetben pedig a negatív.

Ha az áram valós iránya és a felvett referenciáirány megegyeznek, (lásd a 25. ábrát) akkor a 2-es számú generátorban (E_2 jelöléssel a képen) az áram iránya és az elektromotoros erő iránya ellentétesek (a generátor fogyasztóként működik). Benne a töltéshordozók az idegen töltésszétválasztó erőkkel szemben mozognak. Ezért a villamos tér energiája ebben a generátorban az idegen töltésszétválasztó erők "leküzdésére" használódik el. Így egy más fajta energiává (nem szükségszerűen hőenergiává) alakul át. Hogy a fogyasztóként működő feszültséggenerátor milyen energiává alakítja a villamos tér energiáját, az a generátor fajtájától függ (pl. az akkumulátorokban a villamos energia kémiai energiává alakul át, a forgó generátorokban a villamos energia mechanikai energiává alakul át, illetve ez esetben a generátor, mint villanymotor működik).

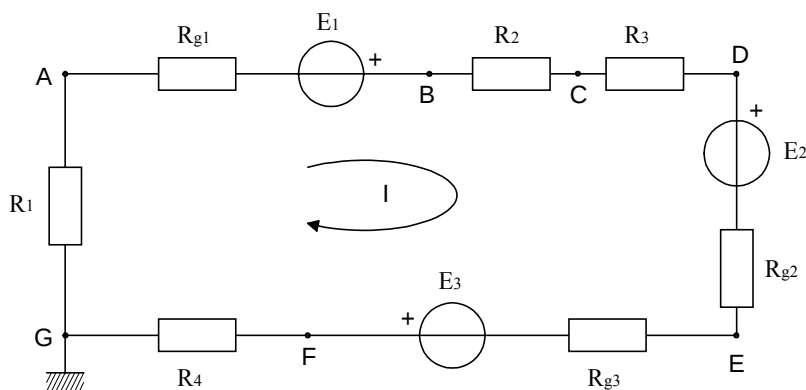
3.7.3. FESZÜLTSG ÉS POTENCIÁL AZ ÁRAMKÖRBEN

Azt már láttuk hogyan lehet a feszültséget kiszámítani a generátor és az ellenállás pólusai között. Most megismerkedünk azokkal a kifejezésekkel, amelyek segítségével egy áramkör bármely két pontja között ki lehet számítani a feszültséget, illetve bármely pont potenciálját meg lehet határozni a kiválasztott, vonatkoztatási vagy alapponthoz viszonyítva.

A feszültség értéke az áramkör bármely két pontja között, egyenlő a pontok között lévő ellenállások és generátorok kivezetései ill. pólusai között lévő feszültségek algebrai összegével.

Magától értetődő, hogy ennek a feszültségnek az értéke nem függ (nem függhet) az úttól, amelyen át számítjuk, mert mint már említettük, a stacionáris áramlási tér ugyanolyan tulajdonságú, mint az elektrosztatikus tér.

Fejezzük ki a C és G pontok közötti feszültséget mind a két lehetséges módon: először a C-ből a D, E és F ponton keresztül haladva a G pont felé, majd pedig a B és A érintésével eljutva a C-ből a G-be.



3.25. ábra.

$$U_{cg} = U_{cd} + U_{de} + U_{ef} + U_{fg} = R_3 \cdot I + E_2 + R_{g_2} \cdot I + R_{g_3} \cdot I - E_3 + R_4 \cdot I$$

$$U_{cg} = U_{cb} + U_{ba} + U_{ag} = -R_2 \cdot I + E_1 - R_{g_1} \cdot I - R_1 \cdot I$$

A feszültség számításakor három fontos irányra kell figyelni. Az elektromotoros erő (forrásfeszültség) irányára, az áram referenciáirányára és az áramkör körüljárási irányára (azt az irányt értjük alatta, amely irányba haladva eljutunk az egyik pontból a másikba).

Ha a számításakor az áram referenciáirány és a körüljárási irány megegyeznek, akkor az RI szorzatot pozitív előjellel vesszük számba, ha viszont az áram referenciáirány és a körüljárási irány ellentétesek, akkor az RI szorzat előjele negatív. Az elektromotoros erő előjele pozitív, ha az iránya a körüljárási iránnyal ellentétes, és negatív előjelű, ha az iránya és a körüljárási irány megegyeznek.

A kifejezés könnyebb megjegyzése céljából az összes elektromotoros erő elé negatív előjelet teszünk, és ezután az elektromotoros erőt pozitív előjellel látjuk el, ha a forrásfeszültség iránya és az áramkör körüljárási iránya megegyeznek, illetve negatív előjellel, ha különböznek.

$$U_{AB} = \left(\sum R \cdot I - \sum E \right) \text{ A-tól B-ig}$$

Ebben a kifejezésben, a körüljárási irányt A-tól B-felé vesszük és amennyiben az áram referenciáirány és az elektromotoros erő iránya megegyezik a körüljárási iránnyal, akkor az RI szorzatok és az E-k értékét pozitív algebrai előjellel vesszük számba.

Sok esetben a hálózatok elemzésekor az U_{AB} feszültséget nem az A pontból a B pont felé haladva számítjuk, hanem fordítva, a B pontból haladunk az A pont felé. Ez esetben a fenti képletben a tényezők előjelet váltanak.

$$U_{AB} = \left(\sum E - \sum R \cdot I \right) \text{ a B-től az A-ig}$$

A két pont közötti feszültség mellett, az áramkörben bármely pont potenciálját is meghatározhatjuk. Az adott pont potenciáljának kiszámításához szükség van egy kiválasztott alappontra (vonatkoztatási pontra vagy referenciapontra). A kiválasztott pont potenciálértékét a kiválasztott pont és az alappont közötti feszültség kiszámításával kapjuk meg:

$$V_A = \left(\sum R \cdot I - \sum E \right) \text{ A-tól R-ig,}$$

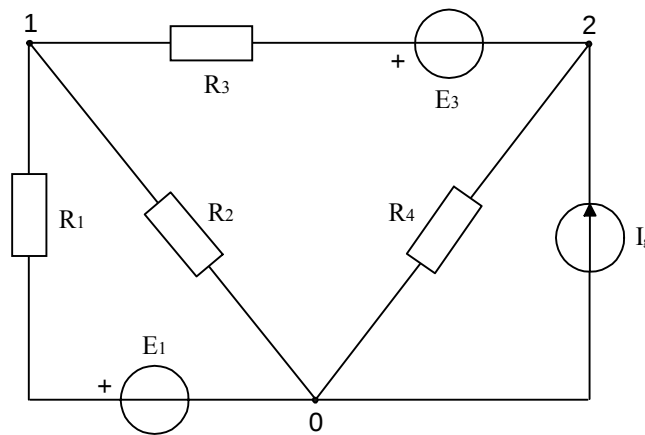
vagy pedig:

$$V_A = \left(\sum E - \sum R \cdot I \right) \text{ R-től A-ig.}$$

3.8. A villamos hálózatok és Kirchhoff második törvénye

3.8.1. RÖVIDEN A VILLAMOS HÁLÓZATOKRÓL

Eddig csak a generátorok és ellenállások soros kapcsolását elemeztük amit egyszerű áramkörnek nevezünk. A gyakorlatban sokkal nagyobb jelentőséggel bír a generátorok és ellenállások összetett kapcsolási módja, ahogy azt a 3.26. ábra is mutatja. Az ilyen összetett kapcsolási módot villamos hálózatnak esetleg összetett áramkörnek nevezzük. Ha a villamos hálózat áramforrásokat (generátorokat) tartalmaz, úgy aktív hálózatról beszélünk. Ha viszont a villamos hálózatban nincs áramforrás, akkor passzív hálózattal állunk szembe.



3.26. ábra

A hálózat lineáris, ha csak lineáris elemeket (kétpólusokat) tartalmaz, a nem lineáris hálózatok legalább egy nem lineáris elemet kell, hogy tartalmazzanak. Csomópontnak a hálózatnak azt a pontját nevezik, ahol legalább két vagy több vezető összekapcsolódik. Mi, csomópontnak azokat a pontokat fogjuk tekinteni, ahol legalább három vezető kapcsolódik össze. A hálózat azon részét, amely kétpólusokat (ellenállást vagy áramforrást) tartalmaz a két szomszédos csomópont között, a hálózat ágának nevezzük.

3.8.2. KIRCHHOFF MÁSODIK TÖRVÉNYE

Ha a hálózat ágaiban egyenáram folyik, akkor a villamos tér, ahogy azt már említettük, ugyanolyan tulajdonsággal bír, mint az elektrosztatikus villamos tér. Tehát a villamos térerősség vektorának vonalintegrálja egy tetszőleges zárt vonal mentén, (amely most a villamos hálózat ágait követi) nullával egyenlő.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Ez az egyenlet Kirchhoff második törvényének általános alakja (integrálalakja). A villamos hálózatok esetében a törvényben szereplő zárt vonalakat, amelyeket a hálózat ágai képeznek hurkoknak nevezzük. A hálózateleméletben megszokott eljárás, hogy a Kirchhoff második törvényében az integrálalak helyett kifejezzük az ágakban elhelyezkedő ellenállások és generátorok pólusai közötti feszültségeket. Az így kapott egyenletet Kirchhoff második vagy huroktörvénye törvénye néven ismeretes.

$$\sum E - \sum R \cdot I = 0$$

Természetesen az E és RI kifejezések előjele pozitív, ha az elektromotoros erő, illetve az áram referenciáiránya megegyezik a hurok körüljárási irányával, ellenkező esetben pedig az előjel negatív.

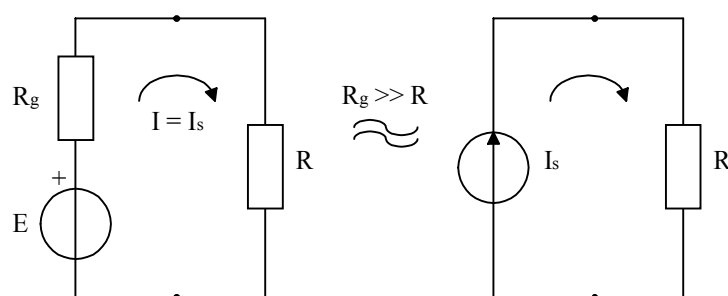
Kirchhoff első (csomóponti) és második (hurok) törvénye a hálózatelemzés alapjait képezik, és rájuk épül sok más, a gyakorlati hálózatelemzésben igen hasznos és használatos eljárás és tétel is.

3.9. Áramgenerátorok

Többféle olyan áramforrás létezik, amelyeknek az a közös tulajdonságuk, hogy a rajtuk átfolyó áram erőssége, (illetve az általuk szolgáltatott áram erőssége) nem függ a pólusaikra kapcsolt ellenállás értékétől, ha az a bizonyos pólusokra kapcsolt ellenállás értéke egy előre meghatározott határértékek között mozog.

$$I = \frac{E}{R_g + R} \cong \frac{E}{R_g} = I_0$$

Ha most feltételezzük, hogy $R_g \gg R$, akkor az I áram gyakorlatilag független az R ellenállás értékétől. Az ilyen áramforrás (generátor) az adott R ellenállásra nézve úgy viselkedik, mint egy állandó áramerősségű generátor. Az ilyen áramforrást ideális áramgenerátornak nevezzük.



3.27. ábra.

A villamos hálózatnak abban az ágában, amelyben ideális áramgenerátor van, az áram erőssége mindig egyenlő a generátor áramával, függetlenül a vele sorba kötött ellenállások, vagy feszültséggenerátorok értékeitől.

Az áramgenerátor teljesítménye egyenlő a generátor áramának és a pólusain lévő feszültségnek a szorzatával. A generátor feszültsége függ a generátor bekötési módjától és minden egyes áramgenerátorra külön kell meghatározni (Kirchhoff második törvénye alapján).

Az ideális feszültség- és áramgenerátor között nincs és nem is lehet egyenértékűség (ekvivalencia) mert, a meghatározás szerint lényegbeli eltérés van közöttük. Az ideális feszültséggenerátor a definíció értelmében állandó feszültségkülönbséget tart fenn a pólusai között, függetlenül a rajta áthaladó áramerősségtől. Az ideális áramgenerátoron, viszont, mindig állandó áram folyik keresztül, függetlenül a pólusai közötti feszültségkülönbségtől.

A valós feszültséggenerátor kapocsfeszültségének áramfüggőségét egy ideális feszültséggenerátor és egy ellenállás (a valós feszültséggenerátor belső ellenállása) soros kapcsolásával szemléltettük. A valós áramgenerátor árama bizonyos mértékben függ a generátor pólusaira kapcsolt feszültségtől, ezért a valós áramgenerátort egy ideális áramgenerátor és egy ellenállás párhuzamos kötéseként ábrázoljuk.

A következőkben azt bizonyítjuk majd, hogy mindig található egy olyan valós áramgenerátor, amely egyenértékű egy adott valós feszültséggenerátorral. Az egyenértékűség alatt ez esetben azt értjük, hogy egy tetszőleges ellenállású fogyasztón, akár az áram-, akár a feszültséggenerátorra kapcsoljuk, ugyanaz az áram folyik keresztül illetve ugyanakkora lesz a feszültség is a végpontjai között.

A feszültséggenerátor árama:

$$I = \frac{E}{R + R_g}.$$

A feszültség értéke az áramgenerátor pólusai között viszont:

$$U = I_a \cdot \frac{R_a \cdot R}{R_a + R}.$$

Az áram erőssége az R ellenálláson keresztül:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{I_a \cdot R_a}{R_a + R}$$

Az előbbi kifejezések alapján, a valós feszültséggenerátorral egyenértékű valós áramgenerátor tényezőinek az értékei:

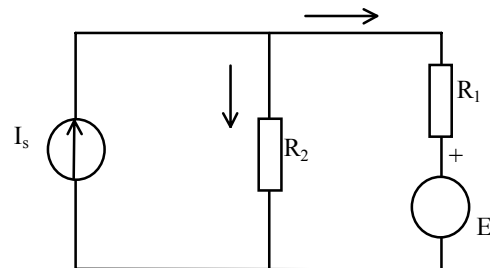
$$R_a = R_g \quad \text{és} \quad I_a = \frac{E}{R_g} = G_g \cdot E$$

A valós áramgenerátor modelljeként egy ideális áramgenerátor és egy ellenállás (amely a valós áramgenerátor belső ellenállását képezi) párhuzamos kapcsolását fogadtuk el. E modell szerint, még ha az áramgenerátor pólusai nyitottak is, a generátor belső ellenállásán (R_a) keresztül áram folyik. Így tehát, az elfogadott modell alapján, a villamos energia hővé alakulása folyamatosan történik, függetlenül attól, hogy a valós áramgenerátor áramkörbe van-e kapcsolva vagy sem. Ez azonban csak a valós áramgenerátor elfogadott modelljének a következménye és a valóságban nem jellemzi a valós áramgenerátort.

3.13. Példa: Számítsuk ki az R_1 és R_2 ellenállásokon keresztül folyó áram erősségét az alábbi kép alapján. Mekkora a számértéke az áramerősségeknek, ha $E=20[V]$, $R_1=2[\Omega]$, $R_2=4[\Omega]$, az áramgenerátor árama pedig:

- a) $I_s=2 [A]$,
- b) $I_s=10 [A]$?

Mindkét esetre határozzuk meg az áram- és feszültséggenerátor teljesítményét is!



3.28. ábra

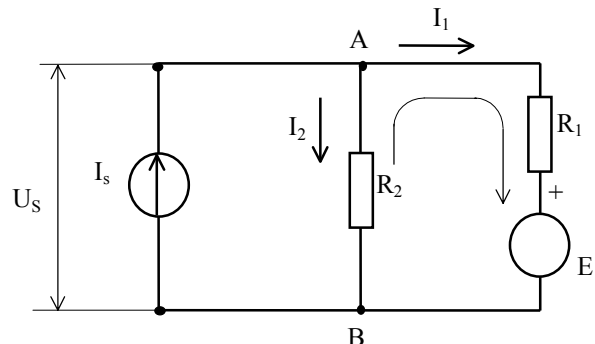
Megoldás:

A példában megadott hálózatra Kirchhoff első vagy csomóponti törvénye alapján (legyen ez az A csomópont) egyenlet írható fel:

$$-I_s + I_1 + I_2 = 0,$$

és ugyancsak egy egyenletet írhatunk fel Kirchhoff második vagy huroktörvénye segítségével (a képen a kiválasztott hurok körjárási iránya adott):

$$-I_1 \cdot R_1 - E + I_2 \cdot R_2 = 0.$$



3.29. ábra

Ha I_1 és I_2 értékeire megoldjuk az egyenletrendszer, akkor a következő kifejezéseket kapjuk:

$$I_1 = \frac{I_s \cdot R_2 - E}{R_1 + R_2},$$

és

$$I_2 = \frac{I_s \cdot R_1 + E}{R_1 + R_2}.$$

Az első esetben, amikor $I_s=2$ [A], a keresett értékek a következők:

$$I_1=-2[\text{A}], \quad I_2=4[\text{A}],$$

$$\text{az áramgenerátor teljesítménye } P_{SG} = U_s \cdot I_s = U_{AB} \cdot I_s = (I_1 \cdot R_1 + E) \cdot I_s = 32[\text{W}],$$

$$\text{a feszültséggenerátor teljesítménye pedig } P_{NG} = I_1 \cdot (-E) = 40[\text{W}].$$

Az második esetre, amikor $I_s=10$ [A], a kért értékek a következők:

$$I_1=3,33[\text{A}], \quad I_2=6,67[\text{A}],$$

$$\text{az áramgenerátor teljesítménye } P_{SG} = U_s \cdot I_s = U_{AB} \cdot I_s = (I_1 \cdot R_1 + E) \cdot I_s = 266,6[\text{W}],$$

$$\text{a feszültséggenerátor teljesítménye pedig } P_{NG} = I_1 \cdot (-E) = -66,6[\text{W}].$$

A kapott eredményekből látható, hogy a második esetben a feszültséggenerátor fogyasztói üzemmódban dolgozik (tehát nem generátorként, hanem fogyasztóként viselkedik)!

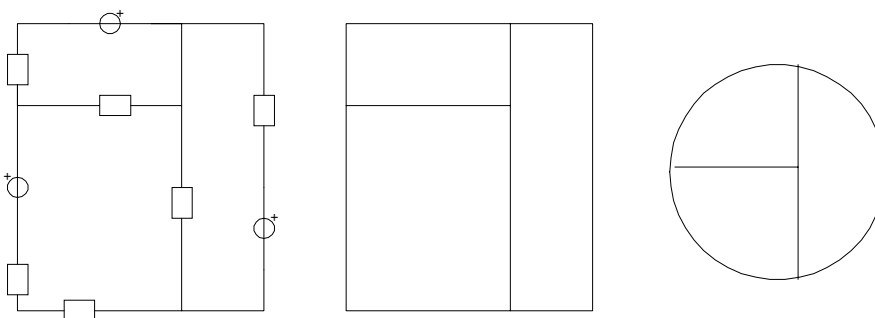
3.10. Hálózatanalízis

Az elektromágneses jelenségek vizsgálatánál általában nem érdekel bennünket az elektromágneses tér minden ismérve, hanem csupán néhány, valamint az elektromágneses jelenségeket leíró számunkra fontos mennyiségek kapcsolata. Hatványozottan igaz ez az állítás a villamos hálózatok esetében, ahol csupán a leggyakrabban használatos integrális mennyiségek (áram, feszültség és töltés) közötti kapcsolatra vagyunk kíváncsiak (majd később, a mágnesesség áttanulmányozása után a mágneses fluxus és az előbbiek közötti kapcsolat is érdekessé fog válni). Ebben a részben a villamos hálózatokkal kapcsolatos alapvető fogalmakkal és törvényszerűségekkel ismerkedünk meg, valamint a hálózatanalízis (hálózatszámítás) “egyszeregy”-gyét tanuljuk meg.

A hálózatanalízis problémája a következő módon írható le. Adott a villamos hálózat geometriája, az aktív és passzív elemek elhelyezése a hálózatban, és az aktív valamint passzív elemek jellemzőinek teljes leírása. A feladat pedig a hálózati elemeken átfolyó áramok meghatározása, esetleg még a rajtuk fellépő feszültségesés kiszámítása.

3.10.1. A HÁLÓZATTOPOLÓGIA ALAPFOGALMAI

Villamos hálózatok esetében két fontos dologra kell figyelnünk: az egyik az, hogy milyen elemekből, a másik pedig, hogy hogyan épül fel a hálózat (vagyis milyen a geometriája a hálózatnak – 3.30 ábra).



3.30. ábra

A hálózat felépítése vagy hálózattopológiai szempontból csupán az a fontos, milyen módon kapcsolódnak egymáshoz az elemek. Azokat a hálózati elemeket, amelyeknek két kapcsuk vagy pólusuk van, **kétpólusoknak** vagy **póluspároknak** nevezzük. Az eddig megismert hálózati elemek mind a kétpólusok képviselői voltak, és mint ilyenek, csak a pólusoknál kapcsolódhattak egymáshoz.

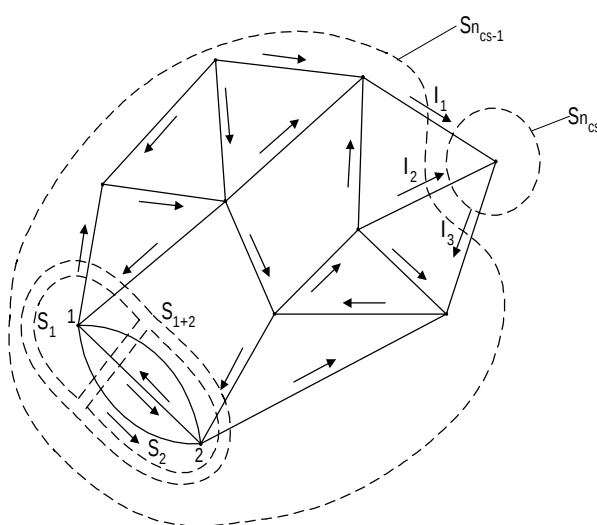
Az előző fejezetekben már megismertedtünk a hálózattopológia egyes fogalmaival, de a teljesség kedvéért vegyük őket újra számba, valamint mindazokat az újabb fogalmakat amelyeket a későbbiekben használunk.

A villamos hálózat **ágát** azok a sorba kapcsolt kétpólusok képezik, amelyeken ugyanazon áram folyik keresztül. Az ágak találkozásánál találhatóak a **csomópontok**. Valódi csomópontnak csak olyan pontot tekintünk, ahol legalább három ág találkozik. **Hurkot** akkor képezünk egy villamos hálózatban, ha egy csomópontból kiindulva, az ágak mentén haladva visszatérünk a kiindulási pontba. Egy hálózatban általában nagyon sok hurkot kijelölhetünk, de a későbbiekben látni fogjuk, hogy csak a **független hurkoknak** van jelentősége a számunkra. A villamos hálózat

gráfja topológiai szempontból nem különbözik az eredeti hálózattól (ágak, csomópontok és a hurkok száma és elrendezése ugyanaz), de nem tartalmazza a konkrét hálózati elemeket.

A hálózat gráfjának birtokában teljesen általános jellegű tényeket szűrhetünk le, tudhatunk meg a hálózatról, amelyek függetlenek a hálózatot alkotó elemek (kétpólusok) természetétől, fajtájától. A gráf segítségével határozható meg, hogy hány független egyenlet írható fel Kirchhoff csomóponti (első) és huroktörvénye (második) alapján.

Amennyiben a villamos hálózatnak n_{cs} csomópontja van, úgy a csomóponti törvény segítségével ugyanannyi egyenlet írható fel. Ezek az egyenletek azonban nem függetlenek, vagyis nem mindegyik hordoz új információt a számunkra. Lássuk hány független egyenlet írható fel Kirchhoff első (csomóponti) törvénye alapján. Írjuk fel a csomóponti törvényt a 3.31. ábrán feltüntetett 1 és 2 csomópontokra, majd adjuk össze a két kapott egyenletet. Mit kaptunk így? Hát azt az egyenletet, amit az 1 és 2 csomópontot magába foglaló csomópont adna a csomóponti törvény.



3.31. ábra

Írjuk most fel Kirchhoff első törvényét az $S_{n_{cs}-1}$ csomópontra, amely felöleli az utolsón kívül az összes $(n_{cs}-1)$ csomópontot:

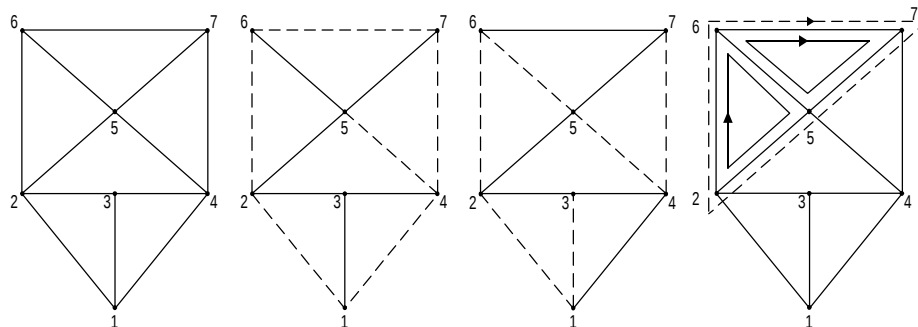
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Ha most felírjuk a csomóponti törvényt a még megmaradt n_{cs} -edik csomópontra, ugyanezt az egyenletet kapjuk (csak megváltozott előjelekkel). Más szóval az utolsó csomópontra felírható egyenlet megkapható az előző egyenletek összeadásával, vagyis nem független. Ebből aztán megállapíthatjuk, hogy az n_{cs} csomóponttal rendelkező hálózat esetén csak $(n_{cs}-1)$ független egyenletet írhatunk fel a csomóponti törvény alapján.

Vizsgáljuk most meg a huroktörvény alkalmazásának lehetőségeit, vagyis, hogy hány független egyenlet írható fel Kirchhoff második törvénye alapján. Nézzük meg a 3.32. ábrán levő hálózat gráfját (bal oldali kép). Vegyük most figyelembe azokat az ágakat, amelyek összekötik a gráf valamennyi csomópontját, de úgy, hogy nem hoznak létre egyetlen hurkot sem. Ezek az ágak képezik a **gráf fáját**, és a **gráf faágainak** nevezzük őket. Vegyük észre, hogy minden gráfnak több lehetséges fája is létezik (a bal oldali gráf két lehetséges fája látható a 3.32. ábra közepén). Egy kiválasztott fa esetén, a gráf fájában nem szereplő ágak a **bekötő ágak** (ezeket szaggatott vonal jelzi a 3.32. ábrán). Nézzük most, hogy hány ágból épül fel a gráf fája. Ha a hálózat n_{cs} csomópontot tartalmaz, akkor a gráf fája pontosan $(n_{cs}-1)$ ágból áll, hiszen az első ág két csomópontban végződik, míg az összes többi ág csak egy-egy újabb csomópontban. Legyen n_a a hálózat össz ágainak száma, így a bekötő ágak száma könnyen számítható:

$$n_h = n_a - (n_{cs} - 1).$$

A kicsit is összetettebb hálózatban a lehetséges hurkok száma igencsak nagy, de számunkra csak a független hurkoknak van jelentősége, mert az csak az ilyen (független) hurkokra felírt hurokegyenletek függetlenek egymástól. Egy-hurok teljes bizonyossággal csak akkor független az előzőleg kijelöltektől, ha legalább egy új, addig még nem kijelölt (más hurkoknál nem számbavett) ágot tartalmaz. Matematikailag bizonyítható, hogy egy adott hálózatra is sok független hurokrendszer alakítható ki, de valójában a létrehozható független hurkok legnagyobb száma a számunkra elfogadható. Ezt viszont úgy alakíthatjuk ki legkönnyebben, ha az első utáni minden újabb hurok kialakításánál csak egy, addig még nem figyelembe vett ágot kapcsolunk be.



3.32. ábra

Ennek bizonyítására nézzük meg a 3.32. ábra jobb oldali részén lévő két független hurkot, amelyeket telt vonalakkal ábrázoltunk. Ezeknek kialakításánál a hálózati gráf ágaihoz csak egy-egy bekötő ágot kapcsolunk be. Vegyük észre, hogy a szaggatott vonallal ábrázolt hurok esetében a kialakítás folyamán a gráf ágaihoz két bekötő ágot rendeltünk hozzá, mégpedig azt a két bekötő ágot, amelyek az előző két független hurok bekötőágai is voltak. Az így kialakított (és szaggatott vonallal megjelölt) hurok nem független, mert a rá felírható egyenlet Kirchhoff második törvénye alapján megkapható az öt alkotó két független hurokra felírt huroktörvény (egyenlet) összegeként. Ugyanezzel a fejtegetéssel bizonyítható, hogy az összes olyan hurok, amelynek kialakításánál a gráf ágai mellett két vagy több bekötő ág szerepel, nem lehet független. Ezzel egyben bizonyítást nyert, hogy Kirchhoff független hurokegyenleteinek száma, amelyet egy hálózatra felírhatunk, a független hurkok számával egyenlő.

Egy n_{cs} számú csomóponttal és n_a számú ággal rendelkező hálózatban, n_a számú ismeretlen áramunk (ágáramok) és ugyanannyi számú ismeretlen feszültségünk (ágfeszültségünk) van, vagyis az ismeretlenek száma $2n_a$. Ohm törvényének ismeretében felírható n_a számú egyenlet az ágfeszültségek és áramok közötti összefüggésről, tehát még n_a számú egyenlet szükséges, hogy az össz $2n_a$ ismeretlent kiszámíthassuk. Pontosan ennyi, tehát n_a számú (független) egyenletet biztosít számunkra Kirchhoff csomóponti és huroktörvénye, hiszen a csomóponti törvény alapján felírható független egyenletek száma $(n_{cs} - 1)$, a huroktörvény alapján pedig $[n_a - (n_{cs} - 1)]$, vagyis összesen:

$$(n_{cs} - 1) + [n_a - (n_{cs} - 1)] = n_a.$$

Ezek szerint bármilyen bonyolult is a villamos hálózat, Kirchhoff törvényei elégségesek a megoldására, hiszen elegendő egyenletet biztosítanak a megoldásra.

Ha ismerjük a feszültségeket a fa minden ágán (a hálózat fájának össz ágfeszültségét – melynek száma megegyezik a fát alkotó ágak számával – $[n_{cs} - 1]$), akkor segítségükkel kifejezhetők a feszültségek az összes bekötőágon. Másrészt, bekötőágak nélkül nem írható fel egyetlen hurokáram-egyenlet sem, hiszen a fa ágai nem alkotnak hurkot, más szóval nem írható fel egyetlen olyan hurokáram-egyenlet sem, amelyben kizárólag csak a hálózat fájának ágfeszültségei szerepelnének. Az előzőek alapján tehát leszögezhetjük, hogy a hálózatban az n_a

számú ágfeszültségből csak $(n_{cs}-1)$ számú a független (ág)feszültség. Ez a tény képezi az alapját a csomóponti potenciálok módszerének (egyesek független potenciálok módszerének is nevezik).

Kirchhoff csomóponti törvénye alapján $(n_{cs}-1)$ független egyenlet írható fel. Ez azt jelenti, hogy az összes n_a számú ágáramból $(n_{cs}-1)$ számú ágáram kifejezhető a többi $(n_h=[n_a-(n_{cs}-1)])$ számú ágáram függvényében. Ez arra utal, hogy az összes n_a számú ágáram nem független, hanem csupán az az n_h számú ágáram független, amelyeknek függvényében a többi $(n_{cs}-1)$ áram kifejezhető. A hurokáramok módszere épül erre a tényre.

3.10.2. HÁLÓZATSZÁMÍTÁS A KIRCHHOFF-TÖRVÉNYEKSEL

A hálózatszámítás talán legtermészetesebb (de semmiképpen sem a legrövidebb) útja vagy módja a Kirchhoff-törvények közvetlen alkalmazása.

A hálózatszámítás menete a következő. A megoldandó hálózat ágaiban megjelöljük (kijelöljük) az ágáramokat és vonatkoztatási (referencia) irányukat. Lerajzoljuk a hálózat gráfját, és kijelöljük a gráf egyik fáját. Ezek után, egy-egy bekötő ág hozzáadásával a kapott független hurokra felírjuk Kirchhoff második törvényét, amelynek eredményeként n_h független hurokegyenletet kapunk. A maradék $(n_{cs}-1)$ egyenletet a csomóponti törvény alapján írjuk fel, tetszőlegesen kiválasztva, hogy melyik csomópontra nem írjuk fel a csomóponti törvényt. Legvégül pedig a lineáris egyenletrendszer megoldása a feladat.

A Kirchhoff-törvények alkalmazásának az a nagy hátránya, hogy nagy számú egyenletet kell megoldani (amennyi az ismeretlen, vagyis n_a). Az n számú egyenletről álló egyenletrendszer megoldása folyamán elvégzendő matematikai műveletek száma megközelítőleg $n^3/3$, és ez a szám már magáért beszél.

A Kirchhoff-törvényekkel leírt hálózat egyenletrendszere lineáris (elsőfokú) egyenletekből áll, amelyeknek általános alakja:

$$\sum_{k=1}^{n_a} a_{jk} I_k = b_j, \dots, j = 1, 2, \dots, n_a$$

Itt az a_{jk} és b_j értékei ismertek, az I_k ismeretlenek értékeit kell kiszámolnunk. A későbbiekben látni fogjuk majd, hogy a hurokáramok és a csomóponti potenciálok módszere is ilyen egyenleteket ad, csak az egyenletek száma jóval kisebb: a hurokáramok módszerénél n_h , a csomóponti potenciálok módszerénél pedig $(n_{cs}-1)$.

A csomóponti és huroktörvény egyenletei mellett a hálózat megoldásához szükségünk van még n_a számú egyenletre, amely egyenleteket, mint már tudjuk Ohm törvényének ismeretében írhatunk fel: ezek az egyenletek az ágfeszültségek és ágáramok közötti kapcsolatot tartalmazzák a hálózat minden egyes ágára, tehát pontosan annyi van belőlük, amennyi a hálózatszámításhoz szükséges. Amennyiben az ágba ellenállás, valós (belső ellenállással rendelkező) feszültség- vagy áramgenerátor található, az ágfeszültség és ágáramok közötti összefüggés minden különösebb gond nélkül felírható.

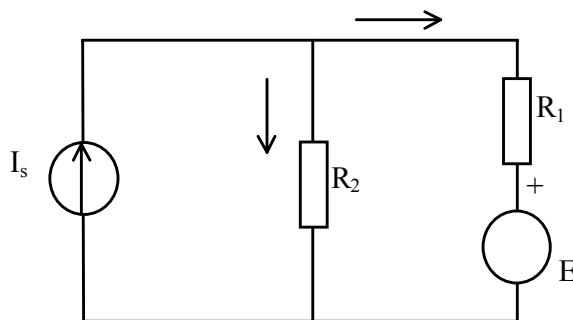
Abban az esetben azonban, amikor az ágba csak egy ideális feszültség- vagy áramgenerátor található, a fent említett összefüggés (az ág feszültsége és árama között) nem létezik. Az ilyen ágakra tehát nem írhatók fel a feszültséget és áramerősséget kapcsolatba hozó egyenletek, de vegyük észre, hogy nincs is szükség rájuk, hiszen ezekben az ágakban már eleve ismert a két ismeretlen mennyiség közül az egyik (vagy az ideális feszültséggenerátor feszültsége, amely ekkor egyben az ágfeszültség is, vagy az ideális áramgenerátor árama, amely akkor egyben az ág árama is). Így tehát a hálózatra felírandó Kirchhoff-egyenletek száma annnyival kevesebb az össz ágak számánál, ahány ágba ideális feszültség- vagy áramgenerátor

alkotja az ágot (ahány ágban az ideális feszültség- vagy áramgenerátor egyedül, önmagában alkotja az ágot).

3.14. Példa: Számítsuk ki az R_1 és R_2 ellenállásokon keresztülfolyó áram erősségét a 3.33. ábra alapján. Mekkora a számértéke az áramerősségeknek, ha $E=20[V]$, $R_1=2[\Omega]$, $R_2=4[\Omega]$, az áramgenerátor árama pedig:

- $I_s=2 [A]$,
- $I_s=10 [A]$?

Mindkét esetre határozzuk meg az áram- és feszültséggenerátor teljesítményét is!



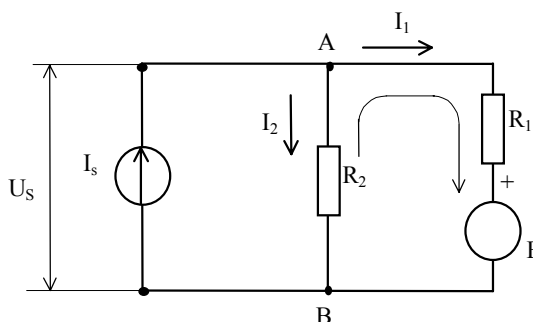
3.33. ábra

A példában megadott hálózatra Kirchhoff első vagy csomóponti törvénye alapján (legyen ez az A csomópont a 3.34. ábrán) egy egyenlet írható fel:

$$-I_s + I_1 + I_2 = 0,$$

és ugyancsak egy egyenletet írhatunk fel Kirchhoff második vagy huroktörvénye segítségével (a képen a kiválasztott hurok körüljárási iránya adott):

$$-I_1 \cdot R_1 - E + I_2 \cdot R_2 = 0.$$



3.34. ábra

Ha I_1 és I_2 értékeire megoldjuk az egyenletrendszert, akkor a következő kifejezéseket kapjuk:

$$I_1 = \frac{I_s \cdot R_2 - E}{R_1 + R_2} \quad \text{és} \quad I_2 = \frac{I_s \cdot R_1 + E}{R_1 + R_2}.$$

Az első esetben, amikor $I_s=2 [A]$, a keresett értékek a következők:

$$I_1=-2[A], \quad I_2=4[A],$$

az áramgenerátor teljesítménye $P_{SG} = U_s \cdot I_s = U_{AB} \cdot I_s = (I_1 \cdot R_1 + E) \cdot I_s = 32[W]$,

a feszültséggenerátor teljesítménye pedig $P_{NG} = I_1 \cdot (-E) = 40[W]$.

Az második esetre, amikor $I_s=10 [A]$, a kért értékek a következők:

$$I_1=3,33[A],$$

$$I_2=6,67[A],$$

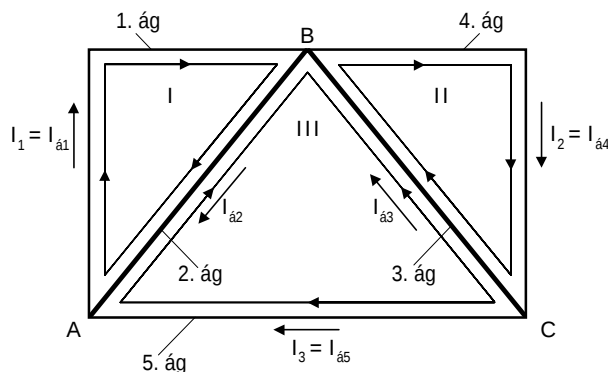
az áramgenerátor teljesítménye $P_{SG} = U_s \cdot I_s = U_{AB} \cdot I_s = (I_1 \cdot R_1 + E) \cdot I_s = 266,6[W]$,

a feszültséggenerátor teljesítménye pedig $P_{NG} = I_1 \cdot (-E) = -66,6[W]$.

A kapott eredményekből látható, hogy a második esetben a feszültséggenerátor fogyasztói üzemmódban dolgozik (tehát nem generátorként, hanem fogyasztóként viselkedik)!

3.10.3. HUOKÁRAMOK MÓDSZERE

A Kirchhoff egyenletek esetében az ágramok voltak az ismeretlenek, így n_a számú egyenletet kellett felírni a hálózat áramainak kiszámítására. Az előzőek alapján azonban tudjuk, hogy a hálózatban folyó áramok közül csak n_h számú áram független egymástól, mert a többi ($n_{cs}-1$) felírható az előbbiek függvényében. Válasszuk most ezeket a független hurkokban folyó áramokat ismeretlennek, csökkentve ezzel az ismeretlenek és szükséges egyenletek számát.



3.35. ábra

A 3.35. ábrán a megoldandó hálózat gráfját láthatjuk valamint ennek egy kijelölt fáját, amely alapján a független hurkokat is megjelöltük. A hurokáram módszerénél azt kell elképzelnünk, hogy minden független hurokban egy-egy fiktív, időben állandó áram, a hurokáram folyik körbe. Ez az elképzelés fizikailag természetesen képtelenség, hiszen azt feltételezi, hogy az ágakat képező vezetékek keresztmetszetének egyik részén egyik, másik részén esetleg a másik irányba folyik az áram, ami helytelen, és nincs valóságalapja. Matematikailag azonban ez a feltételezés teljesen helyes és azt jelenti, hogy az ágramokat az illető ágakban folyó fiktív hurokáramok algebrai összegeként számolhatjuk. A 3.35. ábra azt is elárulja, hogy a hurokáramok bevezetésével Kirchhoff első törvényét már eleve automatikusan kielégítettük, vagyis, hogy a csomóponti egyenletek a hurokáramok esetében automatikusan kielégülnek, hiszen az állandó hurokáramok változatlanul haladnak keresztül a csomópontokon.

A hurokáramok bevezetésének jogosságának igazolására írjuk fel a huroktörvényt az I-el jelölt független hurokra:

$$(\sum E)_{\text{az I hurok mentén}} - (\sum R \cdot I_1)_{\text{az I hurok mentén}} - (\sum (-R \cdot I_3))_{\text{az I és III hurok közös ágán, az } a_2-n} = 0$$

Az előző kifejezés az átrendezés után a következő alakot veszi fel:

$$(\sum R \cdot I_1)_{\text{az I hurok mentén}} + I_3 \cdot (-\sum R)_{\text{az I és III hurok közös ágán, az } a_2-n} = (\sum E)_{\text{az I hurok mentén}}$$

A teljes egyenletrendszer így a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} I_1 R_{11} + I_2 R_{12} + \dots + I_n R_{1n} &= E_{11} \\ I_1 R_{21} + I_2 R_{22} + \dots + I_n R_{2n} &= E_{22} \\ \text{-----} \\ I_1 R_{n1} + I_2 R_{n2} + \dots + I_n R_{nn} &= E_{nn} \end{aligned}$$

ahol a jelölések értelme:

I_j - az ismeretlen hurokáram a j hurokban $j = 1 \leq j \leq n$

$$R_{jj} = \left(\sum R \right)_{a \text{ j hurok mentén}}$$

ha a j és k hurok iránya az adott ágban megegyező

$$R_{jk} = R_{kj} = \pm \left(\sum R \right)_{a \text{ j és k hurok közös ágai mentén}} \quad (j \neq k \quad j, k=1, \dots, n)$$

ha a j és k hurok iránya az adott ágban különböző

ha a generátor és a hurok iránya megegyező

$$E_{jj} = \left(\sum (\pm E) \right)_{a \text{ j hurok mentén}}$$

ha a generátor és a hurok iránya különböző

Amennyiben a j és k huroknak nincs közös ága, akkor érvényes, hogy:

$$R_{jk} = R_{kj} = 0$$

A hurokáramok módszere alkalmazható valós (belső ellenállással rendelkező) áramgenerátorokat tartalmazó villamos hálózatokra is. Ez esetben a valós áramgenerátorokat valós feszültséggenerátorrá alakítjuk és csak utána alkalmazzuk a hurokáramok módszerét a hálózat megoldására.

Ideális áramgenerátorokat tartalmazó hálózat esetében a hurokáramokat úgy válasszuk meg, hogy azok egyenlők legyenek valamely hurok áramával, vagyis, hogy minden áramgenerátor árama a hálózat ágai mentén önmagába záródik. Magától értetődően egy adott áramgenerátor áramát nem zárhatjuk olyan ág mentén, amelyben egy másik áramgenerátor van. Így minden áramgenerátor meghatároz egy hurokáramot, amelyre már szükségtelen felírni a hurokáram-egyenletet, mert ezek a hurokáramok már ismertek számunkra (ugyanis az áramgenerátorok áramai adottak). Ezek szerint a hurokáramok módszere alapján felírandó egyenletek száma nem a független hurok számával egyenlő ha ideális áramgenerátorok is vannak a hálózatban. Az egyenletek száma ettől (a független hurok számától) pontosan a hálózatban előforduló ideális áramgenerátorok számával kevesebb. Természetesen az ideális áramgenerátorok alkotta hurokáramok is szerepelnek a hurokáramok-egyenletekben.

3.15. Példa: A hurokáramok módszerével határozzuk meg az áramerősséget a 3.36. ábrán látható áramkör valamennyi ágában valamint az összes áramfejlesztő (generátor) és ellenállás teljesítményét! Számadatok: $E_1=1V$, $E_2=2V$, $E_3=3V$, $E_5=5V$, $E_6=6V$, $I_{g4}=0,3mA$, $R_1=1k\Omega$, $R_2=7k\Omega$, $R_3=3k\Omega$, $R_5=7k\Omega$, $R_6=6k\Omega$.

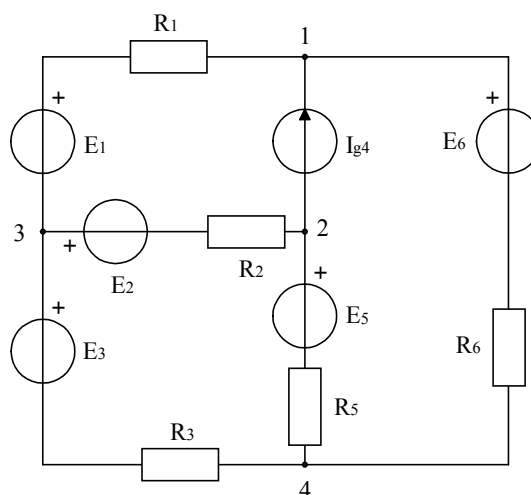
Megoldás:

Vegyük szemügyre a 3.36. ábrát, és jelöljük ki tetszőlegesen a független hurkokat. Előtte azonban számláljuk meg a csomópontok és az ágak számát:

$$n_a = 6$$

$$n_{cs} = 4$$

$$n_h = n_a - (n_{cs} - 1) = 3$$



3.36. ábra

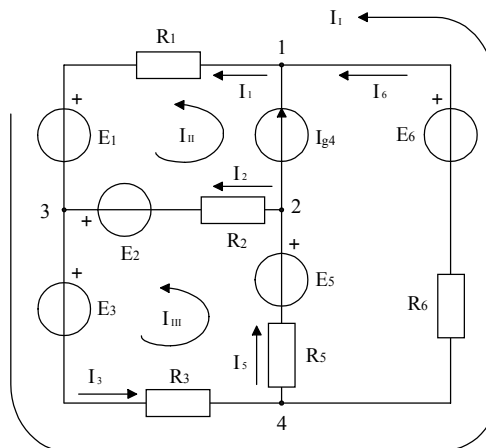
Alakítsuk ki a hurkokat a 3.37. ábrán feltüntetett módon. Ez természetesen csak egy a több lehetséges független hurokrendszer közül, de figyeljünk fel arra, hogy a II hurok árama megegyezik az egyetlen áramgenerátor áramával, amely ismert, így a felírandó egyenletek száma eggyel csökken. Az egyenletek tehát:

$$\begin{aligned} R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} &= E_I \\ R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} &= E_{III} \\ I_{II} &= I_{g4} \end{aligned}$$

Lássuk most, hogy mi is a jelölések értelme a fent felírt egyenletekben:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_3 + R_6 + R_1 = 10\text{k}\Omega \\ R_{12} &= R_{21} = R_1 = 1\text{k}\Omega \\ R_{13} &= R_{31} = R_3 = 3\text{k}\Omega \\ R_{23} &= R_{32} = -R_2 = -7\text{k}\Omega \\ R_{33} &= R_2 + R_3 + R_5 = 17\text{k}\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_I &= E_6 - E_1 - E_3 = 2\text{V} \\ E_{III} &= E_5 - E_3 + E_2 = 4\text{V} \end{aligned}$$



3.37. ábra

Behelyettesítve a kiszámolt értékeket a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 10^3 I_I + 10^3 I_{II} + 3 \cdot 10^3 I_{III} &= 2 \\ 3 \cdot 10^3 I_I - 7 \cdot 10^3 I_{II} + 17 \cdot 10^3 I_{III} &= 4 \\ I_{II} &= 0,3 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Rendezés után az egyenletek alakja:

$$\begin{aligned} 10I_I + 3I_{III} &= 1,7 \cdot 10^{-3} \\ 3I_I + 17I_{III} &= 6,1 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a Cramer szabályt az egyenletek megoldására:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} = 161; \quad D_I = \begin{vmatrix} 1,7 \cdot 10^{-3} & 3 \\ 6,1 \cdot 10^{-3} & 17 \end{vmatrix} = 10,6 \cdot 10^{-3}; \quad D_{III} = \begin{vmatrix} 10 & 1,7 \cdot 10^{-3} \\ 3 & 6,1 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = 55,9 \cdot 10^{-3}$$

$$I_I = \frac{D_I}{D} = 0,07 \cdot 10^{-3} \text{A} = 0,07 \text{mA};$$

$$I_{III} = \frac{D_{III}}{D} = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{A} = 0,35 \text{mA}.$$

A hurokáramok alapján az ágáramok könnyen kiszámíthatók:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_I + I_{II} = 0,37 \text{mA} \\ I_2 &= I_{III} - I_{II} = 0,05 \text{mA} \\ I_3 &= I_I + I_{III} = 0,42 \text{mA} \\ I_4 &= I_{g4} = 0,3 \text{mA} \\ I_5 &= I_{III} = 0,35 \text{mA} \\ I_6 &= I_I = 0,07 \text{mA} \end{aligned}$$

Az áramgenerátor teljesítményének kiszámításához szükség van a kapcsain mérhető feszültség (U_{12}) értékére

$$U_{12} = \sum_1^2 (RI - E) = -(-E_6 + E_5) + R_5 I_5 - R_6 I_6 = 3,03V$$

A generátorok teljesítményei:

$$P_{I_{G4}} = U_{12} I_{G4} = 0,92mW,$$

$$P_{E1} = -E_1 I_1 = -0,37mW,$$

$$P_{E5} = E_5 I_5 = 1,75mW,$$

$$P_{E2} = E_2 I_2 = 0,1mW,$$

$$P_{E3} = -E_3 I_3 = -1,26mW,$$

$$P_{E6} = E_6 I_6 = 0,42mW.$$

A generátorok összteljesítménye pedig:

$$P_{en} = P_{E1} + P_{E2} + P_{E3} + P_{I_{G4}} + P_{E5} + P_{E6} = 1,6mW$$

Az ellenállásokon a Joule-veszteségek teljesítménye egyenként a következő:

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 0,137mW,$$

$$P_{R3} = R_3 I_3^2 = 0,53mW,$$

$$P_{R6} = R_6 I_6^2 = 0,03mW,$$

$$P_{R2} = R_2 I_2^2 = 0,012mW,$$

$$P_{R5} = R_5 I_5^2 = 0,86mW.$$

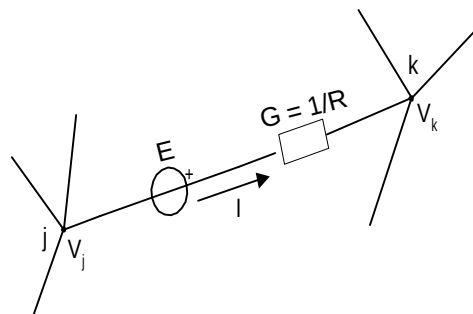
Az ellenállásokon hővé alakuló energia teljesítménye a generátorok összteljesítményével kell, hogy megegyezzen, amit az ellenállásokon számított veszteségek összege is igazol:

$$P_R = \sum_{i=1}^6 P_{R_i} = 1,6mW.$$

3.10.4. CSOMÓPONTI POTENCIÁLOK MÓDSZERE

A hálózatra felírt általános egyenletek száma nemcsak a hurokáramok bevezetésével csökkenthető. Az egyenletek száma ugyanúgy csökkenthető a csomóponti potenciálok bevezetésével is. Mivel a hálózatban $(n_{cs}-1)$ független (ág)feszültség van, a csomópontok potenciáljainak bevezetésével $(n_{cs}-1)$ ismeretlenünk lesz (egy tetszőlegesen kiválasztott csomópont potenciálját önkényesen nullának vehetjük). A csomóponti potenciálok a huroktörvényt automatikusan kielégítik, amit példán keresztül nagyon egyszerű ellenőrizni, mert a feszültségek összeadásakor minden potenciál kétszer szerepel, mégpedig egyszer pozitív, egyszer pedig negatív előjellel. A potenciálok ismeretében az áráramok a huroktörvény segítségével egyszerűen kifejezhetők.

Nézzük a j és k csomópontok közötti egyetlen ágat a 3.38. ábrán. Alkossa ezt az ágat (az egyszerűség kedvéért) csak egy ideális feszültséggenerátor és egy ellenállás. A generátor elektromotoros ereje mutasson a k csomópont felé, ahogy ez a 3.38. ábrán is látható. Ekkor a potenciálkülönbség definíciós kifejezése alapján felírható, hogy:



3.38. ábra

$$V_j - V_k = \left(\sum E - \sum RI \right)_{k-tól\ j\ felé} = RI - E$$

Kifejezve innen az áramerősséget:

$$I = \frac{1}{R} (E + V_j - V_k),$$

illetve:

$$I = G(E + V_j - V_k).$$

Ez a kifejezés az, amelynek segítségével kiszámítható bármelyik ágáram, amennyiben ismerjük a végein a potenciálokat. A kapott kifejezést alkalmazhatjuk az összes j csomópontban végződő ágra. A csomóponti törvény szerint az ágáramok algebrai összege minden csomópontban nulla. Írjuk fel a csomóponti egyenletet, és vegyük észre, hogy az tartalmazza az összes, vagy csak néhány csomóponti potenciált. Felírva az össz $(n_{cs}-1)$ csomóponti egyenletet elegendő számú egyenletünk lesz a csomóponti potenciálok kiszámításához. A kapott csomóponti potenciálértékek ismeretében pedig közvetlenül számíthatók az ágáramok.

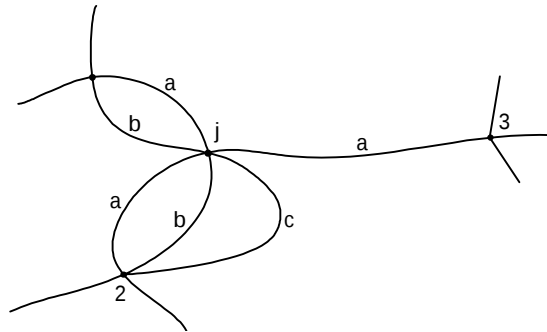
A csomóponti potenciálok módszerének rendezett egyenletrendszerét a következő módon tudjuk be- illetve levezetni. Nézzük a 3.39. ábrán lévő gráf-részt, és írjuk fel a j csomópontra Kirchhoff első (csomóponti) törvényét.

$$G_{ja1}(E_{ja1} + V_j - V_1) + G_{jb1}(E_{jb1} + V_j - V_1) + G_{ja2}(E_{ja2} + V_j - V_2) + \\ + G_{jb2}(E_{jb2} + V_j - V_2) + G_{jc2}(E_{jc2} + V_j - V_2) + G_{ja3}(E_{ja3} + V_j - V_3) = 0$$

ahol:

G_{ja1} – a j - a -1 ág vezetése

E_{ja1} – a j - a -1 ágban levő generátorok algebrai összege – az irány a j csomóponttól mutat az 1 csomópont felé



3.39. ábra

Átrendezés után a következő egyenlethez jutunk:

$$-V_1(G_{ja1} + G_{jb1}) - V_2(G_{ja2} + G_{jb2} + G_{jc2}) - V_3 G_{ja3} + \\ + V_j(G_{ja1} + G_{jb1} + G_{ja2} + G_{jb2} + G_{jc2} + G_{ja3}) = \\ = -(E_{ja1} G_{ja1} + E_{jb1} G_{jb1} + E_{ja2} G_{ja2} + E_{jb2} G_{jb2} + E_{jc2} G_{jc2} + E_{ja3} G_{ja3})$$

A rövidebb egyenletalak elérése céljából vezessük be a következő jelöléseket:

G_{jk} – az össz j és k csomópont között levő ág vezetéseinek összege negatív előjellel.

G_{jj} – az össz j csomópontban találkozó ág vezetéseinek összege.

$(\Sigma EG)_j$ – azon ágak vezetésének és generátorának e.m.s. szorzatát summázzuk (adjuk össze), amelyek a j csomópontban találkoznak (azon szorzatokat vesszük pozitív előjellel számba, amely ágakban a generátor iránya a j csomópont felé mutat; ellenkező esetben a szorzat előjele negatív).

Ezekután az egyenlet alakja a következő:

$$V_1 G_{j1} + V_2 G_{j2} + V_3 G_{j3} + V_j G_{jj} = (\Sigma EG)_j$$

Hasonló egyenletek írhatók fel a villamos hálózat minden csomópontjára. A hálózatban az egyik tetszőlegesen kiválasztott csomópont potenciálját nullának vesszük, a többi csomópontra pedig felírjuk a fentihez hasonló egyenleteket. Ha bevezetjük, hogy $n = n_{cs}-1$, akkor a következő, n egyenletből álló egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} V_1 G_{11} + V_2 G_{12} + \dots + V_n G_{1n} &= \left(\sum EG \right)_1 \\ V_1 G_{21} + V_2 G_{22} + \dots + V_n G_{2n} &= \left(\sum EG \right)_2 \\ &\text{-----} \\ V_1 G_{n1} + V_2 G_{n2} + \dots + V_n G_{nn} &= \left(\sum EG \right)_n \end{aligned}$$

V_j – a j csomópont potenciálja, $j = 1, 2, \dots, n$.

G_{jj} – az össz j csomópontban találkozó ág vezetéseinek összege, $j = 1, 2, \dots, n$.

$G_{jk} = G_{kj}$ – az össz j és k csomópont között levő ág vezetéseinek összege negatív előjellel, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \dots, n$.

$\left(\sum EG \right)_j$ – azon ágak vezetésének és generátorának e.m.s. szorzatát summázzuk (adjuk össze), amelyek a j csomópontban találkoznak (azon szorzatokat vesszük pozitív előjellel számba, amely ágakban a generátor iránya a j csomópont felé mutat; ellenkező esetben a szorzat előjele negatív), $j = 1, 2, \dots, n$.

Ha a villamos hálózatban áramgenerátorok működnek a feszültséggenerátorok helyett, akkor az egyenletrendszer alakja a következő lesz:

$$\begin{aligned} V_1 G_{11} + V_2 G_{12} + \dots + V_n G_{1n} &= \left(\sum I_s \right)_1 \\ V_1 G_{21} + V_2 G_{22} + \dots + V_n G_{2n} &= \left(\sum I_s \right)_2 \\ &\text{-----} \\ V_1 G_{n1} + V_2 G_{n2} + \dots + V_n G_{nn} &= \left(\sum I_s \right)_n \end{aligned}$$

$\left(\sum I_s \right)_j$ – a j csomópontban találkozó ágakban elhelyezkedő áramgenerátorok áramainak algebrai összege (az összegezésnél pozitív előjellel azokat az áramgenerátor-áramokat vesszük, amelyek referencia – vonatkoztatási iránya a j csomópont felé mutat, ellenkező esetben az előjel negatív), $j = 1, 2, \dots, n$.

Ha a villamos hálózat feszültség- és áramgenerátorokat is tartalmaz, úgy az egyenletek jobb oldalán a feszültséggenerátortól eredő „tag” és/vagy az áramgenerátoroktól eredő „tag” is megjelenhet. Legtöbbször azonban a hálózatban megjelenő valamennyi generátort előzőleg feszültség- vagy áramgenerátorrá alakítjuk.

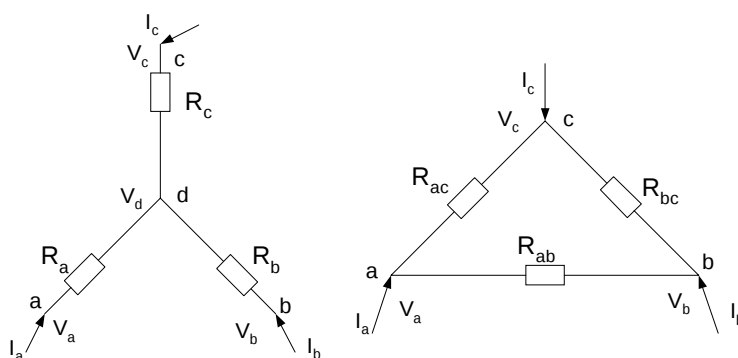
Ha a hálózatban vannak olyan ágak, amelyekben csak ideális feszültséggenerátorok helyezkednek el, akkor ezekre az ágakra az EG szorzat értéke végtelen (hiszen az ideális feszültséggenerátor belső ellenállása nulla), így az ilyen hálózatokra a csomóponti potenciálok módszere közvetlenül nem alkalmazható. Egy kibúvó- esetet említünk meg, amikor a csak ideális feszültséggenerátort tartalmazó ágakat magába foglaló hálózatokra mégis alkalmazható a csomóponti potenciálok módszere. Ha az ilyen (csak ideális feszültséggenerátort tartalmazó) ágak egy csomópontban találkoznak, akkor ezt a csomópontot választjuk a nulla potenciálú csomópontnak, amelyhez a többi csomópont potenciálját viszonyítjuk. Ebben az esetben az ilyen ágak másik végén elhelyezkedő csomópontok potenciáljai ismertek (a generátorok pozitív vagy

negatív előjellel vett elektromotoros erejével vagy forrásfeszültségével lesznek egyenlők), más szóval ennnyivel kevesebb egyenletet kell felírunk.

A hurokáramok és csomóponti potenciálok módszere elvileg egyenértékű. Hogy mégis melyiket ajánlatos használni, azt maga a hálózat topológiája fogja meghatározni, és általában azt a módszert alkalmazzuk, amelyik kevesebb egyenlethez vezet. Ha az ágakáramokat kell kiszámolnunk a hálózatban, akkor a hurokáramok módszere, ha pedig a feszültségekre vagyunk kíváncsiak, akkor a csomóponti potenciálok módszere vezet közvetlenebbül eredményre.

3.10.4.1. A csillag-háromszög átalakítás

Az eddigiek során megismerkedtünk az ellenállások soros, párhuzamos és vegyes kapcsolásával. Az ellenállásokból kialakított hurkokat rendre eredő ellenállással helyettesítettük, egyszerűsítve a hálózatot. Az eredő ellenállás számítása egyszerű az ismertett kifejezések alapján. Szépséghibája talán csak a vegyes kapcsolású ellenállás-hurkoknak van, hiszen ott, általános esetben, nem számítható ki „egy lépésben” az eredő ellenállás.



3.40. ábra

Összetett áramkörökben gyakran előfordul három ellenállásnak (esetleg más áramköri elemnek) a 3.40. ábrán bemutatott kétfajta kapcsolata. Most annak a feltételét fogjuk kutatni, hogy mikor lesz egyenértékű egymással a 3.40. ábra bal oldalán elhelyezkedő csillag (ipszilon) kapcsolás az ábra jobb oldalán elhelyezkedő háromszög (delta) kapcsolással? Természetesen akkor, ha az egyes kapcsok közötti ellenállások megegyeznek. Tételezzünk fel mindkét kapcsolásfajta esetében egyforma áramgenerátor-gerjesztést az a, b és c csomópontokban, ahogy az a 3.40. ábrán is látható (a 3.40. ábráról az is leolvasható, hogy $I_a + I_b + I_c = 0$). Amennyiben ezen feltételek mellett az illető csomópontok potenciáljai is megegyeznek, úgy a két kapcsolás megegyező.

A megegyezőségi (ekvivalencia) feltétel a megfelelő csomópontok potenciáljainak kiegyenlítéséből áll, ehhez azonban ismernünk kell a csomópontok potenciáljait. Alkalmazzuk hát a csomóponti potenciálok módszerét a csillag és háromszög kapcsolásra is. Legyen a c csomópont a kiválasztott, melynek potenciálját nullának vesszük. Így a delta kapcsolásra a következő két egyenletet kapjuk:

$$V_a (G_{ab} + G_{ac}) - V_b G_{ab} = I_a$$

$$-V_a G_{ab} + V_b (G_{ab} + G_{bc}) = I_b$$

ahol G a megfelelő vezetést jelenti, és az ellenállás reciprok értékével egyenlő.

A csillag kapcsolásra három egyenletet kapunk, hiszen a háromom kívül van még egy csomópontunk, a d csillagpont:

$$V_a G_a - 0 - V_d G_a = I_a$$

$$0 + V_b G_b - V_d G_b = I_b$$

$$V_a G_a - V_b G_b + V_d (G_a + G_b + G_c) = 0$$

A harmadik egyenletből a d pont potenciálját kifejezve, majd azt behelyettesítve az előző két egyenletbe, ezek összehasonlíthatókká válnak a háromszögre felírt csomóponti potenciál egyenletekkel. Tehát:

$$V_d = \frac{V_a G_a + V_b G_b}{G_o}$$

ahol $G_o = G_a + G_b + G_c$.

A visszahelyettesítés után a csillag kapcsolás két egyenlete:

$$V_a \left(G_a - \frac{G_a^2}{G_o} \right) - V_b \frac{G_a G_b}{G_o} = I_a$$

$$-V_a \frac{G_a G_b}{G_o} + V_b \left(G_b - \frac{G_b^2}{G_o} \right) = I_b$$

A háromszög és csillagkapcsolás két-két egyenletét összehasonlítva könnyen belátható, hogy a megfelelő potenciálok mellett álló tényezők kiegyenlítésével a megegyezőségi feltételhez jutunk:

$$G_{ab} + G_{ac} = G_a - \frac{G_a^2}{G_o}$$

$$G_{ab} = \frac{G_a G_b}{G_o}$$

$$G_{ab} + G_{bc} = G_b - \frac{G_b^2}{G_o}$$

Amennyiben az így kapott egyenletrendszer első egyenletéből kivonjuk a második egyenletet, a különbségre a következőket kapjuk:

$$G_{ac} = G_a - \frac{G_a^2}{G_o} - \frac{G_a G_b}{G_o} = G_a - \frac{G_a (G_a + G_b)}{G_o} = G_a - \frac{G_a (G_o + G_c)}{G_o}$$

$$G_{ac} = \frac{G_a G_o - G_a G_o + G_a G_c}{G_o} = \frac{G_a G_c}{G_o}$$

$$G_{ab} = \frac{G_a G_b}{G_o}$$

$$G_{bc} = \frac{G_b G_c}{G_o}$$

Az utolsó két kifejezés már számítás nélkül is felírható a G_{ac} vezetésre kapott kifejezésből, teljes megelégedés alapján. Ha most a G_{ac} egyenletébe behelyettesítjük a vezetéseknek megfelelő ellenállásokat, akkor a vezetések közötti összefüggés helyett az ellenállások közötti összefüggésekhez jutunk (bennünket ugyanis elsősorban ez a kapcsolat érdekel):

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{\frac{1}{R_a} \cdot \frac{1}{R_c}}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}} = \frac{\frac{1}{R_{ac}}}{\frac{R_{bc} + R_{ac} + R_{ab}}{R_a R_b R_c}} = \frac{R_b}{R_{bc} + R_{ac} + R_{ab}}$$

$$R_{ac} = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}$$

A háromszög kapcsolás a és b pontja közötti ellenállás értéke látható a fenti kifejezésben, mégpedig a csillag kapcsolásban szereplő ellenállások függvényében. Az egyenlet alapján a törvényszerűség a kétindexű (delta) ellenállás és az egyindexű (csillag) ellenállások között nagyon szembetűnő, így a másik két háromszög kapcsolású ellenállásra már egyszerűen írható:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}$$

Ezzel az átalakítás csillagból háromszögbe lényegében adott. A fenti egyenletek szolgálnak a delta kapcsolás ellenállásainak kiszámítására, ha adottak a csillag kapcsolás ellenállásértékei. A fordított összefüggés levezetéséhez tüntessük el az előző három kifejezésből a törteteket:

$$R_{ab} R_c = R_a R_c + R_b R_c + R_a R_b$$

$$R_{ac} R_b = R_a R_c + R_b R_c + R_a R_b$$

$$R_{bc} R_a = R_a R_c + R_b R_c + R_a R_b$$

Mivel az egyenletek jobb oldalai egybevágóak, így a bal oldalait is kiegyenlíthetjük egymással. Fejezzük ki ezekből az egyenletekből az az R_b és R_c csillag kapcsolású ellenállásokat a delta kapcsolású ellenállások és az R_a függvényében:

$$R_{ab} R_c = R_{ac} R_b = R_{bc} R_a$$

$$R_b = \frac{R_a R_{bc}}{R_{ac}}$$

$$R_c = \frac{R_a R_{bc}}{R_{ab}}$$

Helyettesítsük most be az így kapott kifejezéseket az R_{bc} háromszög kapcsolású ellenállás egyenletébe, és fejezzük ki a benne szereplő egyetlen csillag kapcsolású ellenállást, az R_a -t:

$$R_{bc} = \frac{R_a R_{bc}}{R_{ab}} + \frac{R_a R_{bc}}{R_{ac}} + \frac{\frac{R_a R_{bc}}{R_{ab}} \frac{R_a R_{bc}}{R_{ac}}}{R_a}$$

$$R_{bc} = R_a \left(\frac{R_{bc}}{R_{ac}} + \frac{R_{bc}}{R_{ab}} \right) + R_a \frac{R_{bc}^2}{R_{ac} R_{ab}} = R_a \frac{R_{ab} R_{bc} + R_{ac} R_{bc} + R_{bc}^2}{R_{ac} R_{ab}}$$

$$R_a = \frac{R_{ac} R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} R_{bc} + R_{ac} R_{bc} + R_{bc}^2}$$

$$R_a = \frac{R_{ac} R_{ab}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}$$

Ezek szerint, ha a háromszög kapcsolású ellenállások értéke adott, akkor azokat a következő kifejezésekkel számíthatjuk át a csillag kapcsolás ellenállás-értékeivé:

$$R_a = \frac{R_{ac} R_{ab}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}$$

$$R_c = \frac{R_{ac} R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}$$

Amint látható az átalakításra használatos egyenletek egyszerűek, könnyen megjegyezhetőek, nem úgy, mint a hozzájuk tartozó levezetés. Tekinthetjük viszont ezt a kis agytornát a csomóponti potenciáloknak, mint eljárásnak a gyakorlati alkalmazásaként is.

3.10.5. A SZUPERPOZÍCIÓ ELVE

A villamos hálózatok, függetlenül a bonyolultságuk fokától, megoldhatók a Kirchhoff egyenletek segítségével. A gyakorlatban azonban ez a hozzáállás általában nem javasolt a megoldandó egyenletek nagy száma miatt. A hálózatanalízis megoldásainak gyorsított eljárásai (hurokáramok módszere, csomóponti potenciálok módszere) mellett rendelkezésünkre állnak olyan általános érvényű tételek, amelyek a hálózat linearitásából fakadnak. Ezek közé tartozik a szuperpozíció elve is.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy a lineáris hálózat valamennyi ágárama kifejezhető azon áramok algebrai összegével, amelyeket a hálózatban működő feszültség- és áramgenerátorok egyenként működve létrehoznak.

A szuperpozíció elvének bizonyítására nézzük meg hogyan fejezhető ki általánosan a tetszőleges hurokáram a determinánsok módszerével. Ez nem más, mint a hurokáramok módszere alapján felírható egyenletrendszer megoldása Cramer-szabállyal. Nézzük előbb a hurokáramok módszer nyújtotta egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} I_1 R_{11} + I_2 R_{12} + \dots + I_n R_{1n} & = & E_{11} \\ I_1 R_{21} + I_2 R_{22} + \dots + I_n R_{2n} & = & E_{22} \\ \text{-----} & & \\ I_1 R_{n1} + I_2 R_{n2} + \dots + I_n R_{nn} & = & E_{nn} \end{array}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása a Cramer szabály szabály szerint:

$$I_k = \frac{D_k}{D}$$

ahol D az egyenletrendszer (nullától különböző) determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}$$

- a D_k determinánst pedig úgy kapjuk, hogy a D determináns k -edik oszlopának elemeit ($R_{1k}, R_{2k}, \dots, R_{nk}$) rendre felcseréljük az $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn}$ elemekkel, vagyis

$$D_k = \sum_{i=1}^n E_{ii} D_{ik}$$

ahol D_{ik} a D determináns R_{ik} eleméhez tartozó algebrai vagy előjeles aldetermináns

Behelyettesítve a D_{ik} algebrai aldeterminánst az egyenletrendszernek a Cramer szabály szerinti megoldásába, a kifejtett alak a következő lesz:

$$I_k = E_{11} \frac{D_{1k}}{D} + E_{22} \frac{D_{2k}}{D} + \dots + E_{nn} \frac{D_{nk}}{D} \quad k = 1, 2, \dots, n_k$$

Ismeretes, hogy az áramokat az illető ágakban folyó hurokáramok algebrai összegeként írhatjuk fel, így a tetszőleges, mondjuk k -edik ágba folyó áram a következő alakú lesz:

$$I_{gk} = a_{k1} E_1 + a_{k2} E_2 + \dots + a_{km} E_m$$

ahol az $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}$ tényezők csak a hálózat ágaiban elhelyezkedő ellenállás-értékektől függenek, a generátorok forrásfeszültségeitől (legyen, mondjuk összesen m feszültséggenerátorunk a hálózatban) viszont nem! Ha az m számú feszültséggenerátor mellett p darab áramgenerátor is működik a hálózatban, úgy a k -edik ágba folyó áram a következő alakban írható fel:

$$I_{gk} = a_{k1} E_1 + \dots + a_{km} E_m + b_{k1} I_{s1} + \dots + b_{kp} I_{sp}$$

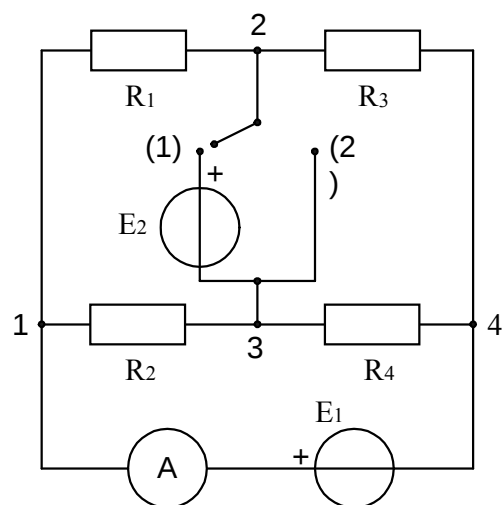
ahol az I_{sj} ($j = 1, 2, \dots, p$) az áramgenerátorok forrásáramait jelöli.

Innen aztán már szembeötlő a bizonyítani kívánt tétel, tudniillik, hogy a lineáris hálózat bármelyik (valamennyi) ágára kifejezhető azon áramok algebrai összegével, amelyeket a hálózatban működő feszültség- és áramgenerátorok az illető (a megfigyelt) ágba egyenként működve hoznának létre.

3.16. Példa: A 3.41. ábrán látható áramkörnek ismert minden ellenállása: $R_1=100\Omega$, $R_2=200\Omega$, $R_3=300\Omega$, $R_4=200\Omega$. Amikor a K kapcsoló az 1. helyzetben van akkor az elhanyagolható belső ellenállású amperméter $I_{41}=0,1A$ áramerősséget mutat. Amikor a kapcsoló a 2. helyzetben van, akkor az amperméter $I_{41}=0,2A$ -t mutat. A szuperpozíció-tétel alapján határozzuk meg az E_2 feszültséggenerátor forrásfeszültségét (elektromotoros erejét)!

Megoldás:

Jelölje I_{41}' az áramerősséget a 4-1 ágba amikor csak az E_1 generátor dolgozik a hálózatban (a kapcsoló 2 helyzetben van, vagyis $I_{41}'=0,2A$).



3.41. ábra

Jelölje I_{41}'' az áramerősséget a 4-1 ágban amikor csak az E_2 generátor dolgozik a hálózatban.

Amikor a K kapcsoló az 1. helyzetben van, akkor mindkét generátor dolgozik, tehát E_1 és E_2 forrásfeszültség is jelen van az összetett áramkörben. Ekkor, a szuperpozíció tétel alapján a 4-1 ágban az áramerősség: $I_{41} = I_{41}' + I_{41}''$

Mikor a kapcsoló a 2. helyzetben van, akkor az amperméter $I_{41} = I_{41}''$ áramerősséget mutat.

Azt az állapotot, amikor csak az E_2 generátor működik, a 3.42. ábra mutatja. Ha most a 3.42. ábra 4-es csomópontjára Kirchhoff első törvényét alkalmazzuk, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$I_{41}'' = I_{24}'' - I_{43}''$$

Másrészt az ábra alapján felírható, hogy::

$$I_{24}'' = \frac{U_{24}}{R_3}, \quad \text{illetve} \quad I_{43}'' = \frac{U_{43}}{R_4}.$$

Ugyancsak a 3.42. ábráról közvetlenül leírhatjuk, hogy:

$$U_{24} = \frac{E_2}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, \quad \text{és}$$

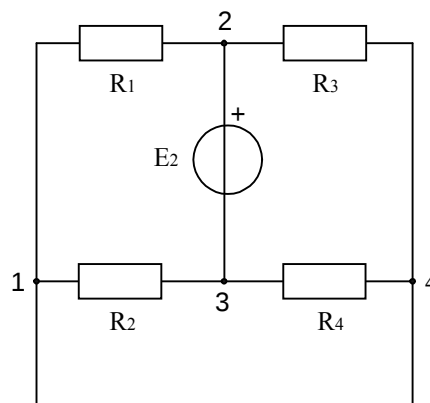
$$U_{43} = \frac{E_2}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

$$I_{41}'' = \frac{E_2}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right) = -\frac{10^{-2}}{7} E_2$$

Ezt az áramerősséget a hurokáramok módszerével is meghatározhattuk volna, sőt gyakorlásképpen és az eredmények egyeztetésének céljából bármikor elvégezhető ez a másik módszer is, csak akkor három egyenletet kell felírni a 3.42. ábrán látható három hurokra.

Az ismert áramértékekből egyszerűen számítható a keresett forrásfeszültség:

$$\begin{aligned} I_{41}'' &= I_{41} - I_{41}' = -0,1 \text{ A} \\ I_{41}'' &= -\frac{1}{7} \cdot 10^{-2} E_2 = -0,1 \\ E_2 &= 0,7 \cdot 10^2 \text{ V} = 70 \text{ V} \end{aligned}$$



3.42. ábra

3.10.6. A FELCSERÉLÉSI TÉTEL (RECIPROCITÁS TÉTELE)

A felcserélési tétel megértéséhez figyeljük meg a 3.43. ábrán levő hálózatot, amelyben csupán egy működő feszültséggenerátor található. A hálózat két megjelölt ággal rendelkezik: a j és a k ággal. Igazolni fogjuk, hogy ha a j ágban elhelyezett generátor a k ágban I áramerősséget eredményez, akkor ugyanez a generátor áthelyezve a k ágba a j-vel jelölt ágban ugyancsak I

gy a hurko

$$I_k = E_{jj} \frac{D_{jk}}{D} = E_j \frac{D_{jk}}{D}$$

$$I_j = E_{kk} \frac{D_{kj}}{D} = E_k \frac{D_{kj}}{D}$$

A kifejezések természetesen az előző pontban ismertetett hurokáramok módszerével felírható egyenletrendszer Cramer szabály szerinti megoldásából erednek azzal a megszorítással, hogy most csupán egyetlen feszültséggenerátorunk van.

vagy előjeles aldeterm

$$|R_{11} \dots R_{1,(k-1)} R_{1,(k+1)}$$

Esetünkben a D_{jk} és a D_{kj} algebrai vagy előjeles aldeterminánsok a következők:

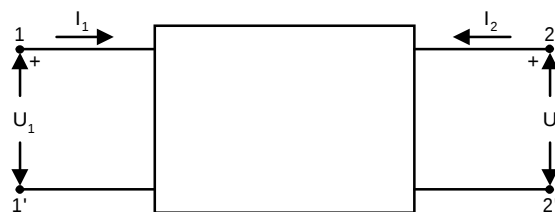
$$\left| R_{11} \dots R_{1,(k-1)} R_{1,(k+1)} \dots R_{1n} \right|$$
$$|R_{11} \dots R_{1,(k-1)} R_{1,(k+1)} \dots R_{1n}|$$

állíthatjuk, hogy a fenti két algebrai aldetermináns egyenlő, vagyis $D_{jk} = D_{kj}$. Mivel pedig $E_j = E_k$ (hiszen ugyanarról a feszültséggenerátorról van szó), az áramoknak is egyenlőnek kell lenniük, tehát $I_j = I_k$.

3.17. Példa: A felcserélési (reciprocitás) tétel alkalmazására nézzük meg a 3.44. ábrán látható kétpóluspárt (négyfázist). Ez egy passzív hálózat két pár csatlakozóval. A hálózat linearitásának köszönve felírható, hogy:

$$I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2$$

$$I_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2$$



3.44. ábra

Bizonyítsuk be a reciprocitás-tétel segítségével, hogy $G_{12} = G_{21}$, másszóval, hogy a kétpóluspár három tényezővel jellemezhető (definiálható).

Megoldás:

A rövidrezárt 1-1' csatlakozás esetében ($U_1 = 0$) az első egyenlet a következő alakot ölti:

$$I_1 = G_{12}U_2.$$

Ha viszont a 2-2' csatlakozást zárjuk rövidre ($U_2 = 0$), akkor a második egyenlet alakja egyszerűsül:

$$I_2 = G_{21}U_1.$$

A felcserélési tétel alapján viszont leszögezhető, hogy a fent leírt két esetre, amennyiben $U_1 = U_2$, vagyis, ha a feszültségek egyenlők, akkor az áramerősségeknek is egyenlőeknek kell lenniük. Ezekből pedig egyértelműen az következik, hogy $G_{12} = G_{21}$, amit bizonyítani kellett.

3.10.7. THÈVENIN- ÉS NORTON-TÉTEL

A Thèvenin-tételként ismert összefüggést Helmholtz (Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821-1894, német fizikus, fiziológus) fogalmazta meg még 1853-ban. A tétel szerint minden aktív villamos hálózat, bármely kiválasztott két pontjához viszonyítva úgy viselkedik, mint egy valós feszültséggenerátor. Másszóval a lineáris aktív kétpólus egy ideális (belső ellenállás nélküli) feszültségforrás és egy ellenállás soros kapcsolásával (Thèvenin-generátorral) helyettesíthető. A tételt a következő kifejezés írja le:

$$U = E_T - R_T I$$

ahol:

- U a hálózat tetszőlegesen kiválasztott két pontja közötti feszültség,
- E_T a kiválasztott két pont közötti üresjáratú feszültség (a Thèvenin-generátor forrásfeszültsége),
- R_T pedig a következő kifejezéssel adott (a Thèvenin-generátor belső ellenállása):

$$R_T = \frac{E_T}{I_0}$$

az utolsó kifejezésben az I_0 a rövidrezárási áramot jelöli.

Ha a hálózatot a kiválasztott két pontjához viszonyítva nem feszültségforrással, hanem áramgenerátorral helyettesítjük, akkor a tételt Norton tételnek nevezzük, az áramgenerátort pedig Norton-generátornak. A

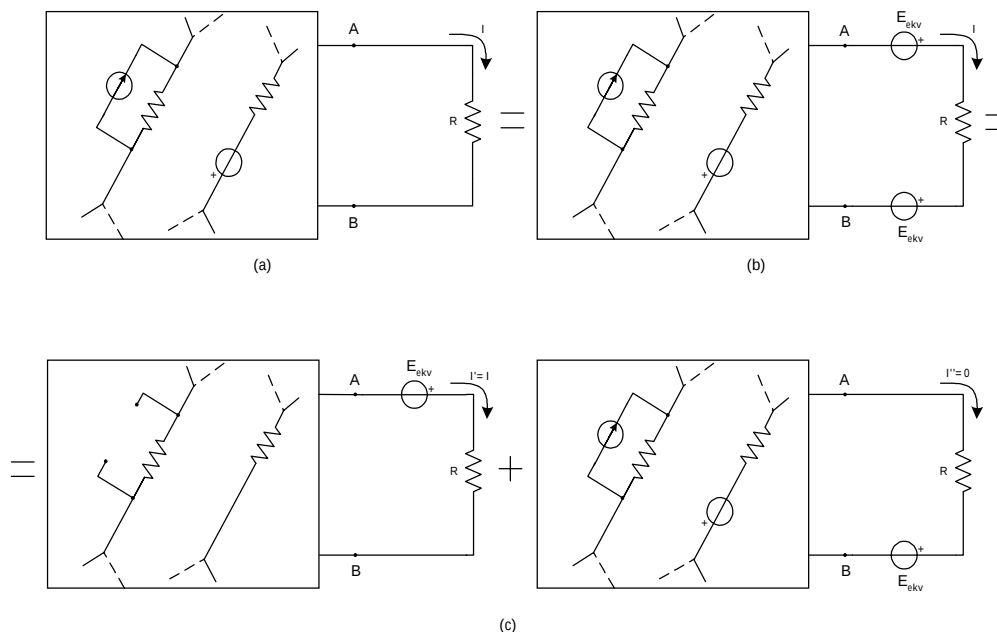
valós feszültséggenerátorral egyenértékű valós áramgenerátor tényezőinek az értékeit már megtanultuk kiszámítani:

$$R_A = R_g, \quad \text{és} \quad I_A = \frac{E}{R_g} = G_g \cdot E,$$

vagyis esetünkben az érvényes, hogy:

$$R_N = R_T, \quad \text{és} \quad I_N = I_0 = \frac{E_T}{R_T}$$

Vegyük észre, hogy a Norton-generátor árama a rövidrezárási árammal egyenlő.



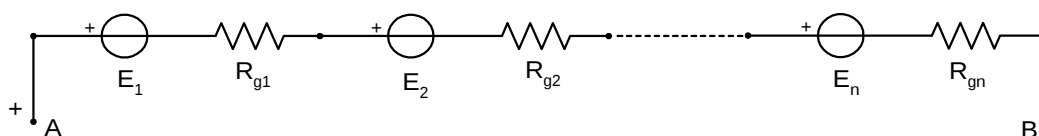
3.45. ábra

Lássuk most a tétel bizonyítását! Vegyünk egy tetszőleges bonyolultságú hálózatot – 3.45. ábra (a) része –, és húzzunk ki egy tetszőleges ágot (amely, az egyszerűség kedvéért, csak egy R ellenállást tartalmaz) a hálózatból. Tegyük fel, hogy az A és B pontokkal megjelölt kihúzott ágba két, egymással ellentétes irányba mutató, E_{ekv} elektromotoros erejű (forrásfeszültségű) feszültséggenerátort kötünk – (b) része a 3.45. ábrának. Így az ágáramok értékei a hálózatban nem változnak meg. Az E_{ekv} forrásfeszültség konkrét értékét a következő módon határozzuk meg. Képzeljük el, hogy a felső generátort kiiktattuk (az ágáramok értéke természetesen a kikapcsolás pillanatában megváltozott). Állítsuk be az alsó feszültségforrás E_{ekv} értékét úgy, hogy az A-B ágon keresztül folyó áram értéke nulla legyen! Erre az értékre állítsuk be a felső generátor forrásfeszültségét is, és helyezzük vissza az eredeti helyére!

Alkalmazzuk most a szuperpozíció elvét oly módon, ahogy ez a 3.45. ábra (c) részén látható. Ez a kép szolgál alapul arra, hogy a hálózat A-B ág nélküli részét generátorral helyettesíthessük, illetve, hogy a helyettesítő Thèvenin-generátor jellemzőinek (tényezőinek) értékét meghatározhassuk. A (c) ábrarész jobb oldala arról szól, hogy az E_{ekv} az A és B pontok közötti feszültséggel egyenlő akkor, amikor az A-R-B ágot eltávolítjuk, vagyis az E_{ekv} az A és B pontok közötti üresjáratú feszültséget jelenti. Ez tehát nem más, mint a helyettesítő Thèvenin-generátor forrásfeszültsége, azaz $E_T = E_{ekv}$. A (c) ábrarész bal oldala viszont a helyettesítő generátor belső ellenállásának meghatározásában segít: $R_T = R_{AB}$, az A-R-B ágot természetesen nem számítjuk bele.

3.10.7.1. Feszültséggenerátorok kapcsolása

A Thèvenin-tétel alkalmazásaként határozzuk meg a soros, párhuzamos és vegyes kapcsolású generátorok eredő forrásfeszültségét és eredő belső ellenállását! Lássuk először a generátorok soros kapcsolását, amelyet akkor alkalmaznak, amikor nagyobb feszültségre van szükség, mint a rendelkezésre álló generátor forrásfeszültsége (a belső ellenállás értéke pedig nem meghatározó tényező).



3.46. ábra

Az üresjáratú feszültség az A és B pont között a 3.46. ábra alapján a generátorok forrásfeszültségeinek összegével egyenlő, tehát:

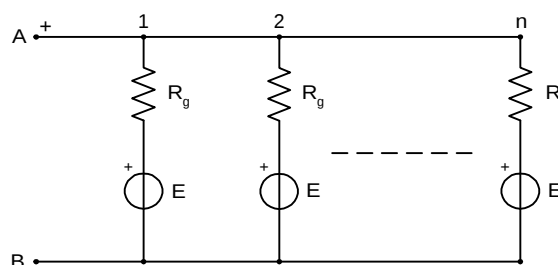
$$U_{AB} = E_T = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

A belső ellenállás megállapításánál az ideális feszültséggenerátorokat rövidzárnak kell tekintenünk, így egyszerűen írható, hogy:

$$R_{AB} = R_T = R_{g1} + R_{g2} + \dots + R_{gn}$$

Párhuzamosan általában egyenlő forrásfeszültségű (leginkább teljesen egyforma) generátorokat kapcsolnak. Teszik ezt akkor, amikor nincs szükség nagy kapocsfeszültségre, de tartósabb és nagyobb áramerősségű forrásra van szükség, mint amelyet egy rendelkezésre álló feszültséggenerátor biztosítani tud.

A 3.47. ábra alapján könnyen belátható, hogy a párhuzamosan kapcsolt feszültséggenerátorok kapcsolásának üresjáratú feszültsége egy generátor forrásfeszültségével egyenlő, a belső ellenállás kiszámolásánál pedig n darab R_g ellenállás párhuzamos kapcsolásával van dolgunk. Így aztán a párhuzamosan kapcsolt generátorok 3.47. ábrán felvázolt esetére felírhatjuk, hogy:



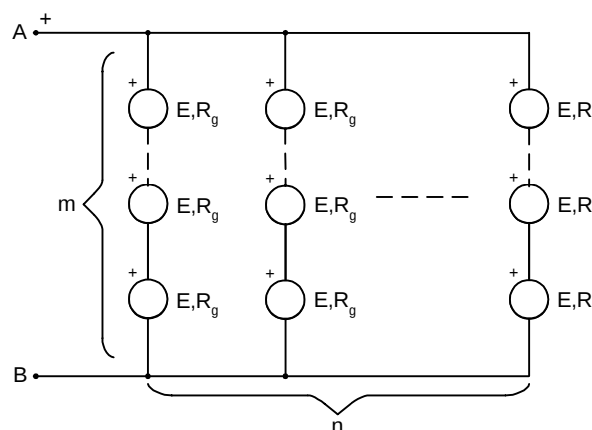
3.47. ábra

$$U_{AB} = E_T = E$$

illetve:

$$R_{AB} = R_T = \frac{R_g}{n}.$$

Vegyes kapcsolásra akkor van szükség, amikor aránylag magas feszültségre és nagy áramerősségre mutatkozik igény. Ennél a kapcsolásnál is leggyakrabban azonos jellemzőjű generátorokat alkalmaznak (3.48. ábra).



3.48. ábra

A Thèvenin-tétel alkalmazásával a következő kifejezések írhatók fel a 3.48. ábrán látható vegyes kapcsolásra:

$$U_{AB} = E_T = mE,$$

valamint

$$R_{AB} = R_T = \frac{m \cdot R_g}{n}.$$

3.10.8. A KOMPENZÁCIÓ (HELYETTESÍTÉS) TÉTELE

Nézzük a 3.49. ábrán felvázolt összetett hálózat-részt, potosabban az összetett hálózat egy kiragadott ágát. A kompenzáció tételének értelmében a hálózat egy ága (ágrésze), amely R ellenállást tartalmaz helyettesíthető egy $E_g = RI$ forrásfeszültségű feszültséggenerátorral, melynek referenciairánya ellentétes az áram irányával az adott ágban. A forrásfeszültség kifejezésében szereplő áramerősség természetesen az R ellenálláson keresztülfolyó ágáramot jelöli. Úgyanígy, ha egy ágban (ágrészben) az áramerősség valódi irányával ellentétes irányú feszültséggenerátor működik, akkor az helyettesíthető egy $R = \frac{E_g}{I}$ értékű ellenállással.



3.49. ábra

Válasszuk meg úgy a hurkokat a hálózatban, hogy az A és B csomópontok között, a 3.49. ábrán látható ág árama, az I egyben a k -adik hurok árama is legyen, majd írjuk fel Kirchhoff huroktörvényét a k -adik hurokra:

$$\sum E - \sum RI = 0.$$

Vegyük ki most az ellenállások és a rajtuk keresztülfolyó áramok szorzatainak összegéből az águnkra vonatkozó szorzat-tagot:

$$\sum E - RI - \sum_{R \text{ nélkül}} RI = 0,$$

majd helyettesítsük az RI szorzatot egy E_g értékkel:

$$(\sum E - E_g) - \sum_{R \text{ nélkül}} RI = 0.$$

Formailag az utolsó egyenlet is érvényes és pontos kifejezése Kirchhoff huroktörvényének a k -adik hurokra, azzal a megjegyzéssel, hogy a megfigyelt ágban szereplő ellenállást nem tartalmazza. Helyette (mintegy ellensúlyozásként) egy $E_g = RI$ forrásfeszültségű generátor jelenik meg. Ezzel bizonyítottnak tekinthetjük a helyettesítési (kompenzáció) tételt.

Amennyiben egy bonyolult hálózat egyik ágfeszültségét szeretnénk egy előre meghatározott értékre ellenállás segítségével beállítani, akkor a kompenzáció tétel alkalmazása a legegyszerűsebb. A kiválasztott ágat, ahol csak ellenállás van, feszültséggenerátorral helyettesítjük. A generátor forrásfeszültsége az az előre meghatározott érték, amelyet az

átfeszültségre meghatároztunk. A hálózatot ezután valamilyen módszerrel megoldjuk. Ha a kiválasztott ágba az áram valódi irányára ugyanazt az irányt kaptuk, mint amelyikbe a helyettesítő feszültséggenerátor is mutat, ez annak a bizonyítéka, hogy tisztán ellenállás-változtatással (mégpedig csak a kiválasztott ágba elhelyezkedő ellenállás megváltoztatásával) nem érhetjük el a kívánt (előre meghatározott) átfeszültséget.

A helyettesítés tétele áramgenerátor segítségével is megfogalmazható. Ez a hozzáállás akkor kedvező, ha a kiválasztott ágra nem az átfeszültséget, hanem az áram értékét kötjük ki. A tétel pedig a következő képpen hangzik. A hálózat bármelyik, ellenállást tartalmazó ága, amelyen keresztül I erősségű áram folyik, helyettesíthető egy ideális áramgenerátorral. Az áramgenerátor forrásárama és referenciairánya megegyezik az ágba folyó (előre meghatározott értékű) áram erősségével és irányával.

3.10.9. A TELJESÍTMÉNYMEGMARADÁS TÉTELE

A teljesítménymegmaradás törvénye egyszerű ténnyel fogalmaz meg: a generátorok által termelt összteljesítmény egyenlő az ellenállásokon fellépő (és Joule-féle hővé alakuló) teljesítmények összegével.

Amennyiben csak egyetlen generátort tartalmaz a hálózat, a teljesítményviszonyok kézzelfoghatóak: a generátor által termelt teljesítmény egyenlő az ellenállásokon számítható teljesítmények összegével. Ha több generátor van a hálózatban, akkor a viszonyok bonyolultabbak: egy generátor bizonyosan pozitív teljesítménnyel fog rendelkezni (termel teljesítményt), a többi viszont rendelkezhet úgy pozitív, mint negatív teljesítménnyel (vagyis termelhet is és fogyaszthat is teljesítményt – természetesen nem mindkettőt egyszerre, vagy felváltva –, a körülményektől függően).

A generátor teljesítménye akkor negatív, ha az áram valódi iránya ellentétes a generátor elektromotoros erejének (forrásfeszültségének) irányával. Az elektromotoros erő iránya pedig (emlékezzünk csak vissza!) a generátorban jelenlévő idegen, nem elektromos tér irányával egyezik meg (vagyis ellentétes a generátorban felhalmozott töltések következtében jelentkező villamos tér irányával). Az előző fejtegetés valójában csak a feszültséggenerátorokra vonatkozik. Egyszerű azonban az értelmezése az áramgenerátorokra is. Az áramgenerátor teljesítménye akkor negatív, ha az áramforrás kapcsain számítható feszültség iránya ellentétes az áramgenerátor forrásáramának irányával.

Fontos hangsúlyozni, hogy a szuperpozíció elve nem érvényes a teljesítményekre. A szuperpozíció elve a hálózat linearitása miatt érvényes az áramokra és feszültségekre: a Kirchhoff törvények lineáris kapcsolatot írnak le a feszültségek és áramerősségek között. A teljesítmények viszont az áramok vagy feszültségek négyzetével, illetve az áramok és feszültségek szorzatával arányosak, így rájuk nem vonatkozik a szuperpozíció elve.

3.10.10. A HÁLÓZAT EGYÉB MEGOLDÁSI ELJÁRÁSAI

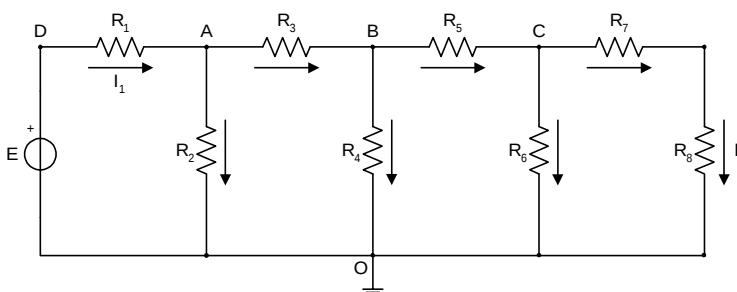
Az előzőekben ismertetett általános eljárások minden hálózat megoldásában hasznosak és alkalmazhatók. A hálózat topológiájától függően egyesek előnyösebben alkalmazhatók, mint mások, mert kevesebb számítással juttatnak bennünket az eredményhez. Nyilvánvaló azonban, hogy vannak olyan gráffal rendelkező hálózatok, amelyeknél a megismert eljárások egyike sem vezet eléggé gyorsan eredményhez (hiszen teljesen formális, általános eljárásokról van szó). Két hálózat-típust fogunk elemezni a következő alpontokban, gyorsabban konvergáló eljárások ismertetésével.

3.10.10.1. Arányos mennyiségek eljárása (létrahálózat)

Nézzük a 3.50. ábrán lévő létrahálózatot. A hálózatnak hét ága és négy csomópontja van. A Kirchhoff egyenletekből tehát hetet kellene felírunk a hálózat megoldásához, a hurokáramok módszere négy egyenletet igényel, a csomóponti potenciálok módszere pedig hármat.

Gondolkozzunk azonban a következő módon: mivel csak egyetlen generátor működik a hálózatban, minden ágáram arányos a generátor forrásfeszültségével (E). Határozzuk meg hát az ágáramokat egy tetszőleges forrásfeszültség-értékre (E'), és a valódi ágáramok értékét úgy kapjuk meg, hogy az előzőleg kiszámolt ágáramok értékét beszorozzuk az E/E' hányadossal.

Tételezzük fel, hogy az R_8 ellenállások keresztülfolyó áram értéke $I_8 = 1$ A. Ez alapján, az ellenállások ismeretében könnyen számítható az U_{C0} feszültség értéke, amiből tovább az R_6 , majd az R_5 ellenálláson keresztül folyó áramok, az U_{B0} feszültség, majd tovább..., egészen az U_{D0} feszültségig. Ez az érték nem más, mint annak a generátornak a forrásfeszültsége, amelyik azt a bizonyos feltételezett $I_8 = 1$ A áramerősséget hajtja át az R_8 ellenálláson.



3.50. ábra

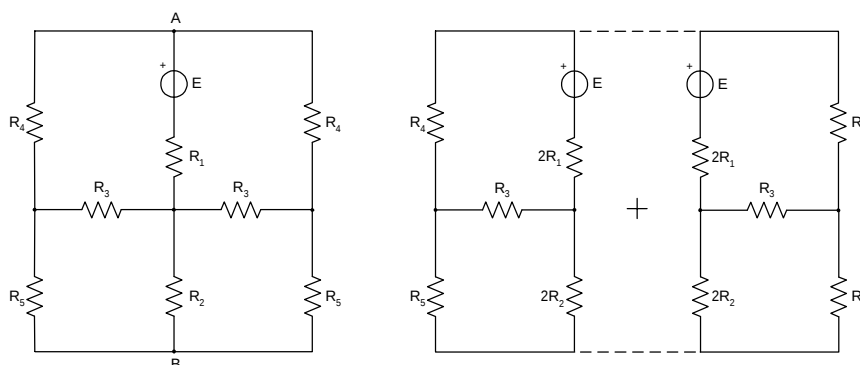
Mivel a feszültséggenerátorunk forrásfeszültsége E , így a valódi ágáramok értékét úgy kaphatjuk meg, ha az előzőleg kiszámolt ágáramok értékét beszorozzuk az $\frac{E}{U_{D0}}$ hányadossal.

Könnyen ellenőrizhető az elvégzendő műveletek számából, hogy ez az eljárás gyorsabban ad eredményt, mint az eddigiekben megismert eljárások.

3.10.10.2. A szimmetrikus hálózatok megoldása

A hálózatanalízis gyakorlatában előfordulhatnak szimmetrikus összetett áramkörök is. Ilyen hálózat látható a 3.51. ábrán, ahol a csomópontok száma 5, az ágak száma 8, tehát a hurokáramok és a csomóponti potenciálok módszere egyaránt négy-négy egyenletet eredményez.

A hálózatot a szimmetriatengely mentén kettévágjuk, akkor a 3.51. ábra jobb oldali részén levő állapothoz jutunk, vagyis két ekvivalens



3.51. ábra

hálózathoz, amelyekben csupán két csomópont és három ág van. A hurokáramok módszere ezekre a hálózatokra két egyenlet, a csomóponti potenciálok módszere pedig mindössze egyetlen egyenlet felírását látja elő.

Vegyük észre, hogy a kettévágott ág mentén az ellenállások értékei duplázódtak, a feszültséggenerátor elektromotoros ereje azonban nem. Az ellenállásértékek duplázódását úgy igazolhatjuk, ha elképzeljük, hogy az ellenállások fémhuzalból készültek és ezeket kettévágtuk.

Ekkor az $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ kifejezésből látható, hogy a keresztmetszet felezésével az R értéke duplázódik. A generátor forrásfeszültsége nem változik, hiszen a feszültséggenerátor állandó feszültséget biztosít a kapcsain függetlenül a rajta keresztül folyó áramtól. A hálózat kiszámítása, hála a szimmetriatengely mentén történt kettévágásnak gyorsabb lesz, és bármelyik hálózatanalízis-módszer alkalmazható. A hálózat egyik felének megoldásával a teljes hálózat megoldásához gyorsan eljutunk. A félbevágott hálózat azon ágaiban számított ágáramok, amelyek a szimmetriatengelyét alkották az eredeti hálózatnak kétszeresével szorozva megadják az eredeti hálózat ágáramait, a többi, félbevágott hálózatra számított ágáramok pedig megegyeznek az eredeti hálózat ágáramaival.

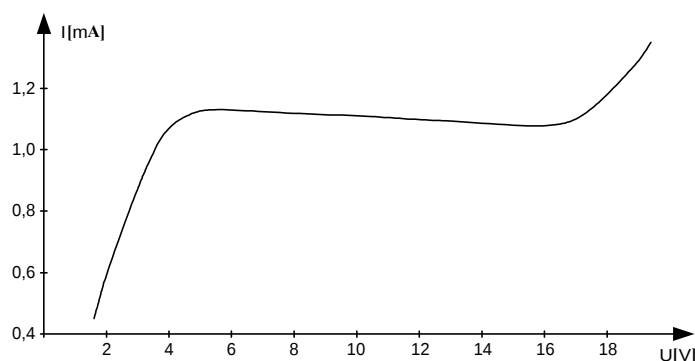
Ha ideális áramgenerátor helyezkedik el a szimmetriatengely valamelyik ágában (ágaiban), akkor a kettévágáskor az áramforrás forrásáramát, hasonlóan mint az ellenállások értékét, módosítanunk kell: itt azonban duplázás helyett a forrásáramok érték(ei)t meg kell feleznünk. Az ágáramok megfeleltetése a kettévágott és eredeti hálózatok között megegyezik a feszültséggenerátor esetében leírtakkal.

3.11. A nemlineáris áramköri elemek

Az eddigiekben csak lineáris elemeket alkalmaztunk a megfigyelt áramkörökben illetve hálózatokban. Ez a hozzáállás teljesen jogos, hiszen az alkalmazásban szereplő elemek nagy többsége lineárisnak tekinthető. Említsük meg azonban, hogy szigorúbb mércék szerint értékelve a valóságban lineáris elemek nem is léteznek, hanem az elemek legnagyobb részénél a lineáris jellemzőtől való eltérés elhanyagolható. Más oldalról a nemlineáris hálózatok analízise összehasonlíthatatlanul bonyolultabb, nehezebb, mint a lineáris hálózatoké. Ezért itt csak a nemlineáris elemeknek és az egyszerű nemlineáris hálózatok megoldásának rövid áttekintése a cél.

A nemlineáris elemeket többféle módon lehet csoportosítani illetve csoportokba osztani. Az egyik felosztási szempont az elemeket alkotó anyagra vonatkozik. Ezek szerint:

1. A nemlineáris elemek első csoportjába az olyan elemek tartoznak, amelyeknek alapanyagai ugyan lineáris jellegűek, de a környezeti feltételek megváltozása miatt az elemek mégis nemlineáris elemként viselkednek. Mivel az alkalmazott elemek leginkább a hőre érzékenyek, ennek a csoportnak neve is van: termisztoroknak hívják az ide sorolható elemeket.
2. A nemlineáris elemek másik csoportjának nincs külön neve. Ide azok az elemek tartoznak, amelyeknél a feszültség-áramerősség – U/I (vagy éppen fordítva: áramerősség-feszültség – I/U) görbe (más szóval karakterisztika) a környezeti feltételek állandó volta mellett is eltér a lineáristól. Más szóval ezek az elemek olyan anyagokból készülnek, amelyek már eleve nemlineáris jellegűek.



3.52. ábra

Lássunk most egy-egy példát a két csoport elemei közül. A termisztorok erősen hőmérsékletfüggő ellenállások, az utóbbi időben majdnem kizárólag félvezetőkből készülnek. A termisztorok nagyobbik hányadánál az ellenállás a hőmérséklet növekedésével csökken (NTC – negatív hőmérsékletoefficiensű ellenállás). Az ilyen termisztorok alapanyaga a mangánoxid (MnO) és a nikkelloxid (NiO). Kisebb gyakorlati jelentőséggel bírnak azok a termisztorok, amelyeknél a hőmérséklet növekedésével az ellenállás is növekszik (PTC – pozitív hőmérsékletoefficiensű ellenállás). Újabban ferroelektromos (seignette só, bárium metatitanat) kerámiából is készülnek termisztorok. Figyeljük meg az áram változását a feszültség függvényében a hidrogénnel töltött, fém(vas)szállal rendelkező üvegbúrából álló termisztor esetére. Karakterisztikája a 3.52. ábrán látható.

A karakterisztikáról jól leolvasható, hogy az áramerősség értéke gyakorlatilag állandó a feszültség 4V-tól 17V-ig terjedő értékei között. A karakterisztika alakjára az üvegbúra alakjával és a búrában uralkodó nyomással lehet hatni, hiszen ezekkel a hővezetés feltételeit szabjuk

meg. A termisztorok karakterisztikáit általában kísérleti úton, méréssel határozzák meg, de természetesen az analitikus helyettesítő görbe(ék) is kiszámíthatók.

A termisztorokat leggyakrabban hőmérsékletmérésre alkalmazzák, amelynél az erős hőmérsékletfüggőségüket használják ki. A mérni kívánt környezetbe hozva megméri az ellenállásukat, és az ismert állandók alapján (amelyek a hőmérsékletfüggésüket leíró kifejezésben szerepelnek) kiszámítják a mérendő hőmérsékletet. A termisztorok áramkorlátozó előtétellenállásként is alkalmazást nyerhetnek.

A második csoportba a félvezető anyagokból készült elemek, a vákuum-csövek és a félvezető kerámiából készült elemek tartoznak. A második csoportból a félvezető kerámiából készült elemek (varisztorok) egy fajtáját a tirit ellenállásokat fogjuk megismerni. A tirit ellenállást agyag, szilícium-karbid és grafit keverékének henger alakba préselésével és későbbi hőkezelésével állítják elő. A tirit ellenállás analitikus karakterisztikája a következő kifejezéssel adott:

$$I = AU^a$$

Ahol az: **A** és **a** paraméterek – az anyagoknak a keverékbeni részarányától és az ellenállástest alakjától és méreteitől függenek. A kitevő (**a**) értéke 1 és 10 között változik (a mérések szerint, az **A** paraméter pedig 10^{-10} és 10^{-25} érték között mozog).

A könnyebb becslés érdekében lássuk most táblázatosan a feszültség- és áramértékeket az $A = 2 \cdot 10^{-10}$ és az $a = 3,5$ értékekre:

U [V]	10	100	1000	10000
I [A]	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-3}$	6,3	20000

A táblázatból jól leszűrhető az ilyen típusú elemek alkalmazási területe is: gépek és berendezések túlfeszültség-védelmére kiválóan alkalmasak. A védett berendezéssel párhuzamosan kötve, a tirit-ellenálláson keresztül folyó áramerősség a szokványos feszültség szinten elenyésző, magas feszültség megjelenésekor viszont a tirit ellenállás hatalmas áramot képes „átvállalni” és levezetni, megvédve ezzel a vele párhuzamosan kapcsolt berendezést.

A termisztorok és a varisztorok szimmetrikus átmeneti görbével rendelkeznek (lehetne ez egy másik felosztási alapja a nemlineáris elemeknek). Sokkal fontosabbak azonban az olyan nemlineáris áramköri elemek amelyeknek karakterisztikái kihangsúlyozottan aszimmetrikusak. Ebbe a csoportba tartoznak a elektroncsövek (vákuumcsövek) és a félvezető diódák és tranzisztorok.

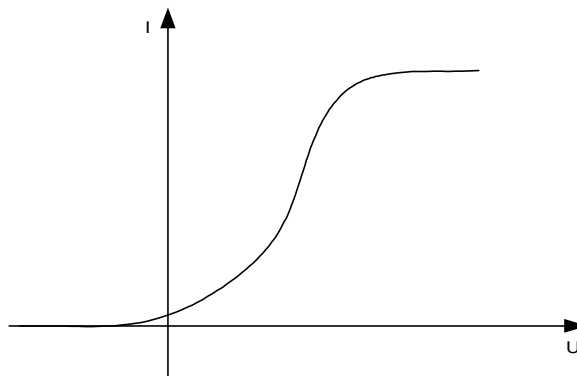
A vákuum-dióda a legegyszerűbb vákuumcső: csak egy anódból és egy fűtött katódból áll, amelyek légmentesített üvegbúrában helyezkednek el. A katód anyaga jó elektronemittáló kell, hogy legyen, ezért általában wolframból vagy tóriumos wolframból készül.

A vákuum-dióda átmeneti karakterisztikája a következő közelítő kifejezéssel írható le:

$$I \approx k \cdot U^{\frac{3}{2}}, U > 0,$$

a karakterisztika-görbe pedig a 3.53. ábrán látható.

A félvezető dióda esetében a kristálylapka egyik felét p másik felét n típusúvá alakítják. A p típusú részt az elektronhiány következtében megjelenő lyukáram, az n típusú részt pedig az

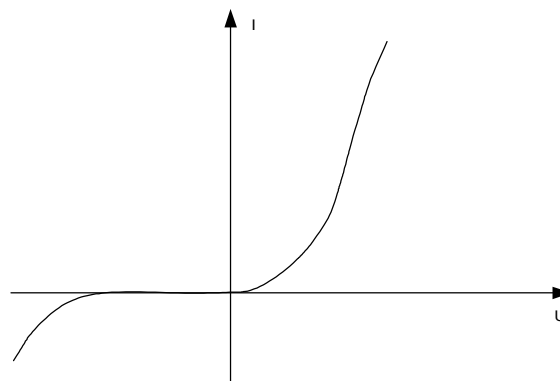


3.53. ábra

elektronáram jellemzi. Az átmeneti karakterisztika itt is erősen aszimmetrikus, amit az analitikus kifejezése is igazol:

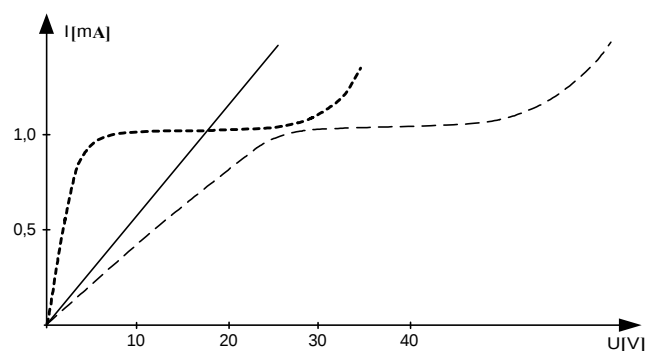
$$I = I_0 \left(e^{\frac{U}{U_0}} - 1 \right)$$

A félvezető dióda az egyik irányban sokkal jobban vezeti az áramot mint a másikban. Átmeneti karakterisztikájának grafikus ábrázolása a 3.54. ábrán látható.



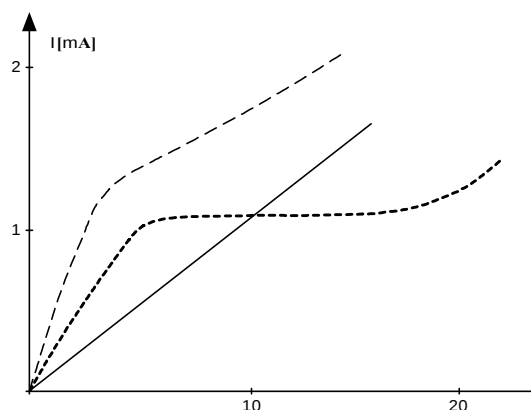
3.54. ábra

A nemlineáris elemekkel rendelkező hálózatok analízise több szempontból is nagyon nehézkes. Elsősorban Kirchhoff egyenletei itt nem lineáris egyenletek, így a kapott egyenletrendszer megoldása nem szokványos. Másodsorban az átmeneti karakterisztika analitikus alakja a legtöbb esetben ismeretlen (csak a grafikus alakja ismert). Éppen ezért nincs talán általános megoldási módszer a nemlineáris elemekkel rendelkező hálózatokra. A legegyszerűbb esetekben a megoldás egy kis odafigyeléssel elérhető. A következőkben grafikus úton keresünk megoldást egy termisztor és egy lineáris ellenállás soros és párhuzamos kapcsolására.



3.55. ábra

Lássuk először az elemek soros kapcsolását. Az elemek soros kapcsolása esetén az egyes elemek végein mért feszültségek összeadódnak. A soros kapcsolás átmeneti karakterisztikáját tehát úgy kapjuk meg, ha a kiválasztott áramerősségértékekre összeadjuk az elemeken mért(mérhető) feszültségeket. Ezt a tényt, illetve megoldást tartalmazza a 3.55. ábra.



3.56. ábra

A párhuzamosa kapcsolt lineáris és nemlineáris elemek esetében viszont a rajtuk keresztülfolyó áramok adódnak össze, vagyis a soros kapcsolás átmeneti karakterisztikája úgy kapható meg, ha a kiválasztott feszültségekre összeadjuk az elemeken átfolyó áramerősség-értékeket. Ez látható a 3.56. ábrán.

3.12. Átmeneti jelenségek az RC hálózatban

Eddig csak az állandósult állapotot taglaltuk a villamos hálózatoknál, más szóval a feszültségek és áramerősségek (úgy a generátoroké mint az áramköri elemeké) állandók voltak. A generátor hálózatba kapcsolásának pillanatában azonban, ha a hálózatban energiatároló elemek (kondenzátor) is vannak, nem jön létre rögtön az állandósult állapot. Bizonyos időnek el kell telni, amíg az átmeneti (tranzien) jelenségek lezajlanak és a hálózat állandósult (stacionárius)

állapotba kerül. A generátor bekapcsolásakor ugyanis változik az energiatároló egységek energiája és ez a változás nem történhet meg ugrásszerűen, egy „szempillantás alatt”. Az ugrásszerű energiaváltozás végtelen nagy teljesítményű generátort feltételez, amelyen a valóságban nem létezik.

A lineáris koncentrált paraméterű hálózat esetében az átmeneti jelenségek elemzése állandó együttthatójú, inhomogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására vezethető vissza. Az ilyen differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldása a homogén egyenletrendszer megoldása és a partikuláris megoldás összegeként írható fel. Fizikai szempontból nézve és magyarázva a dolgokat az mondható el, hogy a homogén egyenletrendszer általános megoldása a hálózat külső gerjesztésektől független, ún. „saját viselkedését” írja le. Ez a rész, a homogén megoldás, az általános, teljes megoldás átmeneti (tranziens) részét adja, hiszen az átmeneti jelenségek kezdőenergiája a kiküszöbölhetetlen veszteségek következtében eltávozik a hálózathoz. A külső gerjesztések és az áramköri elemek közösen határozzák meg az inhomogén egyenletrendszer partikuláris megoldását, ami az átmeneti jelenségek lefolyását követő stacionárius állapotot jellemzi. Az integrálási állandók (a megoldásban szereplő állandók) a határértékekből (kezdőértékekből) számíthatók ki.

Átmeneti jelenségek nemcsak a generátor hálózatba kapcsolásának pillanatában jelennek meg, hanem az áramkör megszakításakor, a feszültséggenerátor forrásfeszültségének megváltozásakor, új feszültséggenerátor hálózatba kapcsolásakor és a passzív elemek karakterisztikáinak hirtelen megváltozásakor is.

Az átmeneti jelenségek iskolapéldája, tehát a legegyszerűbb eset a soros RC kör egyenfeszültségre kapcsolása (3.57. ábra).

A fenti ábrára a következő egyenletek (egyenletrendszer) írható fel:

$$u_c(t) + u_R(t) = E.$$

Egyrészről:

$$C = \frac{q(t)}{u_c(t)}$$

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad / \quad \frac{d}{dt}$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \Rightarrow i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

Másrészről viszont

$$u_R(t) = Ri(t)$$

Összevonva az utóbbi két kifejezést az előbbibe, a következő differenciálegyenlethez jutunk:

$$u_c(t) + RC \frac{du_c(t)}{dt} = E$$

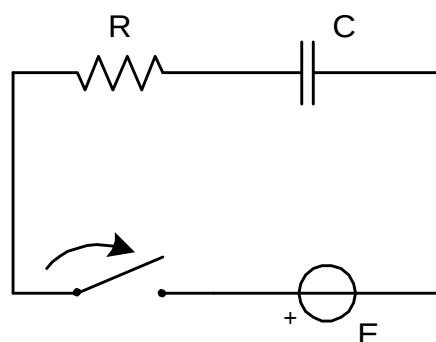
Egyes vélemények szerint célszerűbb a két feszültséget (a kiinduló egyenletben) a kondenzátor töltésének függvényében felírni:

$$u_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt},$$

illetve:

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet a következő alakot ölti:



3.57. ábra

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E .$$

Ez utóbbi egyenlet ugyancsak lineáris, inhomogén, elsőfokú differenciálegyenlet állandó együtthatókkal, akárcsak az előző, amelyben a kondenzátor feszültségének az első deriváltja szerepel. Mivel a kondenzátor töltésváltozásának időfüggvénye számunkra nem elsődleges fontosságú, így az előző egyenlet megoldásával foglalkozunk (az irodalomban általában az utóbbi egyenletet oldják meg). Írjuk fel tehát a megoldandó egyenletet és oldjuk is meg! A megoldandó egyenlet:

$$u_c(t) + RC \frac{du_c(t)}{dt} = E ,$$

az általános megoldás pedig a következő alakban írható fel:

$$u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t) = u_{ct}(t) + u_{c\acute{a}}$$

Mint tudjuk, a homogén megoldás a tranziens (átmeneti) részét adja az általános megoldásnak (a kondenzátor feszültségértékének), a partikuláris pedig az állandó (az átmeneti jelenségeket követő stacionárius állapotban érvényes) fegyverzetek közötti feszültségértéket képviseli. A homogén megoldás természetesen a homogén egyenletet elégíti ki, vagyis felírhatjuk, hogy:

$$u_{ch}(t) + RC \frac{du_{ch}(t)}{dt} = 0 .$$

Tételezzük fel az $u_{ch}(t) = Ae^{pt}$ megoldásalakot, és helyettesítsük be azt a homogén egyenletbe! Ezzel a p állandó értékét határozhatjuk meg:

$$Ae^{pt} + RCpAe^{pt} = 0$$

$$1 + RCp = 0$$

$$p = -\frac{1}{RC}$$

A homogén megoldás tehát a következő alakot kapja:

$$u_{ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Az RC szorzatot az átmeneti folyamat időállandójának is nevezik és a görög τ betűvel jelzik. A homogén megoldás egyenértékű másik kifejezése tehát:

$$u_{ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Az állandósult állapotban (a kivetkező stacionáris állapotban) a kondenzátor feszültsége a generátor forrásfeszültségével lesz egyenlő, azaz:

$$u_{cp}(t) = u_{c\acute{a}}(t) = E .$$

Ezek alapján felírható az általános megoldás:

$$u_c(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Az A állandó a kezdeti feltételből határozható meg: A kondenzátor energiája a bekapcsolás pillanatában nem változhat meg, vagyis amennyiben a kondenzátor töltetlen állapotban volt a bekapcsolás előtt ($q(t=0) = 0$, és $u_c(t=0) = 0$), úgy a bekapcsolás után is érvényes a nulla feszültségérték:

$$u_c(0-) = u_c(0+) = u_c(0) = 0.$$

Így aztán az A állandó értéke:

$$0 = E + Ae^0,$$

$$A = -E.$$

A kondenzátor feszültségváltozása az átmeneti időszakban (3.58. ábra) pedig:

$$u_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Mivel a feszültséggörbe folyamatosan (asszimptotikusan) éri el az állandósult E értéket, felmerül a kérdés, hogy gyakorlatilag meddig is tart (időben) az átmeneti jelenség. Amennyiben az eltérés az állandósult értéktől 1%-nál kisebb, a gyakorlatban a jelenséget lezajlottnak tekinthetjük. Az ennek megfelelő időpillanat könnyen kiszámítható:

$$u_c(t) = 0,99E$$

$$0,99E = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,01$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln 10^{-2}$$

$$t = \tau \ln 10^2$$

$$t = 4,60\tau$$

Szavakkal ez azt jelenti, hogy az átmeneti jelenség 5τ idejig tart. Könnyen igazolható, hogy τ idő elmúltával az átmeneti jelenségek 63%-a zajlik le ($t = \tau$ behelyettesítésével a kondenzátor feszültségváltozásának kifejezésébe).

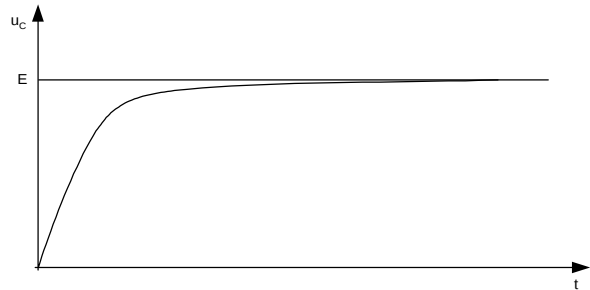
Az áramerősség a körben (amely egyúttal a kondenzátor töltőárama is) az előzőek alapján a következő módon számítható (3.59. ábra):

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = EC \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

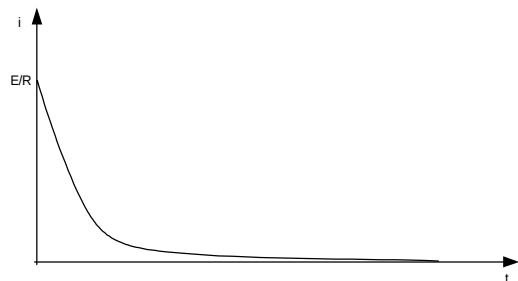
Az átmeneti jelenségek az RC kör megszakításakor is fellépnek. Vegyük észre, hogy ebben az esetben (az RC soros kapcsolás rövidrezárásakor) homogén, lineáris elsőfokú differenciálegyenlet kapunk állandó együtthatókkal.

A rövidrezárt RC soros kapcsolás esetében érvényes, hogy:

$$u_c(t) + u_R(t) = 0,$$



3.58. ábra



3.59. ábra

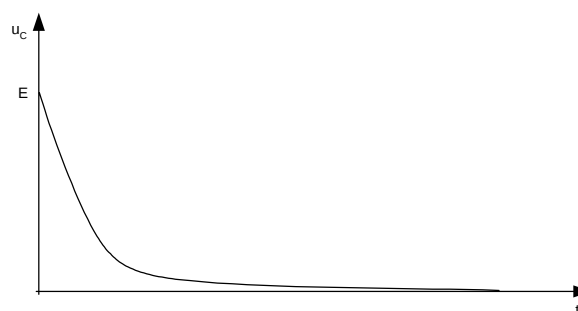
vagyis az előző eset homogén egyenletéhez jutunk:

$$u_c(t) + RC \frac{du_c(t)}{dt} = 0.$$

Feltételezve az $u_{ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ megoldást ($\tau = RC$), és figyelembe véve az aktuális kezdőértéket a kondenzátor feszültségére (az 5τ pillanatra kiválasztott kezdőpillanatra $u_c(0-) = u_c(0+) = u_c(0) = E$) az A állandó értéke:

$$E = Ae^0.$$

A kondenzátor feszültsége (3.60. ábra) és kisülési árama (3.61. ábra) exponenciálisan csökkenő lesz:

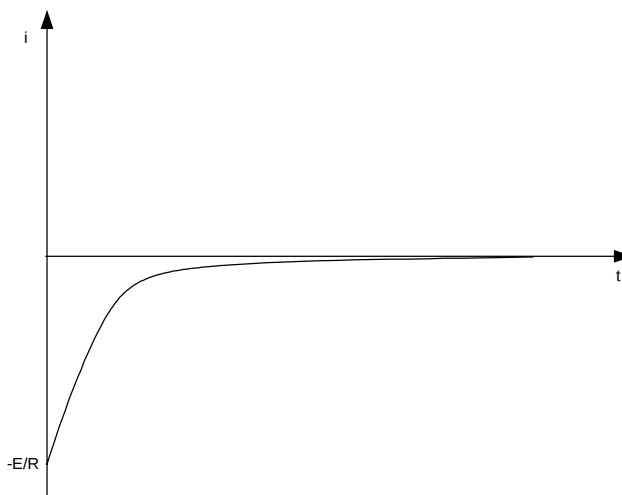


3.60. ábra

$$u_c(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

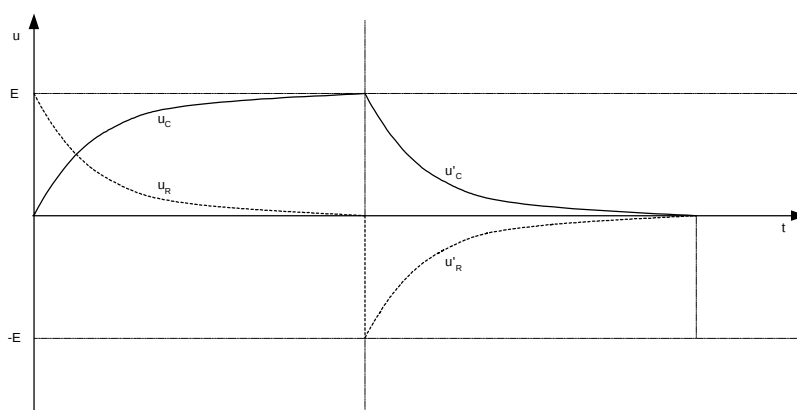
$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Az áram negatív algebrai előjele arra utal, hogy a kisülési áram ellentétes az ábrán feltüntetett és a töltési áramnak megfelelő áramiránynak. A kondenzátorban a töltéskor felhalmozott energia itt, a kisülésnél a kör ellenállásán hővé alakul.

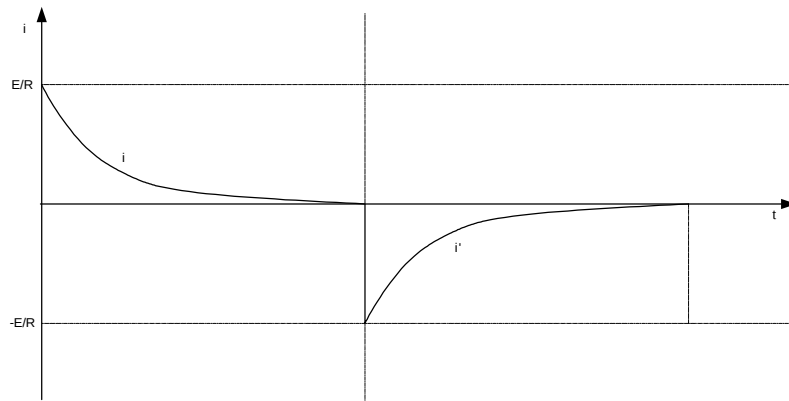


3.61. ábra

Áttekinthetőbb az átmeneti jelenségek lezajlása, de talán fogalma is, ha ugyanazon ábrán láthatók a töltési és kisülési diagramok is. Ennek a gondolatnak eleget téve jött létre a 3.62. ábra és a 3.63 ábra. Az elsőn a feszültségek változása követhető (úgy a kondenzátoron, mint az ellenálláson mérhető feszültség) a töltés és kisülés folyamán, a másodikon pedig a kör áramának görbéje látható az idő függvényében. A kisülési folyamat 5τ hosszúságú töltési idő elmúltával indul.



3.62. ábra



3.63. ábra

3.13. Kondenzátorokat tartalmazó hálózatok

Ritkán használják a gyakorlatban egyenáramok esetében az ilyen fajta hálózatokat. Ezért csak nagyon röviden, elemi szinten érintjük ezt a problémakört. A kondenzátorokat tartalmazó hálózatokat két nagy csoportra osztják:

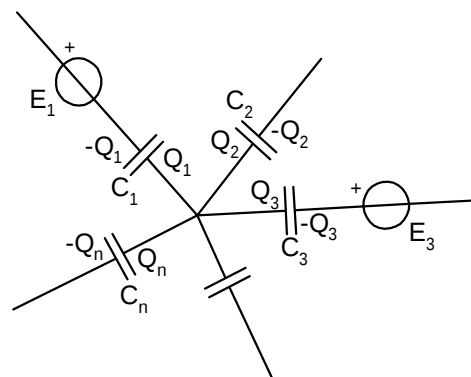
1. Olyan hálózatok, amelyeknél legalább néhány ágban folyik áram (egyenáram),
2. Elektrosztatikus hálózatok (minden ágban legalább egy kondenzátort tartalmaznak, az állandósult állapotban itt egyetlen ágban sem folyik áram).

A kondenzátorok szigetelőanyaga sohasem ideális. Ez más szóval azt jelenti, hogy bizonyos jelentéktelen erősségű áram mindig folyik a feltöltött kondenzátor két fegyverzete között a szigetelőanyagon keresztül. Ez az áram azonban legtöbbször elhanyagolható.

Az első csoportba sorolható hálózatok esetében csak a kondenzátoroktól mentes ágakban folyik egyenáram. A kondenzátorokat is tartalmazó ágak végén mérhető (számítható) feszültség a kondenzátorok kapcsain mért feszültségek összegével egyenlő.

Az elektrosztatikus hálózatok minden ágában kondenzátor található. Ezekre a hálózatokra érvényes Kirchhoff első és második törvénye, igaz, egy kicsit módosított formában.

Nézzük az első Kirchhoff törvény érvényességét az elektrosztatikus hálózatok esetére (3.64. ábra). Figyeljük meg az ábrán látható csomópontot, amelyet n ág találkozása képez. Tételezzük fel, hogy a kondenzátorok azon fegyverzetei, amelyek a csomópontához kapcsolódnak $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ töltésmennyiséggel rendelkeznek. Legyen ezen (algebrai előjellel rendelkező) töltésmennyiségek algebrai összege Q_0 . Mekkora lesz a megfigyelt csomópontoz tartozó töltésmennyiség algebrai összege, ha egy vagy több feszültségforrást kikapcsolunk? Mivel áram nem folyhat egyetlen ágban sem, a töltésmennyiségek összege nem változhat meg, annak ellenére, hogy a töltéseloszlás a kondenzátorokon esetleg megváltozhat. Ezek szerint felírható, hogy:



3.64. ábra

$$\sum_{i=1}^n Q_i = Q_0$$

Ez a kifejezés nem más, mint Kirchhoff első vagy csomóponti törvénye az elektrosztatikus hálózatokra. A Q_0 értéke a kezdő értékektől függ: ha kisütött kondenzátorokat kötünk a hálózatba, akkor a Q_0 értéke nulla lesz.

Az elektrosztatikus hálózatoknál is érvényes az energiamegmaradás törvénye, azaz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Itt is makroszkópikus nagyságokat fogunk összeadogatni az $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ szorzatok helyett: a feszültségeket a generátorok és kondenzátorok kapcsain. A generátorok feszültsége a forrásfeszültségükkel egyenlő, mivel nem folyik áram az ágakban (nincs feszültségesés sem a külső ellenállásokon, sem a generátorok belső ellenállásain). A kondenzátorokon mérhető feszültségekkel kapcsolatosan pontosan ugyanaz mondható el, mint az ellenállások esetében: a hálózat elemzése elején nem ismerjük a kondenzátorokon a feszültség „irányát”, vagyis azt, hogy melyik fegyverzeten helyezkedik el a pozitív, és melyiken a negatív töltés. Ilyen hálózatok analízisének első lépésként meghatározzuk a kondenzátorok töltőáramának feltételezett irányát minden egyes ágba (3.65. ábra).

A 3.65. ábra alapján a következő megállapítás fogalmazható meg: ha a Q pozitív töltésmennyiség a kondenzátor bal oldali fegyverzetére folyt, akkor a kondenzátoron mérhető feszültség

$$U_c = \frac{Q}{C},$$

és a kondenzátor bal fegyverzete van magasabb potenciálon. Amennyiben a 3.65. ábrán megjelölt irányban negatív töltésmennyiség folyt a

kondenzátor bal oldali fegyverzetére, úgy az U_c feszültség negatív, vagyis a jobb oldali fegyverzet van magasabb potenciálon. A töltőáram feltételezett irányának és a kondenzátoron mérhető feszültség irányának ilyen viszonyát összehangolt iránymeghatározásnak is nevezzük.

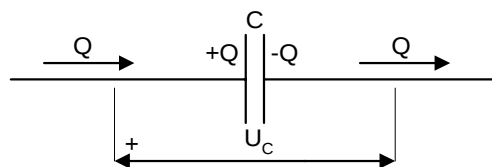
Az összehangolt töltőáram és kondenzátorfeszültség betartása a következő kifejezés felírását teszi lehetővé az $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ kifejezés helyett (Kirchhoff második vagy huroktörvénye az elektrosztatikus hálózatokra):

$$\sum E - \sum \frac{Q}{C} = 0$$

Az elektromotoros erőnek és a $\frac{Q}{C}$ hányadosnak is algebrai előjele van: ez az előjel pozitív, ha a generátor „iránya” megegyezik a hurok körüljárási irányával, illetve ha a kondenzátor magasabb potenciálú fegyverzetére jutunk először a hurok körüljárása alkalmával (a töltőáram feltételezett pozitív iránya megegyezik a hurok körüljárási irányával). Ellenkező esetben az algebrai előjel negatív.

Ha minden csomópontira érvényes, hogy $Q_0 = 0$, akkor az ellenállásokat tartalmazó hálózatoknál megismert valamennyi eljárás és kifejezés érvényben marad az elektrosztatikus hálózatoknál is, azzal a különbséggel, hogy az áramerősség (I) helyett a kifejezésekben a töltésmennyiséget (Q) kell szerepeltetni, az ellenállásértékek (R) helyett viszont a kapacitás reciprok értékét ($\frac{1}{C}$) kell feltüntetni. A hurokáramok módszere itt hurok-töltőáramok módszerévé módosul.

Amennyiben Kirchhoff csomóponti törvényében az elektrosztatikus hálózatokra akár egy csomópontira is nem érvényes a $Q_0 = 0$ feltétel, akkor az egyedüli hálózatanalízis-módszer a Kirchhoff törvények közvetlen alkalmazása.



3.65. ábra

3.14. Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk villamos áramnak?
2. Mi az egyenáram?
3. Milyen töltéshordozók alkotják az áramot a vezetőkben és milyenek az elektrolitokban?
4. Hogyan (minek a segítségével) valósítható meg az egyenáram (időben állandó áram)?
5. Mi a leegyszerűsített egyenáram-modell három alapelve?
6. Kizárható(megszüntethető)-e a Joule-féle hőveszteség az áramtérben?
7. Milyen tulajdonságú az egyenáramokat létrehozó villamos tér?
8. A villamos tér eneriaközvetítő és –tároló szerepe
9. Milyen energiaátviteli rendszernek számít a villamos térrel megvalósított átviteli rendszer?
10. Mi az áramsűrűség, és mi az egysége?
11. Mi az áramerősség definíciója és egysége?
12. Mi az áram iránya?
13. Mivel mérjük az elektromos áramot?
14. Mi a csomópont?
15. Hogyan fogalmazható meg Kirchhoff első törvénye szóban és képletben?
16. Lehet-e töltésfelhalmozódás az áramtérben egyenáramok esetében?
17. Mi az első Kirchhoff törvény általános matematikai alakja?
18. Mi az első Kirchhoff törvénynek a gyakorlatban legtöbbször használt alakja?
19. Mit nevezünk a villamos áram áramlási terének?
20. Mi a fajlagos ellenállás (mi az egysége)?
21. Mi a fajlagos vezetés és miben fejezik ki?
22. Minek következtében melegszik fel az áramjárta vezető?
23. Hogyan írható fel a vezetőkben hővé alakuló villamos energia teljesítménysűrűsége (Joule törvénye az áramlási térre)?
24. Milyen az olvadásbiztosítékok működési elve?
25. Mi a villamos áram mechanizmusának legegyszerűbb modellje a vezetőkben?
26. Mihez hasonlítható a töltéshordozók termikus (kaotikus hőmozgása) a vezetőkben?
27. Milyen nagyságrendű az elektronok hőmozgásának átlagsebessége a fémekben?
28. Hogyan számítható a fajlagos ellenállás értéke a klasszikus elmélet szerint?
29. Az egyvegyértékű fémek esetében használható-e a klasszikus elmélet?
30. A gyakorlati mérésekkel megegyező eredmények milyen elmélettel érhetők el?
31. Hogyan változik és mitől függ a fémek fajlagos ellenállása?
32. Milyen anyagokból készítik a precíziós mérésekre szánt ellenállásokat?
33. Hogyan fejezhető ki az elektronok mozgékonyasága a fémekben?
34. Mi a szupravezetés és a szupravezetők?
35. Mi a Meissner-effektus?
36. Mire használhatók a szupravezetők?
37. Ki fedezte fel a szupravezetést?
38. Mit nevezünk elektrolitnak?
39. Mitől függ az elektrolitok fajlagos vezetőképessége?
40. Hogyan függ az elektrolitok fajlagos vezetőképessége a hőmérséklettől?
41. Milyen vezetőknek tekinthetők az elektrolitok?
42. A villamos áram vezetési mechanizmusát illetően hogyan oszthatók csoportba a szigetelőanyagok?
43. Milyen vezetőknek tekinthetők a dielektrikumok?
44. Milyen szigetelőanyagoknál és hogyan következik be a hőátütés?
45. Mitől függ a dielektrikum fajlagos ellenállása?
46. Mire kell külön figyelmet fordítani a szigetelőknél?
47. Mi a felületi fajlagos ellenállás a szigetelőknél és hogyan mérhető?
48. Hogyan szól Ohm törvénye (szóban és kifejezésben)?

49. Mi az elektromos ellenállás (és mi az egysége)?
50. Hogyan számítható ki az l hosszúságú, homogén szerkezetű, ρ fajlagos ellenállású vezető ellenállása?
51. Mely ellenállásokat nevezzük lineárisnak?
52. Hogyan határozható meg a tetszőleges alakú ellenállás ellenállás-értéke?
53. Mi az elektromos vezetés (és egysége)?
54. Hogyan számítható ki a sorosan kapcsolt ellenállások eredő ellenállás-értéke?
55. Hogyan szól a kifejezés az eredő ellenállás kiszámítására a párhuzamosan kapcsolt ellenállások esetében?
56. Mi a teendő a vegyes kapcsolásnál az eredő ellenállás meghatározásakor?
57. Hogyan számítható ki a sorosan kapcsolt ellenállások eredő vezetés-értéke?
58. Hogyan szól a kifejezés az eredő vezetés kiszámítására a párhuzamosan kapcsolt ellenállások esetében?
59. Mi a teendő a vegyes kapcsolásnál az eredő vezetés meghatározásakor?
60. Milyen az ellenállások hőfokfüggése?
61. Mi az áram valódi (pozitív) iránya?
62. Mikor összehangolt a feszültség- és áramirány?
63. Mi a „földelés”?
64. Miért alkalmaznak földelő ellenállásokat?
65. Hogyan számítható egy félgömb alakú földeléstest segítségével létrehozott földelés ellenállás-értéke?
66. Mi képezi a földelésnél az „ellenállástest”?
67. Milyen nagyságrendű a földelésellenállás értéke?
68. Biztonságos védelmet nyújt-e a földelés az áramütéssel szemben?
69. Mi a lépésfeszültség?
70. Hogyan számítható a lépésfeszültség?
71. Hogyan szól Joule törvénye (szóban és kifejezésben)?
72. Milyen egységekben fejezik ki a fogyasztó teljesítményét?
73. Mi az előző kérdés válaszában szereplő egységek közötti összefüggés?
74. Miért szükségesek a villamos generátorok?
75. Hogyan „termelik” a villamos energiát a villamos generátorok?
76. Milyen a működési elve a hőenergiát közvetlenül villamos energiává alakító generátornak?
77. Milyen a működési elve a kémiai generátoroknak?
78. Milyen erők képezik a kémiai generátoroknál a nem villamos (a töltésekre ható szétválasztó) erőket?
79. Milyen generátorokat nevezünk feszültséggenerátoroknak?
80. Milyen jellemzőkkel írhatók le (definiálhatók) a feszültséggenerátorok?
81. Mi a feszültséggenerátor forrásfeszültsége (és egysége)?
82. Hogyan számítható ki a feszültséggenerátor forrásfeszültsége?
83. Hogyan mérhető le a feszültséggenerátor forrásfeszültsége?
84. Mi a feszültséggenerátor belső ellenállása (és egysége)?
85. Hogyan számítható a feszültséggenerátor belső ellenállása?
86. Hogyan mérhető le a feszültséggenerátor belső ellenállása?
87. Mi a generátor forrásfeszültségének „iránya”?
88. Hogyan számítható ki a feszültséggenerátor teljesítménye (milyen a forrásfeszültség és az áramerősség összehangolt iránya)?
89. Mivel egyenlő az ideális feszültséggenerátor kapocsfeszültsége?
90. Mi a valós feszültséggenerátor?
91. Hogyan számítható ki a valós feszültséggenerátor kapocsfeszültsége?
92. Mi a villamos áramkör?
93. Hogyan számítható ki az áramerősség értéke az egy generátort és egy ellenállást tartalmazó áramkörben?

94. Hogyan ábrázolják a valós feszültséggenerátorokat?
95. Mi a teljesítményillesztés?
96. Mi a maximális teljesítmény-leadás feltétele?
97. Hogyan számítható ki az áramerősség értéke a több generátort és több ellenállást tartalmazó áramkörben?
98. Mikor működik generátorként és mikor fogyasztóként a feszültséggenerátor?
99. Hány irányra kell ügyelni a feszültség számításakor az áramkörben?
100. Mi a feszültségszámításra szolgáló általános kifejezés alakja, ha U_{AB} értékét számítjuk az A pontból haladva a B pont felé?
101. Mi a feszültségszámításra szolgáló általános kifejezés alakja, ha U_{AB} értékét számítjuk a B pontból haladva az A pont felé?
102. Hány és mely irányokra kell ügyelni a feszültség számításánál az általános kifejezések alkalmazásakor?
103. Mi az előfeltétele annak, hogy az áramkör egy adott pontjának potenciálját ki tudjuk számolni?
104. Mi a potenciál számítására szolgáló általános kifejezés alakja, ha V_A értékét számítjuk az A pontból haladva a vonatkoztatási (leföldelt) pont felé?
105. Mi a potenciál számítására szolgáló általános kifejezés alakja, ha V_A értékét a referencia (leföldelt) pontból az A pont felé haladva számítjuk?
106. Mi a villamos hálózat (összetett áramkör)?
107. Mikor aktív és mikor passzív a villamos hálózat?
108. Mikor mondhatjuk egy hálózatra azt, hogy lineáris?
109. Mikor nemlineáris a hálózat?
110. Mi a hálózati csomópont?
111. Mi a hálózat ága?
112. Melyik elektrosztatikában megismert törvény képezi Kirchhoff második törvényének alapját?
113. Írd fel Kirchhoff második törvényének integrálalakját!
114. Mi a huroktörvény szokványos alakja?
115. Mikor milyen algebrai előjellel rendelkezik az E és RI szorzat a huroktörvényben?
116. Milyen energiaforrások az áramgenerátorok?
117. Mi jellemzi az ideális áramgenerátort?
118. Milyen a valós áramgenerátor (elfogadott elvi modellje)?
119. Hogyan ábrázoljuk az áramgenerátort?
120. Mivel egyenlő az áramgenerátor teljesítménye?
121. Lehet-e egyenértékű egy ideális feszültséggenerátor és egy ideális áramgenerátor?
122. Milyen egyenértékűségi feltétel mellett keressük a valós feszültséggenerátornak megfelelő valós áramgenerátort?
123. Mi a két egyenértékűségi feltétel a valós feszültség- és áramgenerátor megfeleltetésekor?
124. Miért hibás a valós áramgenerátor elfogadott elvi modellje?
125. Mit ölel fel a hálózatanalízis problémaköre?
126. Mik a kétpólusok vagy póluspárok?
127. Mi képezi a hálózat gráfját?
128. Mire szolgál a hálózat gráfja?
129. Hány független egyenlet írható fel Kirchhoff első (csomóponi) törvénye alapján egy adott hálózatra és miért?
130. Mi a gráf fája?
131. Melyek a gráf faágai?
132. Melyek a bekötő ágak?
133. Hogyan hozható létre a független hurkok legnagyobb száma a lehető legegyszerűbb módon?
134. Hány független egyenlet írható fel Kirchhoff második, ún. huroktörvénye alapján egy adott hálózatra és miért?

135. Mennyi az ismeretlenek száma egy hálózat megoldásánál?
136. Hány egyenlet írható fel összesen a Kirchhoff-egyenletek segítségével?
137. Minek alapján írhatók fel a további szükséges (kiegészítő) egyenletek?
138. Mennyi a független ágfeszültségek száma egy adott hálózatban?
139. Mennyi a független ágáramok száma egy adott hálózatban?
140. Mi a Kirchhoff-törvényekkel végzendő hálózatanalízis menete?
141. Mi a Kirchhoff-törvények alkalmazásának a hátránya?
142. Milyen általános alakú egyenleteket adnak a Kirchhoff-törvények?
143. Hogyan módosul a felírandó Kirchhoff-egyenletek száma, ha egyes ágakban csak ideális feszültség- vagy áramgenerátorok vannak?
144. A hurokáramok módszerénél mit (miket) tekintünk ismeretlennek?
145. Mi az a fizikailag teljesen alaptalan, de matematikailag helyes elképzelés, amely a hurokáramok bevezetését igazolja?
146. Mennyi egyenletet kell felírni a hurokáramok módszerét alkalmazva?
147. Milyen alakú egyenletrendszer biztosít a hurokáramok módszere, és mi a jelölések értelme?
148. Valós áramgenerátorokat is tartalmazó hálózatok esetén hogyan alkalmazzuk a hurokáramok módszerét?
149. Ideális áramgenerátorokat is tartalmazó hálózatok esetében mi a teendő?
150. A csomóponti potenciálok módszerénél mit tekintünk ismeretlennek?
151. Mennyi egyenlet írható fel a csomóponti potenciálok módszerének segítségével?
152. Milyen alakú egyenletrendszer biztosít a csomóponti potenciálok módszere, és mi a jelölések értelme?
153. Ha a hálózatban áramgenerátorok (is) működnek, hogyan módosul az egyenletrendszer?
154. Mit lehet tenni, ha a hálózat egyes ágait ideális feszültséggenerátorok alkotják?
155. Melyik az előnyösebb hálózatanalízis-módszer: a hurokáramok vagy a csomóponti potenciálok módszere (és mikor)?
156. Mi a csillag-delta transzformáció (átalakítás) alapja (melyik eljárás képezi az alapját)?
157. Melyek a csillagból delta-kapcsolásba való átszámítás kifejezései?
158. Hogyan szólnak a háromszögből csillag-kapcsolásba való átszámítás egyenletei?
159. Hogyan fogalmazható meg a szuperpozíció elve?
160. Hogyan bizonyítható a szuperpozíció elve?
161. Hogyan szól a felcserélési tétel (a reciprocitás tétele)?
162. Hogyan bizonyítható a felcserélési tétel?
163. Mit fogalmaz meg a Thèvenin-tétel?
164. Miként szól a Norton-tétel?
165. Hogyan lesz a Thèvenin-tételből Norton-tétel?
166. Hogyan bizonyítható a Thèvenin-tétel?
167. A Thèvenin-tétel alkalmazása: a feszültséggenerátorok soros, párhuzamos és vegyes kapcsolása
168. Mit mond ki a helyettesítés (kompenzáció) tétele?
169. Hogyan bizonyítható a helyettesítés tétele?
170. Mit rögzít a teljesítménymegmaradás tétele?
171. Érvényes-e a szuperpozíció elve a teljesítményekre?
172. Mi a létrahálózat gyors megoldásának lényege?
173. Mi a szimmetrikus hálózatok megoldásánál a könnyítés?
174. Mi történik a kettévágott ágakban az ellenállások és az áramgenerátorok forrásáramának értékeivel?
175. Léteznek-e a valóságban ideális lineáris elemek?
176. Miért fektetünk mégis nagy hangsúlyt a lineáris hálózatok analízisére?
177. Hogyan csoportosítjuk a nemlineáris elemeket az őket alkotó anyagok jellege alapján?
178. Milyen elemek a termisztorok és milyen fajtájuk ismert?
179. Milyen a termisztorok jellegzetes átmeneti (I/U) görbéje?

180. Mire használják leggyakrabban a termisztorokat?
181. Milyen nemlineáris elemek készülnek nemlineáris jellegű anyagokból?
182. Miből és hogyan készül, és milyen karakterisztikával rendelkezik a tirit ellenállás (varisztorok családja)?
183. Hol alkalmazzák a tirit ellenállásokat?
184. Melyek az aszimmetrikus karakterisztikájú nemlineáris elemek?
185. Milyen a vákuum-dióda átmeneti görbéje (analitikus és grafikus alak)?
186. Milyen a félvezető-dióda átmeneti görbéje (analitikus és grafikus alak)?
187. Hogyan kapható meg egy lineáris és egy nemlineáris elem soros kapcsolásának eredő átmeneti karakterisztikája?
188. Hogyan kapható meg egy lineáris és egy nemlineáris elem párhuzamos kapcsolásának eredő átmeneti karakterisztikája?
189. Mikor találkozunk átmeneti jelenségekkel a villamos hálózatoknál?
190. Milyen egyenlettel (egyenletrendszerrel) írhatók le az átmeneti jelenségek a lineáris koncentrált paraméterű hálózat esetében?
191. Milyen megoldás-részekből áll az állandó együtthatójú, inhomogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer (differenciálegyenlet) általános megoldására?
192. Fizikailag hogyan magyarázhatók ezek a megoldás-részek?
193. Mi a soros RC kör egyenfeszültségre kapcsolásának kiinduló egyenlete és differenciálegyenlete?
194. Hogyan történik az állandók meghatározása?
195. Milyen a kondenzátor feszültségének pillanatnyi értéke az egyenfeszültségre kapcsolás időpontjától számítva (analitikusan és grafikusan)?
196. Milyen a kondenzátor töltőáramának pillanatnyi értéke az egyenfeszültségre kapcsolás időpontjától számítva (analitikus és grafikus alak)?
197. Meddig tartanak gyakorlatilag az átmeneti jelenségek?
198. Milyen a kisütés céljából rövidre zárt soros RC kör kondenzátor-feszültségének pillanatnyi értéke?
199. Milyen a rövidre zárt soros RC körben a kondenzátor kisütési áramának pillanatnyi értéke?
200. Hogyan sorolhatók osztályokba a kondenzátorokat tartalmazó hálózatok?
201. Milyen hálózatot jelöl az „elektrosztatikus hálózat” fogalom?
202. Milyen alakú Kirchhoff csomóponti törvénye az elektrosztatikus hálózatok esetében?
203. Milyen alakú Kirchhoff huroktörvénye az elektrosztatikus hálózatok esetében?

4. STACIONÁRIS (IDŐBEN ÁLLANDÓ) MÁGNESES TÉR

4.1. Két áramelem között ható mágneses erő

A két kis, nyugalomban levő villamos töltés (elektromosan töltött test) között fellépő elektromos (villamos) erőt közvetlen módon le lehet mérni. Sajnos két kis, mozgó, elektromosan töltött test között az erőt gyakorlatilag nem lehet lemérni. Másszóval lehetetlen olyan kísérletet elvégezni, amely alapján következtetni tudnánk arra, hogy hogyan változik meg az erő két villamosan töltött test között, mikor azok mozogni kezdenek.

Létezik azonban egy egyszerű mód arra, hogy az elektrosztatikus erőktől különválasztva lemérjük a mágneses erőket. Az elektromos áram tulajdonképpen nagyszámú elektromos töltés rendezett mozgása. A jó vezetőknél, hogy fenntartsuk a rajtuk átfolyó áramot, nagyon kicsi villamos tér szükséges, így a vezető felületén nincs felhalmozódott nyugvó elektromos töltés. Két ilyen vezető között az erő az áramot létrehozó töltések mozgásának eredménye, így a vezetők közötti erő tisztán mágneses erő. A mágneses jelenségek tanulmányozását két áramvezető közötti erő meghatározásával kezdjük, pontosabban a két vezető egy-egy áramkörü eleme között jelentkező erő kiszámításával. Az ilyen elemeket áramelemeknek fogjuk nevezni.

Itt azokról a mágneses erőkről beszélünk, amelyek a vákuumban levő áramjárta vezetők között jelentkeznek (a közelben csak olyan testek vannak, amelyekben nincs vas, nikkel és kobalt).

A két áramelem között ható mágneses erő törvényének matematikai formája összetettebb, mint a Coulomb-törvény matematikai alakja. A törvény megfogalmazásához két vektor vektoriális és három vektor dupla (kétszeres) vektoriális szorzatának alkalmazása kell.

Vegyünk például két vékony, zárt C_1 és C_2 vezetőt I_1 és I_2 árammal, amelyek tetszőleges alakúak (4.1. ábra). Ahhoz, hogy kiszámítsuk a két tetszőleges alakú áramhurok között ható erőt, előbb meg kell határozni azt az erőt, amellyel a két áramelem (két rövid, egyenesvonalú áramjárta vezetékrész) egymásra hat. Ha ismerjük a két áramelem között ható mágneses erő matematikai kifejezését, akkor a két áramhurok között jelentkező eredő erő –elméletileg– egyenlő az összes áramelem között ható erők vektoriális összegével (vektorintegráljával).

Az áramelemek között ható erők mérése kísérleti úton nem lehetséges, mivel ilyen áramelemek külön nem léteznek (az áramkörnek zártnak kell lennie). De a több különböző alakú és helyzetű áramelem között lement erőből kikövetkeztethető, hogy milyen alakú lehet a két áramelem között ható erő. Ily módon meghatározható a mágneses erő kifejezése, amellyel az I_1 áramú $d\vec{l}_1$ áramelem az I_2 áramú $d\vec{l}_2$ áramelemre hat:

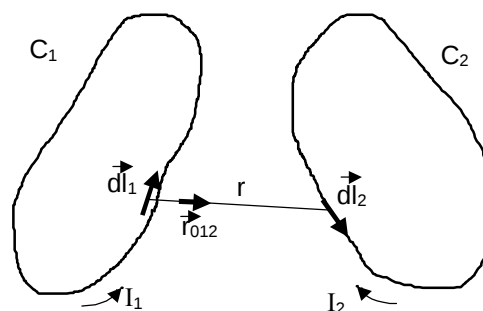
$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{012})}{r^2}$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Az SI (MKSA) mértékrendszerben $k = 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right]$

μ_0 – vákuum permeabilitása

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \right] \left[\frac{N}{A^2} \right]$ H-henry, az induktivitás mértékegysége



4.1. ábra

4.2. A mágneses tér fogalma, mágneses indukció vektora, Biot-Savart törvénye

Amint az elektromos, úgy a mágneses erők is látható közvetítők nélkül hatnak, ami idegen az ember megszokott gondolkodásmódjától és érzékelésétől. E nehézség elhárítása céljából vezetjük be a mágneses tér (vagy mező) fogalmát, amely a közvetítő szerepét kapja. A $d\vec{l}_1$ áramelemben levő áram úgy módosítja a környezetét (a vákuumot), hogy egy másik áramelemre ($d\vec{l}_2$), amellyet az első áramelem ($d\vec{l}_1$) közelébe hozunk, erő hat a fent leírt képlet (törvény) szerint. A $d\vec{l}_2$ áramelemre nem a $d\vec{l}_1$ áramelemben folyó áram hat közvetlenül, hanem a mágneses tér a $d\vec{l}_2$ környezetében, amely a $d\vec{l}_1$ áramelemben levő áramtól ered. A két áramkörü elem között fellépő erő a következő alakban is felírható:

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{012}}{r^2} \right)$$

A zárójelben lévő kifejezésben nem szerepel egyetlen olyan jelölés vagy nagyság sem, amely a $d\vec{l}_2$ áramelemre utalna, kivéve a $d\vec{l}_1$ áramelemtől való távolságot (r). Ezért a zárójelben levő kifejezést mint alapkifejezést használhatjuk, amely leírja az I_1 áramú $d\vec{l}_1$ áramelem mágneses terét. Ezt a kifejezést a mágneses indukcióvektor definíciójának tekintjük, jelölése $\vec{B}$.

A Biot-Savart-törvény szerint az áramelem által létrehozott mágneses indukció (4.2. ábra):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

$\vec{r}_0$ - a mágneses tér forrásától a tér meghatározásának pontjába irányított (odamutató) egységvektor.

$$dB = |d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

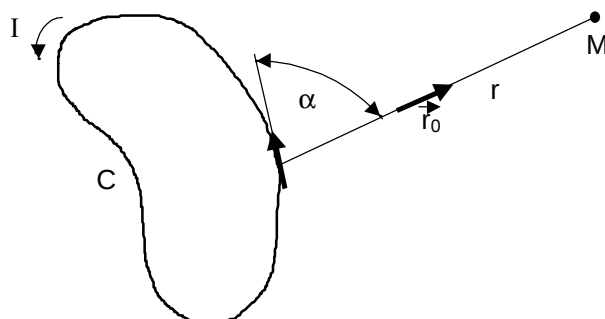
$|\vec{B}| = B$ az indukcióvektor intenzitása

A $d\vec{B}$ vektor iránya merőleges a $d\vec{l}$ és $\vec{r}_0$ vektorok által alkotott síkra. Irányítása a jobbsavar haladási irányával egyezik meg, a jobbsavar elfordítását pedig a $d\vec{l}$ vektor olyan irányú rotációja

(elforgatása) jelenti, melynek segítségével a $d\vec{l}$ iránya és irányítása a legrövidebb úton esik egybe az $\vec{r}_0$ egységvektor irányával és irányításával. Az áramelem irányítása a hurokban folyó áram referenciáirányával (vonatkoztatási irányával) adott.

Figyeljük meg az 4.2. ábrán látható hurkot. A $\vec{B}$ mágneses indukciót, amelyet ez a vezető hoz létre, bármely pontban úgy határozzuk meg, hogy vektoriálisan összeadjuk a $d\vec{B}$ indukciókat, amelyeket a C áramhurok elemei az adott pontban létrehoznak. A vektoriális összeadás (integrálás) matematikai alakja a következő:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$



4.2. ábra

A $\vec{B}$ mértékegysége az SI (MKSA) mértékrendszerben: teszla [T], illetve a vele egyenértékű mértékegység-kifejezések: $\left[\frac{\text{N}}{\text{Am}}\right]$, valamint $\left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\right]$.

A mágneses indukcióvektor intenzitásának értéke a gyakorlatban:

- a Föld mágneses terének vízszintes komponense nálunk $0.2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$,
- a Föld mágneses terének függőleges komponense nálunk $0.35 \cdot 10^{-4} \text{ T}$,
- levegőben levő áramvezető körül $10^{-6} - 10^{-2} \text{ T}$,
- az elektromágnesekben (a vasmagban) néhány tíz T.

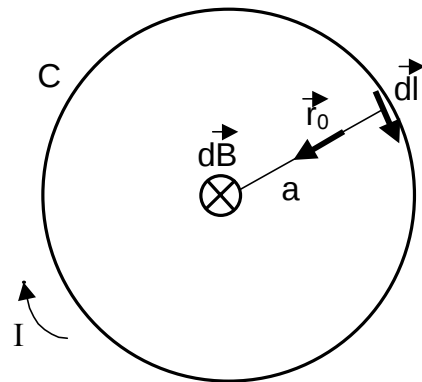
4.1. Példa: Számítsuk ki a mágneses indukció vektorát (irányát, irányítását és nagyságát vagy intenzitását) a kör alakú áramhurok középpontjában (4.3. ábra).

Megoldás:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin 90^\circ}{a^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi a^2}$$

$$B = \oint_c \frac{\mu_0 Idl}{4\pi a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \oint_c dl =$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \cdot 2\pi a = \frac{\mu_0 I}{2a}$$



4.3. ábra

Mivel az összes elemi $d\vec{B}$ indukció, amelyek összeadásával a $\vec{B}$ indukciót kapjuk, egyforma irányú és irányítású, ezért a $\vec{B}$ vektor intenzitása egyenlő a $d\vec{B}$ vektorok intenzitásainak összegével.

4.2. Példa: Határozzuk meg az indukcióvektor értékét (mindhárom ismervét) a végtelen hosszú egyenes vezető körül (4.4. ábra).

Megoldás:

$$dB = \mu_0 \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi R^2}$$

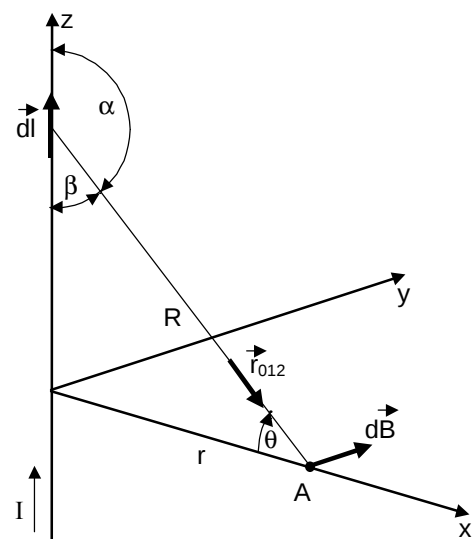
Az A pontban a vezető minden eleme egyforma irányú és irányítású elemi mágneses indukciót hoz létre:

$$B = \int_{\text{egész vezető}} dB = \int_{\text{egész vezető}} \mu_0 \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi R^2}$$

A képről látható, hogy:

$$\alpha = 90^\circ + \theta, \text{ vagyis:}$$

$$\sin \alpha = \sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \quad (1)$$



4.4. ábra

másrészről pedig könnyen belátható a következő két

összefüggés is:

$$\frac{Rd\theta}{dl} = \cos\theta \Rightarrow dl = \frac{Rd\theta}{\cos\theta} \quad (2)$$

$$\frac{r}{R} = \cos\theta \Rightarrow R = \frac{r}{\cos\theta} \quad (3)$$

Ha az előző három összefüggést behelyettesítjük a mágneses indukció fenti kifejezésébe, a következőket kapjuk:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{Rd\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{R^2},$$

egyszerűsítés után pedig:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{r} \cdot \cos\theta,$$

az integrált kiértékelve:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

A fenti kifejezés általános érvényű, a későbbi példákban alkalmazást is nyer.

Ebben a feladatban a szögek értékei:

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

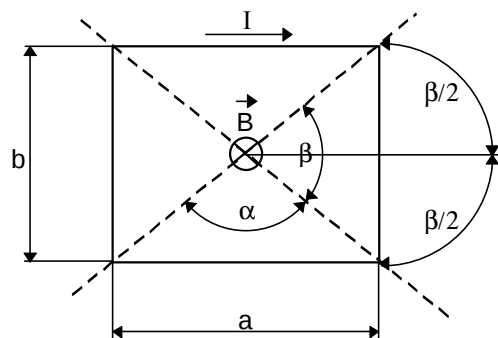
Az indukcióvektor intenzitása tehát az A pontban (az indukcióvektor iránya és irányítása az 4.4. ábrán látható):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

4.3. Példa: Mekkora a mágneses indukcióvektor értéke a 4.5. ábrán látható téglalap alakú áramjárta vezetékhurok középpontjában. Alkalmazzuk az előző példában eredményként kapott általános érvényű kifejezést!

Megoldás:

Az előző példában megkapott általános kifejezés alapján:



4.5. ábra

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi \left(\frac{a}{2}\right)} \left[\sin \frac{\beta}{2} - \sin \left(-\frac{\beta}{2} \right) \right] + 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi \left(\frac{b}{2}\right)} \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

illetve rendezés után:

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi} \left[\frac{\sin \beta/2}{a} + \frac{\sin \alpha/2}{b} \right].$$

Mivel a 4.5. ábráról könnyen belátható a következő két trigonometriai összefüggés:

$$\sin \beta/2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

és

$$\sin \alpha/2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (2)$$

így az indukció keresett értéke (intenzitása – az irány és az irányítás a 4.5. ábrán látható):

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{ab\pi} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A Biot-Savart-törvény egyenlete (a $d\vec{B}$ -re és a $\vec{B}$ -re) lehetővé teszi a tetszőleges alakú és vékony áramjárta vezetéktől származó mágneses indukció kiszámítását. A $\vec{B}$ számítására használt kifejezésben levő integrált nem tudjuk közvetlenül kiértékelni (kiszámítani), de mindig nagy pontossággal kiszámíthatjuk numerikus módszerrel, számítógép segítségével.

Határozzuk meg a kifejezéseket arra az esetre, amikor a mágneses indukció felületi áramtól, vagy vastag vezetékben folyó áramtól származik!

Ha a vastag vezeték keresztmetszete S , akkor az $I d\vec{l}$ szorzat felírható mint:

$$I d\vec{l} = \left(\frac{I}{S} \right) S d\vec{l} = J S d\vec{l} = \vec{J} S d\vec{l} = \vec{J} dV,$$

ezek szerint a mágneses indukció, amely a dV térfogatú elemben a $\vec{J}$ áramsűrűségtől származik:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{J} \times \vec{r}_0}{r^2} dV,$$

illetve:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}_0}{r^2} dV.$$

Ha a felületi áram a szélességű sávban folyik, akkor:

$$I d\vec{l} = \left(\frac{I}{a} \right) a d\vec{l} = J_s a d\vec{l} = \vec{J}_s a d\vec{l} = \vec{J}_s dS$$

vagyis a mágneses indukció, amely a dS felületű elemen folyó $\vec{J}_s$ felületi áramsűrűségtől származik:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{J}_s \times \vec{r}_0}{r^2} dS,$$

az össz indukció pedig:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_S \frac{\vec{J}_s \times \vec{r}_0}{r^2} dS.$$

Elevenítsük most fel a σ felületi töltéssűrűségtől eredő villamos tér leírására a sztatikában megismert kifejezést:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{r}_0.$$

Összehasonlítva a két képletet észrevehetjük, hogy mindkét esetben egy vektorintegrál kiértékeléséről van szó. A sztatikában az elektromos töltések elhelyezkedése (eloszlása) a vezető felszínén általában ismeretlen, mivel e töltésektől származó villamos tér nagy kihatással van magukra a töltésekre, illetve a töltések elhelyezkedésére a test felszínén. Ezzel szemben az áramsűrűség a vezető egyetlen pontjában sem függ a $\vec{B}$ vektor intenzitásától, irányától és irányításától ugyanabban a pontban. Emiatt a $\vec{B}$ meghatározására szolgáló kifejezést sokkal többet használják a gyakorlatban, mint az $\vec{E}$ meghatározására szolgáló kifejezést.

4.1.1. MÁGNESES INDUKCIÓVEKTOR AZ ÁRAMHUROK SÍKJÁNAK PONTJAIBAN

A $\vec{B}$ vektor kiszámítására szolgáló kifejezés igen bonyolult. Ha az áramhurok síkja és a mágneses indukció vektorát e sík bármely pontjában kell meghatározni, akkor a $\vec{B}$ -re vonatkozó kifejezést le lehet egyszerűsíteni. A $\vec{B}$ vektor intenzitása a 4.6. ábrán látható síkban elhelyezkedő áramhurok esetében az áramhurokhoz tartozó sík tetszőleges pontjában a következő módon számítható ki:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

A képről kivehető, hogy:

$$\frac{rd\theta}{dl} = \cos \beta \Rightarrow dl \cdot \cos \beta = rd\theta$$

és

$$\alpha = 90^\circ + \beta$$

$$\sin \alpha = \sin(90^\circ + \beta) = \cos \beta,$$

vagyis az előzőek alapján:

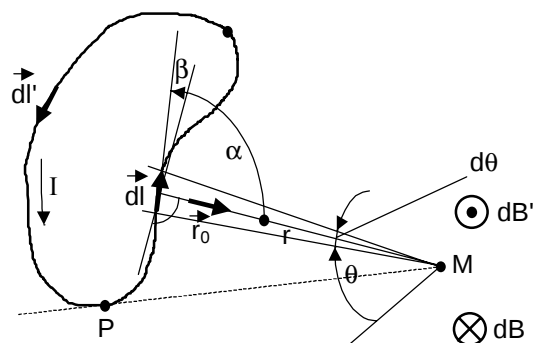
$$dl \cdot \sin \alpha = rd\theta.$$

Behelyettesítve a kiinduló kifejezésbe a következőket kapjuk:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\theta}{r},$$

illetőleg:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{r}.$$



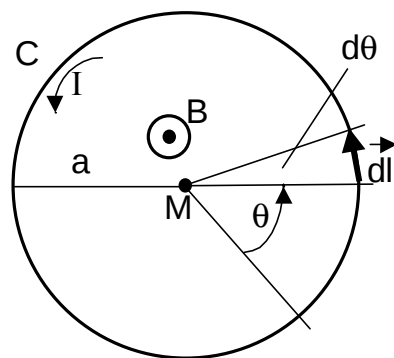
4.6. ábra

4.4. Példa: Határozzuk meg a mágneses indukcióvektort a síkban elhelyezkedő kör alakú áramhurok (körvezető) középpontjában (4.7. ábra)!. Most ne a Biot-Savart törvényt használjuk, hanem a fent levezetett kifejezést!

Megoldás:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\theta}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

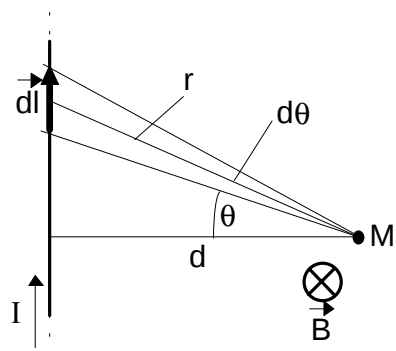


4.7. ábra

4.5. Példa: Számítsuk ki most a másik Biot-Savart törvénnyel megoldott példafeladatot is: a mágneses indukcióvektor értékét a végtelen hosszú, egyenes, áramjárta vezető közelében (4.8 ábra)!

Megoldás:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



4.8. ábra

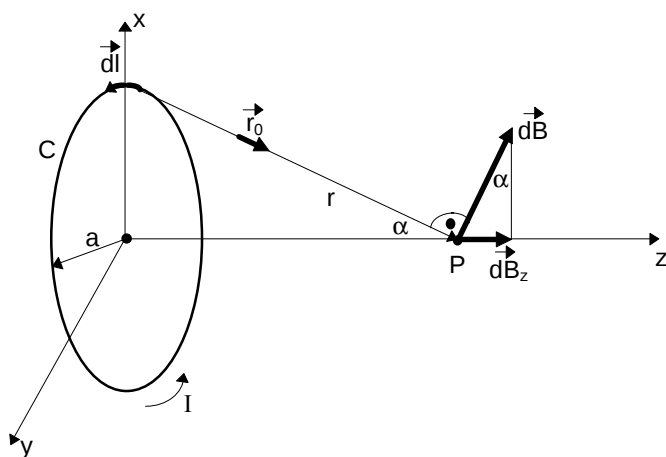
4.6. Példa: Nehezítsünk az utolsó-előtti példa feladatán: határozzuk meg a mágneses indukció vektorát a kör alakú vezető tengelye mentén (4.9. ábra).

Megoldás:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad \angle (d\vec{l}, \vec{r}_0) = 90^\circ$$

mivel $d\vec{l}$ és az $\vec{r}_0$ által bezárt szög mindig derékszög, bárhol helyezkedjen is el az áramelem. A szimmetria miatt az indukcióvektornak csak a z tengely irányába mutató vektorkomponense van:

$$dB_z = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I a dl}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}}$$



4.9. ábra

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \oint_c dl = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi a$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

A kapott kifejezés helyességét igazolandó, helyettesítsük be a $z=0$ értéket az utolsó képletbe! A 4.4. példa eredményét kell megkapnunk:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

A síkban elhelyezkedő körvezetőtől távol ($z \gg 0$), a tengely mentén az indukcióvektor értéke:

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}.$$

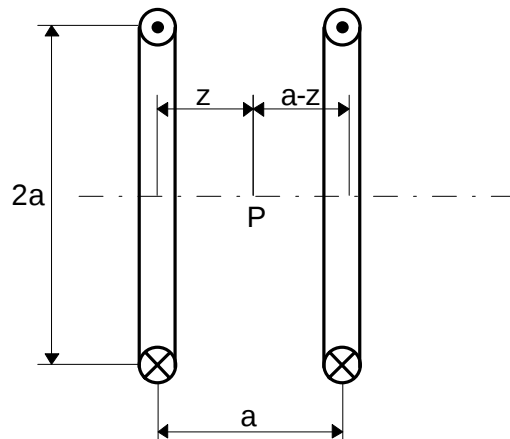
4.7. Példa: Számítsuk ki az indukcióvektor értékét a Helmholtz-orsó (kör alakú vezetékpár – 4.10. ábra) tengelye mentén.

Megoldás:

Használjuk ki az előző példa megoldását, és írjuk fel közvetlenül az indukcióvektor nagyságát a P pontban (milyen az indukcióvektor iránya és irányítása?):

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (a-z)^2)^{3/2}} \right]$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}} \right].$$



4.10. ábra

Kicsit hosszadalmas, de aránylag egyszerű eljárással bizonyítható (az indukcióvektor első és második deriváltjának nullával való kiegyenlítésével), hogy a mágneses tér értéke a körvezetékek között félúton, a tengely mentén gyakorlatilag állandó, illetve homogén.

4.3. A mágneses térben levő áramhurokra ható erő és forgatónyomaték

A mágneses térben levő áramhurokra ható eredőerő és eredő forgatónyomaték elvben kiszámítható a

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{012})}{r^2}$$

képlettel. Általánosabb kifejezést akkor kapunk, ha az erőt és a forgatónyomatékot a hurok mentén kiszámított mágneses indukció segítségével számítjuk ki. Az ilyen eljárás akkor is érvényben marad, ha a mágneses tér nem valamilyen vezetőben folyó áramtól származik, hanem pl. állandó mágnesről. Az erő, amellyel a $d\vec{l}_1$ elem a $d\vec{l}_2$ elemre hat felírható a következő alakban is:

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}.$$

Általánosan fogalmazva, a mágneses tér $\vec{B}$ indukcióértékkel rendelkező pontjában elhelyezkedő áramelemre ható erő (4.11. ábra):

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times d\vec{B}.$$

Az eredő mágneses erő az áramhurokra vonatkoztatva:

$$\vec{F} = \int_{\text{a vezető mentén}} I d\vec{l} \times d\vec{B}.$$

Az O-O' tengelyre számított forgatónyomaték (4.11. ábra), amely a $d\vec{l}$ áramelemre ható mágneses erő következménye, így írható fel:

$$d\vec{M}_{0-0'} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} (I d\vec{l} \times \vec{B}),$$

illetve:

$$d\vec{M}_{0-0'} = I \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}).$$

Az eredő (O-O' tengelyre számított) forgatónyomaték, amely a teljes áramhurokra ható mágneses erő következménye, a következő alakot kapja:

$$\vec{M}_{0-0'} = \int_{\text{a vezető mentén}} I \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B}).$$

4.4. Villamos töltés mozgása mágneses és elektromos térben

Az áramelemre ható erő tulajdonképpen a $d\vec{l}$ elemben mozgó villamos töltésekre ható mágneses erők vektoriális összege. Gyakorlásként határozzuk meg az egy töltésre ható mágneses erőt. Az áramelemre ható mágneses erőt már előbből ismerjük:

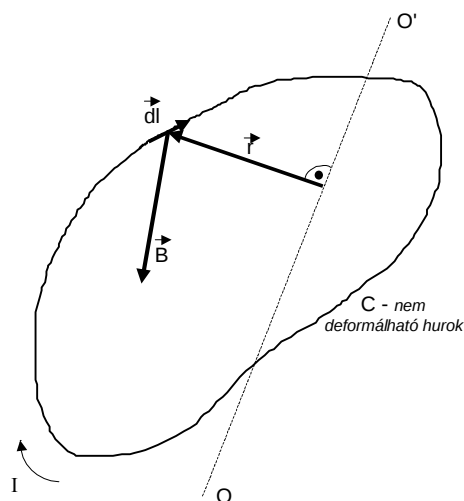
$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times d\vec{B}.$$

A jobb oldal első része tovább bontható:

$$I d\vec{l} = JS d\vec{l} = NQv S d\vec{l} = NSdl Q \vec{v},$$

ahol:

$NSdl$ - a dl áramelemben levő össz szabad töltéshordozó száma.



4.11. ábra

A kapott értéket behelyettesíthetjük az erő kifejezésébe. Ha csak az egy töltésre ható erő érdekel bennünket, úgy az áramelemre ható erőt el kell osztanunk a bennük levő töltéshordozók számával (NSdl). Így jutunk el a $\vec{v}$ sebességgel mozgó részecskére ható mágneses erő kifejezéséhez:

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}.$$

A $\vec{v}$ és $\vec{B}$ vektorok változnak a részecske mozgásának ideje alatt. A mágneses erő mindig merőleges a részecske mozgási irányára. Ezért mágneses erővel (a mágneses tér által) nem lehet megváltoztatni a részecske sebességének intenzitását, csak mozgási irányát (a mozgás iránya és irányítása változik, viszont a részecske kinetikus energiája nem).

4.8. Példa: A $Q > 0$ töltésű és m tömegű részecske $\vec{B}$ indukciójú homogén mágneses térben mozog (lásd a 4.12. ábrát). Határozzuk meg a mozgási pálya sugarát, a részecske forgási sebességét és frekvenciáját.

Megoldás:

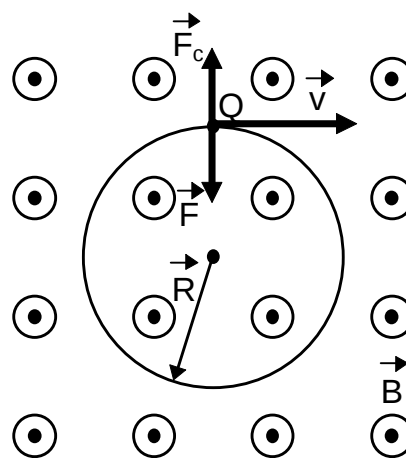
Írjuk fel az 4.12. ábrán feltüntetett erők kifejezéseit:

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B} \text{ - (a Lorentz-féle mágneses erő)}$$

$$F = QvB \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{B}) = QvB,$$

$$\text{mert } \angle(\vec{v}, \vec{B}) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$F_c = \frac{mv^2}{R} \text{ - centrifugális erő.}$$



4.12. ábra

Körmozgás esetén a két erő egyensúlyban van:

$$QvB = \frac{mv^2}{R},$$

amiből a körmozgás sugara közvetlenül adódik:

$$R = \frac{mv^2}{QvB} = \frac{mv}{QB}$$

A sugárból a periódus egyszerűen számítható, hiszen az egy periódus ideje alatt megtett út a kör kerületével egyenlő:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{QB} = \frac{2\pi m}{QB}.$$

Az eredmény érdekes és értékes, mert rámutat, hogy a periódus nem függ a részecske sebességétől. A frekvencia a periódus reciproka értéke:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{QB}{2\pi m}.$$

4.1.1. A CIKLOTRON ELVI MŰKÖDÉSE

A villamos töltések felgyorsítására ciklotront használnak. A ciklotron fő része a két részre vágott lapos, üreges fémhenger. A 4.13. ábrán 1 és 2 jellel jelölt félhengerek oszcillátorra (polaritását

beállítható sebességgel változtató feszültségforrásra) kapcsolódnak. Az egész rendszer homogén mágneses térben helyezkedik el úgy, hogy a tér merőleges a henger alapjára. A hengerben vákuum, illetve légritkított tér van. A villamos töltések a kettévágott henger közötti elektromos térbe kerülnek és felgyorsulnak. A résen kívül (az egyik vagy a másik félhenger belsejében) a részecskék csak mágneses térben mozognak, mégpedig félkör alakú pályán, melynek sugara:

$$R = \frac{mv}{QB}.$$

A teljes kör leírásának ideje (a periódus), mint ahogy azt az előzőekben láttuk, nem függ a sebességtől:

$$T = \frac{2\pi m}{QB}.$$

Ezért a részecskék mindig ugyanannyi idő alatt érnek a réshez. Ha az oszcillátor feszültségváltozását úgy állítják be, hogy a résben levő elektromos térrel a részecskéket mindig gyorsítják, akkor a részecskék egyre nagyobb és nagyobb sugarú félkört fognak leírni. A végén az eltérítő elektróda elektromos tere miatt a részecskék kirepülnek a ciklotronból. A kirepülési vagy végsebesség értéke:

$$v = \frac{QBa}{m}.$$

A villamos és mágneses térben mozgó villamos töltésekre az úgynevezett Lorenz-erő hat, melynek alakja:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

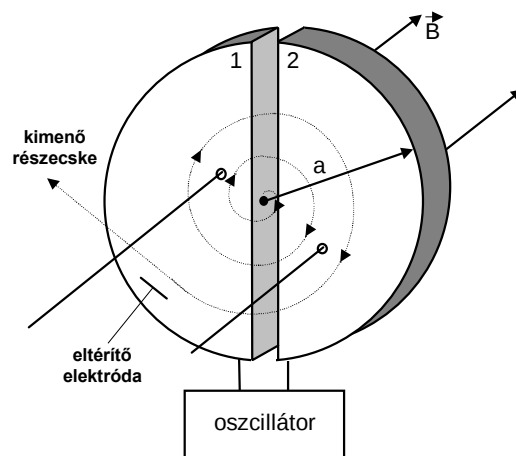
Egyszerűbb esetekben meghatározható a részecske pályája is:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_{(t)}}{dt^2} = Q\vec{E} + Q \frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} \times \vec{B}.$$

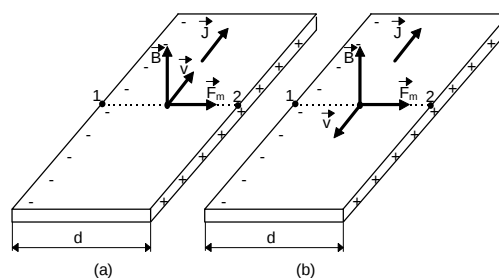
Az elektromos és mágneses térben mozgó töltött részecske mozgásegyenletében az $\vec{r}_{(t)}$ a részecske helyvektora. A részecske pályájának meghatározása (kiszámítása) a mágneses és az elektromos tér tetszőleges eloszlása mellett nagyon nehéz, különösen ha ezek a terek időben változnak

4.1.2. HALL EFFEKTUS

Hall kidolgozott egy kísérletet amely alapján meghatározható a szabad töltéshordozók előjele a vezetőkben. Figyeljük a vékony, d vastagságú vezető szalagot, amely $\vec{B}$ indukciójú homogén mágneses térben van (4.14. ábra). A $\vec{B}$ vektor vonalai merőlegesek a szalag síkjára. A szalagon keresztül $\vec{J}$ sűrűségű áram folyik amelyet pozitív (4.14.a ábra-rész)



4.13. ábra



4.14. ábra

vagy negatív (4.14.b ábra-rész) töltések hozhatnak létre.

A mágneses térben mozgó töltésre az $\vec{F}_m = Q \vec{v} \times \vec{B}$ erő hat, és ennek az a következménye, hogy a szalag egyik szélén pozitív (+), a másik szélén pedig negatív (-) töltések fognak összegyűlni. A széleken elhelyezkedő töltések által keletkezett elektromos tér (E_h) ellenáll a $\vec{B}$ mágneses tér hatása alatt mozgó töltések további felgyülemelésének. Az állandósult állapotban:

$$QvB = QE_h,$$

azaz

$$E_h = vB.$$

A széleken megjelölt pontok közötti feszültség:

$$V_1 - V_2 = E_h d = vBd.$$

Ez a potenciálkülönbség lemérhető és az előjel alapján következtetni lehet arra, hogy a szabad töltéshordozók a vezetőben milyen előjelűek. A 4.14. ábra alapján kitűnik, hogy:

- pozitív töltéshordozók esetén a $V_1 - V_2 < 0$,
- negatív töltéshordozók esetén pedig a $V_1 - V_2 > 0$.

Mivel $J = NQv$, közvetlenül felírhatjuk, hogy

$$|V_1 - V_2| = \frac{Jd}{NQ} B.$$

A kifejezésben szereplő töltéshordozók sűrűsége viszont az

$$N = \frac{N_a \rho_m}{M}$$

képlet alapján számítható, ahol:

- N_a - az Avogadro szám,
- ρ_m - az anyag tömegsűrűsége és
- M - az anyag atomtömege.

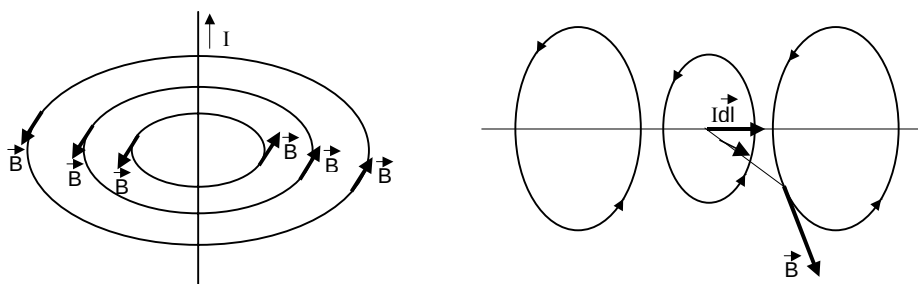
Mivel a potenciálkülönbség kifejezésében maga a potenciálkülönbség, az áramsűrűség és a vezető szélessége lemérhető, az N_a , ρ_m és M ismert egy adott anyagra, ilyen módon meghatározható a mágneses tér, vagyis az indukció ($\vec{B}$) amelyben a Hall-elem (Hall-szonda) elhelyezkedik. Ezt használják ki az igen kisméretűre gyártott mérőelemeknél, amelyek a villamos gépek légréseiben mérik a mágneses teret.

4.5. A mágneses indukció vektorának erővonalai

Egy vektor erővonalai képzeletbeli görbe vonalak amelyeknek minden pontjában a vektor érintő irányú. A $\vec{B}$ vektor vonalai nagyon hasznosak a mágneses tér ábrázolására. E vonalak kísérlettel is meghatározhatók. Ismeretes, hogy a mágnesű (állandó mágnesből készített tű, iránytű, amely szabadon mozoghat egy tengely körül) a mágneses térrel (a $\vec{B}$ vektorral) mindig párhuzamosan áll be, úgyhogy az iránytű észak-dél pólusiránya megegyezik a $\vec{B}$ vektor irányításával. Ezek az ismeretek lehetővé teszik a $\vec{B}$ vektor vonalainak könnyű meghatározását.

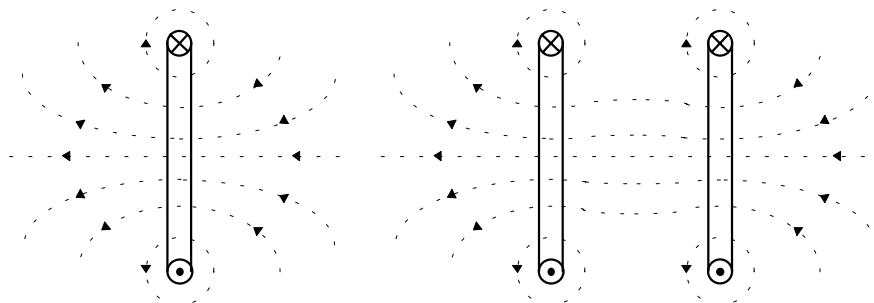
A Biot-Savart törvény alapján e vonalak némely esetben ki is számíthatók. Példaként határozzuk meg egy áramelem $\vec{B}$ vektorának vonalait. A $d\vec{B}$ vektor merőleges arra a síkra, amely a $d\vec{l}$ és $\vec{r}_0$ vektort tartalmazza (4.15. ábra jobb oldali része). Mivel a mágneses tér szimmetrikus a $d\vec{l}$ elem irányára, ebből következik, hogy a $d\vec{B}$ vektor vonalai körök. E vonalak

középpontjai a $d\vec{l}$ elem irányával egybeesnek és a $d\vec{B}$ vektor intenzitása egy kör minden pontjában egyforma.



4.15. ábra

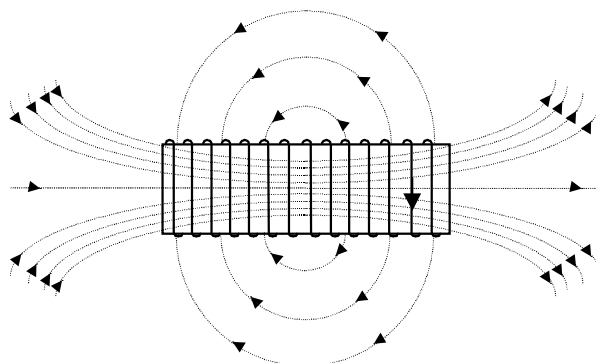
Egy vékony hosszú (egyenes) vezető esetén a $\vec{B}$ vektor vonalai körök és a vezető tengelyén van a középpontjuk (4.15. ábra bal oldali része). A $\vec{B}$ vektor iránya és a vezetőben folyó áram iránya a jobbcavar szabály szerint vannak összekötve (a $\vec{B}$ vektor a jobbmenetes csavar elfordulási irányába, az áram iránya pedig a csavar haladási irányába mutat).



4.16. ábra

A 4.16. ábra bal oldali részén egy áramhurok (körvezető) $\vec{B}$ vektorának erővonalai láthatók, míg ugyanennek az ábrának a jobbl oldali részén két, egymáshoz közeli, koaxiális, egyforma áramerősségű és sugarú körvezető $\vec{B}$ vektorának erővonalait láthatjuk. A 4.2.1. fejezetben kidolgozott példák alapján tudjuk, hogy az említett ábra jobb oldali részén elhelyezkedő rajzon a tengely körül homogén tert kapunk. Várható, hogy ha növeljük a körvezetékek számát és csökkentjük a köztük levő távolságot, akkor a mágneses tér mind nagyobb térrészben lesz homogén.

A 4.17. ábrán látható a sűrűn tekercselt szolenoid $\vec{B}$ vektor vonalai. A $\vec{B}$ vektor vonalainak nincs se kezdetük se végük, vagyis zárt görbék. Ez annak a következménye, hogy egy áramelem mágneses indukciójának vektorvonalai is önmagukba záródnak (tetszőleges eloszlású áram mágneses terét úgy kapjuk meg, hogy vektoriálisan összeadjuk az áramelemtől eredő erőtereket).



4.17. ábra

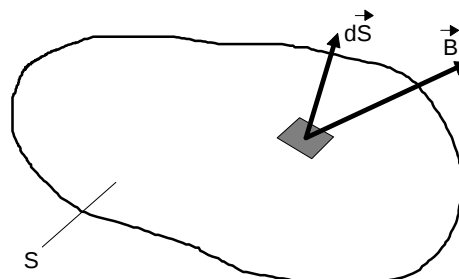
A természetben nem léteznek az elektromos töltésekhez hasonló, “mágneses töltések” (különválasztott pólusok). Csak az ilyen “mágneses töltések” hozhatnának létre olyan mágneses teret, amelynek vonalai egyik pólusban kezdődnének és a másikon végződnének. Ezért a mágneses teret forrásmentes (örvényes) erőternek mondjuk, melynek zárt erővonalai vannak.

4.6. Mágneses indukció fluxusa és a mágneses fluxusmegmaradás törvénye

Képzeljünk el a mágneses térben egy S felületet (4.18. ábra). A definíció szerint a $\vec{B}$ mágneses indukció fluxusa az S felületen, egyenlő a $\vec{B}$ és a $d\vec{S}$ vektorok skaláris szorzatának összegével ezen a felületen.

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

A mágneses fluxus definíciója az egyik legfontosabb mennyiséget (bár nem alapszámítást) határozza meg az elektrotechnikában. Az elektromos gépek számításai és kivizsgálásai a fluxuson alapulnak. A mágneses fluxus egysége az SI és az MKSA mértékegységrendszerben a weber: $[Tm^2] = [Wb]$.



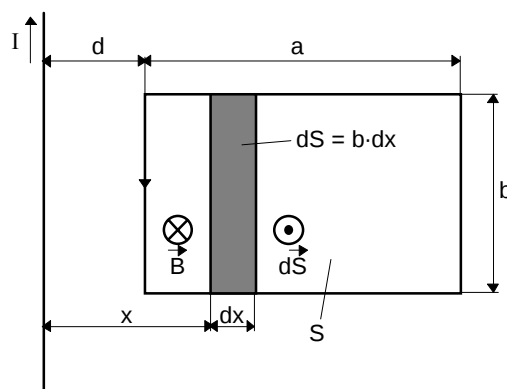
4.18. ábra

4.9. Példa: Határozzuk meg a fluxust a 4.19. ábrán látható téglalap alakú felületen keresztül, ha a mágneses teret a végtelen hosszú, egyenes, vékony vezetékben folyó áram hozza létre.

Megoldás:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cos\left(\overbrace{\vec{B}, d\vec{S}}^{\pi}\right)$$

$$\Phi = - \int_S B \cdot dS \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad dS = b dx$$



4.19. ábra

$$\Phi = - \int_S B b dx = - \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi x} dx = - \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

A mágneses fluxusnak egyszerű, de nagyon fontos tulajdonsága van: tetszőleges zárt felületen keresztül a fluxus egyenlő nullával.

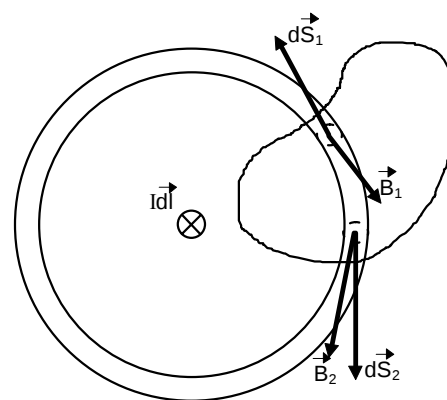
A bizonyítás egyszerűsítése érdekében ne tévesztjük szem elől a következő két tény:

1. A tetszőleges áramelosztású áramrendszertől származó mágneses indukció a tér egy pontjában egyenlő a rendszert alkotó áramelemek mágneses indukcióinak vektoriális összegével.
2. Egy tetszőleges elosztású áramrendszer mágneses fluxusa egy adott felületen egyenlő a mágneses fluxusok algebrai összegével amelyeket a rendszer áramelei az adott felületen létrehozhatnak.

Ezek szerint ha bebizonyítjuk, hogy egy áramelem fluxusa bármilyen alakú zárt felületen egyenlő nullával, akkor abból az következik, hogy a zárt felületre számított mágneses fluxus mindig nulla.

Bizonyítás: Egy áramelem indukcióvonalai (a $\vec{B}$ vektor erővonalai) körök, és az áramelem tengelyén van a középpontjuk. A $\vec{B}$ vektor intenzitása egyforma egy adott erővonal (a kör) minden pontján. Ha elképzelünk egy vékony kör alakú, dS keresztmetszetű csatornát amely saját magába záródik (nem kötelező, hogy kör keresztmetszetű legyen) és amelyet tetszőleges számú erővonal alkot, a mágneses fluxus egyforma intenzitású lesz a képzelte csatorna bármely

keresztmetszetén. A fluxus előjele a felületvektor (pozitív merőleges irányításától) és az erővonalak irányától (irányításától) függ. Tételezzük fel, hogy egy ilyen elképzelt csatorna egy képzeletbeli zárt felületen halad át. A megegyezés szerint a felületvektor (a pozitív merőleges) mindig a zárt felületből kifelé mutat (amint az a 4.20. ábrán is látható). A $d\vec{S}_1$ és $d\vec{S}_2$ felületen keresztül áthaladó fluxusok összege nulla.



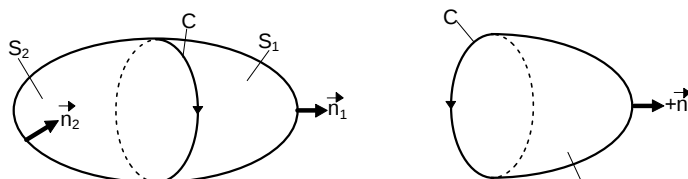
4.20. ábra

Mivel az áramelem mágneses tere ilyen csatornákra bontható, ebből az következik, hogy az áramelem $\vec{B}$ vektorának fluxusa nulla bármilyen alakú zárt felületen keresztül. Ezzel bizonyítást nyert, hogy a tetszőleges alakú zárt felületen keresztül a $\vec{B}$ vektor fluxusa általános esetben nulla. Ezt a következtetést a mágneses fluxusmegmaradás törvényének nevezzük, melynek matematikai alakja:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

A mágneses fluxusmegmaradás törvényének segítségével bizonyítható, hogy egy zárt görbe fölé kifeszített összes felületen keresztül a mágneses fluxus egyforma. Megállapodás szerint a felület merőlegesének irányát (irányítását) a következő módon kell meghatározni: a zárt görbe (hurok) pozitív irányítása és a görbe fölé kifeszített (a hurokra támaszkodó) felület merőlegesének irányítása a jobbsavarszabály szerint kötöttek (függnek össze).

Figyeljük meg a 4.21. ábrán a C hurkot, amelyre az S_1 és S_2 felületet feszítettük ki. Az ábrán jelölt a felületek $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ merőlegese (felületvektora), a fluxusaik pedig ezekre az egységvektorokra számítva Φ_1 és Φ_2 . Az $(S_1 + S_2)$ felület viszont zárt, a felületből kifelé mutató felületvektorral (merőlegessel). A mágneses fluxus bármilyen zárt felületen keresztül nulla.



4.21. ábra

A mágneses fluxusmegmaradás törvényére hivatkozva felírhatjuk, hogy:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

természetesen a zárt felületből kifelé mutató felületvektorhoz viszonyítva. Az $\vec{n}_1$ egységvektor (irányvektor) megegyezik a fluxusmegmaradás törvény elfogadott pozitív vektorirányával, az $\vec{n}_2$ egységvektor viszont nem. Így a törvény alkalmazásánál a zárt felület S_2 -vel jelölt részén a $-\vec{n}_2$ egységvektort kell figyelembe venni, amelyre vonatkoztatva az S_2 -n keresztül a fluxus értéke $-\Phi_2$. Tehát:

$$\oint_{S_1+S_2} \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S} = \Phi_1 - \Phi_2 = 0 \quad \text{azaz} \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

A mágneses fluxus egyforma minden azonos zárt görbére kifeszített felületen keresztül. Ez nagyon fontos következtetés, mert lehetővé teszi, hogy a fluxust arra a felületre számítsuk ki amelyre számunkra a legegyszerűbb. Mivel a mágneses fluxus értéke nem függ a felület alakjától hanem csupán a zárt vonal (görbe) alakjától amelyre a felületet kifeszítjük, gyakran használjuk az “egy zárt vonal (vezeték, görbe) által körülfogott fluxus” kifejezést az “egy, a zárt vonal (vezeték, görbe) fölé kifeszített felületen áthaladó fluxus” kifejezés helyett. A fluxus számításakor, természetesen meg kell jelölni azt a zárt vonalra kifeszített felületet, amelyre a számítás vonatkozik.

4.7. Ampère törvénye

Az időben állandó áram $\vec{B}$ mágneses indukcióvektora a vákuumban egyszerű, de nagyon fontos tulajdonsággal rendelkezik. Képzeljünk el egy tetszőleges zárt C vonalat a mágneses térben! A mágneses térerősség vonalintegrálja e zárt vonal mentén (azaz $\vec{B}$ és $d\vec{l}$ skaláris szorzatának összege a C mentén) egyenlő a zárt vonalra kifeszített felületen áthaladó áramok algebrai összegének μ_0 -val való szorzatával. Az összeg képzésénél a felületen a pozitív merőleges irányában áthaladó áramokat pozitív előjellel kell venni, az ellenkező irányban haladókat pedig negatívvál. A C vonal körbenjárési irányának és a felület pozitív merőlegesének a jobbsavarszabály szerint kell összehangolva lennie. A mágneses térerősség e tulajdonságát Ampère törvényének nevezzük.

Emlékezzünk vissza, hogy az időben állandó áram áramsűrűségvektora ($\vec{J}$) kielégíti a következő relációt:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0 \quad (\text{Kirchhoff I. törvénye})$$

Ez az egyenlet alakra ugyanolyan, mint a mágneses fluxusmegmaradás törvénye, aminek segítségével bebizonyítottuk, hogy egy zárt vonalra kifeszített felületeken keresztül a fluxus egyforma. Ezért az áramerősségnek is megvan e tulajdonsága, azaz beszélhetünk a zárt vonalon áthaladó áramról, ami alatt az áramsűrűség vektorának ($\vec{J}$) fluxusát értjük, amely a zárt vonalra kifeszített felületen halad át. A megegyezés szerint a zárt vonal (pozitív) körülrési iránya és a felület merőlegese a jobbsavarszabály szerint vannak összehangolva. Ampère törvényének matematikai alakja tehát:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{C\text{-n át}} I.$$

4.1.1. PÉLDÁK AZ AMPÈRE-TÖRVÉNY ALKALMAZÁSÁRA

Fontos megérteni, hogy az Ampère-törvény a fent leírt alakban ($\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{C\text{-n át}} I$) csak

akkor érvényes, ha az áramhurkok (áramjárta vezetékek) vákuumban vannak és a vezetékekben időben állandó áram folyik. Időben változó áram esetén az Ampère-törvénynek más alakja van.

Minden mágneses tér forrása az elektromos áram. Az anyagtól (állandó mágnes) eredő mágneses tér kiváltó okai az elemi Ampère-áramok. Hangsúlyozni kell azonban, hogy az Ampère-törvény minden esetben érvényes, nem csak vákuumban, egy feltétellel: mindig figyelembe kell venni az össz áramerősséget, amely a zárt vonalon áthalad. E zárt vonal mentén számítjuk a mágneses indukció $\vec{B}$ vektorának vonalintegrálját. Ezt a következtetést használva alkalmazzuk majd az Ampère-törvényt abban az esetben, ha a mágneses térben ferromágneses anyagok is megjelennek, melyekben elemi Ampère-áramok vannak és maguk körül mágneses teret hoznak létre.

Az Ampère-törvény két területen alkalmazható. Egyrészt az időben állandó mágneses tér tulajdonságainak bizonyítására, másrészt a mágneses indukcióvektor ($\vec{B}$) kiszámítására az olykor egyszerűnek tűnő, de a gyakorlat számára fontos esetekben. Ezek az esetek megoldhatók ugyan a Biot -Savart törvény segítségével is, de a megoldások jóval bonyolultabbak.

4.10. Példa: Határozzuk meg az egyenes vezető körül és magában a vezetőben is a mágneses indukciót, ha a vezető kör keresztmetszetű és a sugara a (4.22. ábra).

Megoldás:

$r \geq a$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \oint_C B dl \cos 0 = B \oint_C dl = 2\pi r B = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

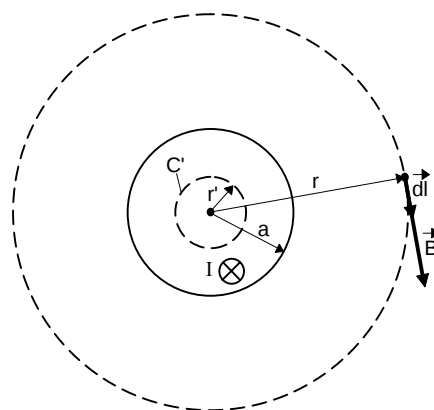
$r < a$

Mivel a vezető keresztmetszetén az áram egyenletesen oszlik el, a C' hurokban az áram erőssége:

$$I_{C'} = \frac{I}{a^2 \pi} r'^2 \pi = \frac{I}{a^2} r'^2,$$

a keresett indukcióvektor értéke viszont:

$$B = \mu_0 \frac{I r'}{2\pi a^2}.$$



4.22. ábra

4.11. Példa: Határozzuk meg a mágneses indukció vektorát a koaxiális kábelben (4.23. ábra).

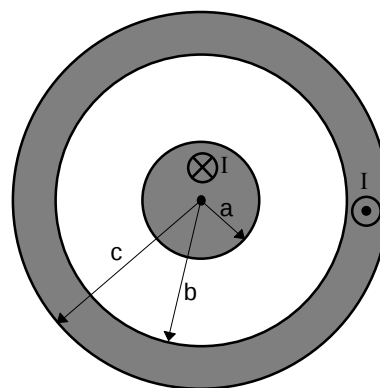
Megoldás:

$r < a$:

$$I_C = \frac{I}{a^2 \pi} r^2 \pi = \frac{I}{a^2} r^2$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{I}{a^2} r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}.$$



4.23. ábra

$b > r > a$:

$$\oint_{C'} \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$b < r < c$:

$$I_{C''} = I - \frac{I(r''^2 \pi - b^2 \pi)}{(\pi c^2 - \pi b^2)} = I \frac{c^2 - b^2 - r''^2 + b^2}{(c^2 - b^2)} = I \frac{(c^2 - r''^2)}{(c^2 - b^2)}$$

$$\oint_{C''} \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r'' B = \frac{\mu_0 I (c^2 - r''^2)}{(c^2 - b^2)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I (c^2 - r''^2)}{2\pi r'' (c^2 - b^2)}.$$

$r > c$:

$$\oint_{C'''} \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r''' B = 0 \quad \Rightarrow \quad B=0.$$

4.12. Példa: Határozzuk meg a mágneses indukció vektorát, amelyet az ún. tórusztekercsben (körgyűrű) folyó áram hoz létre (4.24. ábra).

Megoldás:

A mag keresztmetszete tetszőleges (kör, négyzet, téglalap) alakú lehet. Amikor a körgyűrű keresztmetszetének méretei sokkal kisebbek a középsugártól ($r \gg a$), akkor vékony tórusztekercsnek (4.24. ábra) hívjuk. Ha a menetek sűrűn helyezkednek el egymás mellett, akkor mágneses indukció vektorvonalai csak a magban léteznek, a magon kívül a $\vec{B}$ vektor vonalait nullának vehetjük. A magon kívül a valóságban mégis van mágneses tér (természetesen sokkal kisebb intenzitású, mint a magban), amelynek alakja a 4.25. ábrán látható, mivel a tórusztekercset kívülről egyetlen menetnek tekinthetjük, amelyben I erősségű áram folyik.

A körgyűrűre alkalmazva Ampère törvényét a következőket kapjuk:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2r\pi B = \mu_0 NI ,$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} .$$

A vékony tórusztekercs esetén az r első közelítésben egyforma a tórusz minden pontjában, ezért a B a mag keresztmetszetén megközelítőleg állandónak tekinthető.

4.13. Példa: Határozzuk meg a nagyon hosszú, tetszőleges keresztmetszetű szolenoidban (4.26. ábra) a mágneses indukciót, ha a szolenoid hosszanti menetszáma N_e

Megoldás:

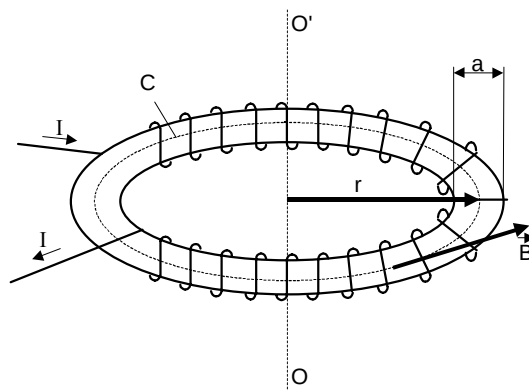
Az indukciót a szolenoidban úgy a legkönnyebb meghatározni, ha azt képzeljük el, hogy a tórusztekercs r sugara növekszik a menetszámmal együtt úgy, hogy az $N/(2\pi r)$ arány (a tórusz egységnyi hosszúságra eső menetszáma) állandó marad, vagyis:

$$N_e = \frac{N}{2\pi r} .$$

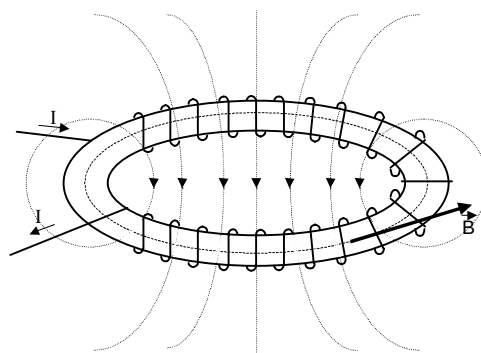
Így az indukció értéke:

$$B_z = \mu_0 N_e I .$$

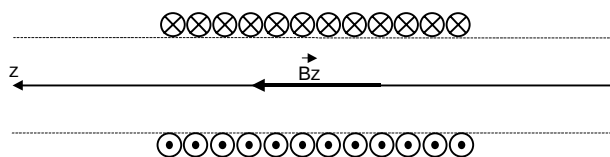
Mivel tekinthetjük úgy, hogy a szolenoidban a z tengely irányában I áram folyik, a szolenoidon kívül létezik mágneses tér, de azt a legtöbb esetben el lehet hanyagolni.



4.24. ábra



4.25. ábra



4.26. ábra

4.8. Anyag a mágneses térben

4.8.1. DIAMÁGNESES, PARAMÁGNESES ÉS FERROMÁGNESES ANYAGOK

Az eddigi vizsgálatok a vákuumban levő vezetőkben folyó, időben állandó áramoktól eredő mágneses térről szólnak. A gyakorlatban sokkal jelentősebbek az anyagokban levő mágneses terek, amelyek jelenlétükkel hatnak az anyagon kívüli, tehát külső mágneses térre.

A mágneses és az elektromos tér hatása az anyagokra különböző, habár e két hatás között bizonyos formális hasonlóság észlelhető. A mágneses tér hatása az anyagra tulajdonképpen az anyag atomjaiban mozgó elemi töltésekre való hatásban nyilvánul meg, míg az elektromos (villamos) tér hatása nincs kapcsolatban a részecskék mozgásával.

Az anyag atomjai nehéz pozitív magból és a mag körül keringő elektronokból állnak. Az elektronok nagy sebességgel keringenek a mag körül, fordulatszámuk 10^{15} fordulat/s. Így minden egyes mozgó elektront elemi áramkörnek tekinthetünk, azaz minden elektronnak mágneses nyomatékot tulajdoníthatunk (keringési vagy orbitális mágneses nyomaték). Ezen a nyomatékon kívül az elektronnak van egy másik mágneses nyomatéka is, amely a saját tengelye körüli forgásának (perdület) az eredménye (perdületi mágneses nyomaték vagy spin).

Makroszkopikusan minden atomot az elemi áramkörök (Ampère-áramok) összetett rendszerének tekinthetjük. Mint minden elektromos áram, az Ampère-áramok is mágneses tér forrásai, de ha az anyag nincs külső állandó mágneses térben, akkor az Ampère áramok mágneses tere csak az atomok közelében észlelhető.

4.14. Példa: Az Ampère-áramok és a keringési (orbitális) mágneses nyomaték számításához a hidrogénatomot vegyük alapul és számítsuk ki az elektron:

- mozgási sebességét,
- mag körüli fordulatszámát egy másodperc alatt,
- mozgása következtében jelentkező ekvivalens áramerősséget és
- keringési (orbitális) mágneses nyomatékát, ha a hidrogénatom sugara $a = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m

Megoldás:

a) Coulomb-féle vonzóerő egyenlő az elektronra ható centrifugális erővel:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a^2} = \frac{m_e v_0^2}{a}$$

$$v_0 = \frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi\epsilon_0 a m_0}}$$

mivel az elektron tömege $m_e = 9,108 \cdot 10^{-31}$ kg, töltésmennyisége pedig $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, így a sebesség:

$$v_0 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

b)

$$s = \frac{v_0}{t}$$

mivel $t = 1 \text{ s}$ – ra

$s = v_0$, így

$$\text{az } s = 2\pi \cdot a \cdot n \text{ alapján} \quad n = \frac{v_0}{2\pi \cdot a} \quad n = 6,58 \cdot 10^{15} \text{ fordulat/s}$$

c) $I_a = n \cdot e^- = 1,06 \cdot 10^{-3}$ A

$$d) \quad m = I \cdot S = I_a a^2 \pi = \frac{v_0 e}{2 \pi \pi a} a^2 \pi \pi = \frac{v_0 e a}{2} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

Az elemi elektromos részecskék össz mágneses nyomatékának jellege szerint az anyagok atomjait két csoportba oszthatjuk:

I. csoport - Azok az anyagok tartoznak ide, melyeknél az atomok (molekulák) eredő mágneses nyomatéka egyenlő nullával (az atom részecskéinek mágneses nyomatékai megsemmisítik egymást). Külső mágneses tér hiányában ezek az anyagok nem hoznak létre mágneses teret és nincs mágneses tulajdonságuk. Ezeket az anyagokat **DIAMÁGNESES ANYAGOK**-nak nevezzük.

A **diamágneses** (a "dia" görög szó jelentése "keresztbe") anyagból készült rúd, ha állandó mágnes mágneses terébe kerül, akkor a mágneses tér erő vonalaira merőlegesen (keresztbe) igyekszik beállni. Az atomok szupravezetőkkel készült kis áramhurkokként viselkednek (a töltések súrlódás nélkül mozognak a vákuumban), melyekben az össz áramerősség nullával egyenlő (mintha minden atomot két egyforma nagyságú, egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő, azonos intenzitású de ellentétes irányítású árammal rendelkező szupravezetőkkel készült áramhurok alkotná). Ha az anyagot külső mágneses térbe visszük, az atomoknál kiegészítő elemi áram jelentkezik, amely saját terével igyekszik megsemmisíteni a külső mágneses teret az atomban. Ezt a jelenséget nevezzük **diamágneses effektus**-nak. A diamágneses anyagokon belül a mágneses tér kisebb intenzitású, mint a külső tér, amelyben ők maguk helyezkednek el (gyengítik a külső teret). A gyengítés azonban nagyon kicsi. A diamágneses anyagok közé tartoznak: réz, cink, ezüst, bizmut, grafit. Diamágneses effektus **minden** anyagnál jelentkezik, tehát nemcsak azoknál, amelyeknél a molekulák, azaz az atomok mágneses nyomatéka nullával egyenlő.

II. csoport - Ebbe a csoportba azok az anyagok tartoznak, melyeknél az atomok (molekulák) részecskéinek mágneses nyomatékai nem semmisítik meg egymást, azaz melyeknél az atomoknak atomi szinten van eredő mágneses nyomatékuk. Ilyen atomok közelében létezik lokális (helyi) mágneses tér, amely az atomokban mozgó elemi elektromos részecskéktől származik.

Az ebbe a csoportba tartozó anyagok, az atomok egymás közötti hatásának (interakció) erőssége és fajtája szerint két alcsoportba oszthatók:

II. a) PARAMÁGNESES ANYAGOK - Azokat az anyagokat soroljuk a paramágneses anyagok közé, amelyeknél a molekulák közötti interakció (kölsönhatás) kis intenzitású. Így külső mágneses tér hiányában (mágnesezetlen állapotban) a molekulák mágneses nyomatékai a legkülönbözőbb térbeli irányokban helyezkednek el és megsemmisítik egymást, vagyis nem hoznak létre makroszkopikus mágneses teret. Mágneses térbe hozva őket a molekulákra a külső mágneses tér kényszerítő ereje hat, amely az atomok mágneses nyomatékát önmagával párhuzamosan igyekszik beállítani. Ennek az az eredménye, hogy a molekulák mágneses nyomatéka (melynek iránya megegyezik annak a tengelynek az irányával, amely körül a részecskék mozognak) ún. precessziós mozgást végez a molekulák helyzete által meghatározott koordináta-ponthoz tartozó $\vec{B}$ vektor iránya körül. Mivel a mágneses nyomatékok orientációja kaotikus, a precessziós mozgás nem tudja a mágneses nyomatékokat irányítani, ezért ebben az esetben is csak diamágneses effektus létezne (ha nem lenne a molekulák közötti gyöngye kölcsönhatás). Az atomok közötti kölcsönhatás miatt azonban az atomok mágneses nyomatéka részben a $\vec{B}$ vektorral párhuzamosan áll be, habár ezt a hatást gyengítik a hőmozgás miatti ütközések. Eredményként létrejön egy - a részben orientált Ampère-áramoktól eredő - kiegészítő mágneses tér. Ez a kiegészítő mágneses tér összeadódik a külső mágneses térrel, úgyhogy a $\vec{B}$ intenzitása az anyagon belül megnövekszik. A mágneses nyomatékok külső térrel párhuzamos irányítotttsága annál nagyobb, minél nagyobb a külső mágneses tér indukciójának intenzitása és

minél alacsonyabb az anyag hőmérséklete. A “para” görög szó jelentése “párhuzamos”. Az ilyen anyagból készült rúd a mágneses térben, a $\vec{B}$ vektor erővonalával párhuzamosan áll be. A legismertebb paramágneses anyagok: alumínium, platina, oxigén, levegő.

II. b) FERROMÁGNESES ANYAGOK - Azokat az anyagokat nevezzük ferromágneses anyagoknak, amelyeknél a molekulák közötti kölcsönhatás nagyon erős. Ennek következtében a szomszédos atomok mágneses nyomatéka egy tartományban (domen) szigorúan párhuzamosan helyezkedik el. Ez az irány tartományról tartományra változik és mágnesezetlen állapotban, a legkülönbözőbb térbeli irányban mágnesezett tartományok miatt, az anyag nem létesít makroszkopikus mágneses teret. Amikor az anyag külső mágneses térbe kerül, növekszik azon tartományok száma, amelyek mágneses nyomatékai párhuzamosak a külső mágneses térrel, és jelentkezik egy szekundáris, nagy intenzitású mágneses tér. Az elektrotechnikában használatos ferromágneses anyagok: vas, nikkel, kobalt, gadolínium, dysprosium és más ötvözetek, amelyek a felsorolt öt elem közül esetleg egyet sem tartalmaznak.

4.8.2. MÁGNESEZETTSÉG VEKTORA

A mágnesezett anyagtól származó mágneses tér nem más, mint a nagyon sok kis elemi áramtól (Ampère-áramtól) származó tér. Ez általánosan mind a három anyagfajtára érvényes. Ezeket a kis elemi áramokat vákuumban kell figyelni, mert az atom többi része nincs kihatással a mágneses térre. Ha ismerjük a vákuumban levő egy elemi áramkör által gerjesztett mágneses teret, akkor az össz ekvivalens Ampère-áramok terének összeadásával megkaphatjuk a mágnesezett anyag mágneses terét. Ez az eljárás gyakorlatilag lehetetlen, mivel az atomok száma a mágneses anyag legkisebb makroszkopikus térfogatában is óriási. Ezért megfelelőbb megfigyelni nagyobb számú atomcsoportot kis fizikai térfogatban és az e csoportoktól származó mágneses teret. Ily módon, matematikai módszerrel a mágneses tér úgy számítható ki, mint a kis fizikai térfogatban elhelyezkedő nagyszámú elemi áramtól származói mágneses terek integrálja.

Mivel az elemi áramkörök mérete nagyon kicsi (az atom méreteinek nagyságrendjével hasonlítható össze), a mágneses teret mindig az áramköröktől nagy távolságra mérjük vagy számítjuk. Bizonyítható, hogy a $\vec{B}$ vektor intenzitása az I áramerősségű és S felületű áramkör síkjától távol eső pontban nem függ külön-külön az áramerősségtől és a felülettől, hanem csupán azok szorzatától. Az $I \cdot \vec{S}$ szorzatot $\vec{m}$ -mel jelöljük és az elemi áramkör mágneses nyomatékának nevezzük. A kis dV térfogatban levő elemi áramköröktől eredő mágneses tér kiszámításához a mágneses nyomaték sűrűségét illetve a mágnesezettség vektorát használjuk, melynek jelölése $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \frac{(\sum \vec{m})}{dV}.$$

Legtöbb esetben a kis dV térfogatban levő áramoktól származó össz mágneses nyomaték ($\vec{m}$) egyforma. Ha az elemi áramok koncentrációja (térfogatsűrűsége) N , akkor az előző kifejezést a következő alakban is írhatjuk:

$$\vec{M} = N\vec{m}.$$

Általános esetben a mágnesezettség vektora ($\vec{M}$) pontról pontra változik. Ha egy mágnesezett test minden pontjában egyforma irányú, irányítású és intenzitású a mágnesezettség vektora ($\vec{M}$), akkor az a test homogén mágnesezettségű. Lássuk most a mértékegységeket:

-a mágneses nyomaték egysége: $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ [Am^2],

-a mágnesezettség vektorának egysége: $\vec{M} = N\vec{m}$ [A/m].

Az össz diamágneses és paramágneses anyagra érvényes, hogy a mágnesezési vektor arányos az indukcióvektorral:

$$\vec{M} = k\vec{B} \Rightarrow \vec{M} \sim \vec{B}.$$

Az ilyen anyagokat lineáris mágneses anyagoknak nevezünk.

A ferromágneses anyagok nem lineáris anyagok.

Az anyag mágnesezettségi fokát egy pontban (vagyis azt, hogy mennyire irányítottak - orientáltak az Ampère-áramok az adott pont körül) a $\mu_0\vec{M}$ szorzattal írjuk le (határozzuk meg). Ezt a nagyságot a **mágneses polarizáció vektorának** nevezzük.

$$\vec{J} = \mu_0\vec{M}.$$

4.8.3. AZ ÁLTALÁNOS AMPÈRE-TÖRVÉNY

Az előzőekben megismert Ampère-törvény a következő kifejezéssel volt adott:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{C-n \text{ át}} I.$$

A fenti Ampère-törvény csak bizonyos megszorítások mellett érvényes:

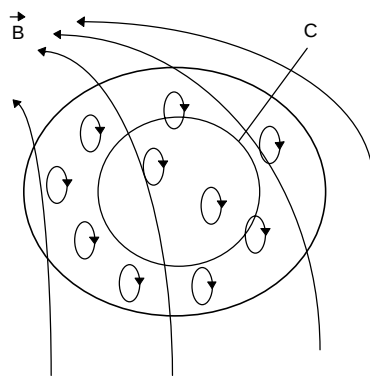
- 1) az elképzelt zárt C görbe vákuumban van (a térrészben nincs ferromágneses anyag),
- 2) időben állandó, vagyis egyenáramok folynak a vezetékekben.

A mágnesezett anyagot úgy képzeljük el, mint nagyszámú elemi áramkört, amelyek vákuumban vannak. Ampère törvényét akkor is alkalmazhatjuk, ha a térben bármilyen anyag van jelen, azzal a feltétellel, hogy figyelembe kell venni az össz áramot ami a C zárt hurkon keresztül áthalad: az elemi áramokat (4.27. ábra), és a vezetőkben folyó áramokat is. Ez elég egyszerű feladat, ha ismerjük a mágnesezési vektort ($\vec{M}$) a C görbe minden pontjában. Figyeljük meg a mágneses térben levő testet a 4.28. ábrán, ahol a 4.27. ábrán felrajzolt zárt C vonalnak csak egy (kinagyított) része látható. Az anyagban levő elemi áramokat kis, számokkal ellátott körökkel jelöltük.

Néhány elemi áram kétszer halad át a zárt C görbére kifeszített felületen (egyszer pozitív, egyszer negatív irányban – 1 és 2-vel jelölt hurok). Ilyen áramkörök nem adnak eredő áramot a C zárt vonalon keresztül, mint ahogy azok sem, amelyek egyszer sem haladnak át a C hurokra kifeszített (arra támaszkodó) felületen.

Az Ampère-törvény egyenletének jobb oldalán csak azokat az áramokat kell figyelembe venni, amelyek a zárt C görbére kifeszített felületen csak egyszer haladnak keresztül (4 és 5-tel jelölt hurok). Tisztán látható a 4.28. ábrán, hogy a C zárt vonalra támaszkodó felületen keresztül csak azokat az elemi áramokat kell figyelembe venni, amelyek az elképzelt zárt görbére “fel vannak fűzve”.

Határozzuk meg mennyi elemi áramkör van “felfűzve” a $d\vec{l}$ hosszúságú vonalelemen (a zárt vonal egy elemén). Legyen az elemi áramkör sugara a , felülete S , az átfolyó áram erőssége I , valamint minden, a $d\vec{l}$ vonalelem közelében levő elemi áramkör mágneses nyomatéka legyen $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ (az utolsó feltétel csak akkor teljesül, ha $d\vec{l}$ elég kicsi, az anyag pedig homogén).



4.27. ábra

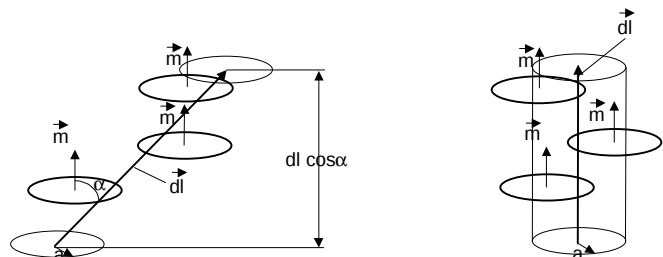
Tételezzük fel, hogy az $\vec{S}$ és $d\vec{l}$ vektorok α szöget zárnak be egymással és az elemi (Ampère-) áramok koncentrációja N .

Ha az $\vec{m}$ és $d\vec{l}$ vektorok párhuzamosak, akkor a C zárt görbe vonalelemére ($d\vec{l}$) azok az áramkörök vannak "felfűzve", amelyek középpontja az a alapsugarú hengerben van (4.29. ábra jobb oldali rajza), melynek tengelye maga a $d\vec{l}$ elem. A 4.29. ábra bal oldali rajza alapján a $d\vec{l}$ elemre azok az áramkörök vannak "felfűzve", melyek középpontja az a alapsugarú, $d\vec{l} \cdot \cos \alpha$ magasságú és $dV = S \cdot d\vec{l} \cdot \cos \alpha = \vec{S} d\vec{l}$ térfogatú ferde hengerben van

(melynek ferde tengelye ugyancsak a $d\vec{l}$ elem. Ezért a $d\vec{l}$ elemre $N \cdot \vec{S} d\vec{l}$ számú elemi áramkör van felfűzve. Így a C zárt görbe $d\vec{l}$ hosszán felfűzött elemi Ampère áramok összege:

$$\left(\sum I_A \right)_{d\vec{l} \text{ hosszán}} = IN \vec{S} d\vec{l} = N \vec{m} d\vec{l} = \vec{M} d\vec{l} \quad \square.$$

A fenti kifejezésben ott van az $I \cdot \vec{S}$ szorzat is. Mint már említettük, az Ampère-áramok alakja (felülete) és intenzitása külön-külön nem fontosak, a tér csak a szorzatuktól függ. Emiatt az Ampère-áramok összegét a mágnesezési vektor ($\vec{M} = N \vec{m}$) függvényében fejeztük ki. A zárt C hurkon keresztül, az elemi Ampère-áramoktól származó össz áramerősség így a következő kifejezéssel adott:



4.29. ábra

$$\sum_{C \text{ át}} I_A = \oint_C \vec{M} d\vec{l}.$$

Képzeljük el, hogy a C zárt vonal átfog makroszkopikus, vezetékekben folyó áramokat, és áthalad mágnesezett (ferromágneses) anyagon (anyagokon) is. Erre az esetre kapjuk meg az Ampère-törvény általános alakját:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum_{C-n \text{ át}} I + \sum_{C-n \text{ át}} I_A \right) = \mu_0 \left(\sum_{C-n \text{ át}} I + \oint_C \vec{M} d\vec{l} \right),$$

illetve

$$\oint_C \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) d\vec{l} = \sum_{C-n \text{ át}} I_A.$$

Az Ampère-törvény általános alakjában a mágnesezett anyag elemi áramai az $\vec{M} d\vec{l}$ szorzatba rejtve jelentkeznek. Az elemi (Ampère-) áramok nem mérhetők, tetszés szerint nem növelhetők illetve csökkenthetők és nem kapcsolhatók ki. Ezért előnyösebb, ha csak makroszkopikus áramokkal van dolgunk. Az anyag jelenlétében a mágneses tér leírásához megfelelőbb a $\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right]$ vektorkülönbség mint maga a $\vec{B}$ vektor: a $\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right]$ vektorkülönbség vonalintegrálja zárt görbe mentén csak a zárt vonalon áthaladó makroszkopikus áramoktól függ. Ezért külön jele van a fent említett vektorkülönbségnek, amelyet a **mágneses térerősség vektorának** nevezünk:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

A mágneses térerősség vektora kifejezhető a mágneses polarizáció vektorának ($\vec{J} = \mu_0 \vec{M}$) függvényében is:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{J}).$$

Ampère törvényének általános alakja tehát:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \sum_{C-n \text{ át}} I.$$

Az előző kifejezésekből kitűnik, hogy a $\vec{H}$ és az $\vec{M}$ vektorok mértékegysége ugyanaz: A/m , hasonlóképpen vonatkozik ez a megállapítás a $\vec{J}$ és $\vec{B}$ vektorokra is, melyeknek mértékegysége a T (tesla).

A mágneses térerősség vektorának definíciója általános és minden anyagra érvényes. A lineáris mágneses anyagoknál, mint láttuk az előzőekben, az $\vec{M}$ és $\vec{B}$ vektorok arányosak egymással. Ezért a térerősség vektora, a $\vec{H}$ is arányos a $\vec{B}$ vektorral az adott pontban, ami azt jelenti, hogy $\vec{M}$ is arányos a $\vec{H}$ vektorral. Ezt az arányosságot a következő alakban írjuk fel:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}.$$

A fenti kifejezést a mágneses szuszceptibilitás (χ_m) definíciójaként kezeljük; a χ_m dimenzió (egység) nélküli állandó, vagyis pusztán szám, és az anyagot jellemzi, amelyre vonatkozik. Így aztán, mivel

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \chi_m \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_r \cdot \vec{H}, \end{aligned}$$

ahol μ_r a relatív permeabilitás.

Az abszolút permeabilitás, vagy egyszerűen csak permeabilitás felírható úgy is, mint:

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m) \text{ [H/m]}.$$

Ezek szerint a lineáris (de csakis a lineáris) mágneses anyagokra érvényes a következő összefüggés:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

A diamágneses anyagoknál a molekulák eredő mágneses nyomatéka ellenkező irányítású a $\vec{B}$ vektorral, ezért $\chi_m < 0$ és $\mu_r < 1$. A paramágneses anyagoknál $\chi_m > 0$ és $\mu_r > 1$. A lineáris anyagoknál a relatív permeabilitás értéke megközelítőleg egy. A ferromágneses anyagok permeabilitásának értéke nem határozható meg egyértelműen. Erre a későbbiekben még kitérünk.

A mágneses térerősség erővonalait úgy definiáljuk, mint bármely más vektor erővonalait, tehát mint képzeletbeli görbe vonalakat, amelyeknek minden pontjában a $\vec{H}$ vektor érintő irányú. Mivel a definíció szerint:

$$\vec{H} = \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right],$$

ezért vákuumban a $\vec{H}$ és $\vec{B}$ vektor erővonalai egybeesnek. Lineáris közegben e három vektor közül bármelyik kétfő arányos egymással és ezért a $\vec{H}$ és $\vec{B}$ vektorok ugyancsak egybeesnek.

Az eddigiekből láttuk, hogy a $\vec{B}$ vektor erővonalai mindig zártak, viszont a $\vec{H}$ vektor erővonalai (mint ahogy az a definíciós képletből is leszűrhető) nem mindig zártak.

4.15. Példa: Határozzuk meg a nemhomogén (inhomogén) anyagból készült tórusztekercs (4.30. ábra) mágneses indukcióvektorát.

Megoldás:

A tórusztekercs azért nem homogén, mert a mag anyaga nem homogén: az $a < r < b$ részen μ_1 permeabilitású, az $b < r < c$ részen pedig μ_2 permeabilitású.

A magban a mágneses térerősség:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = H \oint_C d\vec{l} = H 2\pi r = NI,$$

$$H_{(r)} = \frac{NI}{2\pi r}.$$

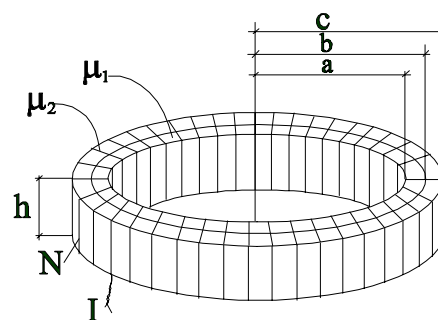
A magon kívül, mivel a zárt görbe által “körülölelt” makroszkópikus áramok áramerősségének összege nulla, a térerősség értéke:

$$\vec{H} = 0.$$

Ebből aztán az indukcióértékek:

$$B_{1(r)} = \mu_1 H_{(r)} \quad a < r < b,$$

$$B_{2(r)} = \mu_2 H_{(r)} \quad b < r < c.$$



4.30. ábra

4.8.4. AZ ELEMI AMPÈRE-ÁRAMOKKAL EKVIVALENS MAKROSZKÓPIKUS ÁRAMOK

A mágnesezett anyag mágneses tere az anyagban levő orientált (irányított) elemi (Ampère) áramoktól származik. Ha bennünket az Ampère-áramoknak csak az eredő makroszkópikus mágneses tere érdekel, akkor az elemi áramokat helyettesíthetjük vákuumban levő makroszkópikus áramokkal.

Figyeljünk meg (képzeljünk el) egy kis ΔC hurkot a mágnesezett lineáris és homogén anyagban, amelyben nincs makroszkópikus áram. Legyen az anyag mágneses szuszceptibilitása χ_m , akkor $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Az össz Ampère-áramok erőssége a C hurkon keresztül:

$$\sum_{\Delta C \text{ á t}} I_A = \oint_{\Delta C} \vec{M} d\vec{l} = \chi_m \oint_{\Delta C} \vec{H} d\vec{l} \equiv 0,$$

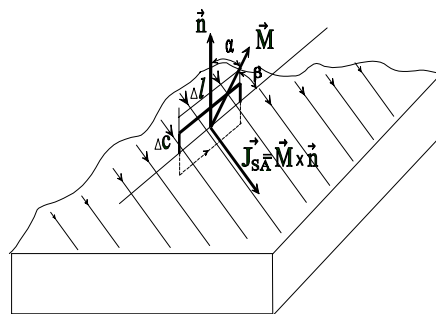
(az általános Ampère törvény alapján, mivel a ΔC hurok nem fog át makroszkópikus áramokat).

Ez az eredmény igaz a ΔC hurok akármilyen helyzetére és irányítására az anyagon belül. Az Ampère-áramokat helyettesítő makroszkópikus áram áramsűrűségvektora ($\vec{J}_A$) a homogén, mágnesezett anyag minden pontjában, ahol nincs makroszkópikus áram, egyenlő nullával. Ez azt jelenti, hogy az így mágnesezett test makroszkópikus mágneses tere csak a mágnesezett test felületén levő Ampère-áramoktól származik (a testen belül az Ampère-áramok semlegesítik egymás hatását).

Ez a következtetés szigorúan csak a diamágneses és paramágneses anyagokra érvényes (a ferromágneses anyagokra csak megközelítőleg). Látni fogjuk majd, hogy a homogén

ferromágneses anyagból készült, de nem homogén mágnesezésű test mágneses szempontból nem tekinthető homogénnek.

Határozzuk meg a mágnesezett testek felületén levő eredő felületi áramsűrűséget, amellyel a makroszkopikus mágneses tér létrehozásakor és létrehozásában helyettesíthetők az Ampère-áramok. A 4.31. ábráról látható, hogy a felületi áramsűrűségvektor $\vec{J}_{SA}$ merőleges az $\vec{M}$ mágnesezettség (mágnesezési) vektorára.



4.31. ábra

$$\sum_{C-n \text{ át}} I_A = \oint_{\Delta \Delta C} \vec{M} d\vec{l} = M \cdot \cos \beta \cdot \Delta l = M \cdot \sin \alpha \cdot \Delta l$$

tehát a felületi áramsűrűség:

$$\vec{J}_{SA} = \frac{\sum I_A}{\Delta l} = M \sin \alpha,$$

vagy vektor alakban, mivel

$$\cos \beta = \sin \left(\underbrace{90^\circ - \beta}_\alpha \right) \equiv \sin 90^\circ \cos \beta - \cos 90^\circ \sin \beta$$

így a felületi áramsűrűségre felírható, hogy:

$$\vec{J}_{SA} = \vec{M} \times \vec{n}$$

Az elemi Ampère-áramok vákuumban vannak. Ezért az eredő Ampère-áramokat is a vákuumban kell elképzelni. Mivel tudjuk hogyan számítható ki a tetszőleges eloszlású áram mágneses indukciója vákuumban, a mágnesezett anyagtól származó mágneses tér meghatározásának problémája könnyen megoldható, ha ismerjük az $\vec{M}$ vektort a mágnesezett anyag minden pontjában. Sajnos a mágnesezési vektor ($\vec{M}$) értékét a mágnesezett anyagban gyakran nehéz meghatározni.

4.16. Példa: Adott egy hosszú szolenoid (tetszőleges keresztmetszetű), sűrűn tekercselve, hosszanti menetszáma N' . Legyen a szolenoid magjának permeabilitása μ , a tekercsben folyó áram erőssége pedig I . Mutassuk ki (vessük össze) a makroszkópikus és az Ampère-áramoktól eredő mágneses teret!

Megoldás:

Az általános Ampère-törvény segítségével megkapjuk, hogy a szolenoidban a mágneses tér homogén és a $\vec{H}$ vektor intenzitása:

$$H = N'I \quad \text{így} \quad B = \mu H = \mu N'I,$$

amiből aztán:

$$M = \chi_m H = (\mu_r - 1) H = (\mu_r - 1) N'I.$$

Az Ampère-áramok eredő makroszkópikus áramsűrűsége a magban, mint tudjuk, egyenlő nullával (hiszen a mágnesezett testen belül az Ampère-áramok semlegesítik egymás hatását). A felületi, Ampère-áramoktól eredő makroszkópikus áramsűrűség pedig:

$$\vec{J}_{SA} = \vec{M} \times \vec{n} \quad |\vec{J}_{SA}| = |\vec{M}|.$$

Az $\vec{M}$ vektor párhuzamos a szolenoid tengelyének irányával. Így a szolenoid magjának felületén jelentkező, az Ampère-áramok eredő makroszkópikus áramsűrűsége:

$$\vec{J}_{SA} = (\mu_r - 1) N'I.$$

A szolenoid eredő mágneses tere egyenlő a felületi eredő áramsűrűség primáris (külső, a tekercsben folyó áram által gerjesztett) és szekundáris (a molekuláris, mikroszkópikus vagy Ampère-áramok által gerjesztett) tereinek vektoriális összegével. Mivel ezeket az áramokat vákuumban kell elképzelni, az eredmény:

$$\begin{aligned} B_I &= \mu_0 N' I, \\ B_m &= \mu_0 (\mu_r - 1) N' I, \\ B &= B_I + B_m = \mu_0 N' I + \mu_0 (\mu_r - 1) N' I = \mu_0 \mu_r N' I = \mu N' I. \end{aligned}$$

Figyeljük meg az ekvivalens felületi áramsűrűség nagyságrendjét a a szolenoid magjaként használatos testen (vasmagon). Az Ampère-áramoktól eredő felületi áramsűrűség értéke $(\mu_r - 1)N'I$, a tekercsben folyó áramok $N'I$ értékű felületi áramsűrűséggel írhatók le. Amikor a mag paramágneses vagy diamágneses anyagból készült, a mag felületi áramsűrűsége (vagyis az Ampère-áramok hatása) sokkal kisebb, mint $N'I$. Ferromágneses anyagoknál a μ_r relatív permeabilitás értéke nem definiálható egyértelműen, de nagyságrendje néhány száz, sőt százezer is lehet. Ilyenkor a "kiegészítő" (az Ampère-áramoktól eredő) felületi áramsűrűség sokkal nagyobb a primáris primáris (külső, a tekercsben folyó) áramsűrűségtől.

4.17. Példa: Az atomok száma a szilárd test 1mm^3 térfogatában megközelítőleg 10^{20} . Az 1mm hossz mentén a szilárd testben kb. $\sqrt[3]{10^{20}} \approx 4,56 \cdot 10^6$ atom van. Ha minden atomot 1mA áramerősségű nemkompenzált áramelemnek képzelünk el, és az össz áramelem mágneses nyomatéka $\vec{m}$ párhuzamos a mag felszínével, akkor az 1mm széles felületcsíkon átfolyó áramerősség:

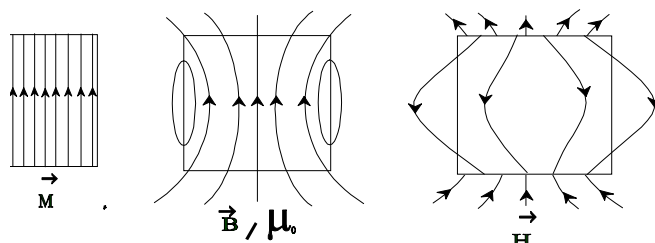
$$(I_A)_{1\text{mm}} \approx 4,65 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 4,65 \cdot 10^3 = 4650\text{A}.$$

Ez olyan nagy áramerősség, melyet normális körülmények között 1mm széles vezetőszalagon keresztül nem érhetünk el. Tehát elemi áramok irányításával sokkal nagyobb intenzitású ekvivalens áramot kaphatunk, mint a legjobb vezetőkben tartósan megvalósítható makroszkópikus áram. A tekercsben folyó áram csupán arra szolgál, hogy primáris mágneses teret hozzon létre, amely az elemi (Ampère-) áramokat orientálja. Az irányított elemi áramok ekvivalens áramerőssége sokkal nagyobb, mint amilyen erősségű áram a tekercsben folyik és az általuk létrehozott (generált) szekundáris (másodlagos) mágneses tér képezi a vasmagos tekercsek mágneses terének fő (legnagyobb) részét.

4.18. Példa: Határozzuk meg az elemi (Ampère-) áramoknak megfelelő makroszkópikus áramot az állandó mágnesből készült aránylag rövid, egyenes henger esetében. Tételezzük fel, hogy $\vec{M}$ állandó a henger belsejének minden pontjában. (A rövid, henger alakú állandó mágnesben szigorúan homogén mágnesezettség nem valósítható meg, de a hengert megközelítőleg homogénen felmágnesezhetjük).

Megoldás:

Ekvivalens felületi áram (a $\vec{J}_{SA} = \vec{M} \times \vec{n}$ kifejezés alapján) csak a henger palástján van, mégpedig $J_{SA} = M$ sűrűségű. Ezek szerint egy ilyen mágnes a tér minden pontjában olyan mágneses teret létesít, mint a $J_{SA} = M$ felületi áramsűrűségű szolenoid. A $\vec{B}$ erővonalak a 4.32. ábra középső rajzán láthatók. Mivel $\vec{H} = \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right]$ és a



4.32. ábra

mágnesben $|\vec{B}|(\mu_0|\vec{M}|)$ (csak ha a mágnes végtelen hosszú lenne, akkor lenne érvényes a $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$ kifejezés), a mágnesben a $\vec{B}$ és $\vec{H}$ vektorok ellenkező irányításúak. Ez a mágneses térerősség vektor definíciójának következménye.

4.8.5. HATÁRFELTÉTELEK

Határfeltételek alatt azokat a (mágneses) teret leíró mennyiségek közötti összefüggéseket értjük, amelyek két különböző tulajdonságú közeget szétválasztó felület különböző oldalán levő pontokban mért mennyiségértékek között fennállnak. Az elektrosztatikában ezeknek az összefüggéseknek minden szigetelőanyagra külön-külön komoly gyakorlati jelentősége van. Mágnesesség esetében a határfeltételeknek csak a ferromágneses és nem ferromágneses anyagot elválasztó felületre vonatkozóan van gyakorlati jelentősége.

Az első összefüggéshez az általános Ampère-törvény vezet (a 4.33. ábra alapján)

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

$$H_{1t}\Delta l - H_{2t}\Delta l = 0$$

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Lineáris közegekre érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}.$$

A második összefüggést a mágneses fluxusmegmaradás törvényének a 4.34. ábrán látható esetre alkalmazva kaphatjuk meg:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$-\vec{B}_{1n} \cdot \vec{S} + \vec{B}_{2n} \cdot \vec{S} = 0$$

$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}$$

Lineáris közegek esetén:

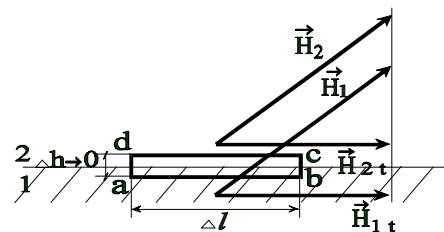
$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

A vektorok a határfelületen áthaladva a fénytöréshez hasonló irányváltozást szenvednek (4.35. ábra). A beesési merőlegeshez viszonyított szögek tangenseinek aránya:

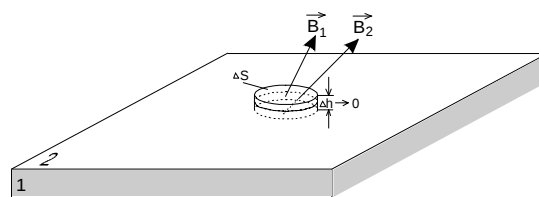
$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1t}/B_{1n}}{B_{2t}/B_{2n}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Tételezzük fel, hogy az 1. közeg nem ferromágneses, a 2. közeg pedig ferromágneses, vagyis $\mu_1 \approx \mu_0$, $\mu_2 \gg \mu_0$. Ekkor a szögek tangenseinek aránya:

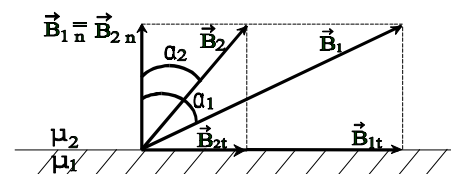
$$\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 \approx 0 \Rightarrow \alpha_1 \approx 0.$$



4.33. ábra



4.34. ábra



4.35. ábra

Ez minden α_2 szögre érvényes, kivéve ha $\alpha_2 = \pi/2$, azaz mikor a $\vec{B}$ vektor vonalai a ferromágneses anyagban érintők az elválasztó felületre. Ilyenkor $\tan \alpha_2 = \infty$, vagyis a $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = 0$ függetlenül az α_1 szög nagyságától. A levegőben levő $\vec{B}$ vektor vonalai és az elválasztó felületre húzott merőleges közötti szög α_1 . Egyszerű következtetésre jutottunk: levegőben a $\vec{B}$ vektor vonalai gyakorlatilag merőlegesek a ferromágneses anyagok felületére ($\alpha_1 \approx 0$).

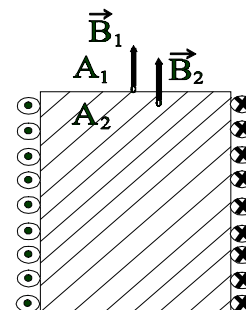
4.18. Példa: Vizsgáljuk meg a ferromágneses anyagból készült vasmagot, amely kör keresztmetszetű, egyenes henger alakú és amelyre sűrűn tekercseztünk nagyobb menetszámú vékony huzalt (4.36. ábra). Függetlenül attól, hogy a primáris és az eredő tér a vasmagban nem homogén, tekintsük azt homogénnek! Az első határfeltétel alapján:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2$$

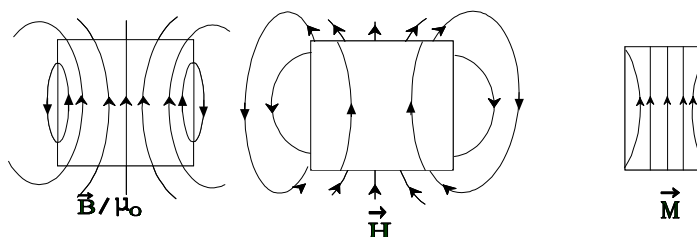
amiből az következik, hogy:

$$H_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \quad H_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{M}$$

A $\vec{B}/\mu_0$, $\vec{H}$ és $\vec{M}$ vektorok erővonalai a 4.37. ábrán láthatók.



4.36. ábra



4.37. ábra

4.9. Általános fogalmak a ferromágneses anyagokról

A mágneses anyagok közül az elektrotechnikában csak a ferromágneses anyagokat használják: a villamos gépek (generátorok, motorok, transzformátorok) vasmagjaként, elektromágnesek vasmagjaként, állandó mágnesek előállítására stb).

A ferromágneses anyagok atomjai illetve molekulái paramágneses jellegűek, azaz nem kompenzált (eredő) mágneses nyomatékkal rendelkeznek, emellett a molekulák közötti mágneses kölcsönhatás nagyon erős (a paramágneses anyagoknál ez az interakció elenyésző). Nagy (10^{12} - 10^{15} molekulából álló) molekulacsoportok vannak már mágnesezetlen állapotban is telítettséig mágnesezve. Az ilyen területeket Weiss-tartományoknak (doméneknek) hívják (a Weiss-tartományt úgy kell elképzelni, mint egy kis, telítettséig felmágnesezett állandó mágnes). A Weiss-tartományok nagysága a molekulák közötti kölcsönhatás nagyságától függ (kb. 10^{-3} cm). A Weiss-tartományok keletkezésének oka elég összetett, és nem magyarázható meg a klasszikus fizika elveivel, elméletével. A kvantummechanika pontos magyarázatot ad ugyan erre a kérdésre, de ez már túlmutat a villamosságtan alapjainak, mint tantárgynak a hatáskörén. Így a ferromágneses anyagok viselkedésének csupán egy egyszerű magyarázatát adjuk.

A ferromágneses anyagok kristályszerkezetűek (nincs folyékony vagy gáz halmazállapotú ferromágneses anyag). A kristályrácsot a kristályokban azok az atomok alkotják, amelyek a környezettel egy vagy több elektront cserélnek, azaz a kristályrács vázát az ionok képezik.

A kristályrács ionjainak megvan a saját mágneses nyomatéka, amely a spin mágneses nyomatékától (a perdülettől) ered (az orbitális mágneses nyomaték részesedése az eredő momentumban nagyon kicsi). A rács szomszédos ionjaiban levő elektronok között nagyon erős elektromos erők hatnak, amelyek egy mikroszkópikus térfogatban levő össz ion elektronjainak mágneses nyomatékát egy bizonyos irányba irányítják. Ezek az erők nagy indukcióvektor ($\vec{B}$) intenzitásnak (kb. 10^5 T) felelnek meg (a legnagyobb, laboratóriumi feltételek között elért $\vec{B}$ intenzitás értéke 10^3 T). Ilyen intenzitású erők hatása 10^{-2} mm méretű területen észlelhető, ahol 10^{15} atom van (Weiss-tartomány). Míg a ferromágneses anyag egy tartománya anizotrópikus anyagként viselkedik mágneses szempontból, normális feltételek között a ferromágneses test makroszkópusan szemlélve mágnesesen izotróp (anizotróp - nincs egyforma mágneses tulajdonsága minden irányban).

Az említett erők irányított hatása csökkenti a kristályrács termikus vibrációját. Egy bizonyos hőmérsékleten felül a technikai vibrációk lehetetlené teszik a kristályrácsban szereplő ionok elektron-nyomatékának (mágneses nyomatékának, perdületének) párhuzamos orientációját és az anyag egyszerű paramágneses anyaggá válik. Ezt a hőmérsékletet Curie ferromágneses hőmérsékletnek nevezzük, és ez a hőmérséklet különböző más-más ferromágneses anyagnál.

A ferromágneses anyagokban a szomszédos tartományok mágneses nyomatékainak iránya nem változik meg ugrásszerűen. A szomszédos tartományok között átmeneti terület van, amit Bloh-falnak neveznek, és amelyben az ionok mágneses nyomatékai fokozatos átmenetet képeznek a szomszédos nyomatékirányok között. A Bloh-fal vastagsága hozzávetőlegesen 10^{-8} - 10^{-6} m, azaz kb. 500 - 5000 atomtávolság.

Létezik egy anyagcsoport, melyben a szomszédos atomok mágneses nyomatéka egy irányban van ugyan, de elenkező irányításúak, így teljesen megsemmisítik egymást (vasoxid - FeO , vasfluorid - FeF_2 , rézklorid - CuCl_2). Az ilyen anyagokat antiferromágneses anyagoknak nevezzük. A gyakorlati alkalmazásban nincs különösebb jelentőségük.

Az antiferromágneses anyagok jellegzetes csoportját ferrimágneseknek, vagy ferriteknek nevezzük. Ezeknél az anyagoknál szintén jelentkezik a szomszédos atomok vagy atomcsoportok között a mágneses nyomaték ellentétes orientációja, azonban a nemszimmetrikus struktúra miatt a szomszédos atomok ekvivalens nyomatékai nem egyformák. Az ilyen ellentétes orientáció mégis intenzív mágnesességet ad.

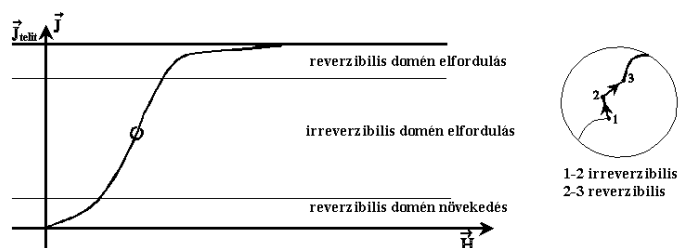
A ferrit telítettségig való mágnesezése alkalmával a ferromágneses anyagok mágnesezettségének kb. 20 % -át éri el. A ferriteknek nagyon nagy gyakorlati jelentőségük van. A ferromágneses tulajdonságuk mellett nagy fajlagos ellenállással (10^3 - 10^{10} Ωm) rendelkeznek, és ezért a nagyfrekvenciás készülékekben használják őket.

4.8.1. A FERROMÁGNESES ANYAGOK MÁGNESEZÉSI GÖRBÉJE

Mikor a ferromágneses anyagot külső mágneses térbe visszük, a tartományokra ható külső mágneses tér a nyomatékokat a saját irányába igyekszik fordítani. Kis intenzitású külső terek esetén csak növekszik a külső tér irányába mutató tartományok mérete a szomszéd (nem külső térirányba mutató) tartományok rovására. Ha megszüntetnénk a külső teret, a kezdeti állapot állna vissza – a folyamat tehát reverzibilis vagyis visszafordítható (4.38. ábra). Ha a külső teret tovább növeljük, egész tartományok ugrásszerű rotációja következik be. A tartományok nyomatékirányának elfordulása (rotációja) hirtelen megy végbe. A mágnesezésnek ez a része irreverzibilis (visszafordíthatatlan) folyamat. Mikor az össz tartomány nyomatéka többnyire beáll (igazodik) a külső tér irányába, a tartományok ugrásszerű rotációja megszűnik és a további külső térintenzitás növelése csak tartományterjeszkedést okoz, ami pedig reverzibilis folyamat.

A telítettség akkor jelentkezik, mikor az össz tartomány össz mágneses nyomatéka a $\vec{B}$ vektor irányításával megegyezik. A telítettség leírásához a mágneses polarizációvektort vagy a mágnesezési vektort használjuk (telített megjelöléssel):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_{telített} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_{telített}).$$



4.38. ábra

A tartományok között elmozduláskor "súrlódás" jelentkezik. Ezért a tartományok elmozdulását és rotációját mindig a mágneses energia hővé való átalakulása kíséri. Ezeket a veszteségeket hiszterézisveszteségeknek nevezzük. A hiszterézisveszteségek mellett a tartományok súrlódásának még két fontos következménye van:

- 1) A mágnesezési folyamat ideje alatt történő változások a ferromágneses anyagban mindig késnek a mágnesezést előidéző mágneses tér változásaihoz viszonyítva. Ennek a tulajdonságnak az eredményeként jelentkezik a hiszterézis viselkedés, amit majd később fogunk részletesebben leírni.
- 1) A külső mágneses tér kikapcsolása után a tartományok nem állhatnak vissza az elsődleges állapotukba (kaotikusan elrendezett - orientált domének). Ennek eredményeként a külső mágneses tér kikapcsolása után is létezik mágneses tér a felmágnesezett és mágnesezettséget megtartó ferromágneses anyagnak köszönhetően. Ezzel magyarázható az állandó mágnesek létezése.

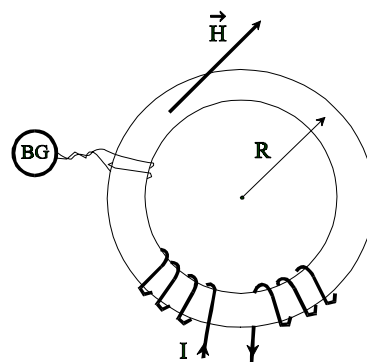
A ferromágneses anyagokat legtöbbször a saját mágnesezési görbéjükkel jellemzik (írják le). Legtermészetesebb az volna, ha a mágnesezési görbe a mágnesezési vektor ($\vec{M}$) vagy a polarizációvektor ($\vec{J}$) és az indukció ($\vec{B}$) között adná meg az összefüggést. Ez azonban nem volna praktikus, mivel sem a mágnesezési vektort, sem a polarizációvektort nem lehet egyszerű módon mérni. A ferromágneses anyagban egyszerűen csak a $\vec{H}$ és a $\vec{B}$ vektorok intenzitását (nagyságát) lehet mérni közvetlen (direkt) vagy közvetett (indirekt) módon. A ferromágneses anyag mintájának megfelelő alakúnak kell lennie. Legmegfelelőbb a vékony, toroid (körgyűrű) alakú minta, amelyre nagy számú menet van tekercselve, mert a mágneses térerősséget, a $\vec{H}$ -t pontosan kiszámíthatjuk az Ampère törvény segítségével, az indukcióvektort, a $\vec{B}$ -t pedig indirekt módon lemérhetjük. Így jutunk el a ferromágneses anyagban a B -t és H -t összekötő görbéhez. Az összes mágnesezési görbét a vékony tóruszmag alakú mintán kapott mérések alapján rajzolják meg.

A $B(H)$ görbe szerkesztése a következő módon történik (4.39. ábra): vékony tóruszmag alakú vasmagra sűrűn N menetszámú huzalt tekercselünk. A mag középsugara R , a keresztmetszet felülete S . Az általános Ampère törvény alapján következik, hogy:

$$H = \frac{NI}{2\pi R}.$$

A mag körül még egy menet van tekercselve, amely össze van kötve az ún. balisztikus galvanométerrel, amely a körben átfolyt elektromos töltést méri. Mikor változik a tóruszmag keresztmetszetén a fluxus ($\Delta\Phi$), akkor a balisztikus galvanométeren (BG) a $\Delta\Phi$ fluxusváltozással arányosan átfolyik a ΔQ töltésmennyiség. Így az I áramerősség ugrásszerű változásával megszerkesztjük a $B(H)$ görbét, vagyis a mágnesezési görbét.

Azokat a mágnesezési görbéket, amelyeket a H mágneses tér lassú változásával kapunk, sztatikus mágnesezési görbéknek nevezzük.

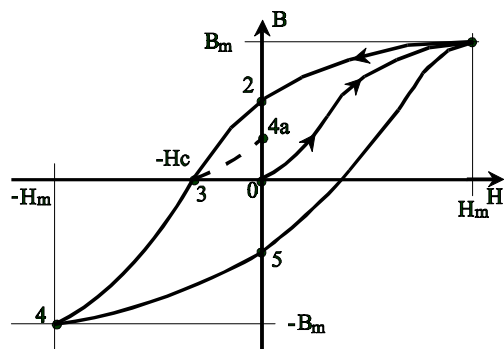


4.39. ábra

A gyakorlatban még az előzőknél is fontosabbak azok a görbék, melyeket a H mágneses tér viszonylag gyors és periódikus változtatásával kapunk. Az így kapott görbét **dinamikus mágnesezési görbéknek** (4.40. ábra) nevezzük. E görbék alakja nagyon függ a térerősség változásának gyorsaságától és időbeli alakjától. Legtöbbször azokat a görbét használjuk, melyeket a H mágneses térerősség sinusos vagy cosinusos (egyszerű periódikus) változtatásakor kapunk.

Különböző anyag mágnesezési görbéje különböző alakú. A 4.40. ábrán a ferromágneses anyagok tipikus dinamikus mágnesezési görbéje látható, melyet a kezdetben nem mágnesezett tóruszvasmagon végzett mérések eredményeztek.

Ha az áram növelésével növeljük a H -t nullától H_m -ig, akkor a görbe 0-1 részét kapjuk. Az áram csökkentésével a H - B síkban a pont nem az 1-0 részen, hanem az 1-2 görbe részén halad vissza. A 2. pontban annak ellenére létezik mágneses indukció, hogy az áram a tekercsben megszűnt, azaz a H nulla. A mágneses indukciónak ezt az értékét **remanens (visszamaradt) indukciónak** nevezzük és B_r -el jelöljük. Az elfordított tartományok részben orientáltak maradtak és ennek eredményeként a tóruszban van indukció. Mivel $\vec{H} = 0$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{M} = \vec{J}$ a remanens indukció egyenlő a visszamaradt mágneses polarizációval. Ha most növeljük az áram

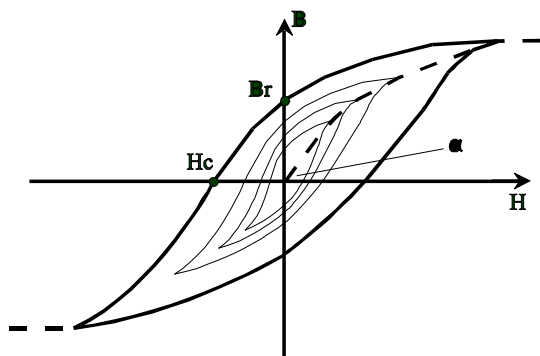


4.40. ábra

intenzitását a menetben, de ellenkező irányban mint először, a $\vec{H}$ is ellenkező irányban növekszik (negatív $\vec{H}$ érték). A H - B síkban a pont a 2-3 görbét követi. A H_c (koercitív) értékű mágneses térre a mágneses indukció a magban nulla. Ez azt jelenti, hogy a menetben folyó makroszkópikus áramtól származó mágneses indukció egyforma intenzitású, de ellenkező irányítású attól a mágneses tértől, ami a részben irányított tartományoktól származik. Hogy ezt bebizonyítsuk, kapcsoljuk ki a menetben az áramot. A munkapont a 3-4 görbét írja le, ami bizonyítja, hogy a tartományok az elsődleges irányban voltak orientálva. A koercitív tér értéke szerint a ferromágneses anyagokat **mágneses puha** (kis H_c) és **mágneses kemény** (nagy H_c) anyagokra osztjuk.

Ha a H_c értéktől növeljük a H intenzitását, akkor a pont a 3-4 görbét írja le. Amennyiben csökkentjük az áram intenzitását és ismét megváltoztatjuk az irányát a pont a 4-5-6 görbét írja le, azonban a 6. pont nem fedi az 1. pontot az elsődleges mágnesezési görbén. Amikor azonban ezt a folyamatot tíznél többször megismételjük zárul a munkapont által leírt görbe. Az így kapott zárt görbét hiszterézisgörbének nevezzük.

A 4.41. ábrán látható hiszterézisgörbék közül a legnagyobb görbe egyben a lehetséges legnagyobb az adott ferromágneses anyagra. A H_m nagyobb értékeinél a H - B síkban a pont leírja a legnagyobb hiszterézisgörbét, azután egyenes vonalon mozog tovább. Ez az eset akkor fordul elő, amikor az össz tartomány irányítva van, és elértük a **telítettséget**. A remanens indukció B_r és a koercitív H_c tér értékeit arra a ciklusra adják, amikor jelentkezik a telítettség. A telítettség egyenes vonalának az egyenlete: $B = \mu_0(H \pm M_{\text{telített}})$. A szaggatott vonalat, amely összeköti a hiszterézisgörbe hegyét különböző H_m értékekre **mágnesezési alapgörbének** nevezzük. Ugyanannál az anyagnál a mágnesezési alapgörbe különbözik az elsődleges mágnesezési görbétől. A gyakorlatban ezt a különbséget általában elhanyagolják.



4.41. ábra

Most leírunk egy folyamatot a ferromágneses anyagok lemágnesezésére. Sinusos

(egyszerű periódikus) változású mágneses térrel a testet először váltakozva telítettséggig mágnesezzük. Ezután a váltakozó külső teret lassan nulláig csökkentjük (sokkal lassabban mint ameddig tart a tér változásának ciklusa). A hiszterézisgörbék mind kisebbek lesznek és a végén a testet lemágnesezzük.

Kis H_m értékek esetén sinusos (periódikus) mágnesezéskor a hiszterézisgörbe ellipszissre hasonlít. Az ilyen görbét **Rayleigh (Réjli) hiszterézis görbéjének** nevezzük. A $\vec{H}$ sinusos (egyszerű periódikus) változásakor és az ún. komplex jelöléssel az ilyen ellipszoid-görbét leírhatjuk az ún. **komplex permeabilitással**.

4.8.2. A FERROMÁGNESES ANYAGOK PERMEABILITÁSÁNAK DEFINÍCIÓJA

A ferromágneses anyagok elterjedt használata miatt ajánlatos a mágneses tulajdonságuk leírásához több fajta permeabilitást bevezetni (4.42. ábra). Nyilvánvaló, hogy a ferromágneses anyagoknak a permeabilitását nem lehet egyszerűen mint B/H arányt definiálni (különböző pontokra a hiszterézis görbén ez az arány néha nulla, negatív vagy akár ∞ is lehet).

Egyszerűen csak **permeabilitásnak** (vagy **alappermeabilitásnak**) nevezzük a B/H arányt a mágnesezési alapgörbén (az arány nem állandó).

Differenciális permeabilitásnak nevezzük a dB/dH arányt a mágnesezési alapgörbén (a $H=0$, $B=0$ pontban van a kezdő permeabilitás).

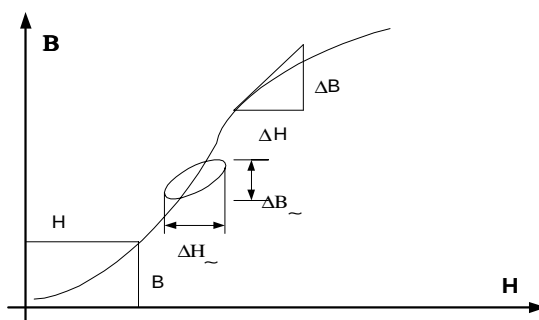
A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy kis erősségű sinusosan változó mágneses tér épül rá egy nagy erősségű konstans mágneses térre. Ebben az esetben a $H - B$ síkban a pont nagyon lapos hiszterézisgörbét ír le. A $\Delta B \sim / \Delta H \sim$ arányt **inkrementális permeabilitásnak** (μ_{inkr}) nevezzük.

A ferromágneses anyagokat legtöbbször sinusos változású $\vec{H}$ és $\vec{B}$ vektorokkal leírható mágneses térben használják (nyilvánvaló, hogy ha az egyik mennyiség sinusos változású, akkor a másik nem lehet az, ha a közeg ferromágneses). Ilyen esetben legalkalmasabb az **alappermeabilitást** használni a ferromágnes mágneses tulajdonságainak leírásához.

Amennyiben a hiszterézisgörbét egy ellipszissel lehet helyettesíteni (megközelítőleg leírni), ami kis térintenzitás esetén jó közelítés, akkor a $\vec{H}$ térerősségvektor sinusos változása mellett a $\vec{B}$ vektort is sinusos változású nagyságnak tekinthetjük. Ilyenkor a B vektor és a H vektor különböző fázisban vannak. A $\vec{H}$ és $\vec{B}$ vektorok komplex ábrázolásakor a ferde ellipszis alakú hiszterézisgörbét leírhatjuk egyetlen komplex számmal, amit **komplex permeabilitásnak** nevezünk.

Az előzőekben felsorolt permeabilitások a gyakorlatban a legfontosabbak.

Mágneses kemény anyagokat ($H_C = 5000 - 50000 \text{ A/m}$) ott használják, ahol fontos a nagy B_r és H_C érték (állandó mágnesek előállítására). A nagy B_r érték miatt az állandó mágnesek a levegőben nagy intenzitású mágneses teret létesítenek maguk körül. A nagy H_C azt biztosítja, hogy a mágneseket ne lehessen lemágnesezni olyan gyengébb erősségű mágneses térrel amilyenbe használatukkor kerülnek.



4.42. ábra

Az állandó mágnesek készítésére használatos kemény ferromágneses anyagok közül a legismertebbek a króm-wolfram és króm-molibdén acélok, melyeknél a B_r nagysága 1 T a H_c értéke pedig 5000 A/m-nél kezdődik.

A mágneses puha anyagokat ($H_c = 5 - 150$ A/m) ott használják, ahol kis veszteséggel nagy B értéket kell elérni periódikus mágnesezéskor (a későbbiekben látni fogjuk, hogy minél kisebb a koercitív tér - H_c - annál kisebb a hiszterézisgörbe felülete, amely a hiszterézisveszteségekkel arányos, valamint minél nagyobb a ferromágneses anyag fajlagos ellenállása – vagyis kisebb a fajlagos vezetés – annál kisebbek az örvényáramok okozta veszteségek). A mágneses puha anyagok alkalmazási területei: elektromos gépek és műszerek, forgógenerátorok, motrok, transzformátorok stb. A legfontosabb mágneses puha anyagok:

- **elektrolitikusan tiszta vas** (99,99 % Fe) : az előállítási folyamat (tehnológia) nagyon drága, a legkisebb szennyeződés is rontja a mágneses tulajdonságát, $\mu_r > 100\,000$ kis térerősnél, a H_c nagyon kicsi (a hiszterézisgörbe nagyon keskeny). A leggyakoribb szennyeződések: szén (C), oxigén (O), nitrogén (N), kén (S) és mangán (Mn). Már az 1% szén vagy mangán szennyeződés is kemény ferromágneses anyaggá teszi az elektrolitikusan tiszta vasat.
- **szilíciumacél** (1,7 % - 4 % Si hozzáadásával): a Si jelenléte nagymértékben növeli az acél fajlagos ellenállását (az örvényáramok okozta veszteségek ennek következtében nagyon kicsik). Szilíciumacélból készülnek a standard vastagságú (0,35 mm és 0,5 mm) **dinamólemezek** és **transzformátorlemezek**, amelyek vékony lakkréteggel (szigetelővel) vannak átkenve és a váltóáramú villamos gépek vasanyagát készítik belőlük. Dinamólemezről (1,7% Si) a forgó villamos gépek, transzformátorlemezről (4% Si) pedig a transzformátorok vasanyaga készül. Az egyenáramú gépek vasmagjai
 - **öntöttvasból** vagy
 - **öntött acélból** készülnek.
- **permalloy** (80% Ni és 20% Fe) és **supermalloy** (79% Ni, 16,4 %Fe, 4% Mo, 0,6 % Mn) – nagy a telítési mágneses polarizációvektora ($J_{\text{telített}}$), kezdő relatív permeabilitása ($\mu_{r \text{ kezdő}}$), maximális relatív permeabilitása ($\mu_{r \text{ max}}$), viszont kicsi a koercitív tere (H_c).

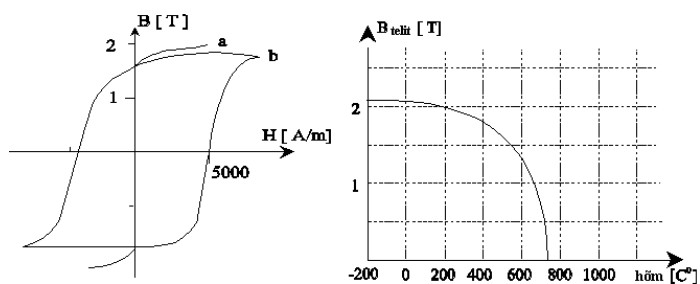
Ma sok puha mágneses anyagként viselkedő ötvözet létezik.

A mágneses puha és kemény anyagok hiszterézisgörbéje a 4.43. ábra bal oldalán látható (a – görbe: puha vas, b – görbe: edzett acél.

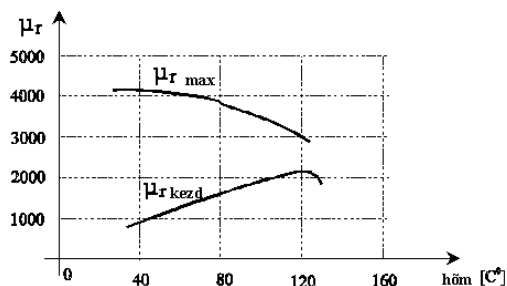
A ferromágneses anyagok mágneses tulajdonsága függ a hőmérséklettől, amiről a gyakorlatban figyelmesen gondot kell vezetni. A 4.43. ábra jobb oldalán levő grafikon, valamint a 4.44. ábra illusztrálja, érzékelteti a mágneses tulajdonságok hőmérsékletfüggését.

A puha vas telítési indukciójának hőfokfüggése a 4.43. ábra jobb oldalán látható.

A 4.44. ábrán egy ferrimágneses anyag kezdő- és maximális permeabilitásának görbéje látható a hőmérséklet függvényében.



4.43. ábra



4.44. ábra

4.9.3. MAGNETOSZTRIKCIÓ

A ferromágneses anyagokból készült testek mágnesezés hatására bekövetkezett kis alakváltozását magnetosztrikciónak nevezzük. A ferromágneses anyagok méretváltozását a Weiss-tartományok elfordulása és méreteinek változása idézi elő. A ferromágneses anyagok mágneses tér irányába eső mérete csökken vagy növekszik, a térre merőleges irányban szintén méretváltozás áll elő, úgyhogy a test térfogata (köbtartalma) első közelítésben állandó marad. A test méretének a mágneses tér irányában bekövetkezett viszonylagos (relatív) változását a magnetosztrikciós együtthatóval (λ) fejezzük ki:

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l},$$

ahol a

- Δl -a test méretváltozásának, pontosabban a megnyúlásának az értéke,
- l a test eredeti mérete a tér irányában.

A telítettségig való mágnesezés folyamán a test megnyúlása folyamatosan nő, és telítettségénél éri el a magnetosztrikciós együttható a legnagyobb értékét, amelyet λ_s -el jelölünk. Az λ negatív értéke azt jelzi, hogy a tér irányában a test hossza csökkent, vagyis, hogy a test megrövidült.

Alkalmazás: A nagy magnetosztrikciós együtthatóval rendelkező anyagokat az elektrotechnikában az oszcillátorok frekvenciájának stabilizálására és elektroakusztikus átalakítókként (ultrahang-generátorok és ultrahang felfogók előállítására) használják. A legnagyobb magnetosztrikciós effektusa a vas és a platina ötvözeteknek (pl. 46% Fe+54% Pt) van. Nagy (20 kHz feletti) frekvenciákon ferrimágneses, nagy magnetosztrikciós együtthatóval rendelkező anyagokat alkalmaznak a klasszikus ferromágneses anyagok helyett, mert a ferritekben, nagy fajlagos ellenállásuk következtében kisebbek az örvényáramok okozta veszteségek.

4.9.4. MÁGNESES KÖRÖK

A ferromágneses anyagokat leginkább a villamos gépek vasmagjainak készítésére használják. Ezek a vasmagok különböző alakúak lehetnek (légrésük is lehet), és egyes részeiken általában gerjesztőtekercsek vannak. A mágneses fluxust majdnem teljes egészében a vasmag irányítja, vezeti, hasonlóan mint az elektromos áramot a vezetők. Emiatt az ilyen rendszert mágneses körnek nevezzük. A "mágneses kör" fogalma alatt tágabb értelemben az össz test vagy közeg egységét értjük, melyekben mágneses fluxus van. Számunkra a mágneses körök azokat a rendszereket jelentik, amelyeknél ferromágneses anyagok segítségével a mágneses fluxust a kívánt úton szabályozzuk. A mágneses körökkel kapcsolatos problémák két csoportba oszthatók:

- **mágneses körök tervezése (méretezése)** - a vasmag és a gerjesztőtekercs méreteinek és tulajdonságainak meghatározása úgy, hogy a körben megfelelő (előírt) mágneses fluxust kapjunk,
- **mágneses körök elemzése (analízise, kivizsgálása)** – a gerjesztőtekercsben folyó áram létesítette fluxus meghatározása az adott kör minden ágában, vagy a gerjesztőtekercs áramának és a menetszámának meghatározása úgy, hogy az adott méretű mágneses kör tetszőleges (adott) részén a kívánt fluxus vagy $\vec{B}$ értékét kapjuk.

Mi csak a mágneses körök analízisével foglalkozunk.

Annak ellenére, hogy a ferromágneses anyagok nem lineárisak (a $\mu=B/H$ értéke függ a mágneses tér nagyságától), egyszerűsítés céljából lineárisaknak tekintjük őket, feltételezve egy

nagy számértékű relatív permeabilitást (μ_r). Pontosabb számításokor természetesen figyelembe kell venni, hogy a ferromágneses anyagok nem lineáris tulajdonságúak. Ilyenkor a számítások összetettebbek és hasonlóak a nemlineáris villamos hálózatok számításaihoz.

Fontos feltételezés a mágneses körök kivizsgálásakor, hogy a mágneses fluxust teljes egészében a ferromágneses anyag vezeti. A határfeltételek segítségével ezt a feltételezést a következő módon tudjuk igazolni:

Tételezzünk fel, hogy a ferromágneses anyagunk relatív permeabilitása

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \gg 1$$

μ_r -nem állandó, de nagy számértékű,

a határfeltételek szerint (4.45. ábra):

$$\begin{aligned} (1) \quad (B_v)_n &= (B_f)_n \\ (2) \quad (H_v)_t &= (H_f)_t. \end{aligned}$$

Mivel $B=\mu H$, a (2)-es egyenlet

$$\frac{(\vec{B}_v)_t}{\mu_0} = \frac{(\vec{B}_f)_t}{\mu} \quad \text{lesz, azaz}$$

$$(2') \quad (\vec{B}_f)_t = \mu_r (\vec{B}_v)_t.$$

A mágneses körök kivitelezésénél ügyelnek arra, hogy a gerjesztőtekercs által létrehozott mágneses tér indukcióvonalai megközelítőleg párhuzamosak legyenek a vasmag felületével (kivéve természetesen a légrés pontjaiban).

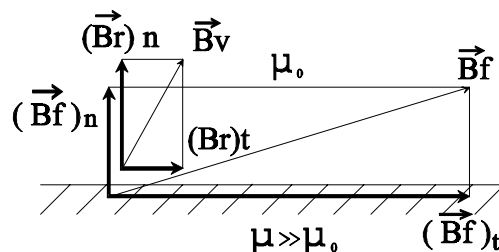
A 4.45. ábráról az olvasható le, hogy $\frac{(\vec{B}_f)_t}{(\vec{B}_v)_t} \cong 5$, míg a gyakorlatban a mágneses tér

indukcióvektorának tangenciális komponenseinek aránya a ferromágneses és nemferromágneses anyagokban több százról több tízezres nagyságrendű.

Ebből aztán könnyen belátható, hogy:

$$B_f = \sqrt{(B_f)_n^2 + (B_f)_t^2} \gg B_v = \sqrt{(B_v)_n^2 + (B_v)_t^2}.$$

Ezek szerint a mágneses körökben a mágneses fluxust gyakorlatilag majdnem teljes egészében a ferromágneses anyag vezeti. Minden ferromágneses anyagból készült vasmag mellett azonban létesülnek a levegőben is indukcióvonalak. Ezeket az indukcióvonalakat szórt indukcióvonalaknak nevezzük, melyeknek összessége a szórt fluxus. Reális esetekben a szórt fluxus arányát a vasmagban mért fluxushoz viszonyítva nehéz meghatározni, de a becslések szerint ez az arány százalékban kifejezve nem nagyobb mint 10-15%. A számításoknál iskolapéldák esetében a szórt fluxust elhanyagoljuk, pontosabb számítás esetén azonban nem szabad öt sem kihagyni. Formális hasonlóság áll fenn a villamos hálózatok és a mágneses körök megoldása között. A mágneses körök megoldhatóságának pontossága azonban sokkal kisebb, mint a villamos hálózatoké. Ennek több oka van. Az egyik ok, hogy a vezető és a szigetelő fajlagos vezetőképessége közötti arány nagy: $10^{18} - 10^{24}$, vagyis a szórt áramok elhanyagolhatók. A mágneses köröknél a ferromágneses anyag és a környezet permeabilitásának aránya sokkal kisebb: $10^2 - 10^4$, vagyis a szórt fluxus kisebb vagy nagyobb mértékben, de mindig létezik, és ez némely esetben csökkentheti a számítás pontosságát. Legtöbbször azonban az ilyen pontosság is megfelel a gyakorlatban (a hibaszázalék általában az 5 - 10 %-os határon belül van).



4.45. ábra

4.9.4.1. Kirchhoff törvényei a vékony mágneses körökre

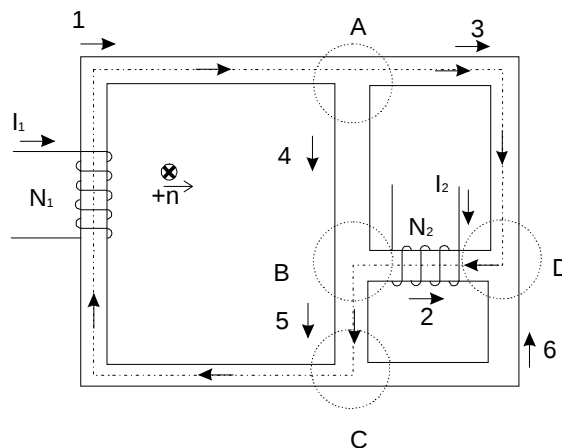
A mágneses köröket, melyeknél a hosszukhoz viszonyítva rövidek a keresztmetszet dimenziói (vékony ferromágneses magjuk van) röviden *vékony mágneses köröknek* nevezzük. Ilyen köröknél a $\vec{B}$ és $\vec{H}$ vektorokat a mag keresztmetszetén állandónak vehetjük.

A mágneses körök méretezésekor szükséges tudni a $\vec{B}$ és $\vec{H}$ vektorok intenzitásai közötti kapcsolatot. A ferromágneses anyagoknál a $\mu = B / H$ arány nem állandó. A mágneses körök analízisekor a B és H közötti összefüggés meghatározására vagy a mágnesezési alapgörbét vagy az elsődleges mágnesezési görbét használják. A továbbiakban mi a mágnesezési görbe fogalma alatt nem teszünk különbséget a mágnesezési alapgörbe és az elsődleges mágnesezési görbe között (mivel a gyakorlatban is – az elenyésző eltérések miatt – ezt a különbséget általában elhanyagolják).

A 4.46. ábrán egy vékony mágneses kör látható. Tételezzük fel, hogy a kör méretei ismertek, az ágak permeabilitása úgyszintén (akár analitikusan, vagy mágnesezési görbe alakjában). A feladat az ágak fluxusainak meghatározása, ha a méretek és a permeabilitások mellett ismerjük a gerjesztőtekercsek áramait. Egy adott ág fluxusa a mágneses körben vagy pozitív vagy negatív lesz attól függően, hogy:

- (1) milyen a gerjesztőtekercs tekercselésének iránya,
- (2) milyen (melyik) az áram valódi iránya, és
- (3) milyen (melyik) az ág keresztmetszetére kiválasztott pozitív egységvektor (merőleges) iránya.

Az egyenáramú hálózatoknál az adott ágba folyó áram előjele, mint az előzőekben láttuk, függ az ágakban (nemcsak a megfigyelt ágba!) elhelyezkedő elektromotoros erők (generátorok) irányától és nagyságától (intenzitásától), valamint az adott ágba tetszőlegesen felvett referenciáiránytól. Ez a hasonlóság, az egyenáramú- és mágneses körök között sokkal mélyebb, mint ahogy ezt a következőkben látni fogjuk, olyannyira, hogy az egyenáramoknál megismert alakú Kirchhoff törvényekhez hasonló egyenleteket írhatunk fel a mágneses körökre is.



4.46. ábra

A fluxusmegmaradás törvényének értelmében a mágneses kör minden csomópontjára (a csomópont fogalma azonos az egyenáramú köröknél ismertetett csomópont fogalmával) felírható egy egyenlet, melynek alakja a 4.46. ábra alapján az A pontra:

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_4 = 0$$

Amennyiben a csomópontok száma n_{cs} , akkor az így fölírható független egyenletek száma $(n_{cs}-1)$. Az utolsó, n_{cs} -edik csomópontra felírt egyenlet megkapható az előzőleg felírt $(n_{cs}-1)$ egyenlet alapján (a bizonyítást lásd az egyenáramú hálózatoknál)!

Az előző egyenlet makroszkópikus alakja a vékony mágneses körökre érvényes Kirchhoff csomóponti törvényét (vagy Kirchhoff első törvényét) képezi:

$$\sum_{k=1}^n \pm \Phi_k = 0$$

Az általános Ampère-törvény egy zárt görbére felírva (érvényes úgy a lineáris, mint a nemlineáris körökre):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{C-n \text{ át}} \pm I$$

Az egyenletben szereplő integrál felírható a C zárt görbét alkotó ágak mentén számítható integrálok összegeként. Tételezzük fel, hogy egy-egy ág keresztmetszete állandó (S_k). Elhanyagolva a szórt fluxust felírhatjuk, hogy:

$$\int_{\text{a k ág mentén}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \cong \pm H_k \cdot l_k,$$

ahol a pozitív előjel akkor érvényes, ha a H vektor és a k ágban a C zárt görbe irányítása megegyezik. Az általános Ampère-törvény bal oldala így a következő alakra módosul:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{C-mentén}} \pm H_k \cdot l_k.$$

Az általános Ampère-törvény jobb oldala ugyancsak egyszerűsíthető az NI szorzatok alkalmazásával. A jobb oldalon azon gerjesztőtekercesek menetszámainak és a hozzátartozó áramnak a szorzatait (NI szorzatokat) vesszük számba (adjuk össze), amelyeket a C zárt görbe felőlel (magára “felfűz”). Nézzük a C zárt görbét az 1.44. ábrán! A C-re kifeszített felületen N_1 – szer halad át I_1 erősségű áram pozitív irányban, és N_2 –sör halad át I_2 erősségű áram, de negatív irányban. Az ábráról látható, hogy az NI szorzat akkor pozitív előjelű, ha a gerjesztőtekercesben folyó áram és a C zárt görbére felvett tetszőleges pozitív körüljárási irány a jobbsavarszabály szerint kötöttek. Ezek szerint az általános Ampère-törvény jobb oldalát a következő alakra egyszerűsíthetjük:

$$\sum_{\text{C-n át}} \pm I = \sum_{\text{C-mentén}} (\pm NI)_k.$$

Az általános Ampère-törvény teljes, egyszerűsített alakja a vékony mágneses köröknél Kirchhoff huroktörvényének (Kirchhoff második törvényének) felel meg:

$$\sum_{\text{C-mentén}} (\pm H_k \cdot l_k) = \sum_{\text{C-mentén}} (\pm NI)_k.$$

Az előző kifejezés nem véletlenül kapta a “Kirchhoff huroktörvénye a vékony mágneses körökre” nevet. Amennyiben ugyanis szem előtt tartjuk, hogy:

$$H_k = \frac{B_k}{\mu_k(H_k)}, \text{ akkor}$$

$$H_k \cdot l_k = \frac{B_k \cdot l_k}{\mu_k(H_k)} = \frac{B_k \cdot l_k}{\mu_k(H_k)} \cdot \frac{S_k}{S_k} = \Phi_k \cdot \frac{l_k}{\mu_k(H_k)}.$$

A Φ_k melletti kifejezés alakja megegyezik az l_k hosszúságú, S_k keresztmetszetű vezető ellenállásának kifejezésével, azzal a különbséggel, hogy itt a vezető anyagának fajlagos vezetése helyett a mágneses anyagból készült ág permeabilitása szerepel. Ezért a Φ_k melletti kifejezést a k ág mágneses ellenállásának vagy reluktanciájának nevezzük, és R_{mk} -val jelöljük:

$$R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k(H_k) \cdot S_k}.$$

Így tehát : $H_k \cdot l_k = R_{mk} \cdot \Phi_k$. Kirchhoff huroktörvényének végleges alakja a következő:

$$\sum_{\text{C-mentén}} (NI)_k - \sum_{\text{C-mentén}} R_{mk} \cdot \Phi_k = 0.$$

Az előző kifejezés NI és $R_{mk} \cdot \Phi_k$ szorzatai pozitív előjelűek lesznek, ha a gerjesztőtekerces által létrehozott indukció iránya, illetve az adott ágban a fluxus tetszőlegesen felvett referenciairánya megegyezik a zárt hurok pozitív körüljárási irányával. Ellenkező esetben az előjelek negatívak.

Az egyenáramokra érvényes Kirchhoff-huroktörvényben szereplő generátornak itt az NI szorzat felel meg, melyet gyakran magnetomotoros erőnek (esetleg gerjesztésnek) is neveznek és F_m -mel jelölnék. Az ellenállásnak az egyenáramú hálózatokban a reluktancia felel meg a vékony mágneses köröknél, az áramerősségnek pedig a mágneses fluxus.

Ezek tehát Kirchhoff egyenletei a vékony mágneses körökre. A villamos hálózatok, mint tudjuk, a legtöbb esetben lineárisoknak tekinthetők még ha valójában nem is egészen azok. A mágneses körök azonban úgyszólván sohasem tekinthetők lineárisoknak. Ezért a villamos hálózatoknál megismert hálózatanalízis-módszerek csak néhány speciális esetben, úgyszólván sohasem használhatók.

A reluktancia fogalma a mágneses köröknél csak a villamos körökkel való hasonlatosság bemutatása céljából jelent meg. A nemlineáris mágneses körök számításánál a reluktancia fogalma nem használatos, hanem az általános Ampère-törvény, a fluxusmegmaradás törvénye és mágneses körök ágaiban felhasznált mágneses anyagok mágnesezési görbéi (a mágneses térerősség-vektor – H – és az indukcióvektor – B - közötti összefüggés meghatározására).

4.9.4.2. Légréssel rendelkező mágneses körök

Az elektrotechnikai gyakorlatban sűrűn találkozhatunk légrés(ek)el rendelkező mágneses körökkel (villanymotorok, villamos generátorok, relék elektromágnesek, stb.). Nézzük meg a 4.47. ábrán lévő mágneses kört, melyben egy kisméretű (l_0 hosszúságú) légrés található. A légrésben természetesen érvényes, hogy: $B_0 = \mu_0 \cdot H_0$, a ferromágneses anyagban pedig: $B = \mu(H) \cdot H$. Ha csupán közelítő számítást végzünk, és Kirchhoff huroktörvényét a reluktancia segítségével írjuk fel, akkor a következő kifejezést kapjuk a 4.47. ábrán alkalmazott jelölésekkel:

$$NI - R_m \cdot \Phi - R_{m0} \cdot \Phi = 0 ,$$

ahol:

$$R_m = \frac{l}{\mu(H) \cdot S} \quad \text{és} \quad R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 \cdot S_0} .$$

A ferromágneses anyag keresztmetszetének felülete pontosan adott (S), viszont a légrés körül szórt fluxus, illetve szórt mágneses tér jelentkezik, aminek következtében a légrés keresztmetszetének effektív (valódi) felülete (S_0) bizonyosan nagyobb a ferromágneses anyag keresztmetszetének felületétől. Magában a légrésben (a légrés belsejében) a mágneses tér majdnem teljesen homogén, a légrés szélein pedig bizonyosan inhomogén (nemhomogén). A fent felírt reluktancia-képlet így annál pontosabb értéket ad eredményként minél kisebb az l_0 értéke a keresztmetszet dimenzióinál.

A mágneses körben levő légrés nagymértékben befolyásolja a fluxus értékét, hiszen a lehető legrövidebb (legkeskenyebb) légrések is a legtöbb esetben nagyobb reluktanciát képviselnek, mint az össz ágtól eredő reluktancia együttvéve. Ez a megállapítás a reluktancia-kifejezésekből is leszűrhető, mert a $\mu(H)$ értéke általában több ezerszerese a μ_0 -nak. Ezért fontos, hogy a reluktancia számításánál a légrés valódi (S_0) felületét vegyük figyelembe.

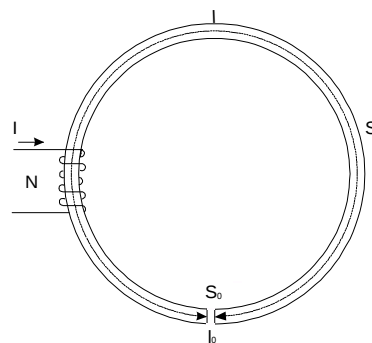
A mágneses körök keresztmetszete általában vagy derékszögű paralelogramma (négyzet vagy téglalap), vagy kör. Emellett a légrés két oldalán vagy ugyanazon méretű ferromágneses magkeresztmetszet, vagy eltérő méretű magkeresztmetszet található. Ez összesen négyféle kombinációt jelent:

- (1) Téglalap (a és b oldalú) keresztmetszetű és egyforma felületű vasmag határolja a légrést. Ekkor az effektív légrés keresztmetszet:

$$S_0 = (a + l_0) \cdot (b + l_0) .$$

- (2) Kör (D átmérőjű) keresztmetszetű és egyforma felületű vasmag határolja a légrést. Az effektív légrés keresztmetszet:

$$S_0 = \frac{\pi \cdot (D + l_0)^2}{4} .$$



4.47. ábra

- (3) Téglalap (a és b oldalú) keresztmetszetű és különböző felületű vasmag határolja a légrést. Az effektív légréskeresztmetszet értéke itt:

$$S_0 = (a + 2l_0) \cdot (b + 2l_0) .$$

- (4) Kör (D átmérőjű) keresztmetszetű és különböző felületű vasmag határolja a légrést. Az effektív légréskeresztmetszet értéke:

$$S_0 = \frac{\pi \cdot (D + 2l_0)^2}{4} .$$

4.9.4.3. A mágneses körök számítása

Az előzőekben már kikötöttük, hogy a tantágy keretei nem ölelik fel a mágneses körök tervezését, így csak a mágneses körök analízisét ismerjük majd meg, ahol a mágneses körök méreteit, és a mágneses kört alkotó ferromágneses anyagokat is ismerjük. Két típusfeladat kínálkozik ebben az esetben:

- (1) Meghatározni a magnetomotoros erőt (a gerjesztést), illetve annak amper-menet értékét oly módon, hogy a nemlineáris mágneses kör egy adott ágában konkrét fluxus- vagy indukcióérték legyen (ez az egyszerűbb feladattípus).
- (2) Kiszámítani a nemlineáris mágneses kör valamennyi ágában a fluxust illetve az indukciót, ha ismert az össz gerjesztés a körben (bonyolultabb feladattípus).

A két problémátípus megoldási menete nemcsak, hogy egymástól különbözik, de eltérő még ugyanannak a problémátípusnak a megoldásmenete is az egyszerű- (egy ággal rendelkező) és az összetett mágneses körök (több ággal rendelkező – az ágak száma általában nem haladja meg a hármat) esetében.

4.9.4.3.1. EGYSZERŰ MÁGNESES KÖRÖK SZÁMÍTÁSA

Az egyszerű mágneses körökben nincsenek elágazások, csupán egy ág és egy hurok létezik. A szórt fluxus most is elhanyagoljuk, így a fluxus mindegyik magkeresztmetszetre megegyezik, vagyis egyforma.

- I. Tételezzük fel, hogy az egyszerű mágneses körben adott a fluxus értéke (első, egyszerűbb feladattípus), legyen mondjuk Φ . Határozzuk meg a szükséges gerjesztés értékét!

A megoldás menete a következő:

1. Kiszámítjuk az indukcióértékeket az ágrészekben: $B_k = \frac{\Phi}{S_k} .$
 - ne felejtsük el, hogy az egyetlen ág különböző keresztmetszetű részekből épülhet fel,
 - a légrésekben az effektív (valódi) keresztmetszettel számoljunk.
2. Meghatározzuk a mágneses térerősség vektorának intenzitását vagy az ferromágneses anyagokra analitikusan adott kifejezések vagy a mágnesezési görbék alapján.
 - tartsuk szem előtt, hogy a mágneses kör egyetlen ága (az egyetlen hurok) többféle ferromágneses anyagból is állhat,

- a légrésekben viszont a mágneses térerősség vektorának intenzitása:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}.$$

3. Összegezzük a $H_k \cdot l_k$ szorzatokat, és megkapjuk a szükséges gerjesztést (magnetomotoros erőt, amely szükséges az adott fluxus (Φ) eléréséhez).

II. Tételezzük fel, hogy az egyszerű mágneses körben adott az össz gerjesztés értéke (második, bonyolultabb feladattípus), legyen mondjuk NI, a $H(B)$ funkció (összefüggés) pedig grafikusán adott. Határozzuk meg a fluxust a hurokban, illetve az indukcióértékeket az ágrészekben!

A megoldás menete ebben az esetben a következő: Mivel a $H(B)$ összefüggés csak grafikusán ismert, a $\sum H_k \cdot l_k = NI$ egyenlet csak valamilyen közelítő megoldással oldható

meg. A legegyszerűbb, és a gyakorlatban leggyakrabban használt eljárás a következő:

1. Feltételezzünk egy fluxusértéket a körben, meghatározzuk az indukcióértékeket és a mágneses térerősség-értékeket az ágrészekben, majd összegezzük a $H_k \cdot l_k$ szorzatokat (az első feladattípus megoldás-menete alapján).
2. Összehasonlítjuk a kapott $H_k \cdot l_k$ szorzatok összegét az adott NI értékével. Ha az értékek megegyeznek (valószínűtlen, hogy egyből eltaláljuk a keresett fluxusértéket), vagy nagyon kicsi az eltérés közöttük (modjuk 2-5 %), úgy a feladat megoldásához értünk.
3. Szükség szerint növeljük vagy csökkentjük az előző lépésben meghatározott fluxusértéket, hogy közelítsünk a megadott NI értékhez, és visszalépünk az 1. pontra (újraszámoljuk az indukcióértékeket és a mágneses térerősség-értékeket az ágrészekben, majd...).

A feladat általában néhány iteráció (átszámolási ciklus után) elfogadható eredményhez vezet.

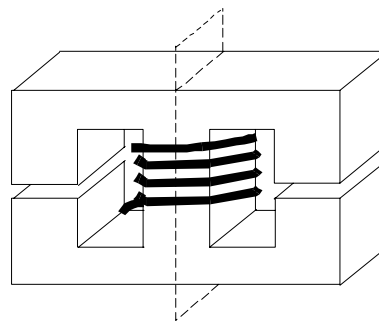
Ennek a feladatnak a megoldása az analitikus módszer mellett grafikusán is kereshető:

1. Néhány (nem kettő-három, hanem több) tetszőlegesen kiválasztott fluxusértékre az első problématisz megoldás-menete alapján kiszámítjuk a számukra szükséges gerjesztésértékeket.
2. Interpoláció alapján megrajzoljuk a $\Phi(NI)$ függvényt (a kapott pontokon keresztül görbét húzunk vagy analitikusan kiszámoljuk a görbe paramétereit, mondjuk a legkisebb négyzetek módszerével – létezik kész számítógép-program is, amelyik ezt számolja), majd
3. Grafikus úton a $\Phi(NI)$ függvény segítségével meghatározzuk azt a fluxusértéket, amely megfelel az adott gerjesztésnek.

4.9.4.3.2. AZ ÖSSZETETT SZIMMETRIKUS MÁGNESES KÖRÖK SZÁMÍTÁSA

A gyakorlatban sokszor találkozunk szimmetrikus szétágazó (összetett) mágneses körökkel. Egy ilyen mágneses kör a 4.48. ábrán látható. A szimmetria miatt a körnek csak egyik felét figyeljük. Így egy egyszerű mágneses kört kapunk, amelyet az előzőekben leírt módszerek egyikével oldhatunk meg. Itt is kétféle feladat fogalmazható meg: megadható az ágban levő

fluxus, illetve az ágrészekben az indukció értéke vagy a gerjesztőtekercs(ek) amper-ment értéke(i).



4.48. ábra

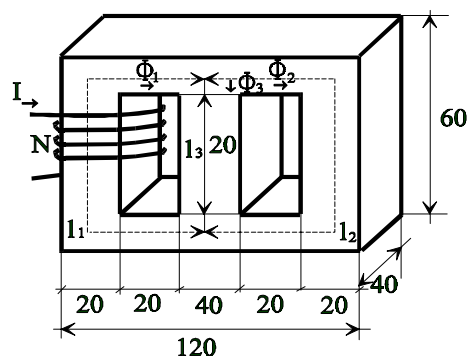
4.9.4.3.3. AZ ÖSSZETETT NEMSZIMMETRIKUS MÁGNESES KÖRÖK SZÁMÍTÁSA

A gyakorlatban ritkán találkozunk olyan mágneses körökkel, melyeknek több mint három águk van. Mivel a mágneses körök nem lineárisak nem alkalmazhatók a lineáris elektromos hálózatok megoldásának módszerei. Az összetett mágneses körök megoldására a következő eljárásokat használjuk:

1. Kirchhoff törvényei a mágneses körökre (a huroktörvénynek nem a reluktanciát is tartalmazó alakja) - amelyek a nemlineáris mágneses körökre érvényesek
2. A mágneses kör ágait alkotó ferromágneses anyagok mágnesezési görbéi (ha vannak légrések, akkor a légrésben: $B_0 = \mu_0 H_0$).

Létezik néhány módszer a mágneses körök megoldására. A legegyszerűbb és leggyakrabban alkalmazott eljárás a megközelítési (iterációs) módszer, hasonló ahhoz, amelyet a második feladattípus megoldás-meneténél ismertettünk. Hasonlóan, mint a nemlineáris elektromos hálózatoknál, nincs egy általánosan alkalmazható eljárás valamennyi mágneses körre, hanem az eljárás módszerét a mágneses kör geometriai alakja diktálja. Így, minden típusú mágneses kört más módszerrel kell megoldani.

4.20. Példa: A 4.49. ábrán adott egy nemszimmetrikus mágneses kör. A kör középső ágában a kívánt mágneses indukció $B = 0.8 \text{ T}$. Határozzuk meg azt az NI gerjesztést, amely ezt az indukciót eredményezi, ha a mágneses kör transzformátorlemezről készült. A transzformátorlemez mágnesezési görbéje a Melléklet 1. ábráján adott. A vasmag kitöltési koefficiense 0.9.



4.49. ábra

Megoldás:

Az ábrán látható méretadatokból kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 = 131.4 \text{ mm} \\ l_3 &= 40 \text{ mm} \\ S_1 &= S_2 = 7.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ S_3 &= 14.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ezek után felírhatók az egyenletek:

$$\begin{aligned} H_1 l_1 + H_3 l_3 &= NI & (1) \\ H_2 l_2 - H_3 l_3 &= 0 & (2) \end{aligned}$$

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (3)$$

$H_3 = 100 \text{ A/m}$ (a mágnesezési görbéről, $B_3 = 0.8 \text{ T}$ -értékre)
 - a (2)-es egyenlet alapján:

$$H_2 = \frac{H_3 l_3}{l_2} = 30.4 \text{ A/m}$$

$B_2 = 0.2 \text{ T}$ (a mágnesezési görbéről, $H_2 = 30.4 \text{ A/m}$ értékre)

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 1.44 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_3 = B_3 S_3 = 11.52 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 12.96 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = 1.79 \text{ T} \approx 1.8 \text{ T}$$

$H_1 = 20000 \text{ A/m}$ (a mágnesezési görbe alapján)

$$NI = H_1 l_1 + H_3 l_3 = 2632 \text{ amper-menet}$$

Lássuk most, hogy a mágneses kör milyen üzemmódban képes dolgozni a kiszámított gerjesztéssel (sinusos üzemmód, impulzus-üzemmód,...)! Más szóval, milyen üzemmód-típussal valósítható meg a kiszámolt gerjesztés? Ha például feltételezzük, hogy a menetszám $N = 500$ akkor $I \approx 5.2 \text{ A}$ lesz.

Mivel a vasmag ablakfelülete 400 mm^2 , a feltételezett menetszámot ($N = 500$) 0.5 mm^2 (0.8 mm sugarú) keresztmetszetű rézhuzallal valósíthatjuk meg. Rövid ideig 5.2 A erősségű áramot elviselne a huzal, de hosszabb időtartalomban már nem. Így tehát a mágneses kör impulzus-üzemmódban dolgozhat az adott gerjesztésértékre.

4.21. Példa: Vegyük a mágneses kört az előző példából! A feladat viszont legyen most második típusú, amit folyamatos közelítési módszerrel oldunk meg. A második problématípusnak megfelelően legyen ismert a gerjesztés: $F_m = (NI)_{\text{ADOTT}} = 1000 \text{ amper-menet}$. Határozzuk meg az indukciót a mágneses kör mindhárom ágában!

Megoldás:

Mivel a mágneses kör nem lineáris, a feladatot nem oldhatjuk meg közvetlen (direkt) módon. A folyamatos közelítési módszer alkalmazásánál feltételezzünk a kör bármely ágában egy Φ' kezdő fluxust. A Φ' fluxus értékére meghatározzuk (kiszámítjuk) a megfelelő gerjesztést - $(NI)_1$ szorzatot. Az új fluxus értéket az ágban a következő képlettel határozzuk meg:

$$\Phi'' = \Phi' \frac{(NI)_{\text{ADOTT}}}{(NI)_1} \quad (a)$$

Az eljárást megismétljük és új $(NI)_2$ értéket kapunk. A harmadik és a további megközelítő értékek meghatározását interpolációval végezzük:

$$\Phi''' = \Phi'' + \frac{\Phi' - \Phi''}{(NI)_1 - (NI)_2} [(NI)_{\text{ADOTT}} - (NI)_2] \quad (b)$$

A megközelítési módszert akkor szakítjuk meg, amikor a kapott gerjesztés - $(NI)_k$ szorzat elfogadhatóan megközelíti az $(NI)_{\text{ADOTT}}$ szorzatot (az eltérés nem nagyobb 5%-nál).

Legelőször azt lássuk be, hogy a mágneses körre az előző példában felírt három egyenlet itt is érvényes:

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = NI \quad (1),$$

$$H_2 l_2 - H_3 l_3 = 0 \quad (2),$$

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (3).$$

Kiindulásként tételezzünk fel a hármas ágban egy kezdő fluxust, modjuk $\Phi'_3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$!

Az eredményhez vezető iterációs lépéssorozat egy-egy lépése a következő aktivitásokból áll:

1. Kiszámítjuk a 3 ágban az indukciót: $B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$.
(első lépésben a feltételezett Φ_3 fluxust vesszük – tehát $\Phi_3 = \Phi_3'$ –, második lépésben az (a) egyenlet segítségével kiszámított Φ_3'' -ot – tehát akkor $\Phi_3 = \Phi_3''$ lesz – minden következő lépésben pedig a (b) egyenlet által kiszámított Φ_3''' -ot – tehát akkor $\Phi_3 = \Phi_3'''$ lesz).
2. Meghatározzuk a H_3 -at a mágnesezési görbe alapján.
3. Kiszámítjuk a H_2 értékét a (2) egyenletből: ($H_2 = \frac{H_3 \cdot l_3}{l_2}$).
4. Meghatározzuk a B_2 értékét a mágnesezési görbe alapján.
5. Kiszámítjuk a 2 ág fluxusát: $\Phi_2 = B_2 \cdot S_2$.
6. Kiszámítjuk az 1 ág fluxusát a (3) egyenletből ($\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$).
7. Kiszámítjuk az 1 ág indukcióvektorának intenzitását ($B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$).
8. Meghatározzuk a H_1 értékét a mágnesezési görbe alapján, és
9. Végül kiszámítjuk a gerjesztés értékét az (1)+(2) egyenletek összegéből ($NI = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2$), vagy csak az (1) egyenletből ($NI = H_1 \cdot l_1 + H_3 \cdot l_3$).

Majd ezt a kapott értéket hasonlítjuk össze a példában megadott (esetünkben $(NI)_{ADOTT} = 1000$ amper-menet) értékkel. Ha a különbség kisebb 5%-nál, úgy a feladat megoldásához értünk, ellenkező esetben számítjuk a 3 ág újabb (megközelítő) értékét az (a), vagy (b) egyenlet segítségével, és elvégezzük az új iterációs lépés kilenc aktivitását.

Gyakorlatként végezze el az olvasó a számításokat az adott kezdő fluxus értékére!

4.9.4.4. Állandó mágnesből készült mágneses kör

Az állandó mágnesek alkalmazása az elektrotechnikában nagyon sokoldalú (hangszórók, relék, egyenáramú amperméterek, forgó villamos generátorok stb.). Ezért a gyakorlatban szükséges az előre meghatározott mágneses tulajdonsággal rendelkező állandó mágnes tervezésének ismerete. Ismerkedjünk meg hát az állandó mágnesből készülő mágneses körök tervezésének alapelemeivel.

A 4.50. ábrán látható ferromágneses tóruszmagot a rátekeresztelt vezetékben folyó áram telítettséig felmágnesezte, majd a gerjesztőáram kikapcsolásával a munkapont, amely a H - B síkban a mágnesezettség állapotát írja le most a B_r pontban van (4.51. ábra). Ha most a magból eltávolítunk egy l_0 hosszúságú részt, akkor a körre a következő alakú második Kirchhoff törvény (általános Ampère törvény) írható fel:

$$H_0 l_0 + H_m l_m = 0 \Rightarrow H_m = -\frac{H_0 l_0}{l_m} \quad (1)$$

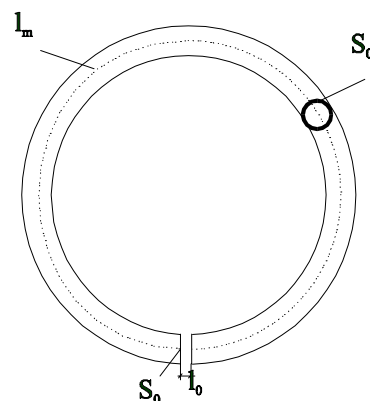
Ha elhanyagoljuk a szórt fluxust, azt kapjuk, hogy:

$$\Phi_0 = \Phi_m,$$

azaz:

$$B_0 \cdot S_0 = B_m \cdot S_m.$$

A levegőben levő indukcióvektort kifejezve:



4.50. ábra

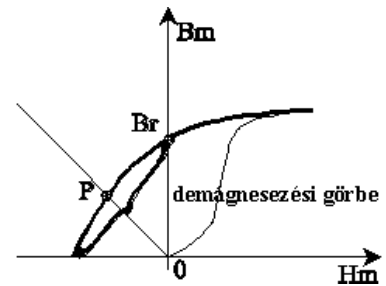
$$B_0 = \frac{B_m S_m}{S_0}.$$

Mivel a levegőben $B_0 = \mu_0 H_0$, a mágneses térerősség intenzitása az előző két kifejezésből:

$$H_0 = \frac{B_m S_m}{\mu_0 S_0} \quad \textcircled{2},$$

majd a $\textcircled{2}$ -t behelyettesítve az $\textcircled{1}$ -be:

$$H_m = -B_m \frac{S_m l_0}{\mu_0 S_0 l_m}.$$



4.51. ábra

Ez az egyenlet nem más, mint az 1.49. ábrán látható OP egyenes egyenlete. Mint kitűnik, a légrés a magban indukciósökkenést idéz elő (a munkapont a P pontban van).

Az egyenes hajlásszöge az l_0/l_m aránytól függ (a fenti levezetés csak akkor érvényes, ha az l_0 kicsi a tórusz keresztmetszetének felületi méreteihez viszonyítva (az S_0 a légrés effektív felületét jelenti). A gyakorlatban általában a légrés méretei, vagy effektív méretei (l_0 , S_0) és a légrésben szükséges indukcióértékek (B_0) adottak, a feladat pedig az, hogy kiszámítsuk a mágnes méreteit úgy, hogy legkevesebb ferromágneses anyagot használjunk fel.

Határozzuk meg tehát a mágnes l_m hosszát és a keresztmetszetének felületét úgy, hogy az adott l_0 , S_0 és B_0 mellett az $l_m S_m$ szorzat minimális legyen (vagyis, hogy a felhasznált anyag térfogata a lehető legkisebb legyen). A mágneses anyag térfogata:

$$V_m \cong S_m l_m$$

Az $\textcircled{1}$ -ből a mágneses kör hossza:

$$l_m = -\frac{H_0 l_0}{|H_m|},$$

a mágneses anyag keresztmetszete pedig (a $\textcircled{2}$ egyenlet alapján):

$$S_m = B_m \frac{S_0 B_0}{B_m}.$$

Így a mágneses anyag térfogata az előző két kifejezés alapján:

$$V_m = \frac{H_0 l_0 S_0 B_0}{|H_m| B_m} = \frac{l_0 S_0 B_0^2}{\mu_0 |H_m| B_m}$$

A V_m értéke akkor lesz minimális az adott l_0 , S_0 és B_0 értékekre, ha a ferromágneses anyag munkapontját a mágnesezési (lemágnesezési - demágnesezési) görbén úgy választjuk meg, hogy a $|H_m| B_m$ szorzat maximális értékű legyen. A $|H_m| B_m$ szorzatot maximális energiaszorzatnak is nevezik (a maximális energiaszorzat elnevezés abból ered, hogy a HB szorzat mértékegysége megegyezik a térbeli -térfogati- energiasűrűség mértékegységével). A maximális energiaszorzatot, mint a kemény ferromágneses anyagok fontos ismervét táblázatok formájában is megadják.

Ha a maximális energiaszorzatnak megfelelő térerősség- és indukcióértéket rendre $|H_{MAX}|$ -al és B_{MAX} -al jelöljük, akkor a legkisebb anyagtérfogat mérete:

$$(S_m)_{optimalis} \cong \frac{S_0 B_0}{B_{MAX}} \quad \text{és}$$

$$(l_m)_{optimalis} \cong \frac{l_0 B_0}{\mu_0 |H_{MAX}|}.$$

4.10. Ellenőrző kérdések

1. Nyugalomban villamos töltések között milyen erők jelentkeznek?
2. Milyen testek között jelentkezik mágneses erő?
3. Lehet-e a töltések közötti mágneses erőt közvetlenül (kísérleti úton) mérni?
4. Hogyan mérhetők mégis a mágneses erők?
5. Mit nevezünk áramelemnek?
6. Ki fogalmazta meg a két áramelem között ható mágneses erő matematikai alakját?
7. Milyen alakú a két áramköri elem között ható elemi erő kifejezése?
8. Mi a vákuum permeabilitása, és mi az egysége?
9. Mi a mágneses tér, és milyen nagysággal írjuk le?
10. Hogyan szól a Biot-Savart-törvény?
11. Mi a mágneses indukcióvektor jele és egysége (mekkora ez az egység)?
12. Hogyan számítható a mágneses indukció vektora (iránya, irányítása és nagysága) a kör alakú áramhurok középpontjában?
13. Hogyan számítható a mágneses indukció vektora a végtelen hosszú egyenes vezető körül?
14. Milyen a Biot-Savart-törvény alakja felületi áram esetében?
15. Milyen a Biot-Savart-törvény alakja, amely a vastag vezeték dV térfogatelemében folyó áramától eredő indukciót írja le?
16. Mivé egyszerűsödik a Biot-Savart-törvény, ha a mágneses tér síkbeli áramhuroktól ered, és bennünket csak eme sík pontjaiban érdekel az indukció értéke?
17. Mire szolgál a Helmholtz orsó (tekercs)?
18. Hogyan írható fel a mágneses térben levő áramhurokra ható erő?
19. Mi az alakja a mágneses térben levő áramhurokra ható forgatónyomaték kifejezésének?
20. Hogyan szól az egy töltésre ható mágneses erő képlete?
21. Milyen irányú a mágneses erő a töltés sebességvektorának irányához viszonyítva?
22. Gyorsítható-e villamos töltés mágneses térrel?
23. Milyen alakú pályán mozog a töltött test a mágneses térben?
24. Mitől függ a körmozgás sugara?
25. A körmozgás periódusa (frekvenciája) függ-e a töltött részecske kinetikai energiájától (sebességétől)?
26. Mi a ciklotron, és milyen részekből épül fel?
27. Milyen elven működik a ciklotron?
28. Mit fejez ki a Lorentz-erő?
29. Mire használható a Hall-effektus?
30. Milyen gyakorlati alkalmazása van a Hall-effektusnak?
31. Milyenek a mágneses indukcióvektor erővonalai?
32. Milyen erőternek hívják a mágneses teret (épp az erővonalainak sajátossága miatt)?
33. Mi a mágneses fluxus (és egysége)?
34. Mit jelent a negatív fluxus-érték?
35. Mi a felület merőlegese (hogyan határozható meg)?
36. Mi a felületelem-vektor?
37. Mi a fluxusmegmaradás törvénye?
38. Hogyan szól Ampère törvénye?
39. Hol alkalmazzák az Ampère törvényt?
40. Milyen feltételek mellett használható Ampère törvénye?
41. Hogyan számítható a mágneses indukció egyenes vezető esetében Ampère törvényével?
42. Hogyan változik a mágneses indukcióvektor értéke a koaxiális vezetéknél?
43. Milyen a toroidtekercs (körgyűrű-tekercs) mágneses tere (indukcióvektora)?
44. Milyen mágneses teret hoz létre a szolenoid?
45. Minek tekinthetünk makroszkopikusan minden atomot illetve molekulát?

46. Hogyan osztályozhatjuk az anyagokat atomjaik (molekuláik) eredő mágneses nyomatéka szerint?
47. Mi jellemzi a diamágneses anyagokat?
48. Melyek a diamágneses anyagok?
49. Mi a diamágneses effektus és milyen anyagoknál jelentkezik?
50. Az eredő mágneses forgatónyomatékkal (momentummal) rendelkező molekulák milyen ismérv szerint oszthatók további csoportokba?
51. Mit kell tudni a paramágneses anyagokról?
52. Melyek a paramágneses anyagok?
53. Melyek a ferromágneses anyagok legfőbb jellemzői?
54. Melyek a legismertebb ferromágneses anyagok?
55. Milyen mennyiséggel vesszük figyelembe a mágnesezett anyagtól származó (az Ampère-áramok következtében megjelenő) mágneses teret?
56. Mi a mágnesezettség vektorának definíciós képlete?
57. Mi az elemi mágneses forgatónyomaték és a mágnesezettség vektorának az egysége?
58. Mit határoz meg és hogyan fejezhető ki a mágneses polarizáció vektora?
59. Miért van szükség az általános Ampère-törvényre?
60. Mivel kell "bővíteni" az Ampère-törvény jobb oldalát, hogy eljuthassunk az általános Ampère-törvényhez?
61. Mi az általános Ampère-törvényt meghatározó kifejezés?
62. Hogyan definiáljuk a mágneses térerősség vektorát?
63. Mi a mágneses szuszceptibilitás, és mit jellemez?
64. Mi a mágneses szuszceptibilitás mértékegysége?
65. Mi a mágneses anyagok linearitásának feltétele (kifejezés)?
66. Mi a relatív és permeabilitás?
67. Milyen összefüggés érvényes az indukcióvektor és a mágneses térerősségvektor között lineáris környezetben?
68. Mely anyagok tartoznak a lineáris mágneses anyagok közé?
69. Milyen értékű a mágneses szuszceptibilitás a dia- para- és ferromágneses anyagoknál?
70. Milyenek a mágneses térerősség erővonalai lineáris és nemlineáris környezetben?
71. A mágneses anyag melyik részén nem semlegesítik egymást az Ampère-áramok?
72. Mekkora az elemi Ampère-áramokat helyettesítő ekvivalens felületi áramsűrűség (kifejezés)?
73. Mekkora az elemi Ampère-áramokat helyettesítő ekvivalens felületi áramsűrűség a dia-, para- és ferromágneses anyagok esetében (nagyságrend)?
74. Mik a határfeltételek?
75. Melyek a határfeltételek egyenletei (lineáris közegben is)?
76. Hogyan "törnek meg" a vektorok a határfelületen áthaladva?
77. Milyen típusú anyagok a ferromágneses anyagok?
78. Mibe "tömörülnek" az azonos irányba mutató elemi mágneses forgatónyomatékkal rendelkező atomok (molekulák)?
79. Mekkora ezek a tartományok (nagyságra és molekulaszámra nézve)?
80. Mi választja el egymástól a tartományokat?
81. Mi a ferromágneses anyagok viselkedésének egyszerű magyarázata?
82. Mi a ferromágneses Curie hőmérséklet?
83. Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az antiferromágneses anyagok?
84. Mi jellemzi a ferrimágneses anyagokat (ferriteket)?
85. Hogyan néz ki a ferromágneses anyagok statikus mágnesezési görbéje?
86. Milyen jelenség kíséri a ferromágneses anyagok "átmágnesezési" folyamatát?
87. Hogyan hívjuk az "átmágnesezési" veszteséget?
88. Milyen következményekkel kell számolni a ferromágneses anyagok "átmágnesezésekor"?
89. Milyen nagyságok közötti összefüggést ábrázol a ferromágneses anyagok statikus mágnesezési görbéje?

90. Milyen mennyiségek mérhetők (számíthatók) a ferromágneses anyagokra?
91. Milyen nagyságok közötti összefüggést ábrázol a ferromágneses anyagok dinamikus mágnesezési görbéje?
92. Milyen alakú mintáról készül a dinamikus mágnesezési görbe?
93. Hogyan történik a dinamikus mágnesezési görbe szerkesztése?
94. Mi a szerepe a ballisztikus galvanométernek a dinamikus mágnesezési görbe szerkesztésében?
95. Milyen alakú a tipikus dinamikus mágnesezési görbe?
96. Melyek a tipikus dinamikus mágnesezési görbe jellemző (karakterisztikus) pontjai?
97. Milyen típusúak lehetnek a ferromágneses anyagok a koercitív terük értéke alapján?
98. Melyik hiszterézisgörbére érvényesek a táblázatokban megadott H_c és B_m értékek?
99. Mit nevezünk mágnesezési alapgörbének?
100. Hogyan végzik a ferromágneses anyagok "lemágnesezését"?
101. Mi a Rayleigh-féle hiszterézisgörbéje?
102. Mi az alappermeabilitás?
103. Mi a differenciális permeabilitás?
104. Hogyan definiálják az inkrementális permeabilitást?
105. Mi a komplex permeabilitás?
106. Melyek a mágneses kemény anyagok jellemzői?
107. Melyek a mágneses kemény anyagok, és mire használják őket?
108. Mi jellemzi a mágneses puha anyagokat?
109. Melyek a mágneses puha anyagok, és melyek az alkalmazási területeik?
110. Mi a magnetosztrikció?
111. Milyen lehet a magnetosztrikciós együttható?
112. Hol alkalmazzák a nagy magnetosztrikciós együtthatóval rendelkező anyagokat?
113. Mi a mágneses kör?
114. Mely csoportokba oszthatók a mágneses körökkel kapcsolatos problémák?
115. Mi a szórt fluxus a mágneses köröknél?
116. Figyelembe vesszük-e a szórt fluxust a mágneses körök analízisének?
117. Milyen mágneses köröket nevezünk vékony mágneses köröknek?
118. Hogyan szól Kirchhoff csomóponti törvénye a mágneses körökre?
119. Mi a kiindulópontja Kirchhoff huroktörvényének a mágneses körök esetében?
120. Mi Kirchhoff második törvényének a mágneses körökre érvényes alakja?
121. Mi a reluktancia?
122. Mi a magnetomotoros erő (gerjesztés)?
123. A Kirchhoff törvények alkalmazásakor milyen anyagoknak tekintjük a ferromágneses anyagokat?
124. Mely törvények és karakterisztikák segítségével végezzük a mágneses körök analízisét, ha ténylegesen nemlineáris köröknek tekintjük őket?
125. Hol találkozhatunk légrés(ek)kel rendelkező mágneses körökkel?
126. Hogyan számítható a légrés keresztmetszetének effektív (valódi) felülete?
127. Milyen mértékben határozza meg a fluxus értékét a légrés a mágneses körben?
128. Mely két feladattípus jelentkezik a mágneses körök analízisének?
129. Milyen a megoldás menete az egyszerű mágneses köröknél az első (egyszerűbb) feladattípus esetében?
130. Milyen a megoldás menete az egyszerű mágneses köröknél a második (bonyolultabb) feladattípus esetében?
131. Hogyan számítható ki a mágneses kör a bonyolultabb feladattípus esetében grafikus úton?
132. Mi a könnyítés a szimmetrikus mágneses körök esetében?
133. Milyen módszereket alkalmaznak a nemszimmetrikus mágneses körök megoldásánál?
134. Hogyan tervezhető az állandó mágnesből készülő mágneses kör?

5. IDŐBEN VÁLTOZÓ VILLAMOS (ELEKTROMOS) ÉS MÁGNESES TÉR

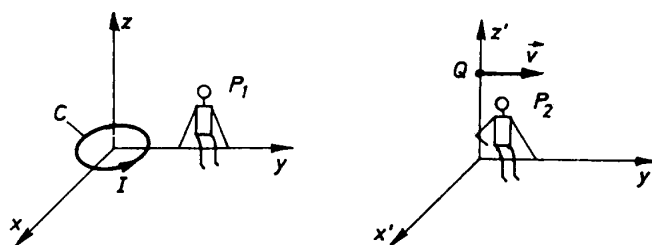
5.1. Elektromágneses indukció

5.1.1. AZ INDUKÁLT VILLAMOS TÉR

A mozgás mindig relatív, mindig valamihez viszonyítva mérjük. Több, mozgásban levő test esetén egyiknek a mozgását leírhatjuk bármely másik mozgásban levő testhez viszonyítva. Érthető, hogy megfelelőbb (de csak megfelelőbb) ha olyan referenciarendszert választunk ki (azt a mozgó testet választjuk ki), melyhez viszonyítva a legtöbb jelenség leírása a legegyszerűbb.

A referenciarendszer, vagy a "koordináta-rendszer, amelyhez viszonyítva figyeljük a jelenséget" kifejezést legtöbbször a "megfigyelő" fogalommal helyettesítjük. A "megfigyelő" fogalma alatt egy képzeletbeli megfigyelőre gondolunk, aki a kiválasztott koordináta-rendszerhez viszonyítva mozdulatlanul figyeli és elemzi a jelenségeket.

Figyeljünk meg egy Q villamos töltésmennyiséggel rendelkező testet (Q töltést), amely $\vec{v}$ sebességgel mozog az időben állandó (de általános esetben inhomogén – vagyis nem homogén) mágneses tér forrásához viszonyítva. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a mágneses tér forrása egy áramhurok (áramjárta zárt vezeték).



5.1. ábra

Emlékezzünk vissza a villamos és mágneses tér definíciójára.

1. A térrészben akkor van villamos tér, ha a megfigyelőhöz viszonyított mozdulatlan Q töltésre $\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}$ alakú erő hat.
2. A térrészben a mágneses tér akkor igazolható, ha a megfigyelőhöz (esetleg a tér forrásához is) viszonyított $\vec{v}$ sebességgel mozgó Q töltésre $\vec{F}_m = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ alakú erő hat.

Hogyan lehet meghatározni, hogy létezik-e villamos vagy mágneses tér?

A P_1 megfigyelő (5.1.ábra) aki az áramhurokhoz kötött koordináta-rendszerhez viszonyítva nyugalomban van, azt fogja megállapítani, hogy a P_2 megfigyelő koordináta-rendszeréhez rögzített Q töltésre $\vec{F}_m = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ alakú mágneses erő hat, hiszen látja, hogy az $\vec{v}$ sebességgel mozog a (megfigyelőhöz viszonyítva nyugalomban levő – általános esetben időben változó) mágneses térben.

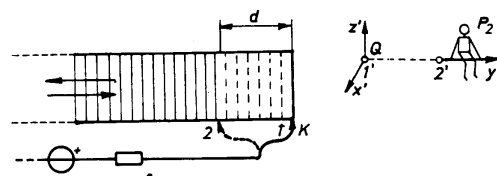
Tételezzük fel, hogy a P_2 megfigyelő (5.1.ábra), akihez viszonyítva a Q töltés mozdulatlan, műszerekkel pontosan mérni tudja a mágneses indukció vektorát és a villamos térerősséget. Tételezzük fel továbbá, hogy a mágneses tér egyetlen forrása a 5.1. ábrán látható áramhurok, de erről a P_2 megfigyelőnek nincs tudomása (vagyis, hogy ő nem látja az xyz koordináta-rendszert).

Mit fognak észlelni a P_2 megfigyelő műszerei, és hogyan fogja ő azokat értelmezni? Az egyik műszer regisztrálja az időben változó mágneses teret. A másik műszer az $\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}$ alakú erőt igazolja (amelyet a P_1 megfigyelő az $\vec{F}_m = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ egyenlettel magyaráz), amely a

P_2 megfigyelőhöz viszonyítva nyugalomban levő Q töltésre hat. Ezek szerint a P_2 megfigyelő azt fogja megállapítani, hogy az $\tilde{o}$ ($x'y'z'$) koordináta-rendszeréhez viszonyítva létezik időben változó villamos tér is. Tehát a P_2 megfigyelő arra a következtetésre jut, hogy időben változó villamos és mágneses térben tartózkodik, habár a P_1 megfigyelő, akihez viszonyítva a mágneses tér forrása nyugalomban van, csak időben állandó mágneses teret észlel.

Az ilyen következtetést általánosítani lehet: függetlenül attól, hogy mi váltja ki, az időben változó mágneses teret mindig időben változó villamos tér kíséri.

Figyeljünk meg egy nagyon hosszú, sűrűn tekercselt, nagy menetszámú szolenoidot. Tételezzük fel, hogy a mozgatható, csúszó érintkezővel (K) ki- és bekapcsolhatjuk az áramot a szolenoid végén, ahogy az a 5.2. ábrán látható.



5.2. ábra

Képzeljünk el, hogy az egész szolenoid jobbra-balra mozog d hosszúságyira, a K érintkező pedig az 1-es helyzetben áll. A Q töltésre mágneses erő fog hatni, mert relatív mozgás létezik a Q töltés és a mágneses tér forrása között. A P_2 megfigyelő ezt az erőt úgy fogja értelmezni, mint egy villamos tér hatását, mivel az $\tilde{o}$ koordináta-rendszerében a töltés mozdulatlan.

Nyilvánvaló, hogy a szolenoid jobbra-balra való mozgatását helyettesíthetjük a K érintkező jobbra-balra való mozgásával. A két művelet értelme azonban egészen más.

Az első esetben a megfigyelő és a mágneses tér forrása közötti relatív mozgásról, a második esetben viszont a megfigyelőhöz (azaz a Q töltéshez) viszonyítva mozdulatlan vezető(k)ben folyó időben változó áramokról (konkrétan, a K érintkezővel ki- és bekapcsolt áramokról) van szó.

Következtetés:

Az időben változó mágneses teret mindig időben változó villamos tér kíséri. Az elektromos tér, amely megfelel a mágneses tér változásainak, nem függ a mágneses tér változásának okától: a változás következménye lehet a megfigyelő és a mágneses tér forrása közötti relatív mozgásnak, vagy a megfigyelőhöz viszonyítva mozdulatlan vezető(k)ben folyó áramerősség változásának (a mágneses tér gerjesztőárama változásának).

Hangsúlyozzuk ki tehát, hogy a villamos térnek két előidézője van. Az egyik a mozdulatlan elektromos töltések, amelyek elektrosztatikus teret $-\vec{E}_{st}$ eredményeznek. A másik előidézője az időben változó mágneses tér, amely az áramhurok (állandó mágnes) a megfigyelőhöz viszonyított mozgásaként, vagy a megfigyelőhöz viszonyított mozdulatlan hurokban folyó áramerősség változásaként indukált elektromos teret $-\vec{E}_{ind}$ hoz létre.

Az össz (totális) térerősség tehát a következő módon írható fel:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind} \quad (\text{a tér sztatikus és indukált komponenseinek összege})$$

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{indukált elektromos tér, amely a megfigyelő és a mágneses tér forrása közötti relatív mozgás eredménye})$$

A mozdulatlan, változó áramerősségű áramhurok közelében jelentkező indukált villamos tér számítására szolgáló kifejezést kísérleti úton határozták meg:

$$d\vec{E}_{ind} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{di(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$$

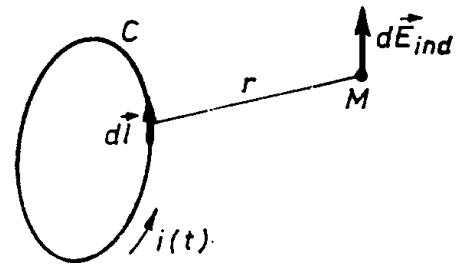
(az indukált villamos tér erőssége a $d\vec{l}$ áramelem közelében)

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_c \frac{di(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$$

(az $\vec{E}_{ind}$ vektor erőssége mozdulatlan vezetőhurok közelében)

A $d\vec{E}_{ind}$ vektor tehát párhuzamos a $d\vec{l}$ - el, tényleges irányítása (nyílazása) pedig az áram első deriváltjától függ az adott pillanatban (5.3.ábra).

Az indukált elektromos tér egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy a $d\vec{E}_{ind}$ térerősség vektorának vonalintegrálja zárt vonal mentén általános esetben különbözik nullától. Ez azt jelenti, hogy az ilyen térben elhelyezkedő vezetőhurokban elektromos áram jelentkezik (indukálódik). Az $\vec{E}_{ind}$ vektor vonalintegrálját zárt vezetőhurok mentén **indukált elektromos erőnek** (e.m.e.) nevezzük.



5.3. ábra

5.1.2. AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ FARADAY-TÖRVÉNYE

Figyeljünk meg egy zárt C vezetőhurokot, illetve a vezetőhurok egy $d\vec{l}$ elemét (5.4.ábra), amely időben állandó mágneses térben, a mechanikai erők hatására tetszőleges módon mozog és deformálódik. A hurok egyes részei ($d\vec{l}$ elemei) párhuzamosan mozduknak el egy nagyon rövid idő alatt, mégpedig egy kis $d\vec{s} = \vec{v}dt$ utat megtéve.

Ilyenkor a $d\vec{l}$ hurokelemenben indukálódó e.m.e. értéke:

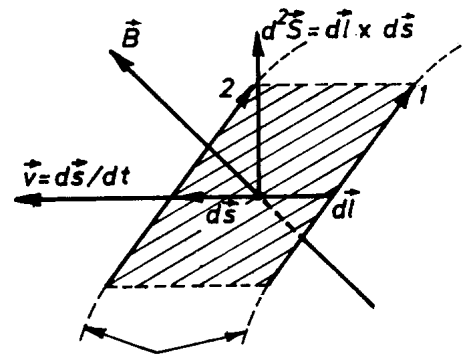
$$de = \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{dt} (d\vec{s} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

A vektorok vegyes szorzatának van egy számunkra most nagyon kedvező tulajdonsága, ti. a vektorok balról jobbra való "eltolásával" a vegyes vektorszorzat eredménye nem változik, amit így írhatunk fel:

$$(d\vec{s} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (d\vec{l} \times d\vec{s}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times d\vec{l}) \cdot d\vec{s}$$

Nos ennek felhasználásával írhatjuk az áramelemtől eredő indukált feszültségre:

$$de = \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times d\vec{s}) = \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot d^2 \vec{s}$$



a C hurok része

5.4. ábra

ahol a $\vec{B} \cdot d^2 \vec{s}$ kifejezés nem más, mint a $d\vec{l}$ hurokelem által dt idő alatt "áttörölt" felületen (a 5.4. ábrán a szóban forgó felület árnyékolt) keresztüli fluxus. Az össz e.m.e. értéke a zárt vezetőhurok mentén a hurokelemekben indukált (elemi) e.m.e.-k összegeként kapható meg:

$$e = \frac{1}{dt} \sum_c \vec{B} \cdot d^2 \vec{s} = \frac{d\phi}{dt}.$$

Az előző kifejezésben csak a fluxusváltozás szerepel, a változás oka nem. Az árnyékolt felületen keresztüli fluxus értéke úgy számítható, mint a zárt vezetőhurokra kifeszített felületen keresztüli fluxuskülönbség az 1 és a 2 helyzetben:

$$d\phi_{\text{az áttörölt felületen}} = \phi_1 - \phi_2$$

Ha most a C zárt vezetőn keresztüli fluxusnövekményt írjuk föl, ami a végállapotban (2 helyzet) mért fluxus és a kezdőállapotban (1 helyzet) mért fluxus különbsége:

$$d\phi_{\text{fluxusnövekmény a C hurkon keresztül}} = \phi_2 - \phi_1,$$

akkor az előző kifejezésben az “áttörölt” felületen keresztüli fluxust helyettesíthetjük a C zárt vezetőhurkon keresztüli fluxusnövekménnyel:

$$d\phi_{\text{az áttörölt felületen}} = -d\phi_{\text{fluxusnövekmény a C hurkon keresztül}}$$

Ezzel az indukált e.m.e. értékére vonatkozó kifejezés a következő alakot ölti:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ahol a $d\phi$ a zárt vezetőhurkon keresztüli fluxusnövekményt jelenti, melynek előidézője bármi lehet. Ez az elektromágneses indukció Faraday törvénye

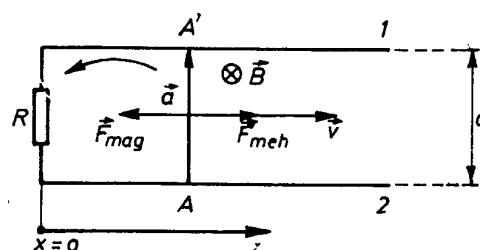
A dinamikus (mozgási) elektromágneses indukció az időben állandó mágneses tér forrása és a zárt vezetőkeret közötti relatív mozgásnak az eredménye.

A sztatikus (statikus, nyugalmi) elektromágneses indukció esete pedig akkor áll fenn, amikor az indukált **e.m.e.-t** egy mozdulatlan vezetőhurokban a másik mozdulatlan vezetőkeretben folyó időben változó áram idézi elő.

5.1.2.1. Az elektromágneses indukció iskolapéldái

5.1. Példa: Az elektromágneses indukción alapuló, időben állandó feszültséget (e.m.e-t) adó generátor működési elve.

Figyeljük meg az AA' vezetőt (5.5. ábra), amely súrlódás nélkül csúszhat két párhuzamos vezetőkön (a 5.5. ábrán 1 és 2 a jelük), amelyek a távolságra vannak egymástól. A vezetők az általuk meghatározott síkra merőleges indukcióvonalakkal rendelkező homogén mágneses térben helyezkednek el.



5.5. ábra

Mivel az AA' vezető homogén mágneses térben végez translációs mozgást, az indukált e.m.e. minden $d\vec{l}$ elemére $(\vec{v} \times \vec{B})$ értékű, így az össz indukált e.m.e. értéke az a hosszúságú vezető mentén az indukált e.m.e értéke:

$$e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{a}.$$

A képről a vektorok közötti szögek alapján leszűrhető, hogy:

$$e = v \cdot B \cdot a.$$

Ennek az e.m.e.-nek a következménye a következőképpen számítható áram:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{v \cdot B \cdot a}{R},$$

illetve a Joule féle veszteségek (a melegedés) teljesítménye:

$$P = R \cdot I^2 = \frac{v^2 \cdot B^2 \cdot a^2}{R}.$$

Mivel az AA' vezetőben

$$I = \frac{v \cdot B \cdot a}{R}$$

áram folyik, a vezeték mentén a következő mágneses erő jelentkezik:

$$d\vec{F}_{\text{mag}} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = I \cdot \vec{a} \times \vec{B} = I \cdot a \cdot B$$

Amennyiben az AA' vezető állandó sebességgel mozog, a mágneses és a mechanikus erők egyforma intenzitásúak:

$$F_{\text{mech}} = F_{\text{mag}} = I \cdot a \cdot B.$$

A mechanikus erők munkája (behelyettesítve az áramerősségre a fent kapott értéket):

$$dA_{\text{mech.erők}} = F_{\text{mech.}} \cdot v \cdot dt = I \cdot a \cdot B \cdot v \cdot dt = \frac{v^2 \cdot B^2 \cdot a^2}{R} \cdot dt,$$

a mechanikus erők teljesítménye pedig:

$$P_{\text{mech.erők}} = F_{\text{mech.erők}} \cdot v = \frac{v^2 \cdot B^2 \cdot a^2}{R}.$$

Mint látható, ez az érték megegyezik a Joule veszteségek teljesítményével, amit az energiamegmaradás törvénye alapján el is vártunk.

A $P_{\text{mech.erők}} = F_{\text{mech.erők}} \cdot v$ kifejezésből kifejezhető az AA' vezető sebessége a stacionáris (állandósult) állapotban:

$$v = \frac{P_{\text{mech.sile}}}{F_{\text{mech.sile}}} = \frac{\frac{v^2 \cdot B^2 \cdot a^2}{R}}{I \cdot a \cdot B},$$

amiből aztán az egyszerűsítés után

$$v = \frac{I \cdot R}{B \cdot a}.$$

5.2 Példa: Az elektromágneses indukción alapuló villamos motor működési elve.

Tételezzük fel, hogy a motor üresjáratban van ($G=0$), és kezdetben az AA' mozdulatlan. A P kapcsoló bezárásával (5.6.ábra) az áramerősség gyorsan nagy értéket ér el (az R ellenállás értéke határozza meg). Az AA' -re nagy mágneses erő hat, minek következtében az mozogni kezd. Mivel a vezető mágneses térben mozog, a forrás **e.m.e.**-vel ellenkező irányú (irányítású) **e.m.e.** indukálódik benne. Az AA' vezető addig gyorsul (a súrlódást elhanyagolva) amíg az indukált **e.m.e.** egyforma intenzitású nem lesz a forrás **e.m.e.** -jével, és ekkor a körben megszűnik az áram. Ebből a feltételből kiindulva az AA' vezető sebessége:

$$E = a \cdot v \cdot B,$$

amiből tehát

$$v = \frac{E}{a \cdot B} \quad (I = 0).$$

Ha $G \neq 0$, a vezető sebessége nyilvánvalóan kisebb lesz a fent felírt értéktől. Az AA' vezetőn keresztül áramnak kell folyni, hogy a vezetőre mágneses erő hasson, amely a súlyt fölfelé emeli. Az áram intenzitását, a súly felfelé irányuló egyenletes mozgásakor, abból a feltételtől határozzuk meg, hogy a súly (G) és a mágneses erő egyforma intenzitású:

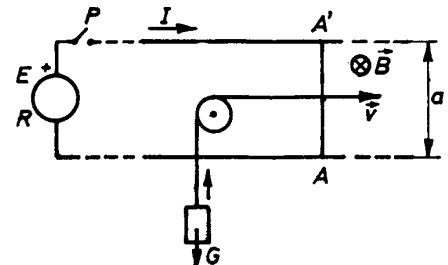
$$G = F_{\text{mag}} = I \cdot a \cdot B,$$

amiből kifejezve az áramerősséget:

$$I = \frac{G}{a \cdot B}.$$

Másrészt a körben folyó áramot a generátor kapocsfeszültsége (e.m.e.-je) és az AA' vezetőn létrejött indukált e.m.e. (mely ellentétes irányítású v. nyílazású a generátor e.m.e.-jéhez viszonyítva) közösen határozzák meg:

$$I = \frac{E - e}{R} = \frac{E - a \cdot v \cdot B}{R}.$$



5.6. ábra

Ebből és az előző kifejezésből pedig az AA' vezető sebessége egyszerűen számítható ki:

$$v = \frac{E - R \cdot I}{a \cdot B} = \frac{E - \frac{R \cdot G}{a \cdot B}}{a \cdot B}.$$

Ha a G súly túl nehéz, akkor a mágneses erő nem fogja emelni azt, hanem a G súly fogja elmozdítani az AA' vezetőt a mágneses erő hatásával ellentétes irányban. A rendszer ilyenkor generátorként viselkedik, miközben a súly potenciális energiája a villamos- és mágneses tér közvetítésével a vezetékben hővé alakul.

5.3. Példa: Egyenáramú generátor, Faraday-féle tárcsa (korong)

A tárcsa (kerék) egyenletesen ω szögsebességgel forog a homogén, $\vec{B}$ indukciójú mágneses térben (5.7.ábra). A kerületi sebesség és a szögsebesség közötti összefüggés:

$$v = r \cdot \omega,$$

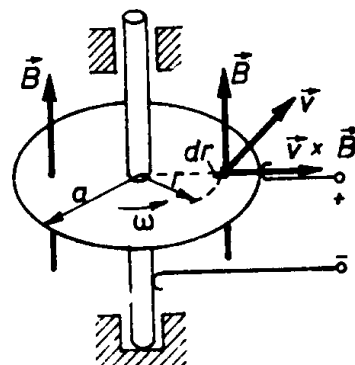
az elemi e.m.e.-t pedig a következő összefüggés szerint számíthatjuk ki legegyszerűbben:

$$de = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

$$de = \omega \cdot r \cdot B \cdot dr$$

$$e = \omega \cdot B \cdot \int_0^a r \cdot dr = \frac{1}{2} \omega \cdot B \cdot a^2$$

Ha $\omega = 2\pi \cdot 100$ rad/s, $B = 1$ T, $a = 5$ cm, akkor az elektromotoros erő, $e = 0,785$ V. Az adott értékek a lehető legnagyobbak, amit a gyakorlatban el lehet érni. A megvalósítható **e.m.e** a Faraday-féle korongnál, mint az értékből is látható, nagyon kicsi.



5.7. ábra

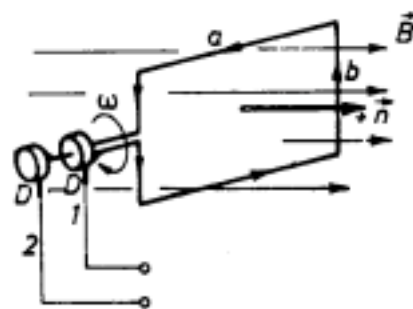
5.4. Példa: Az sinusgörbe szerint váltakozó feszültségű generátor működési elve.

A generátor egyszerűsített rajza a 5.8. ábrán látható. Ha a $t=0$ pillanatnak az ábrán látható helyzetet választjuk (a $\vec{B}$ vektor megegyező irányú és irányítású a keretre meghatározott pozitív egységvektorral), akkor az ω szögsebességgel forgó kereten keresztül a fluxus:

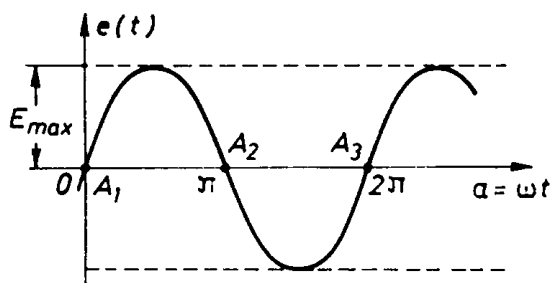
$$\phi(t) = B \cdot a \cdot b \cdot \cos \omega \cdot t.$$

Az indukált elektromotoros erő a keretben pedig:

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega \cdot B \cdot a \cdot b \cdot \sin \omega t = E_{\max} \cdot \sin \omega t$$



5.8. ábra



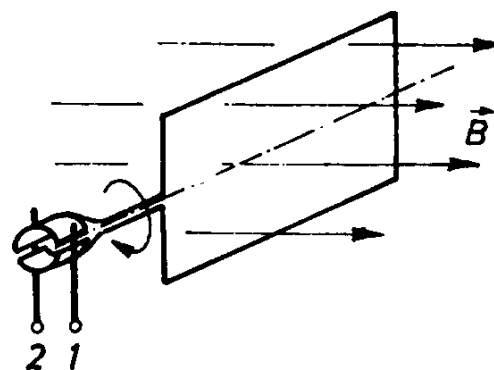
5.9. ábra

A gyakorlatban a sinusgörbe (5.9. ábra) szerint változó feszültségű generátorokat (5.8.ábra) leginkább úgy készítik, hogy a tekercs, amelyben az áram indukálódik (esetünkben a keret) mozdulatlan, és a rajta történő fluxusváltozást megfelelő mágnes vagy elektromágnes mozgatásával érik el. Így a csúszógyűrűk (ezek a generátor legérzékenyebb, legsérülékenyebb részei) használata

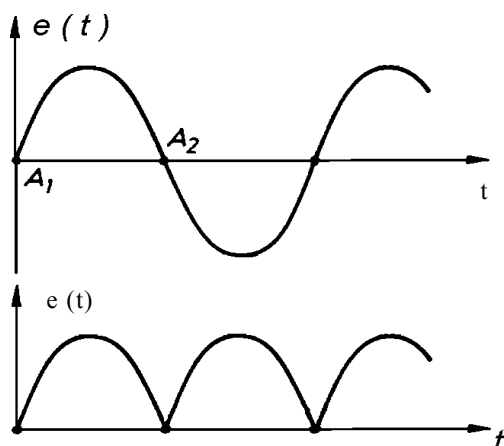
feleslegessé válik.

5.5. Példa: Egyenáramú (pulzáló) generátor.

Az 5.4. példában szereplő generátor kis, de lényegbeli átalakítással dolgozhat egyenáramú generátorként is. Ha az 5.8. ábrán a két különálló csúszógyűrű helyett csak egyet (kettévágva, egymástól elszigetelt félgyűrűként) alkalmazunk, akkor váltakozó feszültségű generátor helyett egyenáramú generátorunk lesz (5.10. ábra).



5.10. ábra



5.11. ábra

Az 5.11. ábra felső részén a váltakozó feszültségű generátor kapcsolófeszültség-görbéje (e.m.e.-je) látható. A példánkban (5.5. példa) szereplő egyenáramú (egyenfeszültségű) generátor feszültség-görbéje (az alsó görbe az 5.11. ábrán) a felső görbe segítségével egyszerűen magyarázható. Abban a pillanatban, amely az A_2 pontnak felel

meg a felső görbén, amikor a keretben az indukált **e.m.e.** irányítását (előjelét) váltja (váltaná), a félgyűrűk keféit váltanak, és az **e.m.e.** az 1 és a 2 ponthoz (keféhez) viszonyítva nem változtatja irányítását, illetőleg előjelét.

5.6. Példa: A többmenetű tekercsben indukálódó e.m.e.

A gyakorlatban nem egyszerű keretek, hanem kisebb vagy nagyobb menetszámmal rendelkező tekercsek mozognak mágneses és villamos térben. Nézzük, mekkora **e.m.e.** fog indukálódni egy kisebb, N menetszámú tekercsben, ha az változó mágneses és elektromos térben van!

Mivel a tekercs néhány sűrűn (szorosan) egymáshoz illesztett menetből (vezetőhurokból) áll, az indukált villamos (elektromos) tér egyforma a tekercs minden részében. Ezért az indukált elektromos térerősség vektorának vonalintegrálja az össz N menet mentén megközelítőleg N -szerese az egy menet mentén számolt indukált tér vonalintegráljának.

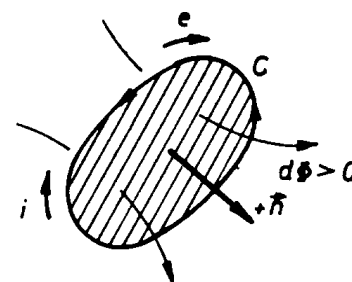
5.1.3. LENZ TÖRVÉNYE

Figyeljük meg a vezetőlurkot az időben változó mágneses (és elektromos) térben (5.12. ábra). A tér változását előidézheti a mágneses tér forrásának mozgása a vezetőlurkhoz viszonyítva, vagy valamilyen mozdulatlan vezetőben folyó időben változó áram.

Mivel

$$e = - \frac{d\phi(t)}{dt}$$

a $d\phi > 0$ -ra $e < 0$ lesz.



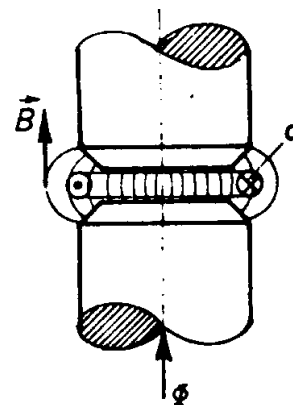
5.12. ábra

Az 5.12. ábrán látható, hogy a vezetőhurokban indukált áramtól (iránya, mely megegyezik az e.m.e. irányával, lásd az ábrát) eredő mágneses fluxus ellenkező irányú (nyílazású) a külső fluxus növekedéséhez viszonyítva.

Természetesen $i(t) \neq \frac{e(t)}{R}$, viszont az indukált áram többnyire az indukált e.m.e. irányában folyik. A vezetőhurokban indukált áram tehát mindig olyan irányú, hogy igyekszik megakadályozni azt a fluxusváltozást amely őt létrehozta. Ezt az indukált áram irányának meghatározására vonatkozó szabályt Lenz törvényének nevezzük.

5.7. Példa: A betatron működési elve.

A betatron elektronok felgyorsítására szolgáló berendezés. Az elektronok végsebessége megközelíti a fény terjedési sebességét a vákuumban. A betatron működési elve az indukált elektromos térre alapul, amelyet időben változó mágneses tér kísér. Koaxiálisan az elektromágnes tengelyével, a pólusok közötti rés peremén légmentes, tórusz alakú üvegcsövet (toroidcsövet) helyeznek el (5.13. ábra). Tételezzük fel, hogy $0 < t < T$ időintervallumban az elektromágnes mágneses fluxusa folyamatosan növekszik. Ekkor az üvegcsőben indukált elektromos tér jelentkezik. A gyorsítandó elektronok az indukált villamos (elektromos) tér hatására gyorsulnak az üvegcsőben, de mivel egyidejűleg az elektromágnes mágneses terében is mozognak, az út, amit leírnak kör alakú lesz.



5.13. ábra

Ha a toroidcsőben elektronok vannak, a 5.13. ábrán pedig a fluxus a megjelölt irányban növekszik, akkor az elektronok az ábrán jelölt irányban mozogva gyorsulnak fel (az elektronok mozgásiránya a fluxusnövekedés irányával a jobbszavar szabály szerint kötött ill. függ össze). Ez a következtetés Lenz törvényéből ered. A mozgó elektronokra ható mágnes erő ($\vec{F}_m = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$) a mágnes tengelye felé irányul, így az elektronok megközelítőleg körpályát írnak le és a fluxus növekedésével gyorsulnak.

5.2. A potenciál és a feszültség az időben változó elektromos és mágneses térben

Az időben állandó villamos térben (elektrosztatikus, örvénymentes és forrásos, potenciálos tér) a potenciál és a feszültség fogalma megegyezik. Más a helyzet azonban az időben változó villamos (forrásmentes, örvényes tér) és mágneses tér esetében, itt ugyanis a potenciál és a feszültség fogalma különbözik egymástól.

Az időben változó elektromos és mágneses térben a két pont közötti feszültséget, mint az elektromos térerősség vektorának ($\vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind}$) két pont közötti vonalintegrálját definiálják:

$$U_{AB} = \int_A^B (\vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind}) \cdot d\vec{l}$$

Könnyen észrevehető a kifejezésből, hogy a feszültség függ az A és B pont közötti úttól (az integrálás útjától)!

Bizonyítás:

Az össz térerősség:

$$\vec{E} = \vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind},$$

a feszültség pedig:

$$\begin{aligned}
 (U_{AB})_{a \text{ keresztül}} - (U_{AB})_{b \text{ keresztül}} &= \int_{Aa}^B (\vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind}) \cdot d\vec{l} - \int_{Ab}^B (\vec{E}_{st} + \vec{E}_{ind}) \cdot d\vec{l} = \\
 &= \int_{Aa}^B \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} + \int_{Bb}^A \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_{S \text{ keresztül}}}{dt} \quad (1)
 \end{aligned}$$

A voltméterek a két pont közötti feszültséget az (1) reláció szerint mérik. Az időben változó áramú villamos hálózatok két adott pontja közötti feszültség (amelyekre a voltmétert kötöttük) elméletileg függ a voltmétert a hálózat pontjaihoz kapcsoló vezeték alakjától is. Ez a hatás folytonosan létezik, de nagysága általában elhanyagolható. Amennyiben a hatás jelentős, úgy a két pont közötti feszültséget nem csak a számértékével, hanem a voltmétert a hálózat pontjaihoz kapcsoló vezeték geometriájával is jellemeznünk kell.

5.3.Örvényáramok

A vezetőben keletkező indukált áramokat (amelyeket az indukált elektromos tér hoz létre) *örvényáramoknak* nevezünk. A vezetőkben az időben változó elektromos és mágneses tereknek elkerülhetetlen kísérője az örvényáramok. Az örvényáramok Joule-veszteségekkel járnak és mint minden áram, időben változó (szekundáris) elektromos és mágneses teret hoznak létre. Ezek a hatások legtöbbször károsak, ezért különböző módon csökkentik őket. Vannak azonban esetek, amikor az örvényáramokat felhasználás céljából tudatosan gerjesztik.

A ferromágneses anyagok elég jó vezetők, és bennük nagy intenzitású örvényáramok indukálódnak. A Joule-veszteségek mellett az örvényáramok (a szekundáris villamos és mágneses tér létrejöttének következtében) eltorzítják az eredeti teret is (a fluxus eloszlása nem lesz egyenletes a vasmag keresztmetszetén).

Az előző bekezdésben leírt nem kívánatos jelenségek csökkentése érdekében (mivel teljességgel kizárni őket lehetetlen) lemezelik a vastestet (egymástól elszigetelt lemezekből készítik a vasmagot), vagy por-vasmag alakjában készítik.

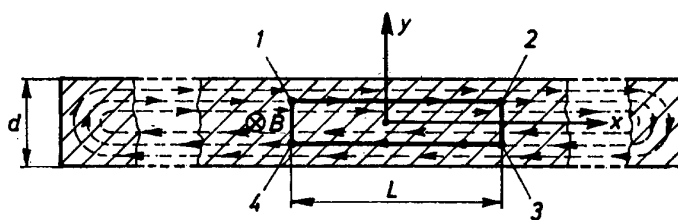
A veszteségek nagyságát megközelítőleg a következő módon lehet kiszámolni. Figyeljük meg a lemezelt vastest egy lemezét, amely olyan vékony, hogy a keresztmetszetén a $\vec{B}$ vektor intenzitása gyakorlatilag állandónak tekinthető. Az indukció változzon a cosinus függvény szerint:

$$B(t) = B_m \cdot \cos \omega t$$

A szimmetriának köszönhetően felírható, hogy:

$$J(-y, t) = J(y, t).$$

Az indukált elektromos (villamos) térnek csak x komponense van az 5.14. ábrán megjelölt zárt görbére (a téglalap alakú görbe csúcsainak jelölése: 1234), értéke pedig:



5.14. ábra

$$\frac{J}{\sigma}.$$

Faraday törvénye szerint:

$$\oint_{12341} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = 2L \cdot \frac{J(y, t)}{\sigma} = - \frac{d}{dt} (2L \cdot y \cdot B_m \cdot \cos \omega t),$$

innen pedig:

$$J(y, t) = y \cdot \sigma \cdot \omega \cdot B_m \cdot \sin \omega t.$$

A Joule-veszteségek teljesítménye a lemez egy pontjában (vagyis a Joule veszteségek térfogatsűrűsége):

$$\frac{dP_J}{dV} = \frac{J^2}{\sigma} = y^2 \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot B_m^2 \cdot \sin \omega t$$

$$P_J = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{dP_J}{dV} \cdot S \cdot dy = S \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot B_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y^2 \cdot dy$$

$$P_J = \frac{2}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 \cdot S \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot B_m^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

a $(\sin^2 \omega t)$ – függvény középvértéke egy periódusnyi idő alatt : $\frac{1}{2}$.

Így a Joule-veszteségek közép- vagy átlagos értéke:

$$(P_J)_{\text{közép}} = \frac{1}{24} \cdot S \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot d^3 \cdot B_m^2 = \frac{1}{24} \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot d^2 \cdot B_m^2 \cdot V_{\text{lemez}}.$$

Ezek szerint az örvényáramoktól eredő átlagos Joule-veszteségek térfogatsűrűsége:

$$\frac{(P_J)_{\text{közép}}}{V_{\text{lemez}}} = \frac{1}{24} \cdot \sigma \cdot \omega^2 \cdot d^2 \cdot B_m^2.$$

A fajlagos vezetőképesség csökkentése céljából szilíciumötvöztést alkalmaznak. A lemez vastagsága a gyakorlatban a frekvenciától függ. Az $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$ frekvenciánál a lemezek vastagsága 0,35 mm és 0,5 mm.

Nagyfrekvenciás tekercsek vasmagjai (a rádiótechnikában) nem lemezekből, hanem préselt ferromágnes porból (por-vasmag) készülnek, melyek részecskéi egymástól el vannak szigetelve. Manapság a por-vasmagok helyett a vasmagok előállítására *ferriteket* (nagy a fajlagos ellenállásuk) használnak. A ferriteket nem szükséges lemezelní, sem por-vasmag alakban készíteni.

Az örvényáramokat az indukciós kályhákban használják, ahol nagy intenzitású, időben változó mágneses tér segítségével nagy sűrűségű örvényáramokat állítanak elő, így a fémdarabok felmelegszenek, és ilyen módon olvasztani lehet őket.

5.4.A szkineffektus és a közelhatás elve

Az időben állandó áram eloszlása az egyenes vezető állandó keresztmetszetén egyenletes. A váltóáramnál (sinusosan változó áram esetében) az indukált elektromos tér megjelenése miatt az áram eloszlása nem egyenletes a vezető keresztmetszetén. Ez a hatás annál kifejezettebb, minél vastagabb a vezető és nagyobb a frekvencia. Nagy frekvenciáknál véges értékű áram úgyszólván csak a vezető felszínén folyik. Ezt a jelenséget *szkineffektusnak* nevezzük. A szkineffektus hatására a vezeték ellenállása megnő az egyenáramnál mért ellenálláshoz képest, hiszen az áram nem az egész rendelkezésre álló keresztmetszeten, hanem annak csak egy töredékén folyik keresztül.

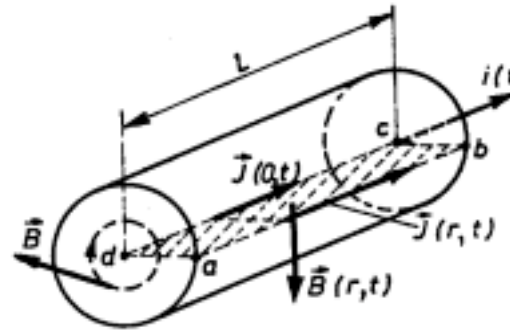
Ha két egymáshoz közel elhelyezett vezetők van, a bennük levő áram eloszlása nem olyan, mint amikor a vezetők távol vannak egymástól. Ezt a jelenséget *közelségi effektusnak* nevezzük (és a szkineffektushoz hasonlóan az elektromágneses indukció eredménye).

A jelenségek egzakt matematikai levezetése túlságosan bonyolult, de létezésük könnyen belátható a következő okfejtés alapján. Figyeljünk meg egy kör keresztmetszetű váltóáram jártá vezetőt. Legyenek a $\vec{J}(0,t)$ és a $\vec{J}(r,t)$ a vezető tengelyén, illetve a vezető tengelyétől r távolságra levő pontban mért áramsűrűség-vektorok (5.15. ábra). A vezető fajlagos vezetését

jelöljük σ -val. Ha a $\phi(r,t)$ az **abcd** felületre felírt fluxusérték, akkor a Faraday-törvény szerint:

$$\left[\frac{J(r,t)}{\sigma} - \frac{J(o,t)}{\sigma} \right] \cdot L = - \frac{d\phi(r,t)}{dt}.$$

Mivel az $|\phi(r,t)|$ növekszik az r -el, az előző kifejezésből az következik, hogy az $|J(r,t)|$ is növekszik az r -el, tehát az áramsűrűség vektorának intenzitása is növekszik a vezető tengelyétől a felszín felé. A szkineffektus annál kifejezettebb, minél nagyobb a vezető fajlagos vezetése (vezetőképessége), a σ és a permeabilitása, a μ (a fluxus arányos a permeabilitással). Az $f = 50$ Hz -nél a rézhuzal szkineffektusa csak akkor észlelhető, ha a keresztmetszet átmérője nagyobb 10 mm-nél, a vashuzalnál pedig (melynek ugyan kisebb a fajlagos vezetőképessége, de sokkal nagyobb a permeabilitása) a hatás már az 1-2 mm átmérőjű keresztmetszetnél is észlelhető.



5.15. ábra

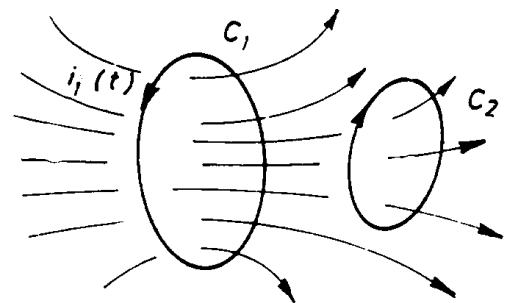
5.5.A kölcsönös indukció és az önindukció

5.5.1. A KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓ-EGYÜTTTHATÓ

Figyeljünk meg a térrészben két vékony, mozdulatlan vezetőhurokot (jelölésük legyen C_1 és C_2 - 2.16.ábra). Az első körben folyó $i_1(t)$ áram változó mágneses és elektromos teret idéz elő és ennek következtében a C_2 -ben **e.m.e.** indukálódik. Az 5.16. ábrán lévő két hurokra mondjuk, hogy mágnesesen csatoltak, noha a csatolás az indukált elektromos tér következménye.

A C_2 -ben indukálódó e.m.e. értéke számítható úgy is, mint:

$$e_{12}(t) = \oint_{C_2} (E_{ind})_{i_1} \cdot dl_2,$$



5.16. ábra

de a legtöbb esetben sokkal egyszerűbb a $-\frac{d\phi_{12}}{dt}$ kifejezés.

A C_2 -ben indukálódó feszültséget kifejezhetjük az $i_1(t)$ és a vezetőhurok alakjának és egymáshoz viszonyított helyzetének függvényében is. A Biot-Savart törvény szerint az indukcióvektor arányos az áram pillanatnyi értékével ($B \sim i_1(t)$), amiből az következik, hogy a C_2 vezetőhurokon keresztüli fluxus, tehát a $\phi_{12}(t)$ is arányos az $i_1(t)$ pillanatnyi értékével (természetesen ez csak akkor igaz, amennyiben a megfigyelt térrészben nincsenek ferromágneses anyagok):

$$\phi_{12}(t) = L_{12} \cdot i_1(t) \quad (1)$$

Az L_{12} arányossági tényező, melyet a két hurok *kölcsönös induktivitásának* (kölcsönös indukció-együtthatójának) nevezünk, és amely a C_1 és C_2 hurok alakjától, kölcsönös helyzetétől függ. Az (1) képlet érvényes függetlenül az $i_1(t)$ áram időbeli változásától, így:

$$\phi_{12} = L_{12} \cdot I_1,$$

vagyis:

$$e_{12} = -\frac{d\phi_{12}(t)}{dt} = -L_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt}.$$

Az L_{12} meghatározásához a következő módon kell hozzáállni:

- 1) tételezzük fel a C_1 hurokban az I_1 áramot,
- 2) határozzuk meg (ha tudjuk) a $\vec{B}$ -t (amelyet az I_1 hoz létre) egy a C_2 vezetőhurokra kifeszített felület pontjaiban,
- 3) számítsuk ki a ϕ_{12} fluxust, ahonnan: $L_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_1}$

A kölcsönös indukció-együttható mértékegysége:

$$L_{12} \left[\frac{Wb}{A} \right] [H] [mH, \mu H, nH].$$

Az L_{12} kölcsönös indukció-együttható lehet pozitív vagy negatív. Az előjel attól függ, hogy az egyik vezetőhurokban folyó áram pozitív vagy negatív fluxust eredményez-e a másik vezetőhurokban. Az előjelnek azonban nincs fizikai jelentősége, mivel a C_1 és C_2 hurkok kiválasztott referenciáiránya teljesen tetszőleges.

Teljesen fordítva is elképzelhető az alapállás: a C_2 -ben $i_2(t)$ áram folyik, a C_1 -ben pedig nincs áram. Ekkor a C_1 -ben indukált fluxus:

$$\phi_{21} = L_{21} \cdot I_2,$$

illetve feszültség:

$$e_{21}(t) = -L_{21} \cdot \frac{di_2(t)}{dt}.$$

Könnyen bebizonyítható, hogy $L_{12} = L_{21}$, ami fontos következtetés.

5.5.2. AZ ÖNINDUKCIÓ-EGYÜTTHATÓ

A két vezetőhurok esetén az egyik hurokban indukált **e.m.e.** (feszültség) a másik hurokban folyó, időben változó áramtól ered. Az indukált **e.m.e.** a térrészben az időben változó indukált villamos térnek köszönve jelentkezik, melynek vonalintegrálja zárt görbe mentén nem nulla. Ez az elektromos tér azonban jelen van abban a hurokban is, amelyben az áram folyik, azaz elektromágneses indukció és annak következménye jelentkezik az egyedülálló vezetőhurokban is, amelyben időben változó áram mutatható ki. Ezt a jelenséget *önindukciónak* nevezzük. A magányos vezetőhurokban indukálódó feszültség (**e.m.e.**):

$$e_{\text{önind}}(t) = -\frac{d\phi_{\text{saját}}(t)}{dt}.$$

Ha a vezetőhurok lineáris közegben van (nincs ferromágneses anyag a térrészben), a fluxus arányos az $i(t)$ áram erősséggel:

$$\phi(t) = L \cdot i(t),$$

illetve:

$$\phi = L \cdot I$$

vagyis az **e.m.e.**:

$$e(t) = -L \frac{di(t)}{dt}.$$

Két mágnesesen csatolt hurokra mindig érvényes, hogy:

$$L_{12}^2 \leq L_1 \cdot L_2 ,$$

amiből:

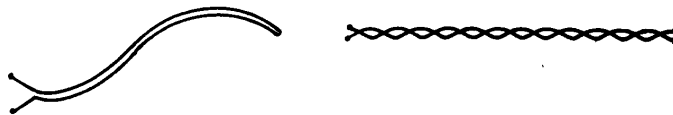
$$|L_{12}| = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} ,$$

másképp a $k \leq 1$ (k - a csatolás koeficiense, együtthatója).

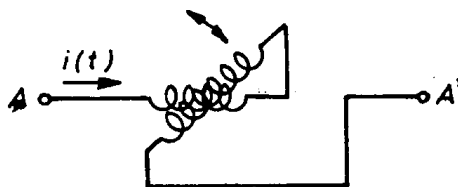
Minden tekercs rendelkezik önindukcióval. Néha a szükség megkívánja, hogy ezt az induktivitást a lehető legkisebb értékre csökkentsük. Ez elérhető *bifiláris tekercssel* (5.17. ábra bal oldali rajz) vagy a *sodrott vezetékkel* (5.17. ábra jobb oldali rajz).

Néha olyan elem szükséges, melynek az induktivitását változtatni lehet. E célra kétféle megoldás kínálkozik:

- 1) olyan tekercs, melyben a vasmagot (ferrit magot) mozgatni lehet
- 2) két sorba kötött tekercs, melynek kölcsönös helyzete változtatható (variométer, 5.18. ábra)



5.17. ábra



5.18. ábra

5.6. Induktív tekercs és ohmos ellenállás az áramkörben

Az egyszerű RL áramkörben (5.19. ábra) folyó áram meghatározásakor a generátor feszültsége mellett az önindukció következtében jelentkező indukált e.m.e.-vel (feszültséggel) is számolnunk kell:

$$i_L(t) = \frac{E + e_{\text{önind}}(t)}{R} .$$

Az önindukció folyamán indukálódó feszültség értéke, mint tudjuk:

$$e_{\text{önind}}(t) = -\frac{d\phi_{\text{saját}}}{dt} = -L \frac{di_L}{dt} ,$$

amiből rendezés után a következő kifejezést kapjuk:

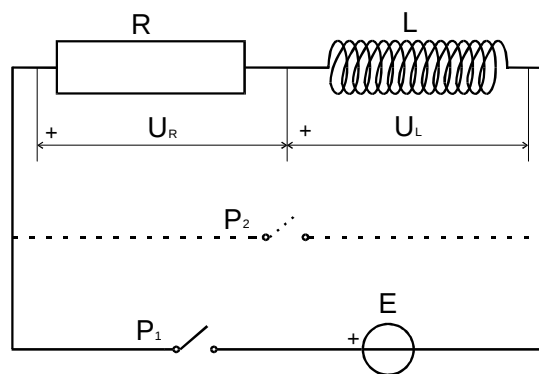
$$R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = E .$$

Ez egy elsőfokú, lineáris, inhomogén (nemhomogén), állandó együtthatós differenciálegyenlet. Megoldásának alakja:

$$i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) ,$$

ahol i_{Lh} az előző differenciálegyenlet homogén egyenletének a megoldása, az i_{Lp} pedig a partikuláris vagy stacionáris megoldás (az áramkör “felelete”, “válasza” a generátor gerjesztésére).

Az egyszerű RL áramkör differenciálegyenletének homogén egyenlete tehát:



5.19. ábra

$$R \cdot i_{Lh} + L \cdot \frac{di_{Lh}}{dt} = 0$$

Az elsőfokú homogén differenciálegyenlet feltételezett megoldásának alakja: $i_{Lh} = A \cdot e^{pt}$, ezt visszahelyettesítve a homogén egyenletbe, a következőket kapjuk:

$$R \cdot A \cdot e^{pt} + L \cdot p \cdot A \cdot e^{pt} = 0,$$

amiből aztán, az egyszerűsítés után:

$$R + L \cdot p = 0, \text{ illetve } p = -\frac{R}{L}$$

A homogén egyenlet megoldása tehát:

$$i_{Lh} = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

A partikuláris vagy stacionáris megoldás, az i_{Lp} tulajdonképpen az átmeneti jelenségek után beálló stacionáris áram értéke a körben:

$$i_{Lp} = i_{Ls} = \frac{E}{R}.$$

Végeredményben az áramerősség kifejezése:

$$i_L = i_{Lh} + i_{Lp} = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}.$$

Az ismeretlen A állandó meghatározásának érdekében tételezzünk fel egy kezdőértéket az áramerősségre:

$$i_L(0) = I_0.$$

Behelyettesítve az előző kifejezésbe, A értéke könnyen számítható:

$$i_L(0) = I_0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = I_0 - \frac{E}{R}.$$

Ezek alapján az áramkörben folyó áram, az ohmikus (tiszt, hatásos) ellenálláson és a kapacitásmentes, elhanyagolható hatásos ellenállású önindukciós tekercsen mérhető feszültség a következő kifejezésekkel írható le:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} + \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$u_R = R \cdot i_L(t) = E + R \cdot \left(I_0 - \frac{E}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$u_L = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = (E - R \cdot I_0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

A $\tau = \frac{L}{R}$ hányadost (melynek idő az egysége) gyakran alkalmazzák a fenti kifejezésekben az egyszerűbb, rövidebb felírás céljából. Amennyiben az áram kezdőértéke $i_L(0) = 0$, azaz $I_0 = 0$, akkor a fenti kifejezések egyszerűsödnek:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

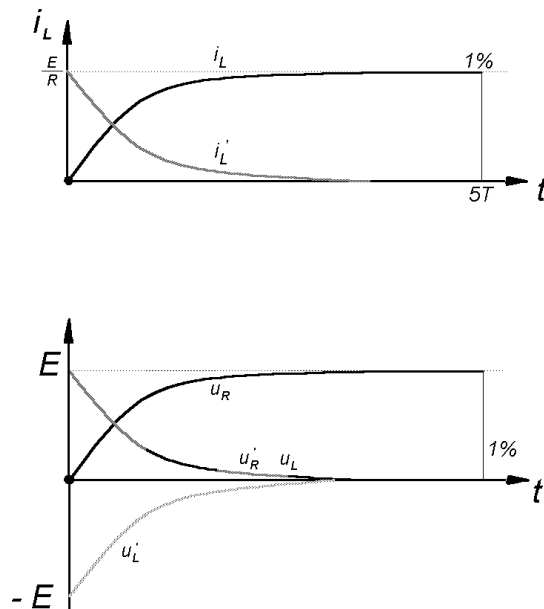
$$u_R(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$u_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ha az átmeneti jelenségek lezajlása után (a $t > 5\tau$ értékekre úgy tekintünk, hogy a $t \gg \tau$ mivel az áramkörben folyó áram $t = 5\tau$ -ra már eléri végső –aszimptotikus – értékének 99%-át), a P_1 -et kinyitjuk a P_2 -t pedig bezárjuk. A generátor feszültsége ekkor megszűnik ($E=0$), az áram kezdőértéke (ha a $t = 5\tau$ időpillanatot tekintjük kezdő pillanatnak) pedig $I_0 = \frac{E}{R}$ lesz. Ekkor az áramerősség és a feszültségek a következő módon változnak az időben:

$$i_L'(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_R'(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u_L'(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Az áramkörben folyó áram áramerőssége, az ohmikus (R) ellenálláson és az önindukciós tekercsen (L) mérhető feszültség időbeni változása az 5.20. ábrán látható. Az időtengely csak 5τ értékig növekszik, az 5τ utáni események ugyanezen grafikonon vannak, ismét a koordináta-rendszer középpontjából kiindulva. A sötétebb görbék a 0 és 5τ közötti idő alatt lejátszódó változásokat, a halványabb görbék (a “vesszős” változókkal megjelölt görbék) pedig az 5τ és 10τ közötti idő alatt lefolyó változásokat ábrázolják.



5.20. ábra

Ha az áramkörbe sinusosan változó feszültségű generátort kapcsolunk, melynek feszültségalakja $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t$, a differenciálegyenlet, illetve az áram időfüggése így módosul:

$$R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = E_m \cdot \sin \omega t,$$

$$i_{Lh}(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$i_{Lp}(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right).$$

5.7. A mágneses indukció mérése próbatekerccsel

Próbatekerccsnek nevezzük a szorosan egymáshoz illesztett vékony huzalmenetből készült lapos tekercset, melynek végei ballisztikus galvanométerhez (BG) kapcsolódnak (a ballisztikus galvanométer az áramkörben átfolyt töltésmennyiséget méri).

Tételezzük fel, hogy a próbatekerccsünk N menetet tartalmaz, melyeknek egyenként S a felülete, rajtuk keresztül az össz külső (idegen) fluxus értéke ϕ_{idegen} , a hatásos ellenállás pedig R . Ebben az áramkörben az áramerősség értéke:

$$i(t) = \frac{e(t) + e_{\text{önind}}(t)}{R},$$

ahol

$$e(t) = -\frac{d\phi_{idegen}}{dt},$$

és

$$e_{\text{önind}}(t) = -L \frac{di}{dt}.$$

Behelyettesítve az utóbbi két kifejezést, az előző egyenlet a rendezés után a következő alakot ölti:

$$-\frac{d\phi_{idegen}}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t).$$

Beszorozva az egyenletet dt -vel (szem előtt tartva, hogy $dq = i(t)dt$), majd átosztva R -el, a kifejezés új alakja:

$$dq = -\frac{1}{R} d\phi_{idegen} - \frac{L}{R} di(t).$$

A $t = t_0$ pillanatig legyen a próbatekerccsen keresztüli fluxus állandó (mondjuk $\phi_{idegen}(t_0)$ értékű), így a külső fluxusváltozás következtében indukálódó feszültség $e(t)=0$, és az $i(t)=0$ is érvényes a $t < t_0$ értékekre. Tételezzük fel továbbá, hogy a $t=t_0$ és a $t=t_1$ ($t_1 > t_0$) közötti időszakban időben változó a fluxus a próbatekerccsen keresztül, de utána ismét állandó marad (legyen például $\phi_{idegen}(t_1)$ értékű). Ezért az $e(t)$ értéke nulla lesz a $t > t_1$ időpillanattól kezdve, de az áramerősség értéke csak a $t > t_2$ ($t_2 > t_1$) időpillanatokban lesz nulla értékű! Lássuk miért! A $t_0 < t < t_1$ időintervallumban jelentkezik a külső fluxusváltozás következtében fellépő $e(t) = -d\phi_{idegen}(t)/dt$ elektromotoros erő, aminek következtében az áram is megjelenik. Ennek az áramnak köszönve jelentkezik az $e_{\text{önind}}(t)$, amely csak az áram változásakor létezik (hiszen $e_{\text{önind}}(t) = -L(di(t)/dt)$). Vagyis az önindukciós e.m.e. csak az áram növekedésekor (a t_0 utáni pillanatokban) és csökkenésekor (a t_1 utáni pillanatokban) különbözik nullától. Az önindukciós e.m.e.-nek köszönve folyik tehát áram a t_1 utáni időpillanatokban is, mondjuk egy t_2 pillanatig.

A ballisztikus galvanométer által mért átfolyt töltésmennyiség a $t=t_0$ időpillanattól a $t=t_2$ időpillanatig a következő módon számítható:

$$\Delta q = \int_{t_0}^{t_2} dq = -\frac{1}{R} \int_{t_0}^{t_2} d\phi_{idegen} - \frac{L}{R} \int_{t_0}^{t_2} di(t),$$

amiből

$$\Delta q = \frac{\phi_{idegen}(t_0) - \phi_{idegen}(t_2)}{R} - \frac{L}{R} [i(t_2) - i(t_0)].$$

Mivel $i(t_0)=0$ és $i(t_2)=0$ a feltétel szerint, és $\phi_{idegen}(t_0)=NSB(t_0)$, valamint $\phi_{idegen}(t_2)=\phi_{idegen}(t_1)=NSB(t_1)$:

$$\Delta q = \frac{NS}{R} [B(t_0) - B(t_1)]$$

Ha a próbatekereszt hirtelen kihúzzuk a mágneses térből (t_1-t_0 idő alatt), mérni tudjuk a mágneses indukció erősségét (a $B(t_1)=0$):

$$B(t_0) = \frac{R \cdot \Delta q}{N \cdot S}.$$

Az indukcióvektor irányát a ballisztikus galvanométeren (illetve a körön, a próbatekereszen) átfolyt töltésmennyiség valódi irányából határozzuk meg, a jobbkézszabály segítségével.

5.8. Szupravezetőből készült vezetőhurok a mágneses térben

Némely fémek (ólom, cink, higany, stb), valamint szigetelőanyagok (pl. kerámiák), mint ismeretes, az abszolút nulla fok hőmérséklet ($-273,16^\circ\text{C}$) közelében tökéletes vezetővé (szupravezetőkké) válnak.

A szupravezetőből készült vezetőhurokban folyó áramra érvényes az egyszerű ellenállásos hurokra alkalmazott kifejezés, azzal, hogy $R=0$. Tételezzük fel, hogy a hurokban nincs semmilyen áramforrás, de a hurok maga időben változó mágneses és villamos térben van, vagyis rajta keresztül időben változó idegen fluxus ($\phi_{i\text{degen}}(t)$) mutatható ki. Az áramerősség ekkor:

$$i(t) = \frac{e + e_{\text{önd}}(t)}{R},$$

ahol

$$e = -\frac{d\phi_{i\text{degen}}(t)}{dt}, \quad \text{és} \quad e_{\text{önd}}(t) = -L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Beszorozva az első kifejezést R -rel:

$$R \cdot i(t) = e + e_{\text{önd}}(t),$$

majd az R -t kiegyenlítve nullával, a következő kifejezéshez jutunk:

$$0 = -\frac{d\phi_{i\text{degen}}(t)}{dt} - L \cdot \frac{di(t)}{dt},$$

illetve:

$$-\frac{d\phi_{i\text{degen}}(t)}{dt} = L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Az utolsó egyenlet szerint az idegen fluxus $\phi_{i\text{degen}}(t)$ értéke és az $L \cdot i(t)$ szorzat (a saját fluxus $\phi_{\text{saját}}(t)$ pillanatnyi értéke, amelyet a benne folyó áram létesít) állandóan egyformák és ellenkező irányításúak vagy csak egy állandóval (ϕ_0) különbözhetnek egymástól, tehát:

$$L \cdot i(t) = \phi_{\text{saját}}(t) = -\phi_{i\text{degen}}(t) + \phi_0$$

Az össz fluxus a szupravezetőből készült vezetőhurkon keresztül egyenlő a saját és az idegen fluxus összegével:

$$\phi_{\text{uk}}(t) = \phi_{\text{saját}}(t) + \phi_{i\text{degen}}(t) = -\phi_{i\text{degen}}(t) + \phi_0 + \phi_{i\text{degen}}(t) = \phi_0.$$

Az eredmény érdekes következtetés alapjául szolgál: a szupravezetőből készült hurokban a fluxust nem lehet megváltoztatni olyan módon, hogy a vezetőhurkot idegen mágneses térbe visszük. Az elektromágneses indukció miatt a hurokban minden pillanatban pontosan akkora áram indukálódik, amely a saját fluxával megsemmisíti az idegen fluxust a hurokban.

Ez a Lenz-törvény határeset, mely szerint a hurokban indukált áram igyekszik megakadályozni azt a változást, amely őt létrehozta (más szóval a fluxusváltozást a hurokban).

5.9. A mágnesesen csatolt áramkörök áramai

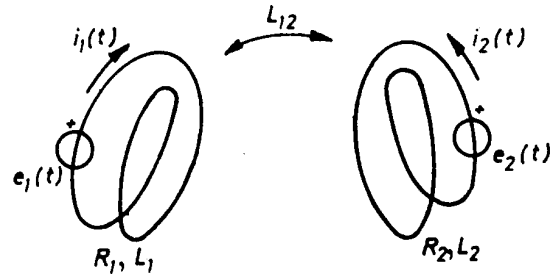
Figyeljük meg a 2.21. ábrán látható két mágnesesen csatolt vezetőlurkot. Az áram erősségének meghatározása a hurokban a következő módon történik.

Az áramerősségek a körökben:

$$i_1(t) = \frac{e_1(t) + e_{1 \text{ önindukció}}(t) + e_{21}(t)}{R_1},$$

$$i_2(t) = \frac{e_2(t) + e_{2 \text{ önindukció}}(t) + e_{12}(t)}{R_2}.$$

Ezekből kifejezhetjük a generátorok kapcsolófeszültségét (ekkor a jobb oldalon az össz feszültségesések szerepelnek):



5.21. ábra

$$e_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_{21} \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$e_2(t) = R_2 \cdot i_2(t) + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + L_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt}.$$

Ismeretes, hogy: $L_{12} = L_{21}$.

A kölcsönös indukció-együttható előjele függ a menet tekercselésének módjától és a feltételezett áramiránytól (az áram referenciáirányától) mindkét hurokban. Ha az egyik hurokban a referenciáirányban folyó áram pozitív fluxust létesít a másik hurokban, a kölcsönös indukció-együttható előjele pozitív, ellenkező esetben az előjel negatív.

A ábrákon a mágnesesen csatolt (kapcsolt) tekercsek egy-egy kapcsa mellett pontot rajzolnak a kölcsönös indukció-együttható előjelének meghatározása céljából. Az áram referenciáirányát tetszőlegesen vesszük fel a tekercseken. Ha mindkét tekercsnél a ponttal megjelölt kapcsan folyik be (vagy ki) az áram a tekecsbe (tekercsből), akkor az $L_{12} > 0$, ellenkező esetben az $L_{12} < 0$

5.10. Energia és erő a mágneses térben

5.10.1. A MÁGNESES TÉR ENERGIÁJA

Figyeljünk meg egy időben állandó árammal rendelkező vezetőlurkot. Az áram létrejöttéhez szükséges egy korábbi időszak, amelyben az áramerősség a vezetőlurkokban nulla értéktől a végértékig (nominális értékig) növekszik. Ebben az időszakban a vezetőlurkokban önindukciós feszültség (az önindukció e.m.e.-je) keletkezik, amely Lenz törvénye szerint akadályozza (késlelteti) az áram növekedését a vezetőlurkokban. Azt az önindukciós feszültség legyőzéséhez szükséges munkát keressük, amely az időben állandó áram létrejöttéhez, illetve a vezetőlurkok körüli mágneses tér kiépítéséhez szükséges. Mint látható, ezt az energiát nem tudjuk kiszámítani az elektromágneses indukció jelenségének ismerete nélkül.

Legyen adott n darab vékony vezetőlurkok, rendre $i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)$ áramokkal, melyek ellenállásai $R_1, R_2, \dots, R_n$ és a bennük működő generátorok kapcsolófeszültségei (e.m.e.-i) $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$. Jelöljük a vezetőlurkokba kapcsolt valamennyi generátor össz munkáját egy kis dt idő intervallumban dA_g -vel. Ez az energia, amennyiben teljesen általános esetet

veszünk alapul (amikor a vezetőhurkok mozognak is és deformálódnak is a mágneses erők hatására, valamint ferromágneses anyagok is jelen vannak a mágneses térben, amelyek mozoghatnak is) három területre fordítható, három módon használható fel:

- 1) a Joule veszteségekre a vezetőhurkokban a dt időintervallumban (dA_J),
- 2) a mágneses erők munkájára ($dA_{\text{mág. erő}}$) amelyet az erők a térben levő hurkok vagy testek dt időintervallumban való deformálásakor vagy elmozdításakor végeznek és
- 3) a dA_m munkára, amelyet a hurkok közelében lévő mágneses tér változásakor kell elvégezni.

Tehát matematikailag:

$$dA_g = dA_J + dA_{\text{mág. erő}} + dA_m.$$

A generátorok össz munkája a vezetőhurkokban dolgozó generátorok munkájának az összege:

$$dA_g = \sum_{k=1}^n dA_{gk},$$

illetve, mivel:

$$dA_{gk} = e_k(t) \cdot i_k(t) \cdot dt$$

és

$$i_k(t) = \frac{e_k(t) - \frac{d\phi_k(t)}{dt}}{R_k},$$

ahonnan:

$$e_k(t) = R_k \cdot i_k(t) + \frac{d\phi_k(t)}{dt}.$$

Behelyettesítve az $e_k(t)$ értékét a k -adik vezetőhurokban működő generátor munkájának kifejezésébe:

$$dA_{gk} = R_k \cdot i_k^2(t)dt + i_k(t)d\phi_k(t),$$

majd ezt összegezve az összes vezetőhurokra, a következő kifejezést kapjuk:

$$dA_g = \sum_{k=1}^n dA_{gk} = \sum_{k=1}^n R_k \cdot i_k^2(t)dt + \sum_{k=1}^n i_k(t)d\phi_k(t).$$

A jobb oldal első tagja, mint a kifejezés alakjából kitűnik, a Joule-veszteségeket jelöli az összes vezetőhurokban, tehát:

$$dA_g - dA_J = \sum_{k=1}^n i_k(t)d\phi_k(t).$$

Összehasonlítva ezt a kifejezést a legelső kifejezéssel ebben a (5.10.1.) pontban, a következőkhöz jutunk:

$$dA_m + dA_{\text{mág. erő}} = \sum_{k=1}^n i_k(t)d\phi_k(t).$$

A kapott kifejezés nem más, mint az energiamegmaradás törvénye n áramhurokra.

Ha feltételezzük, hogy a vezetőhurkok merevek és mozdulatlanok, valamint a hurkok körüli testek is mozdulatlanok, akkor $dA_{\text{mág. erő}} = 0$, azaz:

$$dA_m = \sum_{k=1}^n i_k(t)d\phi_k(t)$$

Az előző kifejezés azt a munkát jelöli, amelyet be kell fektetni, hogy a $\mathbf{n}$ merev, mozdulatlan vezetőhurokra számított vagy mért fluxus $d\phi_1, d\phi_2, \dots, d\phi_n$ értékkel megváltozzon (a környezet nemlineáris, tehát ferromágneses anyagok is jelen vannak). Ahhoz, hogy a

vezetőhurkokban az áramok elérjék végleges értéküket ($I_1, I_2, \dots, I_n$), miközben a hurkokon keresztüli fluxusok is végértékeikhez ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$) tartanak, a következő munkát kell befektetni:

$$(A_m)_{\text{áram bekapcsol.}} = \sum_{k=1}^n \int_0^{\phi_k} i_k(t) d\phi_k(t).$$

Ha a mágneses térben ferromágneses anyagok is vannak, akkor a fenti egyenlőség nem érvényes, mert a jobb oldalon számításba kell venni a hiszterézisvesztességeket is, ezért tételezzünk fel lineáris környezetet (vagyis, hogy a hurkok közelében nincs ferromágneses anyag – erre ugyanis érvényes a fenti kifejezés). Tételezzük fel az össz hurokban az áram lineáris növekedését nullától a hurkokban meghatározott végértékekig. Ilyenkor:

$$i_k(t) = I_k \cdot \frac{t}{T},$$

és

$$\phi_k(t) = \phi_k \cdot \frac{t}{T},$$

azaz ennek megfelelően

$$d\phi_k = \phi_k \cdot \frac{dt}{T}.$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket az előző kifejezésbe, kiértékelve az integrált, a következő lépéseken haladunk keresztül:

$$(A_m)_{\text{áram bekapcsol.}} = \sum_{k=1}^n \int_0^T I_k \cdot \frac{t}{T} \cdot \phi_k \cdot \frac{dt}{T} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k \cdot \phi_k}{T^2} \cdot \int_0^T t dt,$$

$$(A_m)_{\text{áram bekapcsol.}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot I_k \cdot \phi_k = W_m.$$

A kapott energia a vezetőhurkokban raktározódik el, és lineáris környezetben az n számú vezetőhurokból álló rendszer mágneses energiájának nevezzük. Mivel a linearitás következtében:

$$\phi_k = \phi_{1k} + \phi_{2k} + \dots + \phi_{kk} + \dots + \phi_{nk} = L_{1k} + L_{2k} + \dots + L_{kk} + \dots + L_{nk} \cdot I_n = \sum_{j=1}^n L_{kj} \cdot I_j$$

és érvényes az $L_{jk} = L_{kj}$ egyenlőség is, az n számú vezetőhurok mágneses energiája az induktivitás függvényében:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} \cdot I_k \cdot I_j.$$

Ebből aztán a magányos áramjárta vezetőhurok mágneses energiája:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \phi = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2.$$

5.10.2. ENERGIAELOSZLÁS A MÁGNESES TÉRBEN

Vegyük egy vékony tóruszvasmagot, melynek S a keresztmetszete, R a középsugara, és amelyre sűrűn N menetszámú huzalt tekercseltünk. Amennyiben a tekercsben folyó áram áramerőssége $i(t)$, a mágneses tér a magban:

$$H(t) = \frac{N \cdot i(t)}{2 \cdot \pi \cdot R},$$

amiből az áramerősség:

$$i(t) = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot H(t)}{N}.$$

A toroidvasmagban a fluxusnövekedés legyen $d\phi_j = S \cdot dB(t)$ dt idő alatt. Ekkor az össz fluxusnövekedés az N menetszámú tekercsben:

$$d\phi(t) = N \cdot d\phi_j(t) = N \cdot S \cdot dB(t).$$

A szükséges (befektetett) munka, amely a mágneses körben (vékony tóruszvasmagban) ϕ_1 -től ϕ_2 -ig terjedő fluxusváltozást eredményez, a következő módon számítható:

$$(A_m)_{\phi_1 \text{ -től } \phi_2 \text{ -ig}} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} i(t) \cdot \phi(t) = \int_{B_1}^{B_2} 2 \cdot \pi \cdot R \cdot S \cdot H(t) = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot S \cdot \int_{B_1}^{B_2} H(t) \cdot dB(t),$$

mivel az integrál előtti kifejezés ($2\pi RS$) a toroidvasmag térfogatát jelöli, így a

$$\left(\frac{dA_m}{dV} \right)_{B_1 \text{ -től } B_2 \text{ -ig}} = \int_{B_1}^{B_2} H(t) dB(t)$$

kifejezés a mágneses tér egységnyi térfogatára eső szükségszerűen befektetett munka a mágneses tér megváltoztatásához a B_1 indukcióértékről B_2 indukcióértékre. A kifejezés általános, így nemlineáris (ferromágneses anyagokat tartalmazó) közegekre is érvényes.

Ha a közeg lineáris, akkor érvényes a

$$H = \frac{B}{\mu}$$

összefüggés, és az egyszerűség kedvéért vegyük azt, hogy a $B_1 = 0$ és a $B_2 = B$. Ekkor az energiasűrűség előző kifejezése a következő értéket kapja:

$$\left(\frac{dA_m}{dV} \right)_{0 \text{ -től } B \text{ -ig}} = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Mivel a lineáris közegekben nincs veszteség, az utóbbi kifejezés a mágneses energia sűrűségét adja, mivel a tér kikapcsolásával ezt az energiát a rendszer visszaszolgáltatja, tehát:

$$\frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu}.$$

A mágneses tér energiája számítható a mágneses tér energiasűrűségéből is:

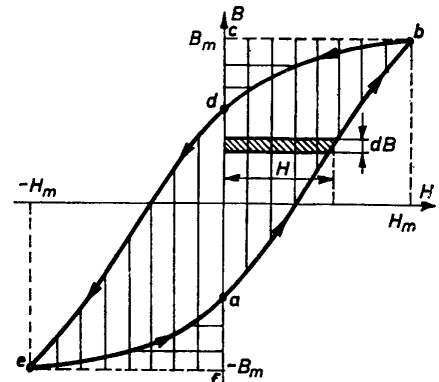
$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 \cdot dV.$$

5.10.3. HISZTERÉZISVESZTESÉGEK A FERROMÁGNESES ANYAGOKBAN

Ha a mágneses tér egy pontjában a térerősség értéke H , akkor ebben a pontban az indukció dB értékkel való megváltoztatásához a következő energiasűrűség szükséges (lásd az előző pontban!):

$$\left(\frac{dA_m}{dV} \right) = \int_{-B_m}^{+B_m} H(t) dB(t) \quad (1).$$

Ezt a szorzatot az 5.22. ábrán sűrű árnyékolású téglalapfelülettel jelöltük. Az egységnyi térfogatra eső munka számításához (általános kifejezés) tehát az integrál értéke ilyen téglalapfelületek összegével lesz arányos, ha a munkapont a hiszterézisgörbén mozog (5.22. ábra).



5.22. ábra

Az **a**-tól a **b** pontig a $H > 0$ és úgyszintén, a $dB > 0$, azaz $HdB > 0$. A befektetett energia (sűrűsége) arányos a görbe oldalú **abc** háromszög területével.

A **b**-tól a **d** pontig a H csökken, de $H > 0$, viszont az indukció növekménye negatív, vagyis $dB < 0$, tehát $HdB < 0$, azaz a befektetett energiasűrűség negatív. Az energiának ezt a részét a rendszer visszaszolgáltatja a generátornak (az visszaszolgáltatott energiasűrűség arányos a görbe oldalú **bcd** háromszög területével).

A **d**-tól az **e** pontig a mágneses térerősség vektora és az indukciónövekmény is negatív ($H < 0$ és $dB < 0$), vagyis a $HdB > 0$. Szavakkal ez annyit jelent, hogy ismét a generátor fektet be munkát (energiát). A befektetett energia térfogatsűrűsége arányos a görbe vonalú **def** háromszög területével.

Az **e**-tól az **a** pontig a mágneses térerősség vektora negatív értékű ($H < 0$), ellentétben az indukciónövekménnyel, amely pozitív ($dB > 0$). Ebből aztán látható, hogy $HdB < 0$, vagyis a mágneses tér az energia egy részét visszajuttatja a generátornak. A visszajuttatott energia térfogatsűrűsége arányos a görbe oldalú **efa** háromszög területével.

Az előző okfejtésből, magyarázatból leszűrhető, hogy a befektetett és vissza nem térült energia sűrűsége egy ciklus alatt arányos a hiszterézisgörbe felületével. Ez az energia a ferromágneses anyagokban hővé alakul át, és hiszterézisvesztésnek nevezzük.

Ha a munkapont egy másodperc alatt **f** ciklust vagy periódust ír le, úgy a hiszterézisvesztések térfogatűrűsége a következő alakot kapja:

$$\frac{dP_n}{dV} = f \cdot (\text{a hiszterézisgörbe felülete}) \cdot (\text{arány}).$$

A hiszterézisvesztések tehát a frekvenciával (az örvényáram okozta veszteségek – emlékezzünk csak vissza! - a frekvencia négyzetével arányosak) és a hiszterézisgörbe területével arányosak. A hiszterézisgörbe területét legtöbbször grafikus úton kell meghatározni (megszámolni a miliméterpapírra rajzolt hiszterézisgörbe kockácskáit), ami elég nehéz feladat. A gyakorlatban a következő megközelítő (Steinmetz-féle) kifejezést használják a hiszterézisvesztések kiszámítására:

$$P_h \cong \eta \cdot V \cdot f \cdot B_m^{1,6},$$

ahol

- η - a Steinmetz állandó (minden anyagra más értéke van, kísérleti úton határozzák meg),
- V – a ferromágneses anyag térfogata,
- B_m – az indukció maximális értéke (amplitúdója).

Ha a B_m értéke közel áll a telítettségi indukcióhoz akkor az 1,6-os kitevő helyett 2-es kitevőt használunk, azaz:

$$P_h \cong \eta \cdot V \cdot f \cdot B_m^2.$$

5.10.4. A MÁGNESES ERŐK SZÁMÍTÁSÁNAK ÁLTALÁNOS MÓDSZERE

Az eljárás alapja az energia megmaradásának törvénye, amelyet a rendszer kis változásaira írunk fel. Legyen adott **n** vezetőhurok lineáris közegben és tétezzük fel, hogy a rendszer egyik vezetőhurka, vagy egy test a **dt** időintervallum alatt egy kicsit elmozdult vagy deformálódott. Az energia megmaradásának törvénye szerint:

$$dW_m + dA_{mágerő} = \sum_{k=1}^n i_k(t) d\phi_k(t).$$

Tételezzük föl, hogy az eredő mágneses erő hatására a testek egy dx távolságra elmozdulnak eredeti helyüktől az x tengely irányában, vagy az eredő forgatónyomaték a testet egy kis $d\alpha_x$ szöggel mozdítja el. Ekkor a a mágneses erők munkája:

$$dA_{\text{mág.erő}} = F_x dx,$$

illetve

$$dA_{\text{mág.erő}} = M_x d\alpha_x.$$

Induljunk ki először abból a feltételezésből, hogy az elmozdulás ideje alatt fluxusváltozás nem történt ($d\phi=0$), így az energia megmaradásának törvénye a következő alakot ölti:

$$dW_m + dA_{\text{mág.erő}} = 0, \text{ vagyis}$$

$$dA_{\text{mág.erő}} = -dW_m.$$

Ebből aztán:

$$F_x = - \left. \frac{dW_m}{dx_x} \right|_{\phi_j} = \text{const}$$

és

$$M_x = - \left. \frac{dW_m}{d\alpha_x} \right|_{\phi_j} = \text{const}.$$

Másodszor viszont azt tételezzük fel, hogy valamennyi vezetőhurokban változatlan maradt az áramerősség ($I=\text{const.}$). Ekkor a következőket írhatjuk. Mivel

$$W_m = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot I_k \cdot \phi_k,$$

így

$$dW_m = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot I_k \cdot d\phi_k,$$

így, ennek az 5.10.4. pontnak az első (energia megmaradásra felírt) kifejezése alkalmas arra, hogy a mágneses energiát kifejezzük belőle:

$$dA_{\text{mág.er.}} = \sum_{k=1}^n I_k d\phi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k d\phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k d\phi_k = dW_m,$$

amiből aztán

$$F_x = - \left. \frac{dW_m}{dx_x} \right|_{\mathbf{I}_j} = \text{const}$$

és

$$M_x = - \left. \frac{dW_m}{d\alpha_x} \right|_{\mathbf{I}_j} = \text{const}.$$

5.11. Ellenőrző kérdések

1. Mikor beszélhetünk villamos- és mikor mágneses mező (tér) jelenlétéről egy adott térrészben?
2. Miről szól a képzeletbeli kísérlet a két egymáshoz viszonyítva $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó koordinátarendszerrel kapcsolatban?
3. Hogyan fogja értelmezni a Q töltésre ható erőt a két megfigyelő?
4. Mi a képzeletbeli kísérletből levonható következtetés?
5. Milyen két előidézője lehet a villamos térnek?

6. Mi az indukált villamos tér egyik legfontosabb tulajdonsága (amelyben eltér az elektrosztatikus tértől)?
7. Mi az indukált feszültség (elektromotoros erő)?
8. Hogyan írható fel a hurokelemben indukálódó feszültség értéke?
9. Hogyan fejezhető ki a zárt vezetőhurokban indukálódó feszültség értéke?
10. Mire utal Faraday törvényének a matematikai alakja?
11. Mi a statikus és dinamikus indukció?
12. Milyen példákkal szemléltethető az elektromágneses indukció (motor, generátor)?
13. Hogyan szól Lenz törvénye?
14. Hogyan működik a betatron?
15. Megegyezik-e a potenciál és a feszültség fogalma az időben változó villamos és mágneses térben?
16. Mik az örvényáramok?
17. Kiküszöbölhetők-e az örvényáramok?
18. Milyen nemkívánatos jelenségek kísérik az örvényáramokat?
19. Hogyan számíthatók ki az örvényáram-veszteségek?
20. Mivel arányos az örvényáramoktól eredő átlagos Joule-veszteségek térfogatsűrűsége?
21. Hogyan csökkenthetők az örvényáramok okozta Joule-veszteségek?
22. Miből készülnek a nagyfrekvenciás tekercsek vasmagjai?
23. Hol alkalmazzák a gyakorlatban az örvényáramokat?
24. Mi a szkineffektus, és minek a következménye?
25. Mi történik a vezeték ellenállásával a szkineffektus fokozódásával?
26. Mi a közelhatás elve, és mivel magyarázható?
27. Mi a kölcsönös indukció?
28. Mi a kölcsönös indukció-együttható mértékegysége?
29. Milyen értékű lehet a kölcsönös indukció-együttható?
30. Mi az önindukció?
31. Milyen módon lehet változtatható induktivitással rendelkező elemet kialakítani?
32. Mi a variométer?
33. Hogyan viselkedik a soros RL kör egyenfeszültségre kapcsoláskor (fizikailag mi történik az áram kiépítésekor)?
34. Milyen egyenlettel írható le az átmeneti állapot?
35. Milyen a tekercs áram- és feszültséggörbéje a tranziens állapotban?
36. Mi játszódik le az RL kör rövidrezárásakor?
37. Hogyan mérhető a mágneses indukcióvektor értéke próbatekerccsel?
38. Hogyan viselkedik a szupravezetőből készült vezetőhurok a mágneses térben?
39. Megváltoztatható-e a szupravezető-hurkon keresztüli fluxus a hurok idegen mágneses térbe vitelével?
40. Miért mondják, hogy a szupravezető-hurok Lenz törvényének határesetét képviseli?
41. Hogyan fejezhetők ki az áramok a mágnesesen csatolt körökben?
42. A kölcsönös indukció-együttható előjelére milyen megegyezés érvényes a mágnesesen csatolt tekercsek esetében?
43. Mire használandó el az n vékony vezetőhurokban lévő generátorok össz munkája?
44. Hogyan írható fel az energiamegmaradás törvénye az n vékony vezetőhurokra?
45. Statikus esetre (merev, mozdulatlan hurkok, mozdulatlan testek) milyen egyszerűsített kifejezéssé alakul az energiamegmaradás törvénye?
46. Milyen energiát (munkát) jelöl ennek az egyszerűsített kifejezésnek a bal oldala (és milyen feltétel mellett)?
47. Mivel egyenlő az áramok kiépítésére fordított munka (energia)?
48. Mi a kifejezés a magányos áramjárta vezető mágneses energiájára?
49. Hogyan számítható ki a szükséges energiasűrűség, amely a mágneses tér B_1 indukcióértékről B_2 indukcióértékre való megváltoztatásához szükséges?

50. Hogyan fejezhető ki lineáris közegben a mágneses tér energiasűrűsége?
51. Mi a hiszterézisveszteség?
52. Mire fordítódik a hiszterézisveszteségként elnevezett energia?
53. Mivé alakul át a vissza nem térülő energia?
54. Mitől függ (mivel arányos) a hiszterézisveszteségek térfogatűrűsége?
55. A gyakorlatban milyen kifejezést használnak a hiszterézisveszteségek kiszámítására?
56. Hogyan számíthatók ki a mágneses erők az energia ismeretében (függvényében), ha az elmozdulás ideje alatt a fluxus nem változik?
57. Minek a "számlájára" történik az elmozdulás (honnan ered az elmozduláshoz szükséges munka) állandó fluxusérték mellett?
58. Hogyan számíthatók ki a mágneses erők az energia függvényében, ha az elmozdulás ideje alatt az áramok a hurkokban nem változnak?
59. Hogyan oszlik meg az energia-növekmény a mágneses erők végezte munka és a rendszer mágneses energiája között?

6. AZ IDŐBEN VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ VILLAMOS HÁLÓZATOK

6.1. Bevezető

6.1.1. KÜLÖNBSEGEK AZ EGYENÁRAMÚ ÉS IDŐBEN VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖK KÖZÖTT

Amennyiben ismerjük az összefüggést az ellenállások végei közt mérhető feszültség és a rajtuk átfolyó áramerősség között, akkor az időben állandó áramok esetében érvényes, hogy az összes ágba az áramerősséget és az ágak végei közti feszültséget Kirchhoff I. és II. törvénye alapján határozhatjuk meg. Kirchhoff törvényeinek bevezetésénél az egyenáramoknál semmilyen megszorítást, illetve feltételt sem fogalmaztunk meg, tehát az időben állandó áramokra ezek a törvények *egzaktok*. Nagyon szigorúan véve Kirchhoff I. törvénye csak akkor érvényes, ha a vezetőket körülvevő szigetelő fajlagos vezetése nullával egyenlő. Ez a feltétel ugyan sohasem teljesül, de a jó vezetők és szigetelők fajlagos vezetőképességének aránya 10^{18} - 10^{24} nagyságrendű. Más részről viszont az egyenáramoknál a vezetőhuzalok alakja, mellyel az áramkör elemei össze vannak kötve, *még csak elméletileg sem hat ki az ágakban folyó áramerősségre*.

Az időben váltakozó áramot mindig időben változó indukált villamos(elektromos) tér kíséri, amely feszültséget (elektromotoros erőt - e.m.e.-t) indukál az itt található vezetőkben.. Szigorúan tekintve minden időben váltakozó áramú áramkör egy különlegesen összetett rendszer az elemzés szempontjából, mivel az áramkör minden ága között kapcsolat van, amely függ az ágak alakjától és helyzetétől. Így *az időben váltakozó áramú áramkörökben az ágak áramerőssége függ bizonyos mértékben az áramkör mértani alakjától*. Szerencsére a gyakorlati esetek nagy részében az áramkör ágainak csatoltsága által indukált e.m.e. sokkal kisebb mint az ágakban az elemek végei közti feszültség. Ezért az ágakban legtöbbször el lehet hanyagolni az áramkör alakjának befolyását az áramerősségre. Mivel az indukált elektromos tér arányos az áramerősség deriváltjával, a frekvencia növekedésével az ágak áramának kölcsönhatása egyre kevésbé elhanyagolható.

Az időben váltakozó áramú áramköröknél számolni kell azzal is, hogy az áram terjedésének sebessége véges. Az áram a vezetékekben, melyek összekötik a villamos hálózat elemeit, megközelítőleg fénysebességgel terjed. Ez azt jelenti, hogy egy pillanatban *az időben váltakozó áram erőssége nem azonos a vezető minden pontján!* Szerencsére ezt a jelenséget csak akkor észleljük, ha a vezető kivételesen hosszú. Ha az áramerősség változása elég lassú ahhoz, hogy az áram véges terjedési sebességének hatását elhanyagolhatjuk, akkor azt mondjuk, hogy az áramkör állapota *kvázistacionárius*.

Mi az áramköröknek csak a kvázistacionárius állapotával ismerkedünk meg az elkövetkezőkben.

6.1.2. ALAPELEMEK A VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖKBEN

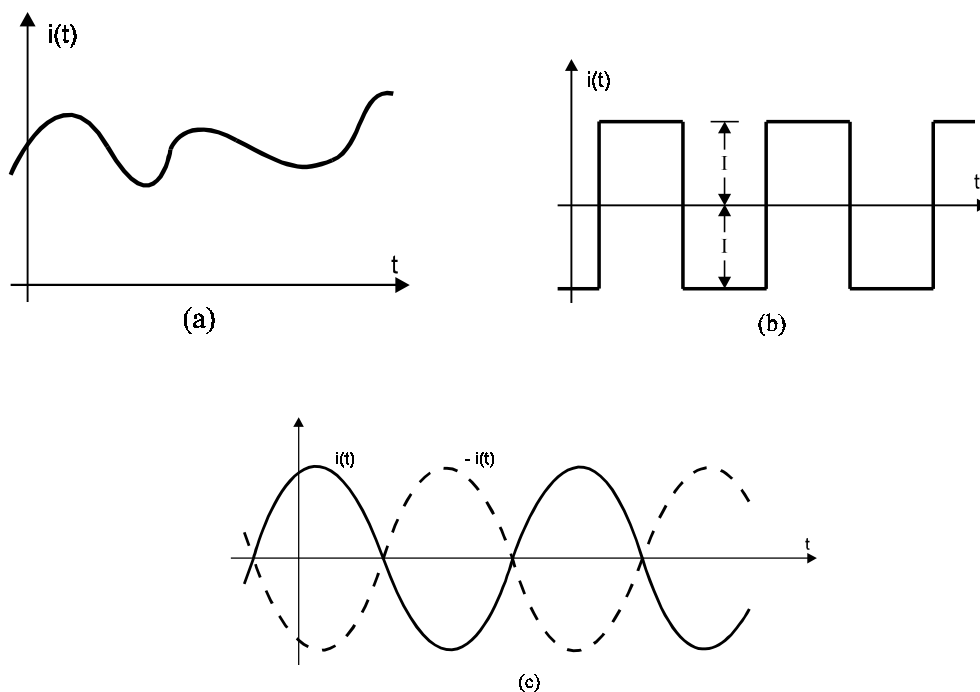
A váltakozó áramú áramkörökben különböző elemek vannak jelen: félvezető-diódák, elektroncsövek, transzformátorok, tekercsek (vasmaggal és anélkül), tranzistorok, kondenzátorok (egyszerű és nemlineáris dielektrikummal), lineáris és nemlineáris ellenállások, stb.

Némely elemek átalakíthatnak valamilyen másfajta energiát az időben váltakozó elektromos (villamos) tér energiájává. Az ilyen elemeket *aktív elemeknek* nevezzük. A többi elemet, melyeknek nincs ilyen tulajdonsága, *passzív elemeknek* nevezzük.

Ebben a fejezetben csak a lineáris áramkörökre szorítkozunk: generátorok (feszültség- és áramgenerátor), lineáris ellenállások, lineáris szigetelőjú kondenzátorok és vasmag nélküli

tekercsek (illetve lineáris üzemmódú vasmagos tekercsek) lesznek a figyelmünk középpontjában. Ha mégis eltérnénk ettől a lineáris körökre irányuló ígéretünktől, úgy azt külön hangsúlyozni igyekszünk a szövegben!

Az időben változó áram fogalma alatt az olyan áramot értjük, amely az időben változtathatja vagy az intenzitását (6.1.a ábra), vagy az irányát (6.1.b ábra), vagy mindkettőt (6.1.c ábra). Az ilyen áramra azt mondjuk, hogy pozitív azokban az időtartományokban amikor a valós iránya megegyezik a vonatkoztatási vagy referenciáirányával.



6.1. ábra

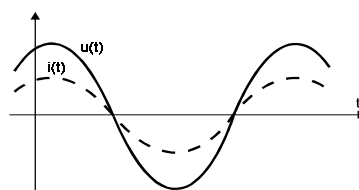
Az elemek végein mért feszültség és az elemeken átfolyó áram közti összefüggés

- **ellenállás** esetében (6.2. ábra):

$$u(t) = Ri(t)$$

innen:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}.$$



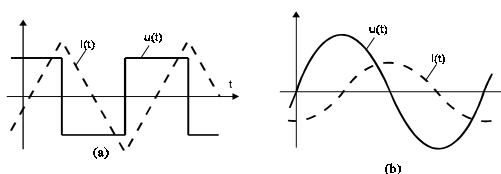
6.2. ábra

- **induktív tekercs** esetében (6.3. ábra):

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

innen

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt + I_0.$$



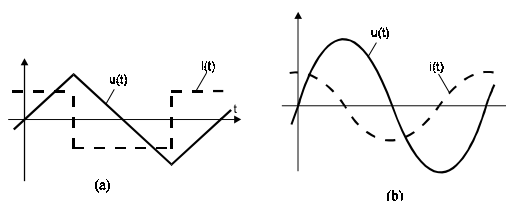
6.3. ábra

- **kondenzátor** esetében:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

innen:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + I_0.$$



6.4. ábra

6.1.3. KIRCHHOFF TÖRVÉNYEI A VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖKRE

Ha az áramkörben kvázistacionárius állapot uralkodik, akkor *minden pillanatban* az áramkör minden csomópontjára érvényes Kirchhoff I. törvénye:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

(ahol n az ágak száma, melyek a csomópontban találkoznak; a vonatkoztatási vagyis pozitív referenciáirány pedig a csomópontból **kifelé** mutató irány), illetve *minden pillanatban* érvényes minden zárt körre az áramkörben Kirchhoff II. törvénye:

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

(ahol, ha az ágon keresztül haladva az áramköri elem magasabb potenciálú kapcsához érünk először, akkor a feszültséget "+" előjellel vesszük számba az összegezésnél).

A váltakozó áramú áramkörök esetében Kirchhoff törvényeinek segítségével nem tudunk olyan egyszerű egyenletrendszert felállítani, mint az egyenáramú áramkörök esetében. Váltakozó áramú hálózatoknál az egyenletrendszer az áramerősségek mellett tartalmazná az áramerősség idő szerinti deriváltjait és integráltjait is. Ezzel az áram meghatározása az áramkörben sokkal bonyolultabb és nehezebb.

A váltakozó áramú áramköröknél két állapotot, illetve üzemmódot különböztetünk meg:

1. Átmeneti (tranziens) állapot - átmeneti üzemmód
2. Állandósult állapot - állandósult üzemmód

6.1.4. TELJESÍTMÉNY A VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖKBEN

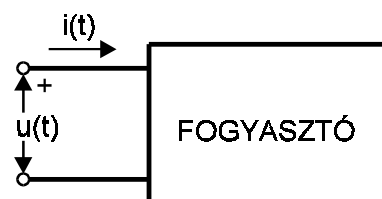
Figyeljünk meg egy $u(t)$ feszültségre kapcsolt fogyasztót a 6.5. ábrán megjelölt összehangolt áram- és feszültségirányokkal. A dt időintervallumban a fogyasztón $dq = i(t)dt$ elektromos töltésmennyiség folyik keresztül.

A villamos erők munkája:

$$dA_{el. erő}(t) = u(t) dq(t) = u(t) i(t) dt$$

A fogyasztó teljesítményének pillanatnyi értéke:

$$p(t) = u(t) i(t)$$



6.5. ábra

Az össz energia, melyet a fogyasztónak t_0 időpillanattól t -ig átadunk, kiszámítható, mint az elektromos erők munkájának összege (azaz integrálja) ebben az időtartományban.

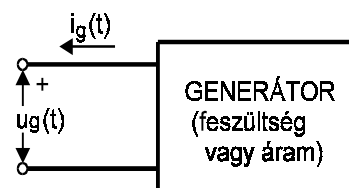
$$A_{\text{el. erő } t_0 \text{-től } t \text{-ig}} = \int_{t_0}^t u(t) i(t) dt$$

A generátor teljesítményének pillanatnyi értéke:

$$p_g(t) = u_g(t) i_g(t)$$

A generátor munkája (t_0, t) időtartományban:

$$A_{\text{generátor } t_0 \text{-től } t \text{-ig}} = \int_{t_0}^t u_g(t) i_g(t) dt$$



6.6. ábra

Az előző kifejezések az áram és a feszültség azon vonatkoztatási (referencia) irányára íródtak, amelyek a 6.5 és 6.6 ábrákon láthatók.

A váltakozó áramok esetében a generátorok és fogyasztók teljesítménye is bizonyos időintervallumokban lehet pozitív és negatív. Ezért a generátor és az elektromos erők munkája, míg áram folyik át a fogyasztón, egy időintervallumban lehet pozitív és negatív is.

Következtetés:

A váltakozó áramú hálózatok alapegyenletei a következőkben különböznek az egyenáramú hálózatok alapegyenleteitől:

1. Csak az e.m.e., az áramerősség, a feszültség és a teljesítmény *pillanatnyi* értékeiről beszélhetünk.
2. Az egyenletek, melyekből a hálózat ágaiban folyó áramok erősségét kell kiszámítani, nem csak az áramerősségek értékeit tartalmazzák, hanem az áramerősség idő szerinti deriváltjait és integráljait is. Ezért a váltakozó áramú hálózat megoldása különösen összetett.

A gyakorlatban a leggyakoribb eset az, amikor a hálózatba több azonos frekvenciájú sinusosan változó e.m.e. vagy áramgenerátor van kötve. Ekkor az egyenletek, melyekkel az áramerősségeket határozzuk meg az áramkör ágaiban leegyszerűsödnek, sőt még olyan alakra is egyszerűsíthetők, mint az egyenáramú áramkörök esetében.

6.2. Alapfogalmak a periodikus mennyiségekről

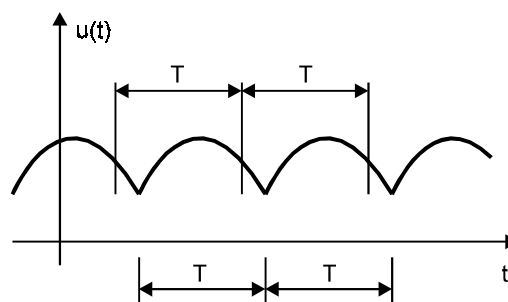
Az *időben periodikusan változó mennyiségek* alatt értjük azokat a mennyiségeket, melyek értékei azonos időközönként ismétlődnek.

Az $f(t)$ periodikus függvénynek bármely t időpillanatban ki kell elégítenie a következő feltételt:

$$f(t + nT) = f(t), \quad n = \dots -2, -1, 1, 2, \dots$$

A T időtartományt, melynek lejárta után a periodikus függvény értékei megismétlődnek, a függvény *periódusának* nevezzük (6.7. ábra). Mértékegysége a *másodperc* vagy *szekundum* [s].

A periodikus mennyiség egy periódus alatt egy ciklust ír le, tesz meg. Ha t_N -el jelöljük azt az időt, amely alatt a periodikus függvény N számú



6.7. ábra

teljes ciklust ír le, akkor az $f = N/t_N$ hányadost a periodikus függvény *frekvenciájának* nevezzük.

$$f = \frac{1}{T}.$$

A frekvencia kifejezéséből láthatjuk, hogy számbelileg megegyezik a periodikus függvény ciklusainak számával egy időegység alatt. A frekvencia mértékegysége a *hertz* [Hz].

Az elektrotechnikában legfontosabb szerepük azoknak a periodikus mennyiségeknek van, melyek sinus- vagy cosinusfüggvény szerint változnak. Mivel matematikailag a sinus- és cosinus-függvény a legegyszerűbb periodikus függvény, ezért elnevezték őket *egyszerű periodikus* függvényeknek. Az összes többi periodikus függvényt csak periodikus vagy összetetten periodikus függvénynek nevezzük.

Figyeljünk meg egy egyszerű periodikus függvényt, például feszültséget:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

U_m jelöli a legnagyobb értéket, melyet az $u(t)$ feszültség felvehet, ezért *maximális értéknek* vagy *amplitúdónak* nevezzük.

Ismert, hogy $\cos(\omega t + \theta + 2\pi) = \cos(\omega t + \theta)$ azaz $\omega T = 2\pi$. Innen az egyszerű periodikus mennyiség periódusa

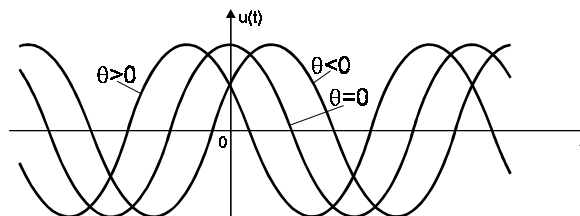
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

A körfrekvencia definíciója az előző kifejezésből:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Láthatjuk, hogy ω egyenlő a frekvencia és a radiánban kifejezett teljesszög szorzatával, ezért ω -át *körfrekvenciának* nevezzük. Mértékegysége a *radián másodpercenként* [rad/s].

θ a feszültség *kezdőfázisa*. Ez határozza meg a görbe időbeli eltolódását a "tisztá" cosinus görbéhez viszonyítva. $\theta > 0$ értékre a görbe „siet”, $\theta < 0$ értékre pedig „késik” a "tisztá" cosinus görbéhez viszonyítva (6.8. ábra).



6.8. ábra

Az $\omega t + \theta$ kifejezést, amely azt a szöget határozza meg, melynek a cosinusát keressük, a feszültség *pillanatnyi fázisának* nevezzük. A kezdőfázisoknak külön betűjelük van, attól függően, hogy milyen mennyiségre vonatkoznak:

<u>kezdőfázis</u>	<u>jelölés</u>
feszültség	θ
áram	ψ
e.m.e.	θ_e

A kezdőfázis értéke kapcsolatban van az áram, a feszültség, illetve az e.m.e. kiválasztott referenciáirányával. Tudjuk, hogy a referenciáirány megváltoztatása magával vonja az ilyen mennyiségek előjelének megváltozását is. Mivel

$$-U_m \cos(\omega t + \theta) = U_m \cos(\omega t + \theta \pm \pi)$$

látjuk, hogy a referenciáirány megváltoztatása megváltoztatja a feszültség kezdőfázisát $+\pi$ -vel vagy $-\pi$ -vel.

Az egyszerű periodikus mennyiségek kezdőfázisa *két* tényezőtől függ:

1. A kiválasztott kezdő időponttól, az idő számításához ($t = 0$ pillanat kiválasztásától)
2. Az önkényesen kiválasztott referenciáiránytól.

Figyeljünk meg két azonos ω körfrekvenciájú egyszerű periodikus feszültséget,:

$$u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) \quad \text{és} \quad u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \theta_2).$$

1. Ha $\theta_1 = \theta_2$, akkor $u_1(t)$ és $u_2(t)$ feszültség fázisban van és csak az amplitúdójuk különbözik.
2. Ha $\theta_1 \neq \theta_2$, akkor az $u_1(t)$ és az $u_2(t)$ feszültséget mutató görbék egymástól eltolódnak, azaz a két feszültség között *fáziskülönbség* lép fel: $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$, azaz a *fáziskülönbség* a megfigyelt két feszültség között *egyenlő a kezdőfázisaik különbségével*.
 - a) $\theta_1 > \theta_2$ - $u_1(t)$ görbe *balra* tolódik az $u_2(t)$ görbéhez viszonyítva, $u_1(t)$ görbe "siet" az $u_2(t)$ görbéhez viszonyítva.
 - b) $\theta_1 < \theta_2$ - $u_1(t)$ görbe *jobbra* tolódik az $u_2(t)$ görbéhez viszonyítva, $u_1(t)$ görbe "késik" az $u_2(t)$ görbéhez viszonyítva.

A fáziskülönbség fogalma nincs azonos mennyiségekhez kötve (nem csak kizárólag két áram vagy két feszültség között állapítjuk meg). A későbbiekben meglátjuk, hogy a feszültség és az áram közti fáziskülönbség $\phi = (\theta - \psi)$ fontos szerepet játszik az elektrotechnikában. Ekkor mondjuk azt, hogy az áram siet illetve késik a feszültséghez viszonyítva.

6.2.1. A PERIODIKUS MENNYISÉGEK KÖZÉPÉRTÉKE ÉS EFFEKTÍV ÉRTÉKE

A maximális érték mellett a periodikus mennyiségeket még néhány értékkel jellemezzük. A periodikus áram és feszültség *középértéke* jelentős néhány gyakorlati alkalmazásnál. Egy periódus alatt az áramerősség középértéke a következő módon írható fel matematikailag (ez a definíció érvényes minden más periodikus mennyiség középértékére is):

$$I_{\text{közép}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

Fontos gyakorlati példa az $I_m |\sin \omega t|$ illetve $U_m |\sin \omega t|$ függvény (úgynevezett "egyenirányított sinusfüggvény") középértéke.

$$I_{\text{közép}} = \frac{I_m}{T} \int_0^T \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right| dt = \frac{I_m}{T/2} \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi t}{T} dt$$

Mivel:

$$\int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{T}{\pi}$$

a helyettesítés tehát $\frac{2\pi}{T} t = x$, amiből deriválás után $\frac{2\pi}{T} dt = dx$, illetve $dt = \frac{T}{2\pi} dx$, viszont ekkor az integrálási határok is megváltoznak, hiszen ha $t = 0$, akkor $x = 0$, és $t = T/2$ értékre $x = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$. A kiértékelés ezután:

$$\frac{T}{2\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{T}{2\pi} [-(-1) + (+1)] = \frac{2T}{2\pi} = \frac{T}{\pi}.$$

A középérték eszerint:

$$I_{\text{közép}} = \frac{I_m}{T/2} \cdot \frac{T}{\pi} = \frac{I_m}{\pi/2} = 0,637 I_m .$$

Az egyenirányított sinusfüggvény középértéke tehát:

$$I_{\text{közép}} = \frac{I_m}{\pi/2} = 0,637 I_m$$

Magától értetődik, hogy az egyszerű periodikus áram vagy feszültség középértéke egyenlő nullával.

Az elektrotechnikában vannak olyan jelenségek, amelyben az áram vagy feszültség hatása arányos ezen mennyiségek négyzetének a középértékével. A periodikus mennyiségek négyzetes középértékének *négyzetgyökét* nevezzük a mennyiség *effektív értékének*. Ez a definíció érvényes minden más periodikus mennyiség effektív értékére is:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Fontos példa az egyszerű periodikus áram és feszültség függvény effektív értéke. Az $u(t) = U_m \cos(2\pi t/T)$ feszültség effektív értékét a következő módon kapjuk meg:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt} = U_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(4\pi t/T)}{2} dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Mivel:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{4\pi t}{T} dt = \frac{1}{2T} t \Big|_0^T + \frac{1}{T} \sin \frac{4\pi t}{T} \Big|_0^T = \frac{1}{2} .$$

Tehát:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m , \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

Az eff indexet a gyakorlatban többnyire elhagyják, ezért a következőkben az I és U megjelölés az áram és a feszültség effektív értékére vonatkozik.

6.3. Sinusos áramú hálózatok

6.3.1. A SINUSOSAN VÁLTOZÓ ÁRAM ÉS FESZÜLTSG ELŐÁLLÍTÁSA ÉS ALKALMAZÁSA

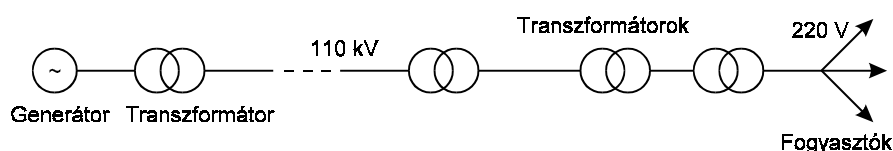
Csak az egyszerű periodikus függvény szerint változó feszültség hoz létre ugyanolyan alakú periodikus áramot a lineáris elemeken, mint saját maga. Ezért a lineáris elemekkel és az egyszerű periodikus függvény szerint változó (sinusos) áramokkal működő áramkörök sokkal könnyebben vizsgálhatók, mint más periodikus áramú áramkörök.

Minden periodikus mennyiség felírható úgy, mint egyszerű periodikus mennyiségek (sinusos mennyiségek) összege (általános esetben végtelen összeg), megfelelő amplitúdóval, frekvenciával és fázissal. Ezért az összes periodikus jelenség vizsgálása leegyszerűsíthető különböző frekvenciájú egyszerű periodikus (sinusos) jelenségek vizsgálatára. Bebizonyítható,

hogy egy tetszőleges, periodikus jel f frekvenciával ábrázolható mint "tisztá" egyszerű periodikus tagok összege, $f, 2f, 3f \dots$ frekvenciával. Azt a tagot, melynek f a frekvenciája *alapharmonikusnak* nevezzük, a $2f$ frekvenciájú tagot *második felharmonikusnak* nevezzük, és így tovább. Mivel a veszteségek a ferromágneses lemezekben arányosak f^2 -el, ezért a villamos energia előállításában arra törekednek, hogy a forgógenerátorok kivezetésein lévő feszültség minél inkább egyszerű periodikushoz közelítsen.

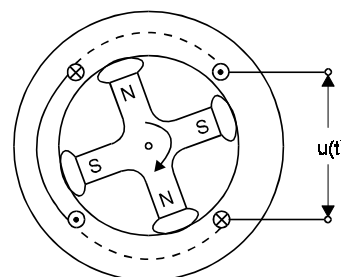
A villamos energia átalakításánál tudnunk kell azt, hogy ha a feszültség n -szeresére nő, akkor az áramerősség n -szeresére csökken, a távvezetékben a veszteségek pedig n^2 -szeresen csökkennek.

Egy ipari villamos hálózat leegyszerűsített rajza a 6.9. ábrán látható.



6.9. ábra

Az ipari frekvenciájú egyszerű periodikus (illetve jól megközelítően egyszerű periodikus) e.m.e. előállítása egyszerű. Erre a célra azokat a generátorokat használják, melyek leegyszerűsített rajza a 6.10. ábrán látható. A *forgórész (rotor)* mágnes (általában több pólusú), legtöbbször elektromágnes, melyet csúszó érintkezőkön keresztül egyenárrammal táplálnak. Megfelelő tekercseléssel elérhető, hogy az állórészen (sztátoron), illetve a generátor kimenetén megközelítően egyszerű periodikus (sinusos) feszültség jöjjön létre.



6.10. ábra

Magas frekvenciájú sinusos feszültségek létrehozására úgynevezett elektroncsöves vagy aktív félvezető elemes oszcillátorokat (rezgéskeltőket) használnak. A rezgéskeltő központi része egy rezgőkör, amely meghatározott f frekvencián rezeg. Az áramkör kivezetésein aktív elemekkel kell felerősíteni a feszültséget.

6.3.2. AZ ÁRAMERŐSSÉG MEGHATÁROZÁSA A SINUSOS FESZÜLTSÉGRE KAPCSOLT PASSZÍV ALAPELEMEN KERESZTÜL

Figyeljük meg a 6.11. ábrán látható R ellenállást, melyet $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$ feszültségre kapcsolunk!

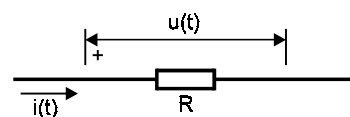
Az áramerősség ebben az esetben:

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \theta)$$

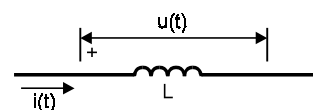
Az áram amplitúdója: $I_m = \frac{U_m}{R}$, kezdőfázisa pedig:

$$\psi = \theta.$$

$$i_R(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$



6.11. ábra



6.12. ábra

A sinusos feszültségre kapcsolt ellenálláson keresztül folyó áram ugyancsak sinusos és fázisban van a feszültséggel.

Induktív tekercs esetében (6.12. ábra) az áramerősség:

$$i_L(t) = \frac{1}{T} \int U_m \cos(\omega t + \theta) dt + I_0$$

Sinusos üzemmódban nincs egyirányú komponens ($I_0 = 0$), tehát:

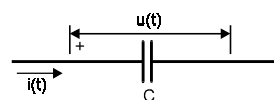
$$i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \theta) = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})$$

Az áram amplitúdója ezek szerint: $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$, és kezdőfázisa: $\psi = \theta - \frac{\pi}{2}$.

A sinusos feszültségre kapcsolt tekercsen keresztül folyó áram úgyszintén sinusos, viszont a feszültséghez képest késik $\pi/2$ -vel, vagyis negyed periódussal.

Kondenzátor esetében (6.13. ábra) az áramerősséget a következő kifejezéssel írhatjuk le:

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} [U_m \cos(\omega t + \theta)]$$



6.13. ábra

$$\begin{aligned} i_C(t) &= -\omega C U_m \sin(\omega t + \theta) = \\ &= \omega C U_m \sin(\omega t + \theta + \pi) = \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \theta + \pi - \pi/2) = \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \theta + \pi/2) = \\ &= \frac{U_m}{1/\omega C} \cos(\omega t + \theta + \pi/2) \end{aligned}$$

Az áram amplitúdója: $I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}$, és kezdőfázisa: $\psi = \theta + \frac{\pi}{2}$.

A sinusos feszültségre kapcsolt kondenzátoron keresztül folyó áram is sinusos, viszont a feszültséghez képest siet $\pi/2$ -vel, vagyis negyed periódussal.

6.3.3. A SINUSOS MENNYISÉGEK ÁBRÁZOLÁSA FORGÓVEKTOR SEGÍTSÉGÉVEL

Ha elképzeljük, hogy az OA szakasz állandó ω szögsebességgel forog az O pont körül, akkor a szakasz vetületének hossza az x tengelyen cosinusfüggvény szerint változik (6.14. ábra):

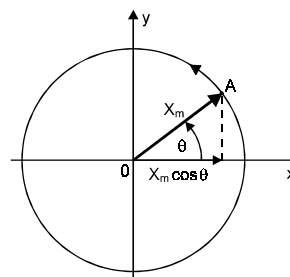
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \theta),$$

ahol X_m az OA szakasz hosszát jelöli.

A sinusosan változó mennyiségek három jellemző segítségével írhatók le: *amplitúdó, frekvencia és kezdőfázis.*

Ha a lineáris áramkörre kapcsolt összes generátor egyszerű periodikus és azonos frekvenciájú, akkor az áramkör összes feszültsége és árama azonos frekvenciájú és egyszerű periodikus lesz. Ekkor még csak két adatot kell róluk tudnunk: amplitúdójukat és fázisukat.

A forgó vektor szokásos jelölése $\underline{X} = X e^{j\theta}$, X az amplitúdó, θ a kezdőfázis. A tengelyt, melyhez viszonyítva a kezdőfázist számítjuk, *fázistengelynek* nevezzük.



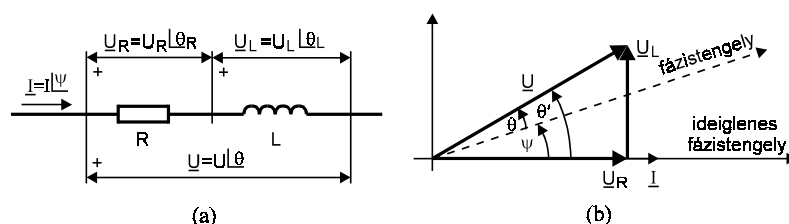
6.14. ábra

A vektordiagramokon feltüntetett vektorok általában az effektív értékekkel arányosak, nem pedig az amplitúdókkal.

Az áramkörök megoldására régebben gyakran használták ezt a módszert és még elvétve ma is használják. Sokkal kényelmesebb és célszerűbb viszont az a módszer, mikor a sinusos áramot és feszültséget komplex mennyiséggel szemléltetjük.

6.1. Példa: Határozzuk meg az áramerősséget ($\underline{I}$) a 6.15. ábrán látható soros RL kapcsoláson.

Megoldás:



6.15. ábra

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = U_R e^{j0} + U_L e^{j\pi/2}$$

Mivel $U = RI$ és $U = \omega LI$, ezért: $\underline{U} = RI e^{j0} + \omega LI e^{j\pi/2}$.

$$U^2 = R^2 I^2 + \omega^2 L^2 I^2$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \theta' = \arctan \frac{\omega L}{R} \quad \theta' = \theta - \psi \Rightarrow \psi = \theta - \theta'$$

Így a pillanatnyi áramerősségre a következő kifejezést kapjuk:

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \theta - \theta')$$

Az áramkör feszültségének és áramának vektordiagramja a 6.15.b ábrán látható.

6.3.4. A TELJESÍTMÉNY A VÁLTÓÁRAMÚ HÁLÓZATOKBAN

A sinusosan változó áramokat hétköznapi nyelven váltóáramoknak is nevezik. Figyeljünk meg egy $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$ feszültségre kapcsolt fogyasztót. Tételezzük fel, hogy a fogyasztón átfolyó áram $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$, ekkor a fogyasztó pillanatnyi teljesítményének értéke:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \psi)$$

$$\text{Mivel } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

így:

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta + \psi) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(\theta - \psi)$$

Bármely egész számú periódus időtartama alatt az első tag középértéke nullával egyenlő. A második tag nem függ az időtől és a *fogyasztó közép teljesítményét* képezi.

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\theta - \psi) = UI \cos \phi$$

Az előző kifejezésben a $\cos \phi$ -t *teljesítménytényezőnek* nevezzük, maga a ϕ pedig a fáziskülönbség a feszültség és az áram között, vagyis:

$$\phi = \theta - \psi.$$

Mivel a pillanatnyi teljesítménynek a váltóáramú hálózatok esetében ritkán van gyakorlati jelentősége, ezért a teljesítmény fogalma alatt a közép teljesítményt értjük.

Most tételezzük fel, hogy $u(t) = U_m \cos \omega t$ feszültségre R ellenállást, C kondenzátort és L tekercset kötöttünk. Határozzuk meg mindhárom fogyasztó pillanatnyi teljesítményét!

Ellenállás esetében (tudjuk, hogy $i(t) = u(t)/R$) a pillanatnyi teljesítmény:

$$p_R(t) = \frac{U_m^2}{R} \cos^2 \omega t = \frac{U_m^2}{2R} (1 + \cos 2\omega t).$$

A zárójelben lévő kifejezés mindig pozitív, azaz az *ellenállás teljesítménye mindig pozitív*, ez azt jelenti, hogy minden időtartományban az ellenálláshoz áramlik az energia. Ezért az ellenállásra azt mondjuk, hogy *aktív fogyasztó*.

Figyelembe véve, hogy: $\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$ és $i_C(t) = \omega C U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$, a kondenzátor pillanatnyi teljesítménye:

$$\begin{aligned} p_C(t) &= U_m \cos \omega t I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\omega C U_m^2 \cos \omega t \sin \omega t = -\frac{1}{2} \omega C U_m^2 \sin 2\omega t \end{aligned}$$

A váltóáramú feszültségre kapcsolt kondenzátor váltakozva töltődik ellentétes irányból, a két töltődési (töltési) időtartam között a kondenzátor kisül, vagyis visszaadja az energiát az áramkörnek. Ezért a kondenzátorra azt mondjuk, hogy *reaktív fogyasztó*.

A tekercs (amelynél az áram kifejezése $i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t$) pillanatnyi teljesítménye:

$$p_L(t) = \frac{U_m^2}{\omega L} \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{\omega L} \sin 2\omega t.$$

Abban az időtartományban, melyben az áramerősség növekszik, a tekercsbe áramlik az energia, mikor pedig az áramerősség csökken, az energia visszaáramlik az áramkörbe. A tekercs ezért *reaktív fogyasztó*.

Figyeljünk meg egy fogyasztót, melyet az ellenállások, kondenzátorok és tekercsek tetszőleges kombinációja alkot. Az ilyen fogyasztó teljesítményét két részre oszthatjuk:

- arra a részre, mely időben változik, de mindig pozitív marad;
- és arra a részre, amely egyenletes időközönként változtatja előjelét.

A pillanatnyi teljesítmény kifejezésének első része az energia fogyasztóhoz való szállításának folyamatát írja le, amely a fogyasztón átalakul vagy hőenergiává vagy valamilyen más energiává, a második része pedig a fogyasztó és a generátor közti energiacsere folyamatát írja le.

Tételezzük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\theta = 0$, akkor $\phi = -\psi$ vagy $\psi = -\phi$. Ekkor a pillanatnyi teljesítmény kifejezése a következőképpen néz ki:

$$p(t) = u(t) i(t) = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \phi),$$

a $\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi$ bevezetésével:

$$p(t) = U_m I_m \cos \phi \cos^2 \omega t + U_m I_m \sin \phi \sin \omega t \cos \omega t.$$

Ha alkalmazzuk a következő átalakításokat:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \text{ és}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha,$$

megkapjuk a kívánt kifejezést a fogyasztó teljesítményére:

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \phi (1 + \cos 2\omega t) + \frac{1}{2} U_m I_m \sin \phi \sin 2\omega t.$$

Az első tag középtérteke pontosan megegyezik a fogyasztó középteljesítményével, melyet a *fogyasztó hatásos (aktív) teljesítményének* is nevezünk.

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \phi = UI \cos \phi$$

A második tag amplitúdóját a *fogyasztó meddő (reaktív) teljesítményének* nevezzük.

$$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \phi = UI \sin \phi$$

A veszteségek, melyek az energia szállítása közben a vezetékben keletkeznek elkerülhetetlenek, ezért ezzel számolni kell. A mellékveszteségek, melyek a fogyasztó meddő teljesítményéből erednek, a fogyasztó és a generátor közti energiavándorlás következményei - ez az ára az energia "sétájának" a vezetéken keresztül. A gyakorlatban arra törekednek, hogy ezeket a fölösleges veszteségeket kiküszöböljék. A fogyasztó meddő teljesítménye jelzés arra, hogy mekkorák ezek a fölösleges, mellékveszteségek.

Figyeljünk meg most egy ideális feszültség- vagy áramgenerátort $u_g(t) = U_{gm} \cos \omega t$ feszültséggel és $i_g(t) = I_{gm} \cos(\omega t + \phi)$ áramerősséggel a generátoron keresztül. A generátor pillanatnyi teljesítménye:

$$p_g(t) = u_g(t) i_g(t) = U_{gm} I_{gm} \cos \omega t \cos(\omega t + \psi)$$

A fáziskülönbség pedig:

$$\phi' = \theta - \psi = -\psi$$

A pillanatnyi teljesítmény a fáziskülönbség függvényében:

$$p_g(t) = U_{gm} I_{gm} \cos \phi' \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} U_{gm} I_{gm} \sin \phi' \sin 2\omega t$$

Az első tag középtértekét a *generátor hatásos teljesítményének* nevezzük.

$$P_g = \frac{U_{gm} I_{gm}}{2} \cos \phi' = U_g I_g \cos \phi'$$

A második tag amplitúdóját a *generátor meddő teljesítményének* nevezzük.

$$Q_g = \frac{U_{gm} I_{gm}}{2} \sin \phi' = U_g I_g \sin \phi'$$

6.3.5. A VÁLTÓÁRAMÚ HÁLÓZATOK MEGOLDÁSA KOMPLEX SZÁMÍTÁSSAL

Ha van egy tetszőleges hálózatunk, melyben azonos ω körfrekvenciájú sinusos változású generátorok működnek, akkor a hálózatban a feszültségek és az áramok is sinusos változásúak lesznek ugyancsak ω körfrekvenciával, ami a következő alakban írható le:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi), \quad \text{illetve} \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta).$$

Kirchhoff I. törvénye a váltóáramú hálózatok csomópontjaira így szól:

$$\sum_{k=1}^n I_k \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_k) = 0 \quad / : \sqrt{2}.$$

Mivel $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, felírhatjuk így is:

$$\sum_{k=1}^n (I_k \cos \omega t \cos \psi_k - I_k \sin \omega t \sin \psi_k) = 0,$$

vagy:

$$\cos \omega t \sum_{k=1}^n I_k \cos \psi_k - \sin \omega t \sum_{k=1}^n I_k \sin \psi_k = 0.$$

Az egyenlet bal oldala *minden pillanatban* egyenlő kell, hogy legyen nullával, ez akkor teljesül, ha mindkét összeg a bal oldalon egyenlő nullával (az I_k az áram effektív értékét jelöli):

$$\sum_{k=1}^n I_k \cos \psi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k \sin \psi_k = 0.$$

A Kirchhoff II. törvénye szerinti egyenletek is leegyszerűsíthetők olyan egyenletpárookra, melyekben *az idő nem szerepel* (a törvény, mint tudjuk minden zárt körre – hurokra – érvényes, amely tetszőleges n számú ágat tartalmaz):

$$\sum_{k=1}^n U_k \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n U_k \cos \theta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n U_k \sin \theta_k = 0$$

Az előző két kifejezésben az U_k a feszültség effektív értékét jelöli. Tételezzünk fel egy hálózatot n_g számú ággal és n_{cs} számú csomóponttal. Ekkor:

Kirchhoff I. Törvénye $2(n_{cs} - 1)$ számú egyenletet ad

Kirchhoff II. Törvénye $2n_k = 2(n_g - n_{cs} + 1)$ számú egyenletet ad

Összesen $2(n_{cs} - 1) + 2(n_g - n_{cs} + 1) = 2n_g$

Az ismeretlenek száma: $4n_g$ (effektív érték és kezdőfázis - n_g feszültségre és - n_g áramerősségre).

A pótegyenletek száma: $2n_g$. A pótegyenletek megadják az összefüggést az ágakban folyó áramok effektív értéke és kezdőfázisa, valamint az ágak végei között mérhető feszültségek effektív értéke és kezdőfázisa között az n_g ágakban.

Ezek az összefüggések az ideális ellenállásokra, kondenzátorokra és tekercsekre a következők:

a) ellenállás : $U = RI$, $\theta = \psi$

b) tekercs : $U = \omega LI$, $\theta = \psi + \frac{\pi}{2}$

$$c) \text{ kondenzátor} : U = I/\omega C, \quad \theta = \psi - \frac{\pi}{2}$$

$$d) \text{ ideális feszültséggenerátor} : U = E, \quad \theta = \theta_e$$

$$e) \text{ ideális áramgenerátor} : I = I_s, \quad \psi = \psi_i$$

Távolítsuk el a Kirchhoff egyenletek alapján kapott négy egyenletből a feszültségeket az imént felsorolt 5 egyenlet segítségével. Az ilyen egyenletek megoldása I_k és ψ_k szerint nagyon nehéz. Mivel ezek lineáris egyenletek $I_k \cos \psi_k$ és $I_k \sin \psi_k$ szerint, célszerűnek látszik a következő helyettesítés:

$$I'_k = I_k \cos \psi_k \quad \text{és} \quad I''_k = I_k \sin \psi_k.$$

Így könnyen kiszámíthatjuk I'_k -et és I''_k -ot, viszont I_k -t és ψ_k -t a következő kifejezések segítségével kaphatjuk meg:

$$I_k = \sqrt{I'^2_k + I''^2_k}, \quad \text{illetve} \quad \tan \psi_k = \frac{I''_k}{I'_k}.$$

6.3.5.1. Kirchhoff törvényei komplex alakban. Impedancia és admittancia

Komplex mennyiségek használatával az egy-egy Kirchhoff törvényből kapott egyenletpár (amelyek Kirchhoff törvényeit fejezik ki a váltóáramú áramkörökre algebrai alakban) felírható egy-egy komplex egyenlet formájában. Figyeljük meg a Kirchhoff csomóponti törvényéből eredő előzőekben felírt egyenletpárt: ha a második egyenletet megszorozzuk az imaginárius taggal, j -vel, majd összeadjuk az elsővel, akkor a következő komplex egyenletet kapjuk:

$$\sum_{k=1}^n I_k (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) = 0.$$

Fontos megérteni, hogy ez a komplex egyenlet az *eredeti egyenletpárnak* csupán egy *kompakt (összevont) ábrázolásmódja*.

Euler képlete szerint még egyszerűbb alakban írható fel (az I_k továbbra is az áram effektív értékét jelöli):

$$\sum_{k=1}^n I_k e^{j\psi_k} = 0.$$

Definiáljuk az *áram komplex effektív értékét* a következő módon:

$$\underline{I} = I e^{j\psi}$$

Az áram komplex effektív értéke komplex mennyiség, melynek abszolút értéke megegyezik az áram effektív értékével, argumentuma pedig a kezdőfázissal.

Így Kirchhoff I. törvényének komplex alakja a következő lesz:

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0.$$

Miért vezetjük be a komplex áramerősség fogalmát? Az utóbbi egyenlet sokkal kompaktabb (velősebb, többit mondó), mint az egyenletpár amiből ered. Sokkal fontosabb viszont, hogy a komplex alakú Kirchhoff-egyenlet *alakjában megegyezik az egyenáramú áramkörökre érvényes egyenlettel*. A különbség csak annyi, hogy itt az áramerősség helyett az áram komplex effektív értéke van jelen, amely magába foglalja a váltóáramok valódi effektív értékét és kezdőfázisát.

Ugyanez az előbbi gondolatmenet megismételhető a Kirchhoff huroktörvénye alapján (az előbbieken) felírt egyenletpárra. A végeredményt a következő komplex egyenlet képviseli:

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0$$

Ez utóbbi kifejezés Kirchhoff II. törvényének komplex alakja, amelyben a feszültség komplex effektív értéke jelenik meg. A komplex effektív érték természetesen itt is az effektív értéket és a kezdőfázist tartalmazza:

$$\underline{U}_k = U_k e^{j\theta_k}$$

Az áramkör elemein az áramerősség és a feszültség közti összefüggést komplex alakban a következő egyenletek adják meg:

a) ellenállás : $\underline{U}_R = R \underline{I}$

b) tekercs : $\underline{U}_L = \omega L \underline{I} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L \underline{I}$

c) kondenzátor : $\underline{U}_C = \frac{\underline{I} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \cdot \underline{I} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$

d) ideális feszültséggenerátor : $\underline{U} = \underline{E}$

e) ideális áramgenerátor : $\underline{I} = \underline{I}_S$

Az a), b) és c) pontokban felírt egyenletek alapján, a feszültség felírható az alábbi alakban is (és ezt a komplex impedancia definíciójának is tekinthetjük, ámbár sokan az általánosított Ohm-törvényt látják benne):

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}.$$

Az áramköri elemek impedanciái tehát:

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Az impedancia ($\underline{Z}$) mértékegysége az *ohm* [Ω].

Az ellenállás impedanciája *valós* (reális), viszont a tekercs és a kondenzátor impedanciája *képzetes* (imaginárius).

Kirchhoff II. törvényét, ezek szerint, felírhatjuk az egyenáramoknál megszokott alakban is:

$$\sum \underline{E} - \sum \underline{Z} \underline{I} = 0$$

Az $\underline{E}$ és $\underline{Z} \underline{I}$ előtt "+" előjel van, ha az *e.m.e.* illetve az áram referenciáiránya (vonatköztatási iránya) megegyezik a haladási iránnyal a hurok mentén, ellenkező esetben "-" az előjel.

Az impedancia reciprokl értékét *admittanciának* ($\underline{Y}$) nevezzük.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

Az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor admittanciája a megfelelő impedanciából kapható meg:

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G, \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}, \quad \underline{Y}_C = j\omega C$$

Az admittancia ($\underline{Y}$) mértékegysége a *siemens* [S].

Az ellenállás admittanciája *valós* (reális), viszont a tekercs és a kondenzátor admittanciája *képzetes* (imaginárius).

A váltóáramú körök impedanciája az egyenáramú körök ellenállásának "felel meg", az admittancia pedig a vezetőképességnek.

Szemmel látható, hogy az impedanciának és admittanciának, az elemek összetett kötése esetén, általános esetben lesz valós és imaginárius része is:

$$\underline{Z} = R + jX$$

ahol:

R – a rezisztencia (hatásos, ohmikus ellenállás),

X - a reaktancia (meddő ellenállás).

Azokban az esetekben, melyeket mi vizsgálunk R mindig pozitív (vannak úgynevezett aktív elemek, melyeket negatív rezisztenciával is jellemezhetünk, de ezekről mi a későbbiekben nem teszünk említést). A reaktancia lehet pozitív és negatív is, úgy tekintjük, hogy X a meddő ellenállás algebrai értékét jelöli.

Az admittancia esetében felírható, hogy:

$$\underline{Y} = G + jB$$

ahol:

G - a konduktancia (hatásos vezetőképesség),

B - a szuszceptancia (meddő vezetőképesség).

B is a meddő vezetőképesség algebrai értékét jelöli, mint az X a meddő ellenállás esetében.

Összefüggések a hatásos és meddő vezetőképesség valamint a hatásos és meddő ellenállás között:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}, \quad \text{illetve}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}.$$

Mint minden komplex számot, az impedanciát és az admittanciát is felírhatjuk exponenciális alakban. Az impedancia argumentumát ϕ -vel szokás jelölni.

$$\underline{Z} = Z e^{j\phi}, \quad \text{illetve} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = Y e^{-j\phi}.$$

Két pont közti potenciálkülönbség vagy feszültség effektív értékét váltóáramú áramkörökben a következő egyenlet alapján kapjuk meg (ha az út iránya és az áram vagy e.m.e. referens iránya megegyezik, akkor I -t illetve E -t "+" előjellel írjuk):

$$\underline{U}_{AB} = \left(\sum \underline{E} - \sum \underline{ZI} \right)_{B\text{-től } A\text{-ig}}$$

6.3.5.2. Az elemek soros és párhuzamos kapcsolása. Az elemek csillag- és háromszög-kapcsolásának azonossága

Figyeljük meg először több $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$ impedanciájú elem soros kapcsolását (6.16a ábra). Az elemek eredő impedanciája (n számú soros kapcsolású impedancia eredő impedanciája):

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n$$

Ennek megfelelően az eredő admittanciára a következő kifejezést kapjuk:

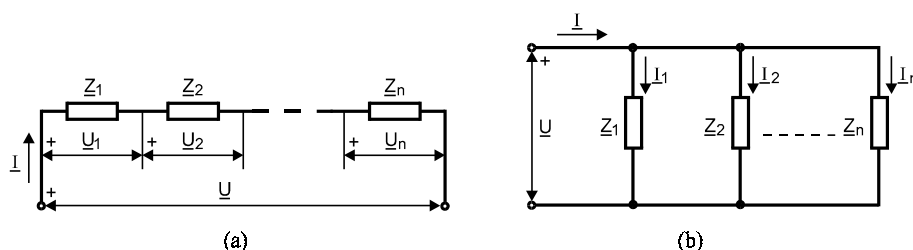
$$\frac{1}{\underline{Y}_{\text{ekv}}} = \frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Y}_n}$$

Az elemek párhuzamos kapcsolása esetén (6.16b ábra), az eredő impedancia a következő egyenlettel határozható meg (n számú párhuzamosan kapcsolt impedancia eredő impedanciája):

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ekv}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}$$

Ha az elemek admittanciáját használjuk egyszerűbb kifejezést kapunk (n darab párhuzamosan kapcsolt admittancia ekvivalens-eredő admittanciája):

$$\underline{Y}_{\text{ekv}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n$$



6.16. ábra

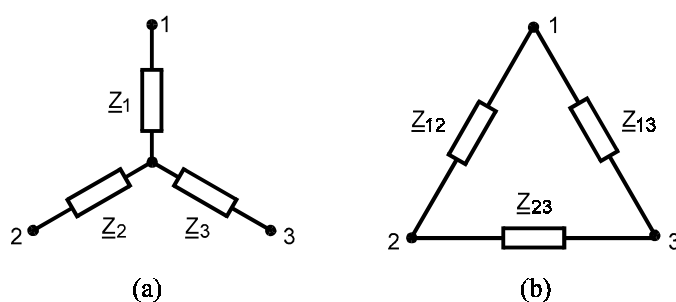
Végül figyeljünk meg három csillagba kötött és három háromszögbe kötött elemet (6.17 ábra). A feltételek, melyek mellett az elemek csillagkapcsolása ekvivalens az elemek háromszög-kapcsolásával és megfordítva, a következők:

Ha ismertek a delta (háromszög) kötés impedancia-értékei, akkor a csillag (ipszilon) kapcsolás elemei:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{13}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$



6.17. ábra

Ismert, csillagkötésbe kötött impedancia-értékek birtokában a háromszög-kötés elemei:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}$$

6.3.5.3.A komplex feszültség és áram ábrázolása a komplex síkban

Minden komplex számot egy ponttal ábrázolhatunk a komplex síkban. Ez a pont leírható koordinátaival (a komplex szám valós és imaginárius részével) vagy a koordináta-rendszer középpontjától való távolságával (a komplex szám abszolút értékével) és azzal a szöggel, melyet ez a szakasz bezár a valós tengellyel (a komplex szám argumentuma).

Ha $\underline{U} = U e^{j\theta}$ a feszültség komplex effektív értéke a $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$ komplex impedanciájú elem végei között, akkor az elemen keresztül folyó áram komplex effektív értéke:

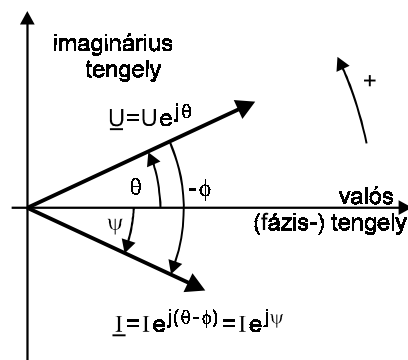
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\theta}}{Z e^{j\phi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\theta-\phi)}$$

Konvenció (megegyezés): A pozitív szöget a komplex síkban az óra járásával ellenkező irányban vesszük (6.18. ábra). A szöget mindig a valós tengelytől kezdve számítjuk.

A 6.18. ábrán a θ pozitív szög, a $\psi = (\theta - \phi)$ viszont negatív, mivel $\phi > 0$.

Az ilyen ábrázolás nemcsak az effektív értéket szemlélteti, hanem a komplex feszültség és áram fázisát is. Ezért az ilyen módon ábrázolt komplex feszültségeket és áramokat *fázoroknak* (fázoroknak vagy egyszerűen csak vektoroknak) nevezzük, a diagramokat pedig, melyekben a feszültség és az áram közti összefüggés fázorokkal (fázorokkal, vektorokkal) van ábrázolva, *fázordiagramnak* (fázorábrának) vagy *vektordiagramnak*, a valós tengelyt pedig *fázistengelynek* nevezzük.

Néha előnyös az impedanciát is a komplex síkban ábrázolni. Habár az impedancia nem periodikus mennyiség és nincs kezdőfázisa, mégis az ilyen diagramokra gyakran mondjuk, hogy impedancia-vektordiagramok.

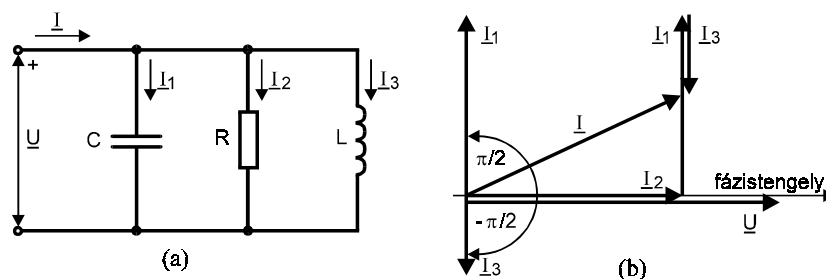


6.18. ábra

6.2. Példa: Készítsük el a 6.19.a ábrán felrajzolt párhuzamos RLC áramkör feszültség és áram vektordiagramját

Megoldás:

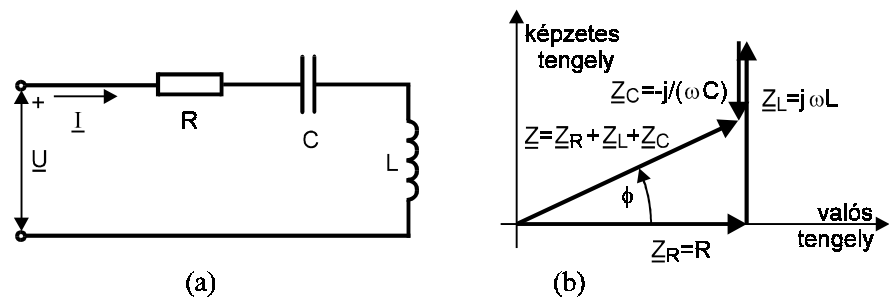
Számadatok hiányában csak elvi megoldás lehetséges, amit a 6.19.b ábra illusztrál



6.19. ábra

6.2. Példa: Rajzoljuk fel a 6.20.a ábrán látható soros RLC áramkör impedancia-vektordiagramját

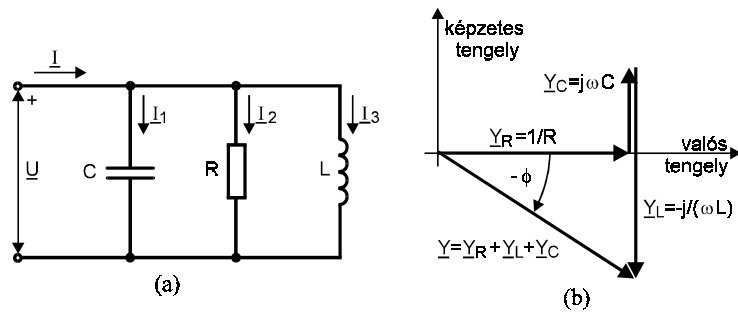
Megoldás: A keresett impedancia-vektordiagram a 6.20.b ábrán látható.



6.20. ábra

6.2. Példa: Szerkesszük meg a 6.21.a ábrán látható párhuzamos RLC áramkör admittancia-vektordiagramját!

Megoldás: 6.21.b ábra.



6.21. ábra

6.3.6. FESZÜLTSG- ÉS ÁRAMGENERÁTOROK

A valós feszültséggenerátorokat ábrázolhatjuk, mint sorba kötött ideális feszültség generátor ($\underline{E}$ e.m.e.-vel, belső impedancia nélkül) és impedancia (amely megegyezik a generátor belső impedanciájával).

A valós áramgenerátort ideális áramgenerátor és ellenállás párhuzamos kapcsolásával ábrázoljuk.

Minden valós feszültséggenerátort helyettesíthetünk valós áramgenerátorral és fordítva. A feszültség- és áramgenerátorra azt mondjuk, hogy ekvivalensek (egyenértékűek), ha azonos impedanciájú fogyasztón keresztül azonos erősségű áramot idéznek elő (az ekvivalencia feltételei az egyenáramoknál megismert módon számíthatók ki).

Az ekvivalencia feltételei feszültség- és áramgenerátornál

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_g, \quad \underline{I}_s = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_g} = \underline{Y}_g \underline{E}$$

6.3.7. HUOKÁRAMOK MÓDSZERE KOMPLEX ALAKBAN

Az egyenáramú áramkörök megoldására minden módszer és elmélet, Kirchhoff két törvényén alapszik. Minden módszer és elmélet, melyet az egyenáramú áramkörökre levezettünk érvényes a váltóáramú áramkörökre is, mivel ezek a törvények formailag azonosak a váltóáramú áramkörökre is. A különbség csak annyi, hogy most a komplex feszültségekkel és áramokkal számolunk ezeknek a mennyiségeknek az intenzitása helyett, és az ellenállások helyett komplex ellenállások vannak.

A hurokáramok módszerével közvetlenül ($n_g - n_{cs} + 1$) számú egyenletet írhatunk fel Kirchhoff II. törvénye szerint, melyekben Kirchhoff I. törvénye szerint figyelembe vettünk ($n_{cs} - 1$) számú egyenletet. A hurokáramok egyenletei komplex alakban a következőképpen néznek ki:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{1n} \underline{I}_n &= \underline{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{2n} \underline{I}_n &= \underline{E}_{22} \\ \vdots & \\ \underline{Z}_{n1} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{nn} \underline{I}_n &= \underline{E}_{nn} \end{aligned}$$

Ezekben az egyenletekben:

$\underline{I}_j$ - komplex áramerősség a j ágban, $j=1,2,\dots,n$

$\underline{Z}_{jj}$ - az elemek impedanciáinak összege a j hurok mentén, $j=1,2,\dots,n$

$\underline{Z}_{jk}$, $j \neq k$ - a j és k hurok közös ágaiban levő impedanciáinak összege; ha a közös ágban a j és k hurok kiválasztott referenciáirányai megegyezők, akkor $\underline{Z}_{jk}$ előjele pozitív, ellenkező esetben negatív; $j, k=1,2,\dots,n$

$\underline{E}_{jj}$ - az összes komplex e.m.e. összege a j hurok mentén; a generátorok e.m.e.-je, melyek referenciairánya megegyezik a hurok irányával, "+" előjelű; $j=1,2,\dots,n$

A hurokáramok módszerének esetében foglaljuk össze az áramkörök megoldásának lépéseit:

1. Azokat az ágakat, melyekbe áramgenerátor van kötve nem számíthatjuk a hurkok számának (n_k) meghatározásánál. Ezek a hurkok nem tartalmazhatnak olyan ágot, melybe áramgenerátor van kötve.

2. Képzeljük el, hogy minden áramgenerátor árama olyan hurok mentén záródik, amely nem tartalmaz más áramgenerátort. Ezekre nem írjuk fel a hurokáramok módszere szerinti egyenleteket, mivel ezeknek a hurokáramoknak az erősségét ismerjük.

3. A hurokáramoknak n_k egyenletét írjuk fel, melyeknél az áramgenerátorok hurokárama meghatározott módon kerül be (a közös ágak impedanciáin keresztül, melyek egyidőben a figyelt hurok és az áramgenerátorokhoz tartozó hurkok részei is).

6.3.8. A CSOMÓPONTI POTENCIÁLOK MÓDSZERE KOMPLEX ALAKBAN

A csomóponi potenciálok vagy független potenciálok módszere ($n_{cs}-1$) egyenlet sematizált módon való felírását jelenti Kirchhoff I. törvénye szerint, melyekben mindjárt figyelembe vettük az ($n_g-n_{cs}+1$) számú egyenletet, melyeket Kirchhoff II. törvénye szerint írhatunk fel az áramkörre.

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11}\underline{V}_{1+} + \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{1n}\underline{V}_n &= \left(\sum \underline{EY}\right)_1 + \left(\sum \underline{I}_s\right)_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{Y}_{n1}\underline{V}_{1+} + \underline{Y}_{n2}\underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{nn}\underline{V}_n &= \left(\sum \underline{EY}\right)_n + \left(\sum \underline{I}_s\right)_n \end{aligned}$$

Ezekben az egyenletekben:

$\underline{V}_j$ - j csomópont komplex potenciálja, $j = 1,2,\dots,n$

$\underline{Y}_{jj}$ - a j csomópontban összefutó összes ág komplex vezetőképességének (impedanciáinak) összege, $j = 1,2,\dots,n$

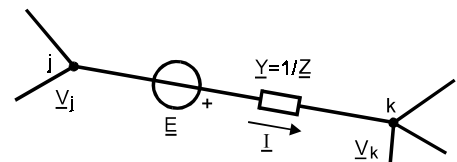
$\underline{Y}_{jk} = \underline{Y}_{kj}$ - a j és k csomópont közti összes ág impedanciájának az összege, *negatív előjellel véve*, $j, k = 1,2,\dots,n$, $j \neq k$

$(\sum \underline{EY})_j$ - a j csomópontban összefutó ágak generátorai e.m.e.-jének szorzata a megfelelő (a generátorhoz tartozó) ág impedanciájával; azok a szorzatok, amelyeknél az e.m.e. referenciairánya a j csomópont *felé* mutat pozitív előjelűek; $j = 1, 2, \dots, n$

$(\sum \underline{I}_s)_j$ - a j csomópontban összefutó ágakban elhelyezkedő áramgenerátorok áramainak összege; ha az $\underline{I}_s$ áram referenciairánya a j csomópont *felé* mutat, akkor $\underline{I}_s$ pozitív előjelű; $j = 1, 2, \dots, n$

Ha ezeknek az egyenleteknek a segítségével meghatározzuk minden csomópont potenciálját, akkor a j és k csomópont közti bármely ágba az áramerősséget a következő képlet alapján kapjuk meg (6.22. ábra):

$$\underline{I} = \underline{Y} (\underline{E} + \underline{V}_j - \underline{V}_k)$$



6.22. ábra

6.3.9. A FOGYASZTÓK ÉS GENERÁTOROK KOMPLEX TELJESÍTMÉNYE

A fogyasztó P hatásos teljesítménye alatt értjük a fogyasztó teljesítményének *középértékét* egész számú periódusidő alatt, a Q meddő teljesítmény alatt pedig annak a résznek az amplitúdóját, amely az energiacsere gyorsaságát írja le a fogyasztó és az áramkör többi eleme között.

Az alapvető különbség ellenére, a fogyasztó hatásos és meddő teljesítményét gyakran egy komplex kifejezésben egyesítjük, melyet a *fogyasztó komplex teljesítményének* ($\underline{S}$) nevezünk.

$$\underline{S} = P + jQ = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = UI e^{j\phi}$$

A komplex teljesítmény ($\underline{S}$) abszolút értékét ($S = UI$) a *fogyasztó látszólagos teljesítményének* nevezzük.

$$S = UI$$

A fogyasztónak az így definiált komplex teljesítménye kifejezhető a feszültség és áram komplex effektív értékének segítségével is. Legyen:

$$\underline{U} = U e^{j\theta}, \underline{I} = I e^{j\psi}$$

Tudjuk, hogy $\psi = \theta - \phi$, ahol ϕ a feszültség és áram közti fáziskülönbség, ezért $\underline{S} \neq \underline{U}\underline{I}$, hanem:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$$

ahol $\underline{I}^*$ - az áram konjugált komplex értéke.

Ha a fogyasztó csak impedanciájával írható le ($\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$, $\underline{Z} = R + jX$), akkor:

$$\underline{S} = \underline{Z}\underline{I}\underline{I}^* = \underline{Z}\underline{I}^2 = R\underline{I}^2 + jX\underline{I}^2$$

Összehasonlítva az utolsó két egyenletet látjuk, hogy a $\underline{Z} = R + jX$ impedanciájú fogyasztó hatásos és meddő teljesítményét az az áram effektív értékének függvényében is kifejezhetjük. Ekkor a kifejezés a következő alakot ölti:

$$P = RI^2, Q = XI^2$$

Mindhárom (hatásos, meddő és látszólagos) teljesítmény mértékegysége a *watt* [W]. Mégis, hogy különbséget tehessünk ezen teljesítmények között, a mértékegységeiket különböző módon nevezték el. Így a hatásos teljesítmény mértékegységét *wattnak* [W], a meddő teljesítményét *voltamper reaktív* [VAR], a látszólagos teljesítmény mértékegységét pedig *voltampernek* [VA] nevezzük. A VAR és VA számbelileg és dimenziójában is megegyezik a wattokban kimutatott értékkel.

A feszültség- vagy áramgenerátor komplex teljesítményét a következőképpen definiáltuk:

$$\underline{S}_g = P_g + jQ_g = U_g I_g \cos \phi' + jU_g I_g \sin \phi' = U_g I_g e^{j\phi'}$$

A generátor komplex teljesítményének abszolút értéke, a *generátor látszólagos teljesítménye*:

$$S_g = U_g I_g$$

A generátor komplex teljesítménye a komplex feszültség és az áram komplex effektív értékének függvényében:

$$\underline{S}_g = P_g + jQ_g = \underline{U}_g \underline{I}_g^*$$

6.3.10. ÁLTALÁNOS HÁLÓZATSZÁMÍTÁSI TÉTELEK

Az általános hálózatszámítási tételek mélyreható vizsgálata az egyenáramoknál található. Mivel formailag ugyanazokhoz a kifejezésekhez vezet a váltóáramokra alkalmazott hálózatszámítási tételek analízise is, itt csak a tételek leltárszerű felsorolására szorítkozunk.

6.3.10.1. A szuperpozíció elve

A hálózat bármelyik ágában az áramerősség komplex effektív értéke egyenlő azoknak az áramerősségeknek az összegével, melyeket a hálózatban lévő feszültség- és áramgenerátorok hoznának létre abban az ágban, ha egyenként működnének.

6.3.10.2. A reciprocitás elve

Ha a j ágba kötött $\underline{E}$ e.m.e.-jű generátor a k ágban $\underline{I}$ erősségű áramot hoz létre, akkor ez a generátor a k ágba kötve a j ágban azonos $\underline{I}$ erősségű áramot hozna létre.

6.3.10.3. Thévenin tétele

Bármely két kiválasztott pontja közötti ágra vagy ágrészre nézve, a váltóáramú hálózat úgy viselkedik mint egy valós feszültséggenerátor $\underline{E}_{ekv}$ e.m.e.-vel és $\underline{Z}_{ekv}$ belső impedanciával. $\underline{E}_{ekv}$ megegyezik a pontok közötti üresjárási feszültséggel (a vizsgált ágot kiiktatva számítjuk a feszültséget), $\underline{Z}_{ekv}$ pedig a két pont közti impedanciával (ha a feszültséggenerátorok feszültségeit nullának tekintjük, az áramgenerátorokat pedig szakadással helyettesítjük).

6.3.10.4. Kompenzáció elve

Egy tetszőleges áramkörben, a $\underline{Z}$ impedanciájú ágot (vagy egy részét), melyen keresztül $\underline{I}$ áram folyik, kicserélhetjük ideális feszültséggenerátorra, $\underline{E}_g = \underline{Z} \underline{I}$ e.m.e.-vel, ha a generátor referenciáiránya megegyezik az impedancia magasabb potenciálú kapcsával. Ha $\underline{I}$ áramerősségű ágba egy $\underline{E}_g$ e.m.e.-jű feszültséggenerátor található melynek az e.m.e.-je ellenkező irányítású mint $\underline{I}$ áram vonatkoztatási iránya, akkor kicserélhető egy $\underline{Z} = \underline{E}_g / \underline{I}$ impedanciájú elemmel.

6.3.10.5. A komplex és a pillanatnyi teljesítmény megmaradásának elve

A komplex teljesítmény megmaradásának elve a villamos hálózatokban egyszerű módon írható fel a következő kifejezés segítségével:

$$\sum_{k=1}^{n_g} \underline{S}_k = 0$$

illetve, mivel $\underline{S}_k = \underline{P}_k + j\underline{Q}_k$, ezért:

$$\sum_{k=1}^{n_g} \underline{P}_k = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n_g} \underline{Q}_k = 0.$$

A pillanatnyi teljesítmény megmaradásra viszont az alábbi képlet írható fel:

$$\sum_{k=1}^{n_g} p_k(t) = 0.$$

6.3.11. FOGYASZTÓ GENERÁTORRA VALÓ HANGOLÁSA

A fogyasztó impedanciáját gyakran úgy kell megválasztanunk, hogy a hatásos teljesítménye a lehető legnagyobb legyen. Itt fogjuk kivizsgálni, hogy melyek az elengedhetetlen feltételei annak, hogy ezt elérjük és mely esetekben van értelme ezen feltételek teljesítésének.

Ha egy $\underline{Z}_p = \underline{R}_p + j\underline{X}_p$ impedanciájú fogyasztónk $\underline{Z}_g = \underline{R}_g + j\underline{X}_g$ belső impedanciájú generátorra van kapcsolva (vagy egy összetett áramkör két vége közé, mely áramkör úgy viselkedik Thévenin elve szerint úgy viselkedik, mint egy reális feszültséggenerátor), az $\underline{I}$ áram áramerősség a fogyasztón keresztül a következő:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_p} = \frac{\underline{E}}{(\underline{R}_g + \underline{R}_p) + j(\underline{X}_g + \underline{X}_p)},$$

a fogyasztó komplex teljesítménye:

$$\underline{S}_p = \underline{Z}_p I^2 = R_p I^2 + jX_p I^2.$$

A fogyasztó hatásos teljesítménye:

$$P_p = R_p I^2 = R_p \frac{E^2}{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2}.$$

A fogyasztó hatásos teljesítménye két változó függvénye (az R_p és az X_p változóké), amelynek maximuma R_p -re és X_p -re a következő egyenletek segítségével határozható meg:

$$\frac{\partial P_p(R_p, X_p)}{\partial R_p} = 0, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial P_p(R_p, X_p)}{\partial X_p} = 0$$

A második egyenlet szerint $X_p = -X_g$, az első szerint $R_p = R_g$.

A $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$ belső impedanciájú generátorra kapcsolt fogyasztó maximális hatásos teljesítményének feltétele tehát:

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_g^*, \text{ azaz } R_p = R_g \text{ és } X_p = -X_g$$

Ráhangolás esetén a fogyasztó hatásos teljesítménye:

$$P_p = \frac{E^2}{4R_g}$$

A generátor hatásos teljesítménye a komplex teljesítményének a valós részével egyenlő, $P_g = \operatorname{Re}\{\underline{E}\underline{I}^*\}$:

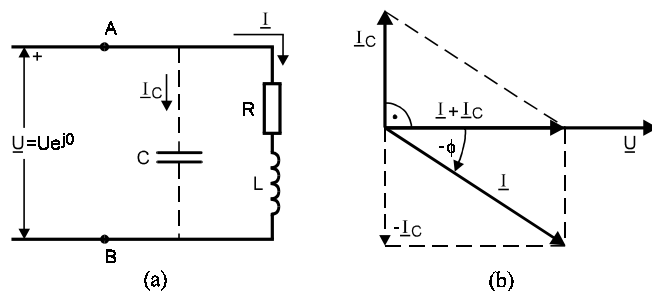
$$P_g = \frac{E^2}{2R_g}$$

A generátor hatásos teljesítménye kétszerese a fogyasztó hatásos teljesítményének (a generátor energiájának fele magában a generátorban használdik el). Kis teljesítmény esetében ennek a veszteségnek nincs jelentősége, viszont nagy teljesítménynél (az áramelosztó cégek esetében például) a ráhangolási feltételnek nincs értelme.¹

6.3.12. A FOGYASZTÓK TELJESÍTMÉNYTÉNYEZŐJÉNEK FELJAVÍTÁSA

A fogyasztók teljesítménytényezőjének feljavítása alatt értjük a fogyasztóra való reaktív pótelemek kapcsolását, úgy, hogy az így kapott csoport (fogyasztó és pótelemek) teljesítménytényezője javuljon, azaz megnőjjön.

Valószínűleg a villamos motorok a leggyakoribb fogyasztók, melyek a gyakorlatban teljesítménytényező-növelésre szorulnak. Sematikusan a motorok első megközelítésben úgy ábrázolhatók, mint egy ellenállás és



6.23. ábra

¹ Ha a feltétel teljesülne, akkor a fogyasztó hatásos teljesítményével azonos nagyságú teljesítmény alakulna át hőenergiává a villamos hálózatban és magában a generátorban. Ráhangolás helyett arra törekszenek, hogy a veszteségek minél kisebbek legyenek mind a generátorban, mind az elektromos hálózatban.

egy induktív tekercs soros kapcsolása (6.23. ábra).

A fogyasztóra párhuzamosan kapcsolt kondenzátorban az áram $\pi/2$ -vel fog sietni a feszültséghez képest (6.23.a ábra). Ahhoz, hogy az össz áram fázisban legyen a feszültséggel, a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$I_C = I \sin \phi ,$$

ami a 6.23.b ábráról leolvasható.

Határozzuk meg a kondenzátor szükséges kapacitását ahhoz, hogy a fogyasztó (villamos motor) és a pótelem (kondenzátor) teljesítménytényezője ideális legyen ($\cos \phi = 1$)!

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} = \frac{U}{R^2 + (\omega L)^2} (R - j\omega L) ,$$

$$I_{\text{Im}} = - \frac{\omega L U}{R^2 + (\omega L)^2} , \quad I_{\text{Re}} = \frac{R U}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$I_{\text{Im}} = - \frac{\omega L U}{R^2 + (\omega L)^2} = - \sin \phi$$

A kondenzátor áramának komplex effektív értéke:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{-1/j\omega C} = j\omega C U .$$

Az előző feltétel szerint:

$$\frac{\omega L U}{R^2 + (\omega L)^2} = \omega C U ,$$

melyből megkapjuk a kondenzátor keresett kapacitását:

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

A fenti értékű kapacitással rendelkező kondenzátor párhuzamosan kötve a soros RL áramkörrel (ω körfrekvenciájú gerjesztés mellett) az egész csoport teljesítménytényezőjét ideális értékre hozza.

6.4. Néhány rendhagyó kapcsolat a váltóáramú áramkörökben

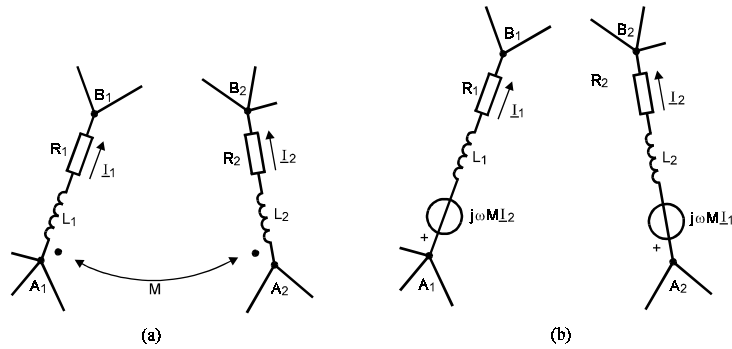
6.4.1. ÁRAMKÖRÖK MÁGNESESEN CSATOLT ÁGAKKAL (LÉGMAGOS TRANSZFORMÁTOR)

Ha a váltóáramú áramkör két vagy több ágában az induktív tekercsek kölcsönösen csatoltak, akkor az áramkör elemzése összetettebb lesz. Ekkor figyelni kell arra, hogy Kirchhoff II. törvénye szerinti egyenletekben szerepeljen az az e.m.e., melyet az egyik csatolt tekercsben folyó áram, a másikban indukál. Ügyelni kell az ilyen tagok előjelére is.

Figyeljünk meg két mágnesesen csatolt ágot (6.24.a ábra). A tekercsek kölcsönös induktivitását, az ágakban, M -mel jelöljük:

$$L_{12} = L_{21} = M$$

Az A_1 és B_1 , valamint az A_2 és B_2 pontok közti pillanatnyi feszültséget a következőképpen írhatjuk fel:



6.24. ábra

$$u_{A_1B_1}(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_{A_2B_2}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Az előző egyenletek komplex értelmezése a következő alakot adja:

$$\underline{U}_{A_1B_1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{A_2B_2} = j\omega L_2 \underline{I}_2 + R_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$$

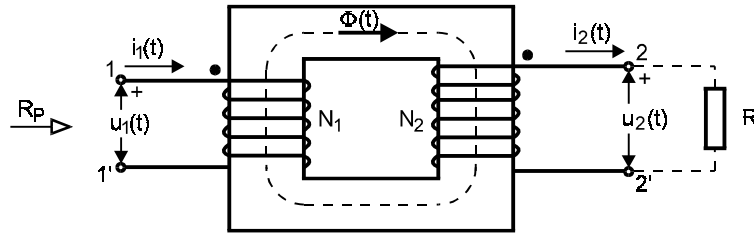
A csatolt tekercsek hatását pótgenerátorokkal helyettesíthetjük ($j\omega M \underline{I}_2$, illetve $j\omega M \underline{I}_1$ e.m.e.-vel jelölt generátorok a 6.24.b ábrán) az ágakban, melyek referenciairánya *ellenkező*, mint az áram referenciairánya a megfelelő ágakban.

6.4.2. VILLAMOS TRANSZFORMÁTOR

A villamos energia gazdaságos szállítása vezetékek segítségével magas feszültszinteken történik. Ekkor, adott teljesítmény mellett az áramerősség aránylag kicsi, és a Joule-veszteségek is kisebbek a vezetékekben. A fogyasztók számára viszont általában nem megfelelő a magas feszültség (háztartási gépek). Ezért olyan berendezésekre van szükség, amelyek a feszültséget megnövelik az energiatermelés színhelyén (a hosszú távvezetésekre kapcsolás előtt), és lecsökkentik a szállítás végén, a fogyasztók közvetlen táplálása előtt. A villamos energia feszültség szintjének megváltoztatására a transzformátorok szolgálnak.

A transzformátor általában vasmagból és két tekercsből áll (6.25. ábra). A *primer tekercset* az adott feszültségre kötik, a *szekunder tekercset* pedig a fogyasztóra.

A magot, az örvényáramok jelensége miatt, vékony, egymástól elszigetelt lemezekből (alacsony frekvenciára) vagy ferritből készítik. A szórt fluxus állandóan jelen van, de ezt egyenlőre elhanyagoljuk. Nem vesszük figyelembe a következő veszteségeket sem: az *örvényáramok* által létrejött, az átmágnesezés miatt megjelenő (*hiszterézis-veszteségek*) és a tekercsek *saját ellenállása* (*tökéletes transzformátor*) következtében jelenlevő veszteségeket. Az elhanyagolás igazolására álljon itt az adat, hogy a valós transzformátorok veszteségei kisebbek 10%-tól, a nagytranszformátorok vesztesége pedig kb. 1-2%.



6.25. ábra

Vizsgáljuk meg a transzformátor működését a következő két esetben:

1. Vegyük először az üresjárási esetét. Ekkor a szekunder végei *nyitottak*, azaz a szekunderen *nem folyik* áram ($i_2(t) = 0$). A primer tekercsen keresztül folyik bizonyos áram, $i_1^0(t)$ (*mágnesezés árama* vagy *üresjárat árama*). Ha elhanyagoljuk a primer ellenállását (R_1), akkor felírhatjuk, hogy:

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1^0(t)}{dt}$$

Ez az áram $\Phi_j(t)$ mágneses fluxust hoz létre a transzformátor magjában:

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_j(t)}{dt},$$

ahol N_1 a primer tekercs meneteinek száma.

Legyen a szekundernek N_2 számú menete, Φ_j azonos a primer és a szekunder menetein keresztül (nincs szórt fluxus), a szekunderben létrejövő (indukálódó) e.m.e.:

$$-\left[-N_2 \frac{d\Phi_j(t)}{dt}\right] = N_2 \frac{d\Phi_j(t)}{dt}$$

Mivel a szekunder tekercselésének iránya olyan, hogy a rajta áthaladó $\Phi_j(t)$ fluxus negatív, ezért a szekunder végei között feszültség van jelen:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_j(t)}{dt}$$

A primer és szekunder feszültségek arányba állításával megkapjuk a tekercsek végein jelenlévő feszültségek arányát, amit a tökéletes transzformátor első alapegyenletének is hívnak:

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}$$

Az N_1/N_2 arányt a *transzformátor átviteli számának (áttételének)* nevezzük.

2. A szekunder végeire (terhelő) *fogyasztó van kötve*. Az egyszerűség kedvéért legyen ez egy tiszta ohmikus ellenállás. A fogyasztón keresztül $i_2(t)$ áram folyik, amely a magban pótflexust hoz létre, viszont, mivel a primer tekercs változatlanul az $u_1(t)$ feszültségre van kapcsolva (az $u_1(t)$ -re felírt egyenlet továbbra is érvényben marad), ezért *a fluxus a magon keresztül nem változhat meg!* Amikor a fluxus a szekunder áram hatására változni kezd, a primeren $i_1^0(t)$ -től nagyobb áram jelentkezik, melynek fluxusa pont megsemmisíti az $i_2(t)$ áram fluxusát. *A transzformátornál az energiaátvitel a primer tekercstől a szekunder felé a transzformátor magjában keletkező időben változó*

mágneses tér és az őt követő (és a transzformátor magja körül jelen lévő) indukált, időben változó elektromos tér segítségével² valósul meg.

Mivel elhanyagoljuk a szórt fluxust, a primer pótáramától ($i_1'(t)$) származó fluxus arányos az $N_1 i_1'(t)$ szorzattal, a szekunder áramától származó fluxus pedig az $N_2 i_2(t)$ szorzattal. Ez a két fluxus azonos intenzitású, de ellentétes irányú:

$$N_2 i_2(t) = N_1 i_1'(t) ,$$

vagyis:

$$\frac{i_1'(t)}{i_2(t)} = \frac{N_2}{N_1} .$$

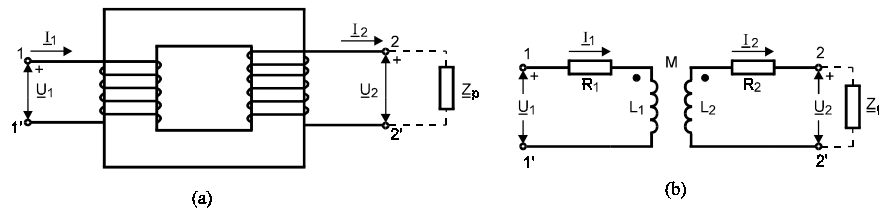
Általában a pótáram ($i_1'(t)$) sokkal nagyobb intenzitású (erősségű), mint a mágnesezés árama ($i_1^0(t)$), ezért a primer össz árama megközelítően egyenlő a pótárammal:

$$i_1(t) = i_1^0(t) + i_1'(t) \approx i_1'(t) .$$

Így a tökéletes transzformátorra felírható, hogy:

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} \approx \frac{N_2}{N_1} .$$

Az eddigi fejtegetés a primer oldal tetszőleges feszültségalakjára vonatkozott, vagyis a primerfeszültség tetszőleges változására az időben. A továbbiakban sinusos változású feszültségek és áramok esetében fogjuk vizsgálni a transzformátor működését, azaz lineáris üzemmódban.



6.26. ábra

A 6.26. ábrán az áram és a feszültség referenciairányait úgy jelöltük meg, mintha a primer oldal lenne a fogyasztó, a szekunder oldal pedig a generátor. A kölcsönös indukció előjelének meghatározására szolgáló pontoknak, és a 6.26.b ábrán feltüntetett áramok referenciairányainak alapján a kölcsönös indukció-együttható értéke negatív lesz. Tehát az egyenletekben $M < 0$ érvényes.

A transzformátor alapegyenletei a 6.26b ábrán látható helyettesítő kapcsolás alapján:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned}$$

Ezekben az egyenletekben: $\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2$, $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega |M|$.

² A primer és szekunder menetei abban az elektromos térben vannak, mely a bennük folyó áramoktól származik, de az Amperáramokkal ekvivalens felületi áramoktól is, melyek a mag felületén jelen vannak. Ezt az elektromos teret nehéz meghatározni, ezért az indukált e.m.e.-t a magon áthaladó fluxuson keresztül határozzuk meg.

6.4.2.1.A transzformátort helyettesítő Thèvenin-generátor

Lineáris üzemmódot feltételezve határozzuk meg Thèvenin ekvivalens generátorát, amellyel a transzformátort helyettesíthetjük a szekunder kivezetéseihez képest. Thèvenin ekvivalens generátorának e.m.e.-je egyenlő a szekunder üresjárási feszültségével. A transzformátor alapegyenleteinek alapján:

$$\underline{E}_{\text{ekv}} = \left(\underline{U}_2 \right)_{\text{üresjáratban } (\underline{I}_2=0)} = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 = \underline{Z}_{21} \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11}} = \frac{j\omega|M|}{\underline{Z}_{11}} \underline{U}_1$$

Thèvenin ekvivalens generátorának belső impedanciája egyenlő a 2 és 2' pontok közti impedanciával, ha a generátorok ki vannak kapcsolva az áramkörben, azaz $\underline{U}_1 = 0$. Ebben az esetben, ugyancsak a transzformátor alapegyenleteiből, a következőt kapjuk:

$$\underline{Z}_{\text{ekv}} = \left(\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_1=0} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{11}} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{11}}$$

Ennek alapján a szekunder végein jelenlévő feszültséget a következő alakban írhatjuk fel:

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_{\text{ekv}} - \underline{Z}_{\text{ekv}} \underline{I}_2 = \frac{j\omega|M|}{\underline{Z}_{11}} \underline{U}_1 - \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{11}} \underline{I}_2$$

6.4.2.2.A transzformátor bemenő impedanciája

Ha a szekunder kivezetéseire $\underline{Z}_p$ impedanciájú terhelő fogyasztót kötünk, akkor: $\underline{U}_2 = \underline{U}_p = \underline{Z}_p \underline{I}_2$. A transzformátor második alapegyenlete ekkor a következő alakot veszi fel:

$$\underline{Z}_p \underline{I}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{22} \underline{I}_2,$$

vagyis:

$$0 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 - (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_p) \underline{I}_2.$$

Ebből aztán az $\underline{I}_2$ kifejezve:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_p} \underline{I}_1.$$

$\underline{I}_2$ -t behelyettesítve a transzformátor alapegyenleteinek első egyenletébe a következőt kapjuk:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_p} \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{22}\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}^2 + \underline{Z}_p \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_p} \underline{I}_1.$$

Tehát a transzformátor bemenő impedanciája:

$$\underline{Z}_{\text{be}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_{22}\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}^2 + \underline{Z}_p \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_p}$$

6.4.2.3. Ideális transzformátor

Az ideális transzformátor egy olyan elképzelt transzformátor, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik (az ideális transzformátor feltételei):

- 1.) $R_1 = R_2 = 0$ (azaz $\underline{Z}_{11} = j\omega L_1$, $\underline{Z}_{22} = j\omega L_2$),
pontosabban szólva $R_1 \ll \omega L_1$ és $R_2 \ll \omega L_2$, vagyis $Z_{11} \approx j\omega L_1$, és $Z_{22} \approx j\omega L_2$.
Ez szavakkal annyit jelent, hogy a veszteségek (az ellenállások) elhanyagolhatók).
- 2.) $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ (azaz a csatolási tényező $k = 1$),
pontosítva a feltételt $k \approx 1$, ami a csatolás szoros voltára utal.
- 3.) $L_1, L_2 \rightarrow \infty$ (azaz a primer és szekunder tekercsének nagyon nagy számú menete van, így a fluxus a transzformátor magjában nullához tart),
pontosítva és más szavakkal: a tekercsek reaktanciája sokkal nagyobb, mint a transzformátorokhoz csatlakozó (terhelő) impedanciák reaktanciája (látszólagos ellenállása).

Ezek a feltételek nem valósíthatók meg teljes mértékben az elektrotechnikai gyakorlatban. Nagytranszformátorok esetében viszont az 1.) és 2.) feltételek jó közelítéssel kielégítettek (az ilyen transzformátorokat nevezzük *tökéletes transzformátoroknak*).

A nagy teljesítményű transzformátoroknál:

- a tekercsek hatásos ellenállása $0,01\Omega$ nagyságrendű,
- a tekercsek meddő ellenállása 100Ω nagyságrendű,
- a csatolási tényező $k = 0,99$.

Mikor a második feltétel teljesül ($k = 1$, illetve $k \approx 1$), akkor L_1 arányos N_1^2 -el, L_2 arányos N_2^2 -el és M arányos az $N_1 N_2$ szorzattal (azonos arányossági tényezővel). Jelöljük az arányossági tényezőt L_{men} -el (L_{men} - a tekercs egy menetének önindukciós együtthatóját jelenti), ekkor:

$$L_1 \approx L_{\text{men}} N_1^2, \quad L_2 \approx L_{\text{men}} N_2^2, \quad |M| \approx L_{\text{men}} N_1 N_2.$$

Ebben az esetben a szekunder oldal üresjáratú feszültsége a

$$(\underline{U}_2)_{\text{üresjáratban } (\underline{I}_2=0)} \approx \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 = \underline{Z}_{21} \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11}} = \frac{j\omega |M|}{j\omega L_1} \underline{U}_1 = \frac{j\omega L_{\text{men}} N_1 N_2}{j\omega L_{\text{men}} N_1^2} \underline{U}_1 = \frac{N_2}{N_1} \underline{U}_1,$$

kifejezés írja le, vagyis:

$$\frac{\underline{U}_1}{(\underline{U}_2)_{\text{üresjáratban}}} \approx \frac{N_1}{N_2}$$

illetve eljutottunk az ideális (tökéletes) transzformátor első alapegyenletéhez. Ez a kifejezés alkalmazható a jóminőségű ferromágneses maggal rendelkező valós transzformátornál is.

A második feltétel ($k = 1$, illetve $k \approx 1$) teljesülése miatt $\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2 \approx 0$, ezért a transzformátor bemeneti impedanciája:

$$\underline{Z}_{\text{be}} = \frac{\underline{Z}_p j\omega L_1}{j\omega L_2 + \underline{Z}_p}.$$

Ez a kifejezés, az előbbihez hasonlóan, jól alkalmazható a minőséges ferromágneses maggal ellátott valós transzformátorokra is.

Az **ideális transzformátorra** (6.27. ábra) az első és második feltétel mellett a harmadik feltétel is teljesül, ezért a Thévenin ekvivalens generátorának meghatározásakor felírt szekunder feszültség kifejezése tovább egyszerűsül (hiszen $\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2 = 0$):

$$\underline{U}_2 = \frac{j\omega M}{j\omega L_1} \underline{U}_1 = \frac{N_2}{N_1} \underline{U}_1,$$

vagyis:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Vegyük észre, hogy itt nem az üresjárási feszültség szerepel a kifejezésben.

Figyelembe véve, hogy a terhelő impedanciára érvényes a $|\underline{Z}_p| \ll |\underline{Z}_{22}|$ feltétel, a transzformátor második alapegyenletéből következik, hogy:

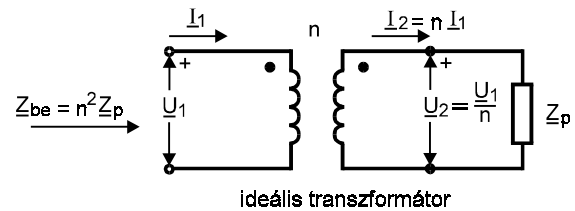
$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Az ideális transzformátor bemenő

impedanciája figyelembe véve, hogy $|\underline{Z}_{22}| \gg |\underline{Z}_p|$ és a $\underline{Z}_{11}/\underline{Z}_{22} = (N_1/N_2)^2$ helyettesítést alkalmazva:

$$\underline{Z}_{be} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \underline{Z}_p = n^2 \underline{Z}_p$$

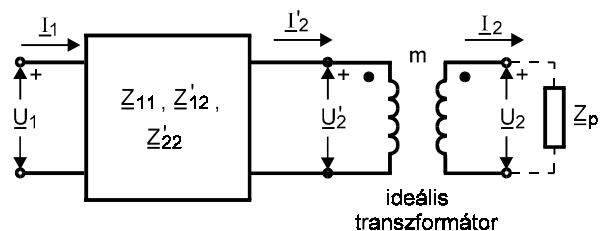
ahol $n = N_1/N_2$ a transzformátor áttétele (átviteli száma).



6.27. ábra

6.4.2.4.A transzformátor általános helyettesítő sémája

A valós transzformátor többfajta helyettesítő sémával ábrázolható (T-séma, vagy más nevén T-tag, Π -séma vagy Π -tag). A helyettesítés lényege abban van, hogy a helyettesítő vázlatra (sémára) felírt alapegyenletek, valamint a bemeneti és kimeneti karakterisztikák megegyezzenek a helyettesített transzformátor megfelelő ismérveivel. Gyakran használatos a 6.28. ábrán bemutatott helyettesítő séma is, amely egy négyfólyust és egy m átvittel bíró ideális transzformátort tartalmaz (általános esetben m nem egyenlő az eredeti (helyettesített transzformátor áttételével, n -nel).



6.28. ábra

Az ideális transzformátor egyenletei:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_2'}{m},$$

$$\underline{I}_2 = m \underline{I}_2'.$$

A téglalappal ábrázolt áramkör (négyfólyus) egyenletei viszont:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}' \underline{I}_2',$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}'_{21} \underline{I}_1 - \underline{Z}'_{22} \underline{I}_2$$

Behelyettesítéssel a következő egyenleteket kapjuk:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}}{m} \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_{21}}{m} \underline{I}_1 - \frac{\underline{Z}_{22}}{m^2} \underline{I}_2$$

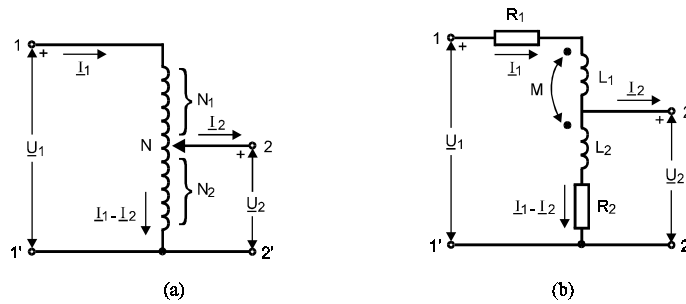
Ezen egyenletek összehasonlítása a transzformátor alapegyenleteivel a következő kifejezéseket adja a négyfólus paramétereire:

$$\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21} = m \underline{Z}_{12}, \quad \underline{Z}'_{22} = m^2 \underline{Z}_{22}.$$

Az így, karakterisztikáiban megkapott négyfólus aztán tovább helyettesíthető akár T, akár Π -taggal.

6.4.2.5. Autotranszformátor

Az autotranszformátor a transzformátor különleges fajtája egy tekercssel és csúszóérintkezővel (6.29.a ábra). Az autotranszformátor helyettesítő vázlata a 6.29.b ábrán látható.



6.29. ábra

A 6.29.b ábrán látható séma szerint az autotranszformátor egyenletei a következők (az ábráról jól látható, hogy $M > 0$):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) + j\omega M (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) + j\omega M \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \end{aligned}$$

Rendezés után az egyenletek a következő alakot kapják:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] \underline{I}_1 - [R_2 + j\omega(L_2 + M)] \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= [R_2 + j\omega(L_2 + M)] \underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 \end{aligned}$$

Ha a következő helyettesítéseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M), \\ \underline{Z}_{12} &= R_2 + j\omega(L_2 + M), \\ \underline{Z}_{22} &= R_2 + j\omega L_2, \end{aligned}$$

akkor a fenti egyenletek a transzformátor alapegyenleteit adják.

Az autotranszformátorokat általában ferromágneses maggal készítik, ezért $M \cong \sqrt{L_1 L_2}$ és a tekercsek hatásos ellenállása elhanyagolható a meddő ellenállásukhoz képest. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &\cong j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \cong j\omega(L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2}), \\ \underline{Z}_{12} &\cong j\omega(L_2 + \sqrt{L_1 L_2}), \quad \underline{Z}_{22} \cong j\omega L_2.\end{aligned}$$

Mivel ekkor $L_1 = L_{\text{men}} N_1^2$ és $L_2 = L_{\text{men}} N_2^2$, ezért:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &\cong j\omega L_{\text{men}} (N_1 + N_2)^2 \cong j\omega L_{\text{men}} N^2, \\ \underline{Z}_{12} &\cong j\omega L_{\text{men}} (N_2^2 + N_1 N_2) \cong j\omega L_{\text{men}} N_2 N, \\ \underline{Z}_{22} &\cong j\omega L_{\text{men}} N_2^2.\end{aligned}$$

Amennyiben ezeket az értékeket behelyettesítjük a 6.4.2.1. pontban levezetett Thèvenin ekvivalens generátorának e.m.e.-jének képletébe, akkor a következőt kapjuk az átviteli szám (áttétel) értékére:

$$\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} \cong \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{N}{N_2}$$

A csúszó érintkező elmozdításával tehát az autotranszformátor áttétele ($n = N/N_2$) széles tartományban mozog. Ha elhanyagoljuk a szórt fluxust és a mágnesezési áramot a tekercsen keresztül, akkor az áramerősségek aránya a primer és a szekunder tekercs kivezetésein megközelítőleg az:

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \cong \frac{N_2}{N}$$

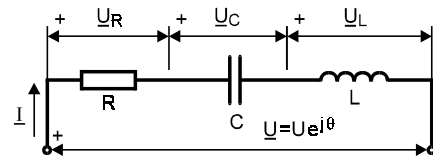
értéket adják.

6.4.3. REZGŐKÖRÖK

6.4.3.1. Egyszerű (soros) rezgőkör

Egyszerű rezgőkör alatt ellenállás, kondenzátor és tekercs soros kapcsolását értjük (6.30. ábra). Az ilyen kapcsolást gyakran *soros rezgőkörnek* is nevezzük.

Ismert R , C és L értékekrevalamint a gerjesztés ($\underline{U} = U e^{j\omega t}$) ismeretében az érdekel bennünket, hogy miként változik az $\underline{I}$ áramerősség és az $\underline{U}_R$, $\underline{U}_C$ meg $\underline{U}_L$, feszültségek, ha változik a gerjesztés körfrekvenciája (ω). Az áram komplex effektív értéke:



6.30. ábra

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z e^{j\phi}} = \frac{U}{Z} e^{-j\phi}$$

$\underline{Z}$ impedancia abszolút értéke (Z) és argumentuma (ϕ) a következő kifejezések által számítható ki:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

$$\phi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

aminek alapján az áramkörben folyó áram effektív értéke:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

a feszültség és az áram közti fáziskülönbség pedig:

$$\theta - \psi = 0 - (-\phi) = \phi.$$

Mivel az áram komplex effektív értékének $\underline{I} = I e^{j\psi}$ alakja, összehasonlítva ez utóbbi kifejezést a 6.30. ábrán levő rezgőkör áramára felírt kifejezéssel, azt kapjuk, hogy $\psi = -\phi$. Az áram effektív értékének és kezdőfázisának körfrekvencia-függése a 6.31. ábrán látható.

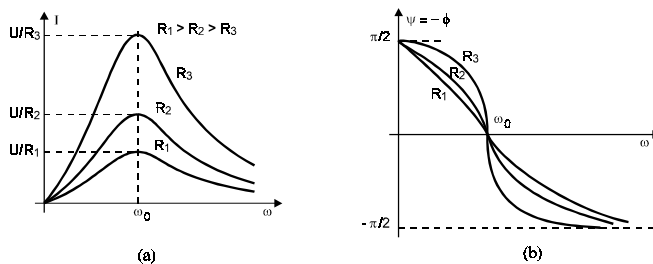
Az áramkörön keresztül az áram legnagyobb effektív értéke a következő körfrekvencián van (az áram effektív értékének kifejezéséből):

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

melyből:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

6.31. ábra



Ezen a körfrekvenciánál a legnagyobb az áram effektív értéke ($I = U/R$) az áramkörben. Az ω_0 körfrekvenciát, melynél rezonancia jön létre *rezonáns körfrekvenciának* nevezzük. ω_0 körfrekvenciánál az áram és feszültség fáziskülönbsége egyenlő nullával. A rezonáns körfrekvencia alatti körfrekvenciákon a soros rezgőkör kapacitív, felette pedig induktív jellegű.

Mivel

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0,$$

ezért:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Az f_0 frekvenciát *rezonanciafrekvenciának* illetve *sajátfrekvenciának* nevezzük.

Határozzuk meg a feszültség komplex effektív értékét az ellenálláson, a kondenzátoron és a tekercsen, rezonáns körfrekvencián:

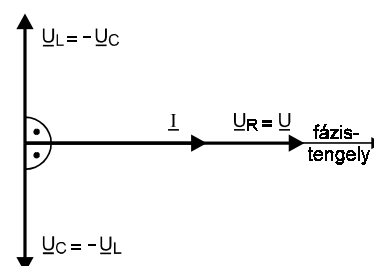
$$\underline{U}_R = R \underline{I} = U,$$

$$\underline{U}_C = jX_C \underline{I} = -j \frac{1}{\omega_0 C} \frac{U}{R},$$

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I} = j\omega_0 L \frac{U}{R}.$$

A kondenzátor és tekercs végei között tehát a feszültségek *nem* egyenlőek nullával (mint ahogy az a fenti egyenlet-hármas első egyenletéből első pillanatban tűnik), viszont e két feszültség *összege* valóban nullával egyenlő (6.32. ábra). Ezért ezt a fajta rezonanciát gyakran *feszültség rezonanciának* is nevezzük.

A 6.32. ábra az egyszerű rezgőkör feszültségeinek és áramának vektordiagramját (fazordábráját) szemlélteti.



6.32. ábra

A kondenzátor és tekercs végei közti feszültségek lehetnek nagyobbak, sőt sokkal nagyobbak $\underline{U}$ feszültségtől, melyre az áramkört kapcsoltuk. $\underline{U}_L$ és $\underline{U}_C$ értékeit ebben az esetben *túlfeszültségnek* nevezzük.

Ha a rezgőkör nem a rezonanciafrekvencián működik, akkor felírhatjuk, hogy:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

A zárójelben lévő kifejezés az előző egyenletben a rezgőkör *lehangoltságának* a definíciója:

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Így az impedancia abszolút értékét és argumentumát a rezgőkör lehangoltságának függvényében a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} r \right)^2} \quad \text{és} \quad \phi = \arctan \left(\frac{\omega_0 L}{R} r \right).$$

A rezgőkör egyik jellemző nagysága a sávszélesség. Ha az $\omega = \omega_0$, akkor az áramerősség a körben maximális. Legyen ω_1 és ω_2 az a két körfrekvencia, amelyen az áramerősség $\sqrt{2}$ -ed része a maximális áramerősségének. Másszóval a sávszélesség az a körfrekvencia-intervallum, amelynek határain az áramerősség $\sqrt{2}$ -ed része a maximális áramerősségének (amely az $\omega = \omega_0$ körfrekvencián mérhető a soros rezgőkörben).

A 6.33. ábra alapján $\underline{I}_\omega = \underline{I}_{\omega_0} / \sqrt{2}$, azaz $\underline{I}_{\omega_0} / \underline{I}_\omega = \sqrt{2}$, és tudjuk, hogy:

$$\underline{I}_{\omega_0} = \frac{U}{R}$$

és

$$\underline{I}_\omega = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U}{Z}.$$

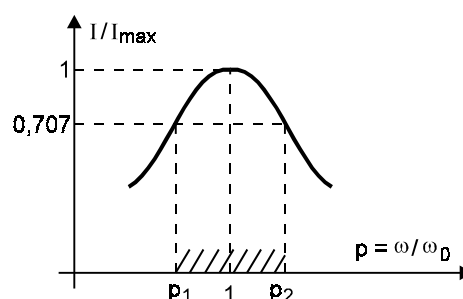
Tehát az

$$\frac{\underline{I}_{\omega_0}}{\underline{I}_\omega} = \frac{\underline{R}}{\underline{U}} = \frac{Z}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} r \right)^2}$$

kifejezésből az hámozható ki, hogy a körfrekvenciák, melyek a rezgőkör sávszélességét határozzák meg, a következő egyenletből számíthatók ki:

$$\frac{\omega_0 L}{R} r = \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$$

Szemmel látható, hogy a sávszélesség függ az $\omega_0 L / R$ hányadostól. Amennyiben ennek a tényezőnek az értéke nagyobb, a rezgőkör sávszélessége kisebb és fordítva. A gyakorlatban a



6.33. ábra

keskeny sáv szélességű rezgőkörök előállítására törekednek, az $\omega_0 L/R$ hányados pedig a rezgőkör *jósági tényezője* néven ismert. Általában Q -val szokás jelölni:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

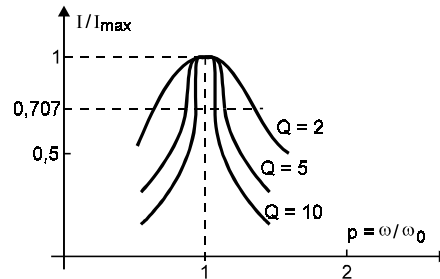
Amennyiben megoldjuk a

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$$

egyenletet, amely mint látjuk másodfokú egyenlet ω szerint, a következő gyököket kapjuk:

$$\omega_{12} = \pm \frac{\omega_0}{2 \cdot Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4 \cdot Q^2}}$$

Innen aztán könnyen írható az összefüggés a rezgőkör sáv szélessége $\Delta\omega$ és jósági tényezője (Q) között: Ezt az összefüggést szemlélteti grafikusán a 6.34. ábra.



6.34. ábra

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$$

6.4.3.2. Párhuzamos rezgőkör

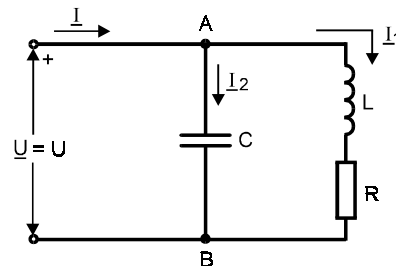
Egyszerű antirezgőkör (vegyes párhuzamos rezgőkör) alatt ideális kondenzátor és valós tekercs párhuzamos kapcsolását értjük. Az ilyen kapcsolást gyakran (vegyes) *párhuzamos rezgőkörnek* is nevezzük. Mivel minden valós induktív tekercsnek bizonyos ellenállása is van, ezért a 6.35. ábrán látható valós antirezgőkört fogjuk kivizsgálni.

Határozzuk meg a közös ág áramának ($\underline{I}$) komplex effektív értékét:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{AB}},$$

ahol $\underline{Z}_{AB}$ az A és B pont közti eredő impedancia. A 6.35. ábra szerint:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C$$



6.35. ábra

Az esetek többségében $R \ll \omega L$, tehát az előző egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{AB}} \approx \frac{R}{(\omega L)^2} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Ennek az egyenletnek a jobb oldala akkor valós, ha $1/\omega L = \omega C$, vagyis ha U feszültség körfrekvenciája:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Ezt a körfrekvenciát a megfigyelt párhuzamos rezgőkör *antirezonáns körfrekvenciájának* nevezzük. Magát a jelenséget, vagyis a párhuzamos rezgőkör működését az ω_0 frekvencián *antirezonanciának* nevezzük. Ilyenkor a közös ág áramának erőssége megközelítően minimális (ellentétben a rezonancia esetével, mikor az áramerősség maximális). Az antirezonanciát gyakran *áram rezonanciának* is nevezzük.

Az áram komplex effektív értéke antirezonancia esetében:

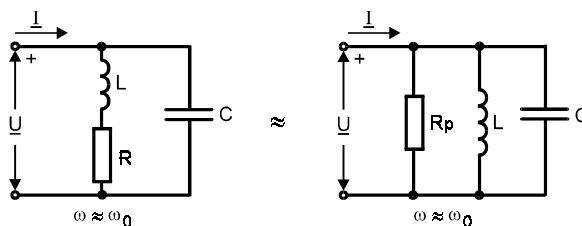
$$\underline{I} = U \frac{R}{(\omega L)^2}.$$

Az előző egyenlet alapján megállapíthatjuk, hogy antirezonanciánál a tekercs ágának ellenállását (a vegyes párhuzamos rezgőkör ellenállását) leképezhetjük párhuzamosan kötött ellenállásba az áramkörben (6.36. ábra):

$$R_p = \frac{\omega_0^2 L^2}{R}.$$

Az így kapott rezgőkört (az R_p ellenállással rendelkezőt a 6.36. ábra jobb oldalán) tiszta párhuzamos rezgőkörnek is hívják. A vegyes párhuzamos rezgőkör admittancia egyenletében az $R/(\omega_0 L)^2$ hányadost $G_p = 1/R_p$ -vel helyettesítve az admittancia-kifejezés alakja:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G_p + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$



6.36. ábra

Hangsúlyozni kell azonban, hogy az összes további kifejezés, amelyben G_p vagy R_p szerepel csupán az antirezonáns körfrekvencia közelében érvényes, továbbá azt is tudni kell, hogy az $R_p = \frac{\omega_0^2 L^2}{R}$ helyettesítés csak az $R_p \gg \omega L$, továbbá $R \ll \omega L$ feltételek érvényessége mellett jogos (természetesen csak az ω_0 közelében). Ezután felírhatjuk a feszültség effektív értékét (amiből a látszólagos - az impedancia abszolút értéke olvasható ki) és a ϕ kezdőfázist (ami nem más, mint az impedancia szöge: tudjuk azonban azt is, hogy a $\phi = \phi_Y$):

$$U = \frac{I}{Y} = \frac{I}{\sqrt{G_p^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}},$$

$$\theta - \psi = \phi, \text{ vagyis}$$

$$\phi = -\arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G_p} \quad (\omega \approx \omega_0).$$

Ezek az egyenletek azonosak mint a soros rezgőkör esetében kapott egyenletek, csak a feszültség és az áram felcserélte a helyét és impedancia helyett itt admittanciánk van. Az utóbbi kifejezésből az is kiderül, hogy az antirezonáns körfrekvencia alatti körfrekvenciákon ($\omega < \omega_0$) a párhuzamos rezgőkör induktív, felette ($\omega > \omega_0$) pedig kapacitív jellegű.

Ha a tiszta párhuzamos rezgőkör nem az antirezonáns körfrekvencián, hanem annak közelében dolgozik, akkor felírhatjuk, hogy:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = \omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 L C} \right) = \omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

ahol a zárójelben lévő kifejezés a soros rezgőkörnél megismert *lehangoltságot* képviseli. Az admittancia felírva a rezgőkör lehangoltságának függvényében, a lehangoltság (r) jele mellett felfedezhetjük a tiszta párhuzamos rezgőkör jósági tényezőjét:

$$\frac{Y}{G_p} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 C}{G_p} r \right)^2}.$$

A tiszta párhuzamos rezgőkör (egyszerű antirezgőkör) jósági tényezője tehát:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G_p}.$$

Mivel $\omega_0 C = 1/(\omega_0 L)$ és $G_p = 1/R_p = R/(\omega_0 L)^2$, ezért a jósági tényezőt felírhatjuk a vegyes párhuzamos rezgőkör elemeinek a függvényében is. A jósági tényező így a soros rezgőkörnél megismert alakot veszi fel:

$$Q = \frac{\omega_0 C \omega_0^2 L^2}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

A jósági tényező értéke, általánosan szólva (a rezgőkörök esetében), hozzávetőlegesen azt a rezgésszámot jelenti, amelyet a magárahagyott rezgőkör még képes elvégezni. A sávszélesség számításának kiinduló egyenlete, itt a párhuzamos rezgőkör esetében teljesen megegyezik a soros rezgőkörnél megismert egyenlettel, így az eredmény sem lehet más. A jósági tényező és a sávszélesség viszonyát ezek szerint a soros rezgőkörnél megismert összefüggés adja:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

6.5. Háromfázisú rendszerek

6.5.1. ÁLTALÁNOS FOGALMAK A POLIFÁZISÚ RENDSZEREKRŐL

Eddig olyan áramkörökkel foglalkoztunk, amelyekben csak két kivezetésű (két pólusú) generátorok szerepeltek. Az elektrotechnikában, főleg az energetikában gyakran többkivezetésű generátorokat használnak. Az ilyen generátort úgy képzeljük el, hogy a semleges kivezetése mellett (mely általában földelve van) még m számú kivezetése van (6.37. ábra), melyek egy pillanatban más és más potenciálon vannak. Azokat a váltakozó feszültségű generátorokat, melyeknek több kivezetése van *többfázisú* illetve *polifázisú generátoroknak* nevezzük.

Az N -nel jelölt kivezetés a *nulla* vagy *semleges kivezetés*. Az $A, B, C, \dots, M$ -mel jelölt kivezetéseket röviden *fázisoknak* nevezzük, a feszültség frekvenciája minden fázis esetén egyforma. Az $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \dots, \underline{U}_M$ -mel jelölt feszültségek a *fázisfeszültségek*. Az $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \dots, \underline{U}_{MA}$ -val jelölt feszültségek a *vonalfeszültségek* illetve *összetett feszültségek*.

$\underline{U}_B$ és $\underline{U}_A$, $\underline{U}_C$ és $\underline{U}_B$ stb. fázisfeszültségek közti fáziskülönbség egyforma és $-2\pi/m$ -mel egyenlő (m a fázisok száma), a feszültségek amplitúdója pedig azonos nagyságú. Az ilyen generátorokat *szimmetrikus polifázisú generátoroknak* nevezzük.

A polifázisú rendszer fázisai (fázisfeszültségei):

$$\underline{U}_A = U_A e^{j0}, \underline{U}_B = U_A e^{-j\frac{2\pi}{m}}, \underline{U}_C = U_A e^{-j\frac{2\pi \cdot 2}{m}}, \dots, \underline{U}_M = U_A e^{-j\frac{2\pi(m-1)}{m}}$$

A fázisfeszültségek vektorai egymástól $2\pi/m$ szöggel térnek el. Az előző kifejezésekből leszűrhető, hogy:

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C + \dots + \underline{U}_M = 0$$

A vonalfeszültségek ekkor a következő kifejezésekkel adóttak:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = \underline{U}_A \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{m}} \right)$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_B \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{m}} \right)$$

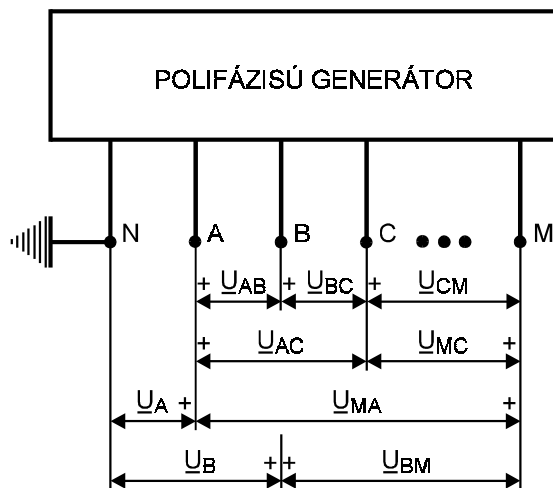
.....

$$\underline{U}_{MA} = \underline{U}_M - \underline{U}_A = \underline{U}_M \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{m}} \right)$$

A *monofázisú* fogyasztókat kapcsolhatjuk fázis- vagy vonalfeszültségre. Gyakran viszont a fogyasztókat is m kivezetéssel és a semleges kivezetéssel gyártják. Az ilyen fogyasztókat *polifázisú fogyasztóknak* nevezzük.

Az olyan hálózatokat, melyekbe polifázisú generátorok és fogyasztók vannak kapcsolva *polifázisú hálózatoknak* nevezzük. A polifázisú rendszerek közül a *háromfázisú* rendszereket használják leggyakrabban. A polifázisú rendszereket, az elektromos energia szállítására, Nikola Tesla fedezte fel és 1887 - 1888.-ban szabadalmaztatta.

A továbbiakban a háromfázisú rendszerekkel foglalkozunk.



6.37. ábra

6.5.2. ÁLTALÁNOS FOGALMAK A HÁROMFÁZISÚ GENERÁTOROKRÓL

A háromfázisú feszültségek előállítására háromfázisú forgó generátorokat használnak, melyek csak annyiban különböznek a monofázisú forgó generátoroktól, hogy az állórész vágataiban egy tekercs helyett három tekercs van (6.38. ábra). A forgórész egy mágnes (általában elektromágnes, melyet csúszó érintkezőkön keresztül táplálnak időben állandó feszültséggel), mely forgása közben az állórész tekercseiben feszültségeket indukál. Az állórészben indukált feszültségek azonos amplitúdójúak, fázisuk pedig $-2\pi/3$ -mal van eltolódva.

Ha E -vel jelöljük a tekercsekben indukált feszültségek (e.m.e.-k) effektív értékét, akkor $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$ és $\underline{E}_C$ (6.39. ábra) komplex effektív értéke:

$$\underline{E}_A = E e^{j0},$$

$$\underline{E}_B = E e^{-j\frac{2\pi}{3}},$$

$$\underline{E}_C = E e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

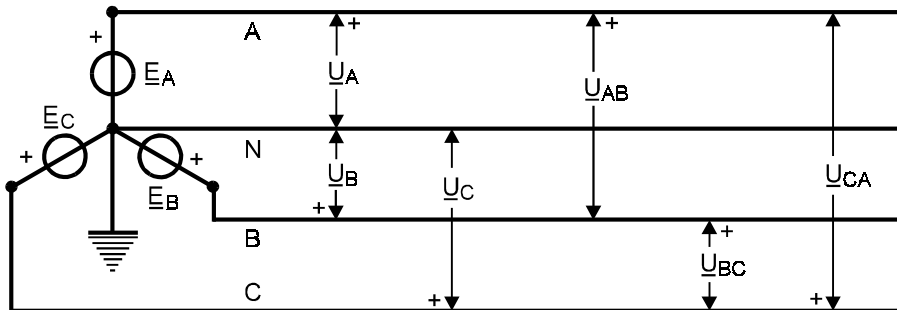
A háromfázisú generátornak elvben hat kivezetése lehetne (ennyi kivezetése van a három tekercsnek), hogy ezután hat vezeték segítségével kössük a különböző fogyasztókat a generátorra. A gyakorlatban viszont ezek közül néhányat rövide zárnak már a generátorban, vagy rögtön a kivezetéseknél, úgyhogy a generátorból csak három vagy négy vezetékot kell kivezetni.

A háromfázisú generátor tekercseit leggyakrabban csillagba kötik (6.40. ábra). A három tekercs közös pontját, mely N -nel van megjelölve, *csillagpontnak* nevezzük. A csillagpontra kapcsolt vezetőt *nullvezetéknek* vagy *nullának* nevezzük. A többi három vezetőt *fázisvezetéknek* vagy *fázisnak* nevezzük. A fázisokat A , B és C -vel jelöljük, így a fázisfeszültségek:

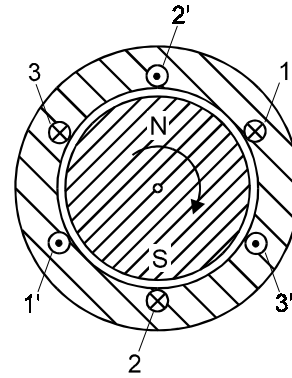
$$\underline{U}_A = U_f e^{j0}, \underline{U}_B = U_f e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \underline{U}_C = U_f e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

A vonalfeszültségek:

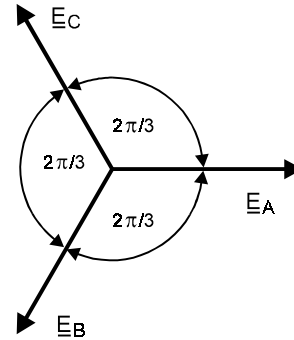
$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B, \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C, \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$$



6.40. ábra



6.38. ábra



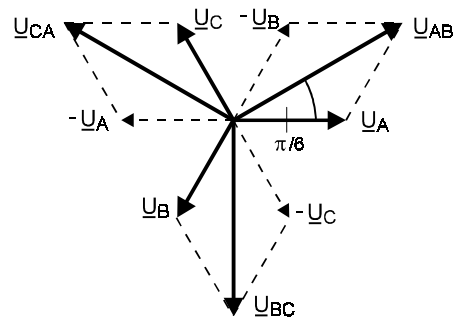
6.39. ábra

Határozzuk meg, hogy mekkora az U vonalfeszültségek effektív értéke az U_f fázisfeszültségek effektív értékéhez viszonyítva a 6.41. ábra alapján:

$$\frac{\underline{U}_{AB}}{\frac{2}{U_A}} = \cos \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\underline{U}}{U_f} = \cos \frac{\pi}{6}, \quad \frac{U}{2} = U_f \cos \frac{\pi}{6}$$

$$U = 2U_f \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ vagyis}$$

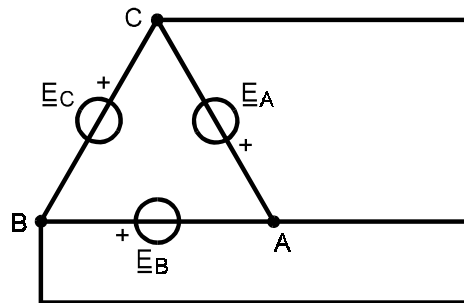
$$U = \sqrt{3}U_f$$



6.41. ábra

A városi elektromos hálózat esetében a fázisfeszültségek effektív értéke 220V, az ennek megfelelő vonalfeszültség 380V. A szimmetrikus háromfázisú hálózat nominális feszültsége alatt az U vonalfeszültség effektív értékét értjük. A városi háromfázisú elektromos hálózat névleges (nominális) feszültsége tehát 380V.

Nagyon ritkán a háromfázisú generátor tekercseit háromszögbe kötik, mint a 6.42. ábrán látható. Az ilyen kötés fő hiányossága, hogy nem teszi lehetővé mindegyik tekercs egyik végének földelését. A vonalfeszültségek ilyen kötés esetén egyenlőek a tekercsek végei közti feszültségekkel. Mivel nullvezeték nincsen, ezért a fázisfeszültségeket nem lehet definiálni.



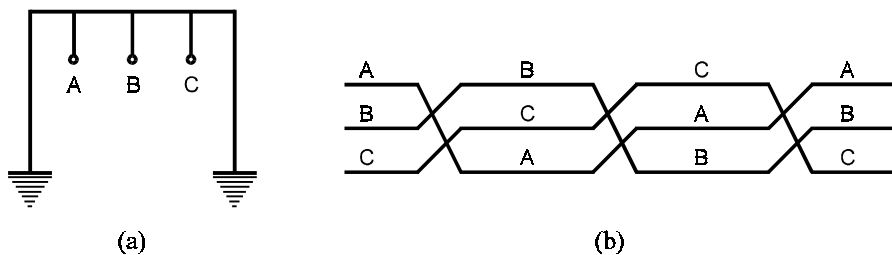
6.42. ábra

6.5.3. A FOGYASZTÓK HÁROMFÁZISÚ GENERÁTORRA VALÓ KAPCSOLÁSA

Az alacsonyfeszültségű háromfázisú vezetéknek *négy* vezetéke van (három fázis vezeték és a nullvezeték), míg a magasfeszültségű háromfázisú távvezetéknek csak három fázis vezetéke van (6.43.a ábra).

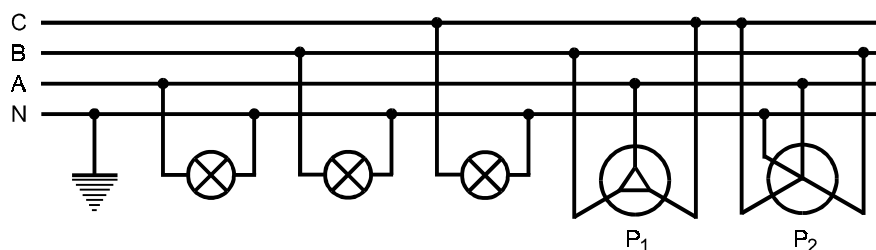
Minden vezetéknek van saját impedanciája, mely a vezetők közti kölcsönös indukciótól függ. Mivel a vezetékek nem szimmetrikusan vannak felhelyezve, az impedanciák nem lennének egyformák, ha a vezetékek az egész távvezeték hosszában egyformán helyezkednének el. A generátor mindhárom fázisának szimmetrikus terhelése érdekében a háromfázisú távvezetéknek is szimmetrikusnak kell lennie, azaz mindhárom fázisvezetéknek azonos impedanciával kell, hogy rendelkezzen. Ezt a gyakorlatban úgyérik el, hogy a vezetékeket, hozzátétőlegesen azonos távolságokon keresztezik (6.43.b ábra).

Az áramerősség a fogyasztón keresztül attól függ, hogy fázis- vagy vonalfeszültségre kötjük-e a fogyasztót (a 220V fázisfeszültségre előírányozott égő kiég, ha a 380V-os vonalfeszültségre kapcsoljuk).



6.43. ábra

A fogyasztó háromfázisú rendszerre való kapcsolásának módja több tényezőtől függ. Legfontosabb tényező a fogyasztó teljesítménye. Ha a fogyasztó kis teljesítményű, akkor fázisfeszültségre kötjük, ha nagy teljesítményű és fázisfeszültségre kötjük, akkor az áramerősség a vezetékeken nagy lesz, így a veszteségek is jelentősek. A nagyteljesítményű fogyasztókat három illetve négy kivezetéssel készülnék (*háromfázisú fogyasztók*). A fogyasztók háromfázisú táplálási rendszerre való kapcsolásának példái a 6.44. ábrán találhatók



6.44. ábra

Habár a nullvezeték földelve van, általában mégis valamilyen potenciálon van a földhöz viszonyítva (ha áram folyik rajta keresztül, akkor feszültség is jelen van a földhöz viszonyítva, mivel bármilyen kicsi is az ellenállása a vezetéknek, az mégsem egyenlő nullával).

A háromfázisú fogyasztókat legtöbbször három azonos, kétkivezetésű elemből készítik, melyeket a fogyasztón belül vagy csillagba vagy háromszögbe kötnek. Az ilyen háromfázisú fogyasztókat *szimmetrikus fogyasztóknak* nevezzük.

Ha minden háromfázisú generátorra kapcsolt fogyasztó szimmetrikus háromfázisú fogyasztó lenne, akkor a generátor mindhárom tekercse azonosan lenne leterhelve, mint ahogy minden fázisvezeték is. Az elektromos energia előállítói számára ez a legkedvezőbb üzemmód az egész rendszerben. Azonban lehetetlen minden fogyasztót szimmetrikusan elkészíteni. A hálózat szimmetrikussá tételét, a monofázisú fogyasztók három fázisra történő minél egyenletesebb elosztásával érik el. A nagyteljesítményű fogyasztóknál pedig követelmény, hogy háromfázisúak és szimmetrikusak legyenek.

6.5.4. A SZIMMETRIKUS HÁROMFÁZISÚ RENDSZEREK KIVIZSGÁLÁSA

A gyakorlatban mindig a háromfázisú generátorok szimmetrikus megterhelésére törekednek, néha viszont az aszimmetria nagyon kifejezett. Ekkor a háromfázisú rendszerre azt mondjuk, hogy *aszimmetrikus*. Most a szimmetrikus háromfázisú rendszerek kivizsgálásával foglalkozunk.

6.5.4.1.A fogyasztók csillagkapcsolása

A háromfázisú generátorok tekercsei szinte kivétel nélkül csillagba vannak kötve. A fogyasztó viszont lehet csillagba is és háromszögbe is kötve. Először figyeljük meg a fogyasztók csillagkapcsolását (6.45. ábra).

Oldjuk meg az áramkört a csomóponti potenciálok módszerével! Mivel csak két csomópontunk van, N és N' (a hurokáramok módszere szerint három egyenletet kellene felírni, így csak egyet!).

$$\text{Legyen } \underline{Y}_{\text{össz}} = \frac{1}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_f + \underline{Z}},$$

ekkor:

$$\underline{V}_{N'} (\underline{Y}_n + 3\underline{Y}_{\text{össz}}) = \underline{E}_A \underline{Y}_{\text{össz}} + \underline{E}_B \underline{Y}_{\text{össz}} + \underline{E}_C \underline{Y}_{\text{össz}} = 0,$$

$$\text{mivel } \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0.$$

Tehát, a csillagba kötött szimmetrikus háromfázisú fogyasztó csillagpontjának potenciálja megegyezik a generátor csillagpontjának potenciáljával. ez azt jelenti, hogy a nullvezetékben nem folyik áram. A fázisáramok így egyszerűen írhatók:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_{\text{össz}}}, \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_{\text{össz}}}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_{\text{össz}}}$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{|\underline{Z}_{\text{össz}}|} e^{-j\phi}, \quad \underline{I}_B = \underline{I}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad \underline{I}_C = \underline{I}_B e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

ahol $|\underline{Z}_{\text{össz}}|$ a $\underline{Z}_g$, $\underline{Z}_f$ és $\underline{Z}$ impedanciák összegének abszolút értéke, ϕ pedig az impedanciák összegének argumentuma.

Megterhelés mellett a generátor kivezetésein mérhető fázisfeszültségek:

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{Z}_g \underline{I}_A, \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{Z}_g \underline{I}_B, \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{Z}_g \underline{I}_C$$

A fázisfeszültségek értékei a fogyasztó kapcsain:

$$\underline{U}_{A'} = \underline{Z} \underline{I}_A, \quad \underline{U}_{B'} = \underline{Z} \underline{I}_B, \quad \underline{U}_{C'} = \underline{Z} \underline{I}_C$$

Ebből a háromfázisú vezeték feszültségesése a vezetékeken:

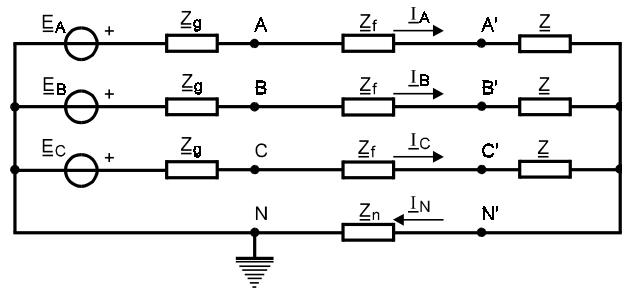
$$\underline{U}_{AA'} = \underline{V}_A - \underline{V}_{A'} = \underline{U}_A - \underline{U}_{A'} = \underline{Z}_f \underline{I}_A,$$

$$\underline{U}_{BB'} = \underline{Z}_f \underline{I}_B,$$

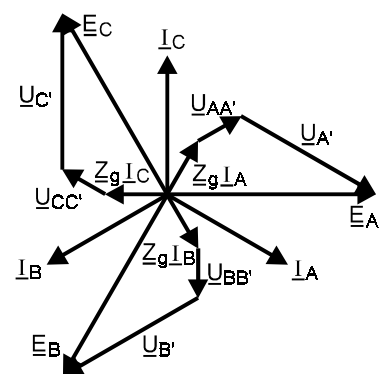
$$\underline{U}_{CC'} = \underline{Z}_f \underline{I}_C.$$

A csillagba kapcsolt szimmetrikus háromfázisú rendszer tehát nagyon egyszerűen analizálható: csak egy fázis áramerősségét és feszültségét határozzuk meg, a többi áram és feszültség a megmaradt két fázisban csak fázisban tolik el $2\pi/3$ -mal és $4\pi/3$ -mal a meghatározottakhoz képest.

A 6.45. ábrán látható szimmetrikus háromfázisú rendszer áram- és feszültség-vektordiagramja (fázorábrája) a 6.46. ábrán található.



6.45. ábra



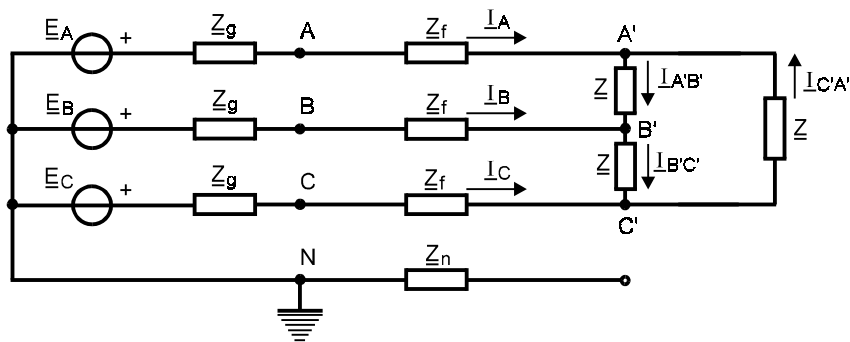
6.46. ábra

6.5.4.2. A fogyasztók háromszög-kapcsolása

A fogyasztó három elemén keresztül folyó áramerősségét itt, a szimmetrikus háromfázisú fogyasztó háromszögekapsolása esetében a vonalfeszültségek segítségével határozhatjuk meg legegyszerűbben (6.47. ábra):

$$\underline{I}_{A'B'} = \frac{\underline{U}_{A'B'}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{B'C'} = \frac{\underline{U}_{B'C'}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{C'A'} = \frac{\underline{U}_{C'A'}}{\underline{Z}}$$

Ezeket az áramokat egyszerűen összetett áramoknak nevezzük.



6.47. ábra

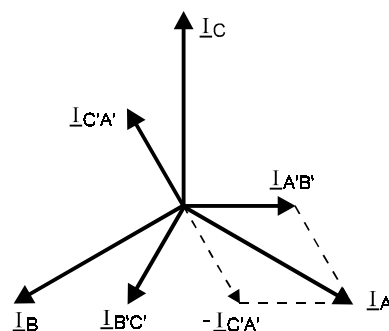
A fogyasztók helyén a vonalfeszültségeket legkönnyebben úgy határozhatjuk meg, hogy a háromszöget csillaggá alakítjuk át. Az összetett áramok láthatóan szimmetrikus áramrendszert alkotnak. A fázis áramok:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A'B'} - \underline{I}_{C'A'}, \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{B'C'} - \underline{I}_{A'B'}, \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{C'A'} - \underline{I}_{B'C'}$$

Az összetett áramok és a fázisáramok vektordiagramja (fázorábrája) a 6.48. ábrán látható. Jelöljük az összetett áramok effektív értékét I -vel, a fázis áramok effektív értékét pedig I_f -fel. Ekkor:

$$I_f = \sqrt{3}I$$

A szimmetrikus háromfázisú fogyasztók megoldását mindig egy fázisra való visszavezetéssel végezzük.



6.48. ábra

6.5.5. A HÁROMFÁZISÚ FOGYASZTÓK ÉS GENERÁTOROK TELJESÍTMÉNYE

A háromfázisú fogyasztók alapján véve monofázisú fogyasztók speciális kapcsolásai. Ezért a teljes fogyasztó pillanatnyi teljesítményét a háromfázisú fogyasztót alkotó monofázisú fogyasztók pillanatnyi teljesítményének összegeként kapjuk meg. Csak a szimmetrikus háromfázisú fogyasztók esetére szorítkozunk.

Legyen U_p a fogyasztó elemeinek vége közti feszültség effektív értéke, I_p pedig az ezeken az elemeken átfolyó áram effektív értéke. Egyenlőre mellékes, hogy a fogyasztó csillagba vagy háromszögbe van-e kapcsolva. A feszültség és az áram közti fáziskülönbség ϕ -vel egyenlő (ϕ az

impedanciák argumentuma, melyekből a háromfázisú fogyasztót összeállították). Tételezzük fel, hogy U_{p1} feszültség kezdőfázisa nulla! A háromfázisú fogyasztó teljesítményének pillanatnyi értéke ekkor:

$$p(t) = u_{p1}(t) i_{p1}(t) + u_{p2}(t) i_{p2}(t) + u_{p3}(t) i_{p3}(t) ,$$

ahol:

$$\begin{aligned} u_{p1}(t) &= \sqrt{2}U_p \cos \omega t , & i_{p1}(t) &= \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \phi) , \\ u_{p2}(t) &= \sqrt{2}U_p \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) , & i_{p2}(t) &= \sqrt{2}I_p \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \phi\right) , \\ u_{p3}(t) &= \sqrt{2}U_p \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) , & i_{p3}(t) &= \sqrt{2}I_p \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \phi\right) . \end{aligned}$$

A fenti egyenletek alapján:

$$u_{p1}(t) i_{p1}(t) = 2U_p I_p \cos \omega t \cos(\omega t - \phi) .$$

Mivel

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

a fenti egyenletet a következő alakban is felírhatjuk:

$$u_{p1}(t) i_{p1}(t) = U_p I_p \cos \phi + U_p I_p \cos(2\omega t - \phi)$$

Hasonlóan az előzőekhez:

$$u_{p2}(t) i_{p2}(t) = U_p I_p \cos \phi + U_p I_p \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \phi\right) ,$$

$$u_{p3}(t) i_{p3}(t) = U_p I_p \cos \phi + U_p I_p \cos\left(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \phi\right) .$$

A fogyasztó *pillanatnyi* teljesítménye (mivel a három egyenlet második tagjának összege egyenlő nullával):

$$p(t) = 3U_p I_p \cos \phi$$

A szimmetrikus háromfázisú fogyasztó teljesítménye állandó, azaz nem függ az időtől.

Ha a háromfázisú generátor teljesítménye állandó, akkor a forgatásához szükséges teljesítmény is állandó lesz. A generátor simán és nyugodtan dolgozik, ami nem érvényes a monofázisú generátorok esetében.

A háromfázisú fogyasztót alkotó három elem teljesítménye időben nem állandó. Minden elemre definiálható hatásos és meddő teljesítmény.

A fogyasztó hatásos teljesítménye (P) alatt értjük a fogyasztó teljesítményének középértékét egész számú periódusidő alatt, meddő teljesítmény (Q) alatt pedig a teljesítmény azon részének amplitúdóját, mely a fogyasztó és az áramkör többi része közti energiacsere gyorsaságát írja le.

Ha mindhárom elem hatásos és meddő teljesítménye azonos és egyenlő $U_p I_p \cos \phi$ -vel illetve $U_p I_p \sin \phi$ -vel, akkor az egész szimmetrikus háromfázisú rendszerre érvényes:

$$P = 3U_p I_p \cos \phi$$

$$Q = 3U_p I_p \sin \phi$$

A csillagkapcsolású fogyasztóérvényes, hogy: $U_p = U_f$, $I_p = I_f$, $U = \sqrt{3}U_f$.

A háromszög-kapcsolásban levő fogyasztóviszont: $U_p = U$, $I_p = I_s$, $I_f = \sqrt{3}I_s$.

Ezek szerint a szimmetrikus háromfázisú fogyasztó hatásos és meddő teljesítménye a vonalfeszültség és a fázis áram függvényében:

$$P = \sqrt{3}UI_f \cos \phi$$

$$Q = \sqrt{3}UI_f \sin \phi$$

A fogyasztó teljesítményéhez hasonlóan meg lehet határozni a háromfázisú generátor hatásos és meddő teljesítményét is. A kifejezések azonosak, mint a fogyasztó esetében, csak a feszültség effektív értéke helyett a generátor esetében a megfelelő e.m.e. effektív értékét kell venni.

6.5.6. A HÁROMFÁZISÚ ÉS MONOFÁZISÚ RENDSZEREK ÖSSZEHASONLÍTÁSA AZ ENERGIASZÁLLÍTÁS SZEMPONTJÁBÓL

Képzeljük el, hogy három azonos monofázisú, tiszta ohmikus ellenállású fogyasztót akarunk P_p középteljesítménnyel ellátni. Legyen a monofázisú feszültség effektív értéke U_f . Vizsgáljuk meg, hogy ehhez a három fogyasztóhoz, monofázisú és háromfázisú ellátás esetén, milyen (mekkora) vezeték keresztmetszet szükséges.

Az áram effektív értéke minden fogyasztón keresztül

$$I_p = \frac{P_p}{U_f}.$$

Monofázisú vezeték esetén a vezetőkön átfolyó össz áramerősség háromszor nagyobb lesz:

$$I_{\text{monofázisú vezeték}} = 3 \frac{P_p}{U_f}.$$

Háromfázisú rendszer esetén (a három fogyasztót köthetjük csillagba és háromszögbe is) a három monofázisú fogyasztó összteljesítménye $3P_p$ és $\cos \phi = 1$, mivel tiszta ohmikus ellenállásokról van szó. Mivel $P = 3P_p$ és $U = \sqrt{3}U_f$, a 6.5.5. (előző) pont utolsó két egyenlete szerint:

$$P_p = \frac{P}{3} = \frac{\sqrt{3}UI_f \cos \phi}{3} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}U_f I_f}{3} = U_f I_f,$$

ebből:

$$I_f = \frac{P_p}{U_f} = \frac{I_{\text{monofázisú vezeték}}}{3},$$

amely csillagkapcsolásra és háromszög-kapcsolásra is érvényes.

Szimmetrikus háromfázisú fogyasztó esetén nullvezetékre nincs szükség! A nullvezetéken keresztül nem folyik áram.

Ha $J_{\max}$ a legnagyobb megengedett áramsűrűség a távvezeték vezetőiben, akkor monofázisú ellátás esetén két vezetőre van szükség, melyek keresztmetszetének felülete:

$$S_{\text{monofázisú vezeték}} = \frac{I_{\text{monofázisú vezeték}}}{J_{\max}} = \frac{P_p}{J_{\max} U_f},$$

$$S_{\text{háromfázisú vezeték}} = \frac{1}{3} S_{\text{monofázisú vezeték}}.$$

Az utolsó egyenletből kitűnik, hogy a háromfázisú rendszer mindhárom vezetékének össz keresztmetszete egyenlő a monofázisú vezeték keresztmetszetének felületével. Tehát ha háromfázisú rendszert alkalmazunk, akkor *fele annyi vezetékanyagra van szükségünk a tápláláshoz, mint monofázisú rendszer esetén*. Még ha nullvezetékot alkalmazunk is, azonos keresztmetszetűt, mint a fázisvezetéké (a nullvezetők általában kisebb keresztmetszetűek, mint

a fázisvezetékek) a háromfázisú távvezetékhez (általában, a háromfázisú tápláláshoz), akkor is csak összesen $4/3 S_{\text{monofázisú vezeték}}$ összkétszetszertű vezetékekre van szükség a két monofázisú vezeték $2S_{\text{monofázisú vezeték}}$ keresztmetszet-felületével szemben.

6.5.7. FORGÓ MÁGNESES TÉR LÉTREHOZÁSA KÉT- ÉS HÁROMFÁZISÚ ÁRAMRENDSZER SEGÍTSÉGÉVEL

Képzeljük el, hogy a tér valamely részében mágneses tér van jelen, mely időben változó: a mágneses indukció vektorának $\dot{\mathbf{B}}$ intenzitása időben megközelítően állandó, de maga a $\mathbf{B}$ vektor állandó ω szögsebességgel forog. Az ilyen mágneses teret *forgó mágneses térnek* nevezzük.

Tételezzük fel, hogy a 6.49 ábrán látható mágnes forgó mágneses térben egy mágnesű is jelen van, mely a mágnessel azonos tengely körül foroghat. Mivel a különböző mágneses pólusok vonzzák egymást, ezért a mágneses erők, melyek a tűre hatnak, arra törekednek, hogy ugyanolyan sebességgel forgassák azt (a mágnesűt), mint amilyen sebességgel maga a mágnes forog. Ha a tű végeire ható mágneses erők elég nagyok, és a súrlódási ellenállás elég kicsi, a tű azonos sebességgel forog (*szinkronban* a forgó térrel), mint a mágnes. Ez az egyszerű rendszer a *szinkronmotorok* egyszerűsített működési elvét példázza.

A mágnesű esetében egyszerű elképzelni, hogy lesz egy olyan nyomaték, amely arra törekszik, hogy a tűt a térrel együtt forgassa. Nehezebb megérteni, hogy a forgó mágneses térnek azonos a hatása a rövidebbre zárt vezetőtekercsre is, amely foroghat a mágnes tengelyével azonos tengely körül.

Tételezzük fel, hogy t pillanatban $\dot{\mathbf{n}}$ és $\dot{\mathbf{B}}$ közti szög α , $\dot{\mathbf{B}}$ intenzitása, $\dot{\mathbf{B}}$ állandó. A tekercsen áthaladó fluxus t pillanatban:

$$\Phi(t) = abB \cos \alpha$$

Forogjon $\dot{\mathbf{B}}$ állandó ω szögsebességgel. Ekkor felírhatjuk, hogy $\alpha = \omega t$ ($t = 0$ pillanat $\alpha = 0$ szögnek felel meg). A tekercsen áthaladó fluxus az idő függvényében:

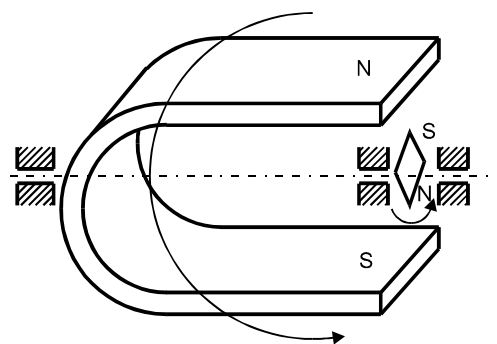
$$\Phi(t) = abB \cos \omega t .$$

A fluxusváltozás hatására a tekercsben feszültség (e.m.e.) indukálódik:

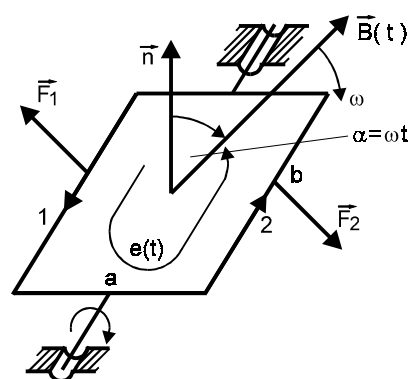
$$e(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt} = abB\omega \sin \omega t .$$

Az e.m.e. referenciairánya a 6.50. ábrán látható: a fluxus csökken a tekercsen keresztül, $e(t)$ pedig igyekszik mérsékelni a fluxuscsökkenést (igyekszik megátolni azt a változást, amely őt létrehozta – Lenz törvénye).

Az indukált feszültség (e.m.e.) hatására a tekercsben (keretben) a megjelölt irányban folyó áram jelentkezik. A tekercs 1-es és 2-es oldalára azonos intenzitású, ellentétes irányú erők fognak hatni, melyek viszont nem egy tengelyen helyezkednek el. Ezek az erők arra törekednek, hogy a mágneses tér forgásirányába forgassák el a tekercset. Ha a súrlódás kicsi, a tekercs forogni fog, viszont ez a forgás nem lesz szinkronban a forgó mágneses térrel, hanem állandóan



6.49. ábra



6.50. ábra

késni fog. Mivel a $\vec{B}$ és $\vec{n}$ közti szög változik, így ugyanúgy mint az indukált áram erőssége, a vezetőtekercsre ható mágneses erők nyomatéka is változni fog.

Ez a leírás az *aszinkron (indukciós) motorok* egyszerűsített működési elvét hivatott bemutatni. Az aszinkron indukciós motorok széleskörű alkalmazása úgyhiszem manapság már mindeki számára ismert.

Ahhoz, hogy a motor forgórészére (rotor) lehetőleg állandó forgatónyomaték hasson, egy menet (keret) helyett elképzelhetünk több téglalap alakú menetet is egy tengelyen. Az ilyen forgórészt "kalitkás" forgórésznek nevezzük. A gyakorlatban az aszinkron motorok forgórészére ferromágneses hengerből áll, benne vágatokkal a "kalitka" vezetői részére.

Most lássuk hogyan kaphatunk egyszerű módon forgó mágneses teret két azonos amplitúdójú váltóáram segítségével, melyeknek fázisa $\pi/2$ -vel van eltolódva (6.51. ábra).

Az $i_1(t)$ és $i_2(t)$ között $\pi/2$ radián (90° fok) a fáziseltolódás. Felírható tehát például, hogy:

$$B_x(t) = B_1(t) = B_m \cos \omega t$$

és

$$B_y(t) = B_2(t) = B_m \sin \omega t.$$

Az eredő mágneses indukció vektorának intenzitása ($\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ vektorösszeg intenzitása):

$$B_r(t) = \sqrt{B_x^2(t) + B_y^2(t)} = B_m.$$

Az eredő $\vec{B}$ vektor intenzitása időben nem változik. Iránya azonban igen:

$$\tan \alpha = \frac{B_y(t)}{B_x(t)} = \tan \omega t,$$

innen

$$\alpha = \omega t.$$

Tehát $\vec{B}_r$ állandó szögsebességgel forog a 6.51. ábrán megjelölt irányban, és ez a szögsebesség számbelileg egyenlő a mágneses teret létrehozó áramok körfrekvenciájával. A mágneses tér forgásirányát egyszerűen megváltoztathatjuk: az egyik elektromágnes áramának π -vel való fáziseltolásával.

Forgó mágneses teret kaphatunk szimmetrikus háromfázisú áramrendszer segítségével is (6.52. ábra). Ekkor a $B_1(t)$, $B_2(t)$ és $B_3(t)$ mágneses indukciók is, amelyeket ezek az áramok hoznak létre, időben szimmetrikus háromfázisú mágneses indukciórendszert alkotnak.

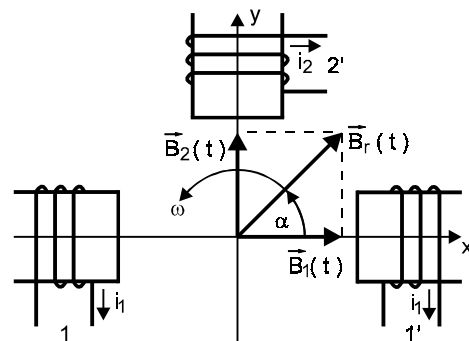
Tehát:

$$B_1(t) = B_m \cos \omega t,$$

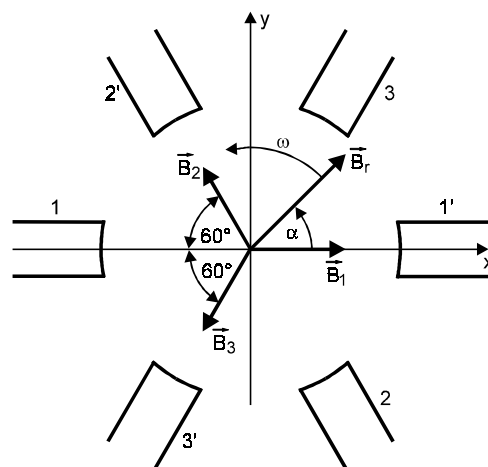
$$B_2(t) = B_m \cos(\omega t - 2\pi/3),$$

$$B_3(t) = B_m \cos(\omega t - 4\pi/3).$$

A $\vec{B}_1(t)$, $\vec{B}_2(t)$ és $\vec{B}_3(t)$ vektorok irányai időben állandók, viszont az irányításuk és nagyságuk időben folyamatosan változik. E mellett, a 6.52. ábráról jól kivehető, hogy mindhárom vektor iránya különböző, ezért a vektoralgebra összeadás-szabályai szerint kell őket



6.51. ábra



6.52. ábra

összeadni. Határozzuk meg a mágneses indukció eredő vektorának, $\vec{B}_r(t)$ -nek $B_{rx}(t)$ és $B_{ry}(t)$ összetevőit:

$$B_{rx}(t) = B_1(t) - B_2(t) \cos \frac{\pi}{3} - B_3(t) \cos \frac{\pi}{3} = B_1(t) - \frac{1}{2} [B_2(t) + B_3(t)] ,$$

mivel $\cos \pi/3 = 1/2$.

A $B_1(t)$, $B_2(t)$ és $B_3(t)$ kifejezéseinek alapján tudjuk, hogy:

$$B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) = 0 ,$$

ebből következik, hogy:

$$B_2(t) + B_3(t) = -B_1(t) , \text{ azaz}$$

$$B_{ry}(t) = B_1(t) + \frac{1}{2} B_1(t) = \frac{3}{2} B_1(t) = \frac{3}{2} B_m \cos \omega t$$

A képről látható, hogy:

$$B_{ry}(t) = B_2(t) \cos \frac{\pi}{6} - B_3(t) \cos \frac{\pi}{6} = [B_2(t) - B_3(t)] \cos \frac{\pi}{6}$$

A 6.53. ábrán látható, hogy $\underline{B}_2$ és $\underline{B}_3$ vektor különbségének iránya a képzetes tengely irányával ellentétes, azaz kezdőfázisa egyenlő $-\pi/2$ -vel, abszolút értéke pedig:

$$\frac{\underline{B}_2 - \underline{B}_3}{2} = B_m \cos \frac{\pi}{6} ,$$

$$\underline{B}_2 - \underline{B}_3 = 2B_m \cos \frac{\pi}{6}$$

Tehát az y irányban az összetevő:

$$B_{ry}(t) = 2B_m \cos^2 \frac{\pi}{6} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t ,$$

mivel $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$.

Az eredő mágneses indukció amplitúdója az előző eredmények alapján:

$$B_r(t) = \sqrt{B_{rx}^2(t) + B_{ry}^2(t)} = \frac{3}{2} B_m$$

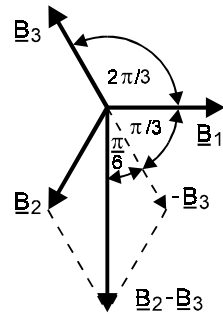
Az α szög (a $\vec{B}_r(t)$ vektor és az x tengely közti szög) a következő kifejezéssel van meghatározva:

$$\tan \alpha = \frac{B_{ry}(t)}{B_{rx}(t)} = \frac{\frac{3}{2} B_m \sin \omega t}{\frac{3}{2} B_m \cos \omega t} = \tan \omega t ,$$

ebből aztán látható, hogy:

$$\alpha = \omega t .$$

Tehát forgó mágneses teret kaptunk, melyben $\vec{B}_r$ vektor ω szögsebességgel forog, és ez a forgási sebesség számbelileg megegyezik az elektromágnes tekercseit tápláló háromfázisú áramrendszer körfrekvenciájával. A $\vec{B}_r$ vektor forgásiránya megváltoztatható bármely két elektromágnes egyszerű felcserélésével illetve bármely két fázis helycseréjével.



6.53. ábra

6.6. Alapfogalmak az üzemmód-változás folyamatairól a villamos hálózatokban

A gyakorlatban gyakran találkozunk üzemmód-változással. Ha egy fogyasztót váltóáramú villamos hálózatra kapcsolunk, a fogyasztón keresztül nem fog azonnal sinusos változású áram folyni. Bizonyos időnek kell eltelnie, hogy a fogyasztón keresztül sinusos változású áram folyjon keresztül. Üzemmód-változáskor (két állandósult állapot között) bonyolultabb folyamatok mennek végbe, mint a kezdeti és végső állapotban, vagyis az állandósult állapotokban. A két állandósult állapot között végbemenő folyamatokat *átmeneti (tranziens) folyamatoknak* nevezzük.

Az üzemmód-változás folyamatainak kivizsgálása a villamos hálózatokban sokkal összetettebb, mint az állandósult állapotok folyamatainak kivizsgálása. Ez egy külön területe az elektrotechnikának. Mi csak néhány egyszerű esettel fogunk megismerkedni.

Az üzemmód-változás folyamatai néhány esetben, mint munkafolyamatok jelentkeznek. Pl., egyes áramkörökben, melyeket az impulzus- és televíziós technikában, az automatikában alkalmaznak, az átmeneti folyamatok tulajdonságait használják fel. Más esetekben viszont az átmeneti folyamatok kifejezetten nem kívánatosak. Pl., a generátorok és a nagyteljesítményű fogyasztók hálózatra való kapcsolásakor a hálózat egyes részeiben túlfeszültségek jelentkeznek, melyek megkárosíthatják a hálózatot.

Az egyszerű villamos hálózatokban az átmeneti jelenségei előreláthatók, ha ismerjük az alapelemek (ellenállás, kondenzátor és induktív tekercs) viselkedését üzemmód-változáskor. Emlékeztetőül írjuk fel az elemek végein mért feszültség és az elemeken átfolyó áram közti összefüggést:

$$u_R(t) = R i(t) \quad , \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad , \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad .$$

Láthatjuk, hogy a feszültség és az áram értéke *ideális* ellenállás esetén pillanatnyilag megváltozhat. *Ideális* tekercs esetében a feszültség értéke *azonnal* változhat, viszont az *áram erőssége nem*, mivel ehhez végtelen nagy feszültségre lenne szükség. *Ideális* kondenzátoron az áram erősség változhat meg azonnal, viszont a kivezetések (fegyverzetek) közötti feszültség *nem*.

6.6.1. FOLYAMATOK A SOROS RC-KÖR ÜZEMMÓD VÁLTOZÁSÁKOR

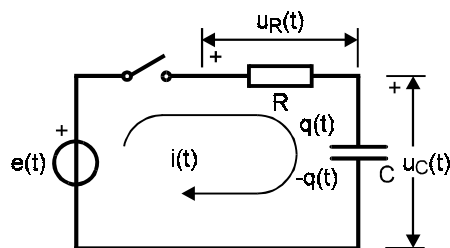
Figyeljük meg egy R ellenállás és egy C kapacitású kondenzátor soros kapcsolását, melyet $t = 0$ pillanatban $e(t)$ e.m.e.-jű (forrásfeszültségű) áramforrásra kötünk (6.54. ábra).

Tételezzük fel, hogy $t = 0$ pillanatig a kondenzátor töltetlen. A kapcsoló zárása után az áramkörnek minden pillanatban ki kell elégítenie Kirchhoff II. törvényét. Ezért $t > 0$ esetén az áramkör állapota a következő egyenlettel adott:

$$R i(t) + \frac{q(t)}{C} = e(t) \quad ,$$

ahol $i(t)$ az áramerősség pillanatnyi értéke az áramkörön keresztül, $q(t)$ pedig a kondenzátor egyik fegyverzetének a pillanatnyi töltésmennyisége.

A fegyverzet pillanatnyi töltésmennyiségének növekedése $dq(t)$ és az áramerősség pillanatnyi értéke között a következő összefüggés áll fenn:



6.54. ábra

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

így az első kifejezés a következő alakban írható fel:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{e(t)}{R}.$$

Mivel ebben az egyenletben nem csak $q(t)$ ismeretlen jelentkezik, hanem a deriváltja is, ezt az egyenletet *differenciálegyenletnek* nevezzük. Ezt a problémakört már érintettük, és meg is oldottuk az egyenáramoknál, de ott a kondenzátor feszültsége volt az ismeretlen mennyiség. Tudjuk azt is, hogy az inhomogén, elsőfokú, állandó együtthatójú differenciálegyenlet megoldása két részből áll: a partikuláris és a homogén megoldás-részből. A homogén megoldás a hálózat külső gerjesztésektől független, ún. saját viselkedését jellemzi, és a teljes megoldás átmeneti (tranzien) részét adja meg. A partikuláris megoldást viszont a külső gerjesztések és az áramköri elemek közösen határozzák meg. Ez a megoldás-rész az átmeneti jelenségeket követő stacionárius állapotot írja le. Az integrálási állandókat a kezdőértékekből lehet kiszámolni.

Tételezzük fel, hogy megtaláltuk $q_p(t)$ függvényt, melyet az inhomogén differenciálegyenlet bal oldalába behelyettesítve pontosan $e(t)/R$ -t kapunk. Ez a megoldás szemmel láthatóan az egyenlet jobb oldalán álló $e(t)/R$ függvény alakjától függ és, mint tudjuk a differenciálegyenlet *partikuláris megoldásának* nevezzük. Hagyjuk meg egyenlőre az ilyen általános alakú parciális megoldást. A későbbiekben az egyenlet jobb oldalának $(e(t)/R)$ néhány egyedi alakjára a konkrét partikuláris megoldásokat is megkeressük.

A differenciálegyenlet *homogén megoldását a homogén egyenlet* megoldásával kapjuk meg:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = 0.$$

Tudjuk azt is, hogy a homogén egyenlet megoldásának alakja $q_h(t) = A e^{-at}$ (ahol a és A egyenlőre még nem meghatározott paraméterek – konstansok). Ha ezt a megoldás-alakot behelyettesítjük a homogén egyenletbe, az a paramétert közvetlenül kiszámíthatjuk. Az így kapott érték: $a = 1/(RC)$

Az A paraméter értéke csak a kezdőértékek ismeretében számítható ki, ehhez azonban a konkrét gerjesztést is ismerni kellene. Ennek hiányában a differenciálegyenletnek csak a következő alakú általános megoldását írhatjuk fel:

$$q(t) = q_p(t) + q_h(t) = q_p(t) + A e^{-\frac{t}{RC}}$$

A következőkben a különböző időfüggvényű gerjesztésekre adott feleletet fogjuk megkeresni, vagyis a differenciálegyenlet általános megoldását számítjuk majd ki, az az inhomogén egyenlet jobb oldalának $(e(t)/R)$ néhány egyedi alakjára.

6.6.2. A SOROS RC-KÖR EGYENFESZÜLTSGRE KAPCSOLÁSA

Tételezzük fel, hogy $e(t) = E$. Ekkor az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldására a gerjesztésnek megfelelő alakú megoldást tételezünk fel, vagyis állandót (mondjuk $q_p(t) = B$). A feltételezett megoldást behelyettesítve az inhomogén egyenletbe a partikuláris megoldásra a következő értéket kapjuk:

$$q_p(t) = CE ,$$

(tehát a behelyettesítés után kiszámítható, hogy $B = CE$, mivel $dq(t)/dt = 0$). Tehát az általános megoldás az $e(t) = E$ alakú gerjesztésre a következő:

$$q(t) = CE + A e^{-\frac{t}{RC}} .$$

Az A paramétert a kondenzátor kezdő pillanatbeli töltésértékéből határozzuk meg. Mivel tudjuk, hogy a kondenzátor $t = 0$ pillanatban töltetlen volt, azaz $q(0) = 0$, egy olyan egyenletet kapunk, melyből meghatározható az A konstans. A $q(0) = 0$ feltételt *kezdő feltételnek* (értéknek, határértéknek) nevezzük, melyet a differenciálegyenlet megoldásának ki kell elégítenie. Behelyettesítve a kezdőértéket az általános megoldás kifejezéséb a következőt kapjuk:

$$0 = CE + A .$$

Ebből $A = -CE$, így végül is:

$$q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (t \geq 0)$$

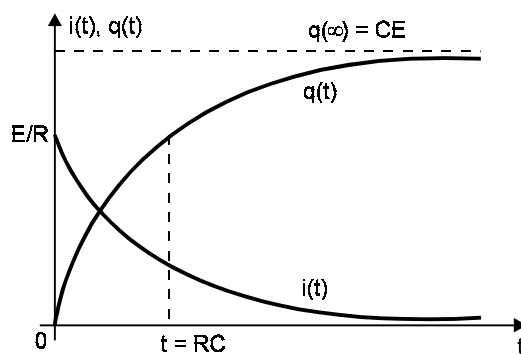
Az utóbbi egyenlet idő szerinti első deriváltja az áramkörben folyó áramerősség pillanatnyi értékét adja:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

Ezen egyenlet szerint az áramerősség értéke $t = 0$ pillanatban a legnagyobb, mikor E/R -rel egyenlő. Ezután az áramerősség értéke csökken az áramkörben. Az áramerősség-csökkenés sebességének mértéke a soros RC-körben az RC szorzat (az ellenállás ellenállásértékének és a kondenzátor kapacitásának a szorzata), melyet *időállandónak* nevezünk és τ -val jelölünk ($\tau = RC$). Az időállandó reciproka értékét, az $1/RC$ -t, *csillapítási tényezőnek* nevezzük. Minnél kisebb az áramkör időállandója, annál gyorsabban csökken az áramerősség az áramkörben és fordítva.

$t > \tau$ -ra az áramerősség az áramkörben továbbra is hirtelen csökken. Végül, "végtelen hosszú" idő után, egyenlő lesz nullával. Viszont már néhány időállandónyi időtartam elteltével az áramkörben az áramerősség elhanyagolhatóan kis értékű lesz. Például a $t = 5\tau$ pillanatban az áramerősség ($1/e^5 \approx 0,0067$) a kezdőértékének a kb. 0,7%-ra csökken.

A kondenzátor fegyverzetén lévő töltésmennyiség és töltőáram erőssége az idő függvényében a 6.55. ábrán látható.



6.55. ábra

6.6.3. A KONDENZÁTOR KISÜTÉSE A SOROS RC-KÖRBEN

Tételezzük fel, hogy az áramkörben a kondenzátor fel van töltve Q_0 villamos töltésmennyiséggel, viszont az áramkör $t = 0$ pillanatig nyitott. $t = 0$ pillanatban zárjuk az áramkört (6.56. ábra). Határozzuk meg a kondenzátor pozitív fegyverzetének töltésmennyiségét

és a kisülési áramerősséget az áramkörön keresztül az idő függvényében, ha az áramkörbe nincs áramforrás kötve.

Ebben az esetben a kondenzátor pozitív fegyverzetének a töltésmennyisége csak az előző fejezetben (6.6.2. pontban) felírt homogén differenciálegyenlettel van meghatározva, mivel az áramkörbe nincs áramforrás kötve. Ennek az egyenletnek a megoldása, mint ahogy azt már ott láttuk:

$$q(t) = A_0 e^{-t/RC}.$$

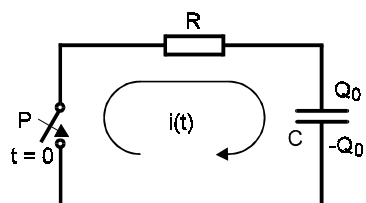
Az A_0 paramétert a kezdőfeltételből határozzuk meg: $t = 0$ pillanatban $q(0) = Q_0$ -nak kell lennie, így $A_0 = Q_0$. Tehát:

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC}.$$

Az áramerősséget az előző egyenlet idő szerinti első deriváltja adja meg:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Az áramerősség azonos törvény szerint csökken az áramkörben, mint az előző esetben. Most viszont ugyanezen törvény szerint csökken a kondenzátor töltésmennyisége is. A negatív előjel az áramerősség kifejezésében azt jelenti, hogy az áram valódi iránya ellentétes a 6.56. ábrán megjelölt referenciairánnyal (másszóval a kisülési áram ellentétes irányú a töltési áramhoz viszonyítva, ami természetes).



6.56. ábra

6.6.4. A SOROS RC-KÖR VÁLTÓFESZÜLTSGRE KAPCSOLÁSA

Tételezzük fel, hogy $e(t) = E_m \cos(\omega t + \theta)$. Ebben az esetben is (mint bármilyen más, tetszőleges gerjesztés-alakra) az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása megegyezik a sinusos változású feszültségre kapcsolt áramkör *állandósult* állapotával. Az áramerősséget komplex számításal határozzuk meg:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + 1/j\omega C} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} e^{-j\phi}, \quad \phi = \arctan \frac{-1}{\omega CR}.$$

Mivel $\underline{I} = j\omega \underline{Q}$, ezért $\underline{Q} = -j\underline{I}/\omega$, vagy

$$\underline{Q} = \frac{E}{\omega \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} e^{-j(\phi + \pi/2)},$$

tehát

$$q_p(t) = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \theta - \phi - \pi/2).$$

Így az inhomogén egyenlet általános megoldása esetünkben:

$$q(t) = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \theta - \phi - \pi/2) + A e^{-t/RC}.$$

Ha $q(0) = 0$ (a kondenzátor az áramkör zárása előtt töltetlen volt), akkor $t = 0$ pillanatban:

$$\frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\theta - \phi - \pi/2) + A = 0,$$

mivel $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin \alpha$, $t \geq 0$ -ra:

$$q(t) = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \left[\sin(\omega t + \theta - \phi) - \sin(\theta - \phi) e^{-t/RC} \right].$$

Innen a töltési áram erőssége az áramkörben:

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \left[\cos(\omega t + \theta - \phi) + \frac{\sin(\theta - \phi)}{RC\omega} e^{-t/RC} \right] \quad (t \geq 0)$$

$t \rightarrow \infty$ -re a várt kifejezést kapjuk. Viszont $t = (0+)$ -ra $i(0+) = \frac{E_m \cos \theta}{R}$ -t kellene kapni, az utolsó egyenlet szerint viszont a következőt kapjuk:

$$i(0+) = \frac{E_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\omega C R)^2}} \left[\cos(\theta - \phi) + \frac{\sin(\theta - \phi)}{RC\omega} \right]$$

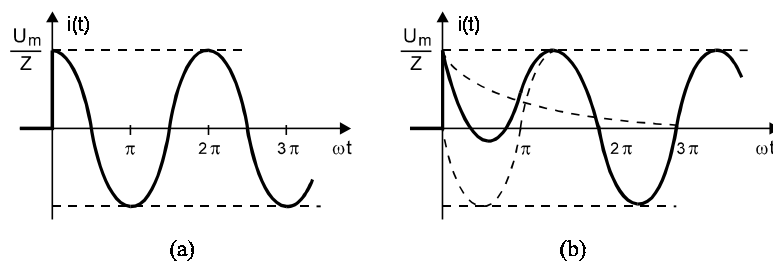
Ha azonban figyelembe vesszük, hogy $1/(\omega C R) = -\tan \phi$, akkor néhány trigonometriai átalakítás után megkapjuk a várt kifejezést:

$$i(0+) = \frac{E_m \cos \theta}{R}.$$

A kondenzátor fegyverzetei között uralkodó feszültség $u_C(t)$ és az ellenálláson mért feszültségesés $u_R(t)$ a következő kifejezésekkel van megadva:

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad u_R(t) = R i(t).$$

Az előző egyenletek alapján az áramerősség az áramkörben $i(t)$ és $u_C(t)$ és $u_R(t)$ feszültségek a gerjesztő feszültség (a generátor e.m.e.-jének) kezdőfázisától függenek. Ha pl. $\theta = \phi$, akkor az áram az áramkörben rögtön a bekapcsolás után sinusos változású lesz (6.57.a ábra), az $u_C(t)$ és $u_R(t)$ feszültségek szintén. A $\theta - \phi = \pi/2$ feltétel a bekapcsolásra legkevesbé előnyös pillanatot jelöli. Itt az általános megoldás kifejezésében a zárójelben lévő második tag hatása a legnagyobb. Erre az esetre a sinusos változású áram kialakulásának folyamata a 6.57.b ábrán látható. Mindkét görbe szerkesztésénél az $RC\omega = 1$ összefüggés érvényes.



6.57. ábra

6.7. Folyamatok a soros RL-kör üzemmód-változásakor

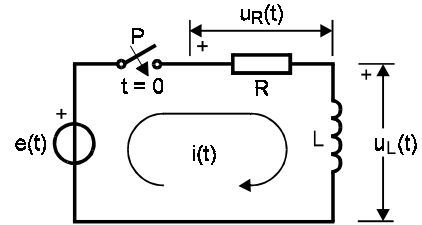
A 6.58. ábrán látható soros RL-körre minden pillanatban teljesülnie kell a következő egyenlet-nek:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = e(t) \quad \text{vagy} \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{e(t)}{L}$$

Ez az egyenlet nagyon hasonló, pontosabban azonos alakú, mint az RC körre felírt általános egyenlet, ezért az általános megoldása is olyan, mint az RC körre megkapott általános megoldás:

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = i_p(t) + B e^{-tR/L}.$$

Az $i_p(t)$ itt is az egyenlet jobb oldalán álló $e(t)/L$ függvénytől függ.



6.58. ábra

6.7.1. SOROS RL-KÖR EGYENFESZÜLTÉSRE KAPCSOLÁSA

Legyen $e(t) = E$. Ekkor az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása:

$$i_p(t) = E/R,$$

így az általános megoldás a következő:

$$i(t) = \frac{E}{R} + B e^{-tR/L}.$$

A B állandót (paramétert) az $i(0+) = 0$ kezdőfeltételből (az áramerősség az induktív tekercsen nem változhat meg azonnal) határozzuk meg. Így azt kapjuk, hogy $B = -E/R$, tehát a teljesértékű általános megoldás:

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-tR/L}).$$

Az előző kifejezésből jól látható, hogy az áram erőssége az áramkörben E/R véges értékig növekszik. Időben állandó áram előbb jön létre, ha kisebb a $\tau = L/R$ állandó. Ezt az állandót a soros RL-kör *időállandójának* nevezzük.

Az áramerősség az áramkörben erre az esetre úgy változik, mint a töltésmennyiség a 6.55. ábrán. Az $u_R(t)$ és az $u_L(t)$ feszültségek a következő kifejezések segítségével határozhatók meg:

$$u_R(t) = R i(t) \quad \text{és} \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

6.7.2. AZ ÁRAM MEGSZÜNÉSE A SOROS RL-KÖRBEN

Vizsgáljuk ki, hogyan változik az áramerősség a soros RL-körben, melyben időben állandó I_0 áramerősségű áram folyt, ha $t = 0$ pillanatban kikapcsoljuk az áramforrást és rövidre zárjuk az áramkört. Kirchhoff II. törvénye az áramkörre ekkor a következő:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = 0 .$$

Ennek a homogén differenciálegyenletnek a megoldását már ismerjük az előző pontból:

$$i(t) = A_0 e^{-tR/L} .$$

Az A_0 állandót a kezdőfeltételből határozzuk meg: mivel $i(0+) = I_0$ -nak kell lennie, megkapjuk, hogy $A_0 = I_0$. Tehát ebben az esetben:

$$i(t) = I_0 e^{-tR/L} .$$

Az áramerősség ugyanúgy csökken, mint a soros RC-kör esetében, csak más időállandóval.

6.7.3. A SOROS RL-KÖR VÁLTÓFESZÜLTSÉGRE KAPCSOLÁSA

Legyen $e(t) = E_m \cos(\omega t + \theta)$. Ekkor az inhomogén differenciálegyenletnek az a partikuláris megoldása, amely megfelel a sinusos változású feszültségre kapcsolt áramkör állandósult állapotának. Ezt az állandósult állapotot komplex számítással határozhatjuk meg legkönnyebben:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j\phi} , \quad \tan \phi = \frac{\omega L}{R} .$$

Ebből aztán a partikuláris megoldás:

$$i_p(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \theta - \phi) ,$$

így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

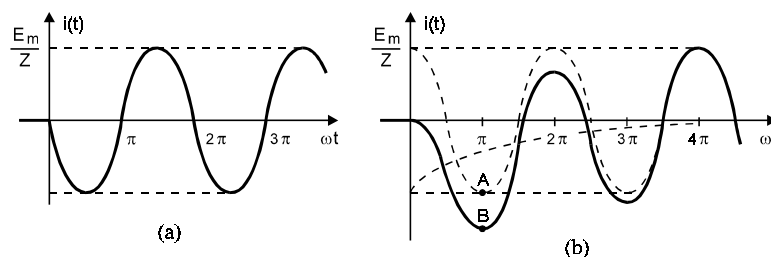
$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \theta - \phi) + B e^{-tR/L} .$$

Mivel $t = (0+)$ -ra $i(0+) = 0$ -nak kell lennie, azt kapjuk, hogy:

$$B = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\theta - \phi) ,$$

tehát:

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\cos(\omega t + \theta - \phi) - \cos(\theta - \phi) e^{-tR/L} \right] , \quad (t > 0) .$$



6.59. ábra

A sinusos változású áram kialakulásának folyamata, akárcsak az RC-kör esetében, itt is a gerjesztőfeszültség (a rákapcsolt generátor e.m.e.-jének) kezdőfázisától függ. Amennyiben

$\theta - \phi = \pi/2$, akkor az áramkörben azonnal szinuszos változású áram jön létre (6.59. ábra), mivel az általános megoldás kifejezésében a szögletes zárójelben lévő második tag értéke ekkor nulla. Ez a feltétel határozza meg a legkedvezőbb időpillanatot a generátor hálózatba kapcsolására. A legkedvezőtlenebb pillanatot a $\theta - \phi = 0$ jelöli. Ekkor ugyanis az általános megoldás szögletes zárójelében lévő második tag a domináns, meghatározva ezzel a tranziens jelenségeket. Az áramerősség hullámalakja a 6.59.b ábrán látható. Az ábráról leolvasható, hogy az áramerősség értéke elérheti az állandósult állapot áramamplitúdójának közel kétszeresét is, az RL-kör nagy időállandója esetén.

6.8. Ellenőrző kérdések

1. Nagyon szigorúan véve Kirchhoff törvényei milyen feltételek mellett érvényesek (úgy az egyen-, mint a váltóáramoknál)?
2. Összefüggésben van-e az ágáramok erőssége az áramkör mértani alakjával az egyenáramoknál (és az időben változó áramok esetében)?
3. Milyen gyakorlati jelentőséggel bír az áramkör ágainak mágneses csatoltsága a szokványos (alacsony) frekvenciákon?
4. Milyen körülmények között, és milyen következményekkel kell számolni áram terjedésének véges sebessége miatt?
5. Mi az áramkör kvázistacionárius állapota?
6. Melyek az aktív, és melyek a passzív áramköri elemek?
7. Mit értünk az időben változó villamos áram fogalma alatt?
8. Mikor mondjuk az időben változó áramra, hogy pozitív?
9. Hogyan írható le az összefüggés az R, L és C elemek végein mért feszültség és az elemeken átfolyó áram között?
10. Hogyan szólnak, és milyen kikötéssel érvényesek Kirchhoff törvényei az időben változó áramok esetében?
11. Hogyan alkalmazhatók a Kirchhoff egyenletek az időben változó áramú hálózatokban?
12. Milyen üzemmódokat különböztetünk meg a váltakozó áramú áramköröknél?
13. Hogyan írható fel a fogyasztó és generátor teljesítménye a váltakozó áramok esetén?
14. Milyen lehet a generátorok és fogyasztók teljesítménye a váltakozó áramoknál?
15. Melyek a periódikus mennyiségek alapjellemzői (hét jellemző)?
16. Milyen szimbólummal jelölik a feszültség, az áram és az e.m.e. kezdőfázisát?
17. Mitől függ egy periódikus mennyiség kezdőfázisa?
18. Mikor siet az egyik periódikus mennyiség a másikhoz viszonyítva?
19. Mi a neve és jele a feszültség és az áram közötti fáziskülönbségnek?
20. Mi a periódikus mennyiségek középértéke (definíció, összefüggés az amplitúdóval)?
21. Mi a a periódikus mennyiségek négyzetes középértéke vagy effektív értéke?
22. Mi az előnye és jelentősége a sinusos áramoknak (váltóáramoknak)?
23. Hogyan analizálhatók a nemsinusos, de periódikus mennyiségek?
24. Mi az alapharmonikus és felharmonikus?
25. Mivel állítják elő az ipari frekvenciájú sinusos áramokat?
26. Hogyan működik a generátor (elvi szinten)?
27. Minek a segítségével állítják elő a magas frekvenciájú sinusos feszültségeket?
28. Hogyan határozhatók meg az áramok az ismert feszültségre kapcsolt háromfajta áramköri alapelemen?
29. Mi a sinusosan változó mennyiségek három alapjellemzője?
30. Hogyan ábrázolhatók a sinusos mennyiségek forgóvektor segítségével?
31. Mivel arányosak a vektordiagramon feltüntetett vektorok?
32. Hogyan számítható a teljesítménny a váltóáramoknál?

33. Milyen fajta teljesítményt különböztetünk meg, és mi a teljesítménytényező?
34. Mi jellemzi az aktív és mi a reaktív fogyasztót (reaktáns elemet)?
35. Melyek az egységeik a különböző teljesítményeknek?
36. Hogyan definiálható a generátorok teljesítménye?
37. Milyen a váltóáramú hálózatok szokványos megoldási módja?
38. Mennyi az ismeretlenek száma egy adott váltóáramú hálózatban?
39. Hány egyenlet írható fel a Kirchhoff egyenletek segítségével?
40. Hogyan alakíthatók a Kirchhoff-egyenletek komplex alakra?
41. Mit takarnak a Kirchhoff-egyenletek komplex alakjai?
42. Hogyan definiáljuk az áram és a feszültség komplex effektív értékét?
43. Miért van szükség a komplex effektív értékek bevezetésére?
44. Milyen alakú komplex kifejezésekből állnak a (komplex) pótegyenletek?
45. Mi az impedancia, mi az egysége, és milyen részekből áll (mik a nevei)?
46. Mi az admittancia, mi az egysége, és milyen részekből áll (mik a nevei)?
47. Hogyan számítható az eredő impedancia az elemek soros és párhuzamos kapcsolásánál?
48. Hogyan számítható az eredő admittancia az elemek soros és párhuzamos kapcsolásánál?
49. Hogyan kezelendő a vegyes kapcsolás?
50. Mi a csillag-delta transzformáció?
51. Hogyan ábrázolható a komplex feszültség és áram a komplex síkban?
52. Mi az impedanciaábra(impedancia-vektordiagram) és admittanciaábra (impedancia-vektordiagram)?
53. Rajzold meg egy soros és egy párhuzamos RLC-kör impedancia- és admittanciaábráját!
54. Mi a feszültség- és mi az áramgenerátor?
55. Melyek a feszültséggenerátor áramgenerátorral való helyettesítésének feltételei és fordítva?
56. Hogyan szólnak a hurokáramok módszerének egyenletei komplex alakban?
57. Milyenek a csomóponti potenciálok módszerét leíró komplex egyenletek?
58. Mi a komplex teljesítmény definíciója?
59. Hogyan írható fel a komplex teljesítmény a komplex feszültség és áram függvényében?
60. Mi a különbség a fogyasztó és a generátor komplex teljesítménye között?
61. Hogyan szól és írható fel (az egyenáramokkal való analógia alapján) a szuperpozíció elve?
62. Hogyan szól és miként bizonyítható (egyenáram-analógia) a reciprocitás tétel (felcserélési tétel)?
63. Mi a Thévenin-tétel (Norton tétele) a váltóáramoknál?
64. Mi a lényege a kompenzációs (helyettesítési) tételnek?
65. Mi a pillanatnyi teljesítmény megmaradásának elve?
66. Mire alkalmazható a komplex teljesítmény megmaradásának tétele?
67. Hogyan "hangolható rá" egy fogyasztó egy adott generátorra?
68. Hol és mennyi energia "disszipálódik" (alakul hővé) a generátorra hangolt fogyasztó esetében?
69. Mikor van értelme a fogyasztónak a generátorra való ráhangolásának, és mikor nincs?
70. Mit értünk a fogyasztók teljesítménytényezőjének feljavítása alatt?
71. Milyen természetű elemekkel történik a teljesítménytényező feljavítása?
72. Hogyan határozható meg a pótelem szükséges karakterisztikája a teljesítménytényező adott értékre való feljavításához?
73. Hogyan írható le a csatolt ágakban elhelyezkedő induktív tekercsek kölcsönhatása?
74. Minek tekinthetők a mágneselesen csatolt ágak?
75. Mire szolgálnak a villamos transzformátorok?
76. Milyen részekből áll egy transzformátor?
77. Milyen a tökéletes transzformátor?
78. Hogyan jellemezhető a tökéletes transzformátor "üresjárása"?
79. Mit nevezünk a transzformátor áttételének?
80. Mi történik, ha a transzformátor szekunder végeit terhelő fogyasztóval zárjuk?

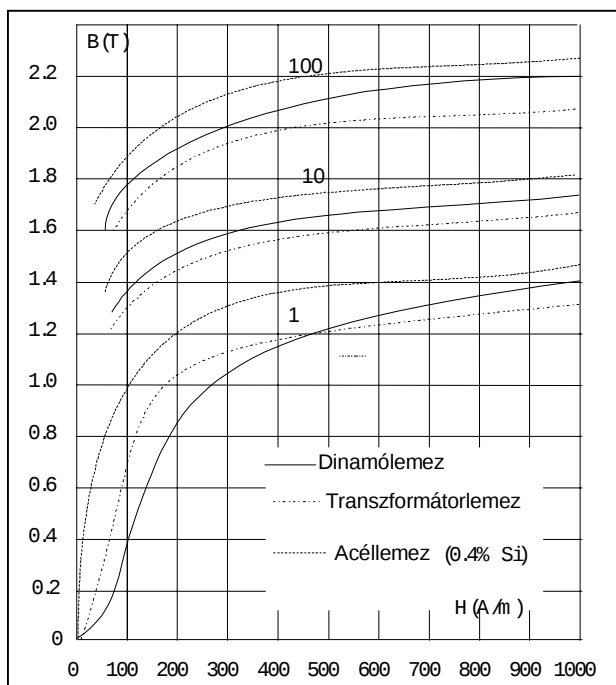
81. Hogyan történik az energiaátvitel a primer tekercstől a szekunder felé?
82. Melyek a lineáris üzemmódban működő transzformátor alapegyenletei?
83. Melyek a transzformátort a szekunder kivezetéseinek helyettesítő Thèvenin generátor paraméterei?
84. Hogyan számítható ki a transzformátor bemenő impedanciája?
85. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az ideális transzformátor?
86. Milyen helyettesítő vázlata (sémája) lehet egy transzformátornak?
87. Milyen feltételek mellett alkalmazható a helyettesítési vázlat egy adott transzformátorra?
88. Hogyan néz ki a transzformátor helyettesítő sémája, amely egy négyfázist és egy ideális transzformátort tartalmaz?
89. Hogyan számíthatók ki a vázlat négyfázisának paraméterei?
90. Mi az autotranszformátor?
91. Hogyan szólnak az autotranszformátor alapegyenletei?
92. Miből áll az egyszerű (soros) rezgőkör?
93. Milyen feltétel kielégítése mellett jutunk el a Thomson képlethez (a rezonáns körfrekvencia értékéhez)?
94. Hogyan változik az áram effektív értéke és kezdőfázisa a körfrekvencia-függvényében?
95. Milyen jellegű a soros RLC-kör a rezonáns körfrekvencia alatti körfrekvenciákon, és milyen felette?
96. Mivel egyenlő az egyszerű rezgőkör sajátfrekvenciája?
97. Milyen jellegű fogyasztóként viselkedik a soros rezgőkör a rezonanciafrekvencián?
98. Mekkora a kondenzátor és a tekercs feszültsége az ω_0 körfrekvencián?
99. Miért hívják feszültség rezonanciának is ezt a fajta rezonanciát?
100. Mikor beszélhetünk túlfeszültségről?
101. Mit nevezünk a rezgőkör lehangoltságának?
102. Mi a rezgőkör sávszélessége?
103. Hogyan számítható ki a sávszélesség?
104. Mi a rezgőkör jósági tényezője?
105. Mi az összefüggés a sávszélesség és a jósági tényező között?
106. Miből áll egy vegyes párhuzamos rezgőkör?
107. Mi az antirezonáns körfrekvencia és hogyan határozható meg?
108. Hogy hívják a párhuzamos rezgőkör működését az ω_0 frekvencián?
109. Miért hívják áram rezonanciának is ezt a rezonanciát?
110. Milyen frekvenciákon és milyen feltételek mellett alakítható át a vegyes párhuzamos rezgőkör tiszta párhuzamos rezgőkörré?
111. Milyen jellegű a párhuzamos RLC-kör az antirezonáns körfrekvencia alatti körfrekvenciákon, és milyen felette?
112. Mi a tiszta párhuzamos rezgőkör jósági tényezője?
113. Mit mutat meg hozzávetőlegesen a jósági tényező számértéke?
114. Hogyan jellemezhetők a többfázisú rendszerek?
115. Ki szabadalmaztatta a polifázisú rendszereket?
116. Milyen többfázisú rendszereket használnak manapság?
117. Hogyan működik a háromfázisú generátor?
118. Hány kivezetése van a háromfázisú generátoroknak?
119. Milyen a háromfázisú generátor fázisfeszültségeinek fázorábrája?
120. Mi mondható el a háromfázisú generátor tekercseinek csillagkapcsolása esetén?
121. Milyen feszültségek definiálhatók a csillagkapcsolású generátoroknál?
122. Mi a vonal- és fázisfeszültség közötti összefüggés?
123. Mekkora a városi hálózat vonal- és fázisfeszültségének (névleges) értéke?
124. Mi mondható el a háromfázisú generátor tekercseinek háromszög kapcsolása esetén?
125. Milyen feszültségek definiálhatók a háromszög kapcsolású generátoroknál?
126. Miért van szükség a távvezetékeknél a fázisvezetékek keresztezésére?

127. Hogyan kapcsolhatók a fogyasztók a háromfázisú táplálásra?
128. Csillagba kötött szimmetrikus háromfázisú fogyasztó esetében milyen a háromfázisú hálózat analízise?
129. A háromszögbe kötött szimmetrikus háromfázisú fogyasztó esetében hogyan oldható meg a háromfázisú hálózat?
130. Mi az összefüggés a fázisáramok és összetett áramok között a háromszögbe kötött fogyasztó esetében?
131. Hogyan számítható a háromfázisú fogyasztók (terhelések) és generátorok teljesítménye?
132. Milyen a szimmetrikus háromfázisú fogyasztó (pillanatnyi) teljesítménye?
133. Mekkora a szimmetrikus háromfázisú fogyasztó hatásos és meddő teljesítménye?
134. Mekkora a szimmetrikus háromfázisú fogyasztó hatásos és meddő teljesítménye a vonalfeszültség és a fázisáram függvényében?
135. Hogyan fejezhető ki a háromfázisú generátor hatásos és meddő teljesítménye?
136. Melyek a háromfázisú táplálás előnyei?
137. Hogyan működnek a szinkronmotorok?
138. Milyen az indukciós motorok működési elve?
139. Hogyan állítható elő forgó mágneses tér kétfázisú áram segítségével?
140. Mekkora a fázisáramok közötti késés a forgó mágneses teret létrehozó kétfázisú rendszerben?
141. Hogyan változik a létrehozott forgó mágneses tér (az eredő $\vec{B}$ vektor) intenzitása és iránya az idő függvényében?
142. Hogyan állítható elő forgó mágneses tér háromfázisú áram segítségével?
143. Hogyan változik a háromfázisú áram segítségével létrehozott forgó mágneses tér (az eredő $\vec{B}$ vektor) intenzitása és iránya az idő függvényében?
144. Hogyan változtatható meg a forgó mágneses tér forgásiránya?
145. Mikor találkozunk üzemmódváltozással egy villamos hálózatban?
146. Milyen "fajsúlyú" feladat az átmeneti jelenségek analízise?
147. Milyen egyenlettel írható le az RC-kör üzemmód-változása?
148. Milyen részekből áll az üzemmód-változást leíró egyenlet általános megoldása?
149. Melyik megoldás-rész írja le a hálózat saját viselkedését?
150. Hogyan hívják azt a megoldásrészt, amelyik a tranziens jelenségeket követő stacionárius állapotot írja le?
151. Milyen alakú megoldást tételezünk fel a homogén egyenletre?
152. Hogyan határozható meg az exponenciális tag kitevőjében levő paraméter?
153. Milyen alakú parciális megoldást tételezünk fel, ha egyenfeszültségű a gerjesztés?
154. Mi alapján határozható meg az általános megoldás egyetlen paramétere?
155. Milyen az áram változása az RC-kör egyenfeszültségre kapcsolásakor?
156. Hogyan nevezik, és mi a jele az RC szorzatnak?
157. Minek nevezik az $1/(RC)$ kifejezést?
158. Meddig tartanak a tranziens jelenségek?
159. Milyen a feszültség változása a kondenzátor fegyverzetein az átmeneti jelenségek ideje alatt?
160. Milyen egyenlettel írható le a kondenzátor kisütése?
161. Hogyan változik a kisütési áram az idő függvényében?
162. Hogyan változik a kondenzátor feszültsége a kisütés folyamán?
163. Mivé alakul a kondenzátor fegyverzetei között felhalmozódott energia az RC-kör rövidrezárásakor?
164. Mi a különbség az RC-kör váltófeszültségre kapcsolásánál az egyenfeszültségre kapcsoláshoz viszonyítva?
165. Milyen megoldási módszer vezet leggyorsabban a parciális megoldáshoz?
166. Melyik a legkedvezőbb pillanat (feltétel) az RC-körnek a váltófeszültségű gerjesztésre kapcsolásához (milyen alakú lesz az áram akkor a tranziens állapotban)?

167. Melyik a legkedvezőtlenebb feltétel az RC-kör váltófeszültségre kapcsolásának?
168. Milyen egyenlet írható fel a gerjesztett RL-körre az átmeneti (tranziens) állapotban?
169. Milyen alakú az előző kérdésben keresett egyenlet?
170. Milyen az áram időfüggése az RL-kör egyenfeszültségű gerjesztésre kapcsolásakor?
171. Hogyan változik az induktív tekercsen és az ellenálláson mérhető feszültség az RL-kör egyenfeszültségre kapcsolásakor?
172. Az RL-kör rövidrezárásának átmeneti állapotára milyen egyenlet írható fel?
173. Hogyan változik a rövidrezárt RL-kör árama?
174. Az RL-kör váltófeszültségre kapcsolásakor mit kell elsőként kiszámolni?
175. A váltófeszültségre kapcsolt RL-kör esetében mitől függ a sinusos változású áram kialakulásának folyamat?
176. Melyik a legkedvezőbb pillanat a sinusos változású generátor RL-körre való kapcsolására?
177. Melyik a legkedvezőtlenebb pillanat a váltófeszültségű gerjesztés RL-körre kapcsolásának?

1. MELLÉKLET

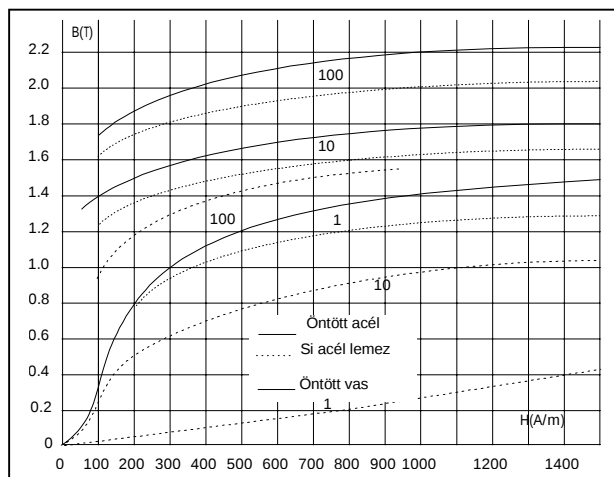
1.1. Ferromágneses anyagok mágnesezési görbéi



7.1. ábra

A 7.1. ábrán a három talán leggyakrabban használt ferromágneses anyag mágnesezési görbéje látható. A megfelelő H érték úgy kapható meg a mágnesezési görbéről, hogy a tengelyről leolvasott értéket beszorozzuk a mágnesezési görbéhez legközelebb álló számértékkel (forrás: [5])

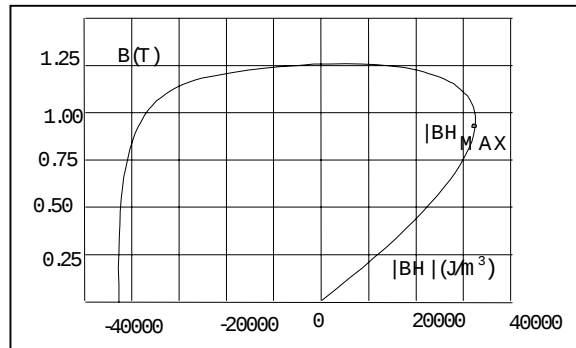
1.2. Alapmágnesezési görbék



7.2. ábra

A 7.2. ábrán három lágymágneses anyag első mágnesezési görbéje (mágnesezési alapgörbének is hívják) látható. A mágneses térerősség vektorának (H) értéke itt is a 7.1. ábránál leírt módon kapható meg a mágnesezési görbéről: a tengelyről leolvasott H értéket beszorozzuk a mágnesezési görbéhez legközelebb álló számértékkel (forrás: [5])

1.3. Lemágnesezési görbe



7.3. ábra

A 7.3. ábrán látható lemágnesezési görbe és energia-szorzat ($|BH|$) görbe az Alnico V (51%Fe, 24%Co, 14%Ni, 8%Al, 3%Cu) keménymágneses anyagra vonatkozik (forrás: [5]).

1.4. Ferromágneses anyagok relatív permeabilitása

Az anyag neve	Az anyag összetétele	μ_{rkezdo}	μ_{rmax}
Vas	kis széntartalmú	250	6 000
Nagy tisztaságú vas	kb. 99,99%Fe	25 000	275 000
Öntöttvas	3% C	70	600
Permalloy	79%Ni, 16,4%Fe, 4%Mo, 0,6%Mn	22 000	72 000
Szupermalloy	79%Ni, 15%Fe, 5%Mo, 1%Mn	100 000	300 000
Acél	1% C	40	7 000
Dinamólemez		500	7 000
Szilícium acél I	95,5%Fe, 4,5%Si	750	8300
Szilícium acél II	99%Fe, 1%Si	350	52000
Alnico	63%Fe, 20%Ni, 12%Al, 5%Co	4	7 300
Permendur	50%, 50%Co	800	5000

1.5. Paramágneses anyagok relatív permeabilitása

Az anyag neve	μ_r
Levegő	1,000 000 4
Alumínium	1,000 023
Wolfram	1,000 176
Ebonit	1,000 014
Kálium	1,000 210
Oxigén	1,000 002
Platina	1,000 250
Nátrium	1,000 008
Króm	1,000 33
Mangán	1,000 017
Ón	1,000 002
Vanádium	1,000 343

A paramágneses anyagoknál, mint ismeretes a mágneses szuszceptibilitás értéke nagyobb nullánál, így a relatív permeabilitás nagyobb egynél (a számításoknál általában egynek veszik). A relatív permeabilitásértékek forrása: [39].

1.6. Diamágneses anyagok relatív permeabilitása

Az anyag neve	μ_r
Aceton	0,999 994 2
Benzol	0,999 992 5
Hidrogéní	0,999 999
Bizmut	0,999 824
Réz	0,999 989
Glicerín	0,999 99
Naftalin	0,999 989
Ólom	0,999 984
Üveg	0,999 987
Etilalkohol	0,999 993
Metilalkohol	0,999 993

A diamágneses anyagok mágneses szuszceptibilitása kisebb mint nulla, így a relatív permeabilitás értéke egynél valamivel kisebb (a számításoknál, a paramágneses anyagokhoz hasonlóan, általában egynek veszik). A relatív permeabilitásértékek forrása: [39].

1.7. Egyes anyagok relatív permittivitása

Az anyag neve	ϵ_r
Levegő	1,000 581
Nitrogén	1,000 606
Oxigén	1,000 552
Hidrogén	1,000 264
Metán	1,000 950
Hélium	1,000 070
Papír	2 – 2,5
Csillám	7
Kvarcüveg	3 – 4,5
Tiszta víz	80,4
PVC	3 – 4
Glicerín	56
Gumi (különféle)	2 – 35
Prespán	5,5 – 8,0
Márvány	8,3
Jég	2,85 – 3,2
Teflon	2
Parafin	2,2 – 2,5
Alkohol	28,4
Magnézium-szilikát-tartalmú kerámia	5,5 – 6,5
Szigetelőolaj	2,2 – 2,4
Bárium-titanát	1000 - 2000

1.8. Szigetelőanyagok átütési szilárdsága

Az anyag neve	E_k [kV/mm]
Levegő	2,5 – 3,0
Üveg	10 – 40
Száraz papír	3 – 20
Impregnált papír	20 – 50
Szigetelőolaj	8 – 20
PVC	32 – 60
Gumi	20 – 40
Porcelán	20 – 300
Kerámia	1 – 45
Prespán	30 – 60

1.9.Fémek fajlagos ellenállása és ellenálláshőmérsékleti tényezői¹

Az anyag neve	$\rho_0[\Omega\text{m}]$ ($\times 10^{-8}$)	$\alpha[1/^\circ\text{C}]$ ($\times 10^{-3}$)	$\beta[1/^\circ\text{C}^2]$ ($\times 10^{-6}$)	$\gamma[1/^\circ\text{C}^3]$ ($\times 10^{-9}$)
Ezüst	1,505	3,890	0,000	0,000
Réz	1,588	4,270	0,000	0,000
Arany	2,190	3,650	0,000	0,000
Alumínium	2,620	4,460	1,800	0,000
Wolfraam	5,000	5,238	0,700	0,062
Cink	5,640	3,468	1,160	0,000
Nikkel	6,930	5,440	6,000	0,000
Vas	8,530	7,257	9,630	0,000
Platina	9,830	3,981	-0,585	0,000
Ón	10,480	4,359	2,400	0,000
Ólom	19,800	3,955	2,650	0,000
Higany	94,070	0,910	0,811	0,000

1.10. Szigetelőanyagok fajlagos ellenállása²

Az anyag neve	$\rho [\Omega\text{m}]$
Üveg	$10^9 - 10^{15}$
Csillám	$10^{13} - 10^{14}$
Porcelán	$10^{12} - 10^{13}$
Keménypapír	$10^7 - 10^8$
Kaucsuk	10^{14}
Fenolgyanta	$10^8 - 10^{10}$
Polietilén	$10^{13} - 10^{16}$
Polisztirol	$10^{12} - 10^{18}$
PVC – lágy	$10^{10} - 10^{12}$
PVC – kemény	$10^{12} - 10^{14}$

¹ Az értékek 0°C-ra érvényesek. Forrás: [5]

² Az értékek 20°C-ra érvényesek. Forrás: [36]

1.11. Ellenállás-alapanyagok fajlagos ellenállása és hőmérsékleti tényezője³

Az anyag neve	Az anyag összetétele	ρ [Ωm] ($\times 10^{-8}$)	α [$1/^\circ\text{C}$] ($\times 10^{-3}$)
Konstantan	60%Cu, 40%Ni	49	-0,0400
Manganin	84%Cu, 12%Mn, 4%Ni	43	$\pm 0,0100$
Nickelin	55%Cu, 25%Ni, 20%Zn	40 – 45	0,1500 – 0,3000
Cronix	80%Ni, 20%Cr	112	0,0750
Krómnikkel	60%Ni, 12%Cr, 28%Fe	137	0,0002
Aluchrom	20%Cr, 5%Al, 75%Fe	137	0,0500
Messzing	60%Cu, 40%Zn	7,5	1,6000
Reotan	53%Cu, 25%Ni, 17%Zn, 5%Fe	52,5	0,4000

1.12. A tankönyvben alkalmazott trigonometrikus összefüggések

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
- $2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$
- $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$
- $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

³ Az értékek 20°C-ra értendők, és -50°C-tól +900°C-ig a β és a γ hőmérsékleti tényezők értéke elhanyagolhatóan kicsi.

1.13. A tankönyvben használt állandók értékei

Az állandó neve	Jelölése	Értéke
A fény terjedési sebessége a vákuumban	c	299 792 485 m/s
A proton tömege	m_p	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$ kg
A neutron tömege	m_n	$1,6749286 \cdot 10^{-27}$ kg
Az elektron tömege	m_e	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Az elektron töltése	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$ C
A vákuum permittivitása	ϵ_0	$1/(\mu_0 c^2)$ F/m $\approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
A vákuum permeabilitása	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Gravitációs állandó	$G(\gamma)$	$6,67259 \cdot 10^{-11}$ N·m ² /kg ²
Szabadesési gyorsulás	g	9,80665 m/s $\approx 9,81$ m/s
Avogadro-szám	N_A	$6,0221367 \cdot 10^{23}$ 1/mol
Abszolút nulla fok	T_0	-273,16 °C
A víz fagyás-olvadáspontja	T_V	273,16 K
Abszolút nulla fok	T_0	-273,16 °C
	π	3.141592653589
	e	2.718281828459

2. IRODALOM

1. Simonyi Károly: Villamosságtan, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
2. Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
3. Simonyi Károly: Elektronfizika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
4. Fodor György: Elméleti elektrotechnika I-II, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
5. Branko Popović: Osnovi elektrotehnike I-II-III-IV, Nauka, Beograd, 1976.
6. Bakos I., Balczó Z.: Villamosságtan erősáramú mérnököknek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
7. Selmeczi K., Schnöller A.: Villamosságtan példatár, KKMf-1124 Budapest, 1996.
8. William H. Hayt, Jr.: Engineering Electromagnetics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
9. Jovan Surutka: Elektromagnetika, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1975.
10. Branko Popović: Zbornik problema iz elektromagnetike, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1972.
11. Radoslav Horvat: Teorija električnih kola, Naučna knjiga, Beograd, 1970.
12. Radoslav Horvat: Sinteza električnih mreža, Naučna knjiga, Beograd, 1970.
13. Dušica Čalović: Rešeni problemi iz teorije električnih kola, Minerva, Subotica-Beograd, 1975.
14. Géher Károly: Lineáris hálózatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
15. P. Pravica, I. Bagarić: Metrologija električnih veličina, Nauka, Beograd, 1993.
16. Viktor Pinter: Osnove elektrotehnike I-II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.
17. Csernus Imre: Elektrotechnika I, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
18. Liska J., Retter Gy.: Váltakozó áramok elmélete, Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
19. H.Božilović, Ž.Spasojević, G.Božilović: Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike I-IV, Naučna knjiga, Beograd, 1972-75.
20. Stanko Tonković: Elektronička mjerna tehnika I, Liber, Zagreb, 1975.
21. N.Pekarić-Nadj, V.Brajić: Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1996.
22. A.Djordjević, G.Božilović, B.Notaroš: Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike I, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1997.
23. I.Felja, D.Koračin: Zbirka zadataka i riješenih primjera iz Osnova elektrotehnike I-II, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
24. E.Šehović, M.Tkalić, I.Felja: Osnove elektrotehnike – zbirka primjera I-II, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
25. M.Ranojević: Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1969.
26. Aleksandra Gavrilović: Osnovi elektrotehnike – zbirka rešenih zadataka, VETŠ, Beograd, 1995.
27. Dragan Kandić: Elektrotehnika – zbirka zadataka I, Nauka, Beograd, 1995.
28. Nagy Károly: Elektrodinamika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
29. Litz József: Elektromosságtan I – kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
30. Prónay G., Solymosi J., Trón T.: Pédátár a lineáris hálózatokhoz – kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
31. Fodor György: Villamosságtan 1-10 füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978-79.
32. Szarka Zoltán: Vektoranalízis és tenzorálgebra, SZÁMALK-LSI, Budapest, 1988.
33. Blažo Borozan: Elektrotehnika, VTŠ Užice, 1996.
34. Simony Károly: A fizika kultúrtörténete, Gondolat, Budapest, 1986.

35. G.A.Korn-T.M.Korn: Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
36. Szerzőcsoport: Elektrotechnikai alapismeretek, B+V Lap – és könyvkiadó, Műszaki Könyvkiadó Kft., Budapest, 1997.
37. Gojko Dimić, Blagoje Bošković: Zbirka zadataka iz fizike B – osnovni kurs, Naša knjiga, Beograd, 1990.
38. Gojko Dimić, Slobodan Žegarac: Zbirka zadataka iz fizike C – srednji kurs, Naša knjiga, Beograd, 1994.
39. Gojko Dimić, Mihailo Mitrović: Zbirka zadataka iz fizike D – viši kurs, Naša knjiga, Beograd, 1996.