

Algebrai törtek

$$\begin{array}{r} 3 \text{ } \text{apple} + \text{pear} \\ \hline 4 \text{ } \text{hedgehog} \end{array}$$

The image shows a mathematical equation where the numbers are replaced by cartoon illustrations. The top line features the number '3' followed by a red apple with a bite taken out of it, a plus sign, and a yellow pear with a face and arms. A horizontal red line is drawn below this. Underneath the line, the number '4' is followed by a brown hedgehog.

Algebrai törtnek nevezzük az olyan törtet, melynek nevezőjében egy vagy több ismeretlent tartalmazó algebrai kifejezés, számlálójában pedig valamilyen algebrai kifejezés szerepel.

Például:

$$\frac{3a + 5}{b}$$

$$\frac{3x}{2x + 3}$$

$$\frac{y - 1}{3x + 4y}$$

$$\frac{5}{x^2 + 3}$$

$$\frac{7y}{y^2 - 1}$$

$$\frac{2x + 3z}{x^2 - 6x + 9}$$

Feladat

Írd be a törteket a megfelelő helyre!

$$\frac{3x - 2y}{5}$$

$$\frac{3 + x}{y}$$

$$\frac{1}{3yx^2}$$

$$\frac{2x - 1}{5x}$$

$$\frac{2 + x + y}{13}$$

$$\frac{a^3 - 27}{y^2 + 5xy - 6x^2}$$

Algebrai tört	Nem algebrai tört

Egy **algebrai tört bővítése** azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal (algebrai kifejezéssel) szorozzuk.

Például:

$$\frac{x}{y} = \frac{3 \cdot x}{3 \cdot y} = \frac{3 \cdot x \cdot (m^3 z^2)}{3 \cdot y \cdot (m^3 z^2)}$$

Egy algebrai tört egyszerűsítése azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal (algebrai kifejezéssel) elosztjuk.

Például:

$$\frac{3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z}{12 \cdot x \cdot y^4} = \frac{1 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z}{4 \cdot x \cdot y^4} = \frac{x \cdot y^2 \cdot z}{4 \cdot y^4} = \frac{x \cdot z}{4 \cdot y^2}$$

$$\frac{3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z}{12 \cdot x \cdot y^4} = \frac{x \cdot z}{4 \cdot y^2}$$

Feladat

Egyszerűsítsd a következő törteket!

$$\frac{5a^4b^3}{10ab^4} = \frac{5a^3}{2b}$$

$$\frac{12x^2y^3}{4x^5} = \frac{3y^3}{x^3}$$

$$\frac{30k^3m^5w}{12km^8w^3} = \frac{5k^2}{2m^3w^2}$$

Algebrai törtek összeadása, kivonása I.

Ha az összevonandó törtek nevezője megegyezik, akkor egyszerűen csak összevonjuk a számlálókat.

Példák:

$$\frac{x+2}{y} + \frac{3x-7}{y} = \frac{(x+2) + (3x-7)}{y} = \frac{x+2+3x-7}{y} = \frac{4x-5}{y}$$

Figyelem! Ha a törtvonal előtt kivonás jel van, akkor összevonásnál a kivonandó számlálójában megváltozik a műveleti jel!

$$\frac{4x+4}{6x} - \frac{x-1}{6x} = \frac{(4x+4) - (x-1)}{6x} = \frac{4x+4-x+1}{6x} = \frac{3x+5}{6x}$$

$$\frac{b}{a+2} - \frac{5b+6}{a+2} = \frac{b - (5b+6)}{a+2} = \frac{b-5b-6}{a+2} = \frac{-4b-6}{a+2}$$

Feladat

Végezd el a következő műveleteket!

$$\frac{2b-5}{a} - \frac{5a-4}{a} = \frac{(2b-5) - (5a-4)}{a} = \frac{2b-5-5a+4}{a} = \frac{2b-5a-1}{a}$$

$$\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{4x-7}{2x-1} = \frac{(3x+2) + (4x-7)}{2x-1} = \frac{3x+2+4x-7}{2x-1} = \frac{7x-5}{2x-1}$$

$$\frac{2m+5}{2m-5} - \frac{5-2m}{2m-5} = \frac{(2m+5) - (5-2m)}{2m-5} = \frac{2m+5-5+2m}{2m-5} = \frac{4m}{2m-5}$$

Algebrai törtek összeadása, kivonása II.

Ha az összevonandó törtek nevezője különböző, akkor először közös nevezőre hozzuk őket, majd ezután összevonjuk a számlálókat.

A közös nevező:

- Legyen többszöröse mindegyik nevezőnek.
- Legyen minél kisebb.

Azaz a legkisebb közös többszörös a legalkalmasabb.

Ha viszont ezt nehéz megtalálni, akkor biztosan

jó lesz az összes nevező szorzata.

(mert az minden nevezőnek többszöröse).

Példák:

$$\frac{x+3}{y} + \frac{y-5}{x} = \frac{x(x+3)}{xy} + \frac{y(y-5)}{yx} = \frac{x^2 + 3x + y^2 - 5y}{yx}$$

$$\frac{4-x}{6x} - \frac{2x+1}{4x} = \frac{2(4-x)}{12x} - \frac{3(2x+1)}{12x} = \frac{8-2x-6x-3}{12x} = \frac{5-8x}{12x}$$

$$\frac{b}{a+2} - \frac{2b-1}{a-2} = \frac{(a-2)b}{(a-2)(a+2)} - \frac{(a+2)(2b-1)}{(a+2)(a-2)} =$$

$$\frac{ab - 2b - (2ab - a + 4b - 2)}{a^2 - 4} = \frac{ab - 2b - 2ab + a - 4b + 2}{a^2 - 4} = \frac{a - ab - 6b + 2}{a^2 - 4}$$

Feladat

Végezd el a következő műveleteket!

$$\frac{2-b}{ab} - \frac{3a+5b}{b} = \frac{2-b-a(3a+5b)}{ab} = \frac{2-b-3a^2-5ab}{ab}$$

$$\frac{2x-3}{4x^2y} + \frac{3y-2}{8xy^2} = \frac{2y(2x-3) + x(3y-2)}{8x^2y^2} = \frac{4xy-6y+3xy-2x}{8x^2y^2} = \frac{7xy-6y-2x}{8x^2y^2}$$

$$\frac{3-2x}{4x+8} - \frac{4x-1}{4x+12} = \frac{(x+3)(3-2x) - (x+2)(4x-1)}{4(x+2)(x+3)} =$$

$$\frac{3x-2x^2+9-6x-(4x^2-x+8x-2)}{4(x+2)(x+3)} = \frac{3x-2x^2+9-6x-4x^2+x-8x+2}{4(x+2)(x+3)} =$$

$$\frac{-6x^2-10x+11}{4x^2+20x+24}$$

Két algebrai tört szorzatát úgy kapjuk meg, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel összeszorozzuk.

Példák:

$$\frac{2x+3}{y-1} \cdot \frac{y}{x} = \frac{(2x+3) \cdot y}{(y-1) \cdot x} = \frac{2xy+3y}{yx-x}$$

$$\frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4x-5}{5x+3} = \frac{(3x+2)(4x-5)}{(2x-1)(5x+3)} = \frac{12x^2-15x+8x-10}{10x^2+6x-5x-3} = \frac{12x^2-7x-10}{10x^2+x-3}$$

$$\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x+1)^2}{x^2-4} = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$$

Feladat

Végezd el a következő műveleteket!

$$\frac{2x+3}{7y} \cdot \frac{4y}{5x-6} =$$

$$\frac{x+3}{5x-1} \cdot \frac{3x-2}{2x-4} =$$

$$\frac{2x+4}{5x-2} \cdot \frac{3x-y}{4y+5x} =$$

Egy algebrai törtet egy másik algebrai törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával megszorozzuk az osztandót.

Példák:

$$\frac{2+x}{3y} \cdot \frac{y-1}{x} = \frac{2+x}{3y} \cdot \frac{x}{y-1} = \frac{(2+x) \cdot x}{3y \cdot (y-1)} = \frac{2x+x^2}{3y^2-3y}$$

$$\frac{5x-2}{3x} \cdot \frac{4x+1}{2x-2} = \frac{5x-2}{3x} \cdot \frac{2x-2}{4x+1} = \frac{(5x-2) \cdot (2x-2)}{(3x) \cdot (4x+1)} = \frac{10x^2-10x-4x+4}{12x^2+3x} = \frac{10x^2-14x+4}{12x^2+3x}$$

$$\frac{2y-3x}{5x-y} \cdot \frac{2x-3}{4y-x} = \frac{2y-3x}{5x-y} \cdot \frac{4y-x}{2x-3} = \frac{(2y-3x) \cdot (4y-x)}{(5x-y) \cdot (2x-3)} =$$

$$\frac{8y^2-2xy-12xy+9x^2}{10x^2-15x-2xy+3y} = \frac{8y^2-14xy+9x^2}{10x^2-15x-2xy+3y}$$

Feladat

Végezd el a következő műveleteket!

$$\frac{3x + 5}{x - 1} : \frac{4x}{2x + 3} =$$

$$\frac{2x + 5}{3x - 1} : \frac{3x - 4}{2x - 2} =$$

$$\frac{3m + 5}{3m - 5} : \frac{7 - 2m}{4m - 1} =$$