

Algebrai kifejezések szorzattá alakítása

Másodfokú kifejezés teljes négyzetté való átalakítása

Az $x^2 + bx + c$ alakú kifejezést írjuk át $(x - u)^2 + v$ alakú kifejezéssé (alakítsuk teljes négyzetté).

Példák:

$$\text{☞ } x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 9$$

Az $x^2 - 6x$ majdnem egy teljes négyzet, csak a +9 hiányzik belőle.

$(a - b)^2$ alakú; adjunk hozzá 9-et, hogy egy teljes négyzet legyen, majd vonjuk is le a 9-et

$x^2 - 6x$ -et helyettesítsük $(x - 3)^2 - 9$ -cel



$$\text{☞ } x^2 + 12x + 39 = (x + 6)^2 - 36 + 39 = (x + 6)^2 + 3$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 36 - 36 = (x + 6)^2 - 36$$



$$\text{☞ } x^2 - 7x + 13 = (x - 3,5)^2 - 12,25 + 13 = (x - 3,5)^2 - 0,75$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3,5 + 3,5^2 - 12,25 = (x - 3,5)^2 - 12,25$$



$$\text{☞ } x^2 + 21x + 21 = (x + 10,5)^2 - 110,25 + 21 = (x + 10,5)^2 - 89,25$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 10,5 + 10,5^2 - 110,25 = (x + 10,5)^2 - 110,25$$



$$\text{☞ } x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$$



☞ $a^2 + 4a + 6 = (a + 2)^2 - 4 + 6 = (a + 2)^2 + 2$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 - 4 = (a + 2)^2 - 4$$



☞ $a^2 + 6a + 1 = (a + 3)^2 - 9 + 1 = (a + 3)^2 - 8$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 - 9 = (a + 3)^2 - 9$$



☞ $x^2 - 8x + 20 = (x - 4)^2 - 16 + 20 = (x - 4)^2 + 4$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 16 = (x - 4)^2 - 16$$



☞ $a^2 - 10a + 2 = (a - 5)^2 - 25 + 2 = (a - 5)^2 - 23$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 - 25 =$$



☞ $x^2 + 12x + 50 = (x + 6)^2 - 36 + 50 = (x + 6)^2 + 14$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 36 - 36 = (x + 6)^2 - 36$$



Szorzáttá alakítás

A szorzattá alakítás igényével leggyakrabban törtek egyszerűsítésénél találkozunk, hiszen többtagú kifejezést nem lehet tagonként egyszerűsíteni.

Szorzáttá alakítás kiemeléssel

Adott egy többtagú algebrai kifejezés, melyben minden tag osztható egy adott kifejezéssel. Ezzel a kifejezéssel elosztjuk a tagokat, majd az így kapott hányadosokat zárójelbe téve megszorozzuk vele.

(A szorzattá alakítás a zárójelfelbontás ellentétes művelete.)

Példák:

☞ $12x^3 - 8x^2 + 4x = 4x \cdot (3x^2 - 2x + 1)$

☞ $6a^3b - 8a^2b^2 = 2a^2b \cdot (3a - 4)$

☞ $20x^2y + 30xy^2 = 10xy \cdot (20 + 3y)$

$$\rightarrow 18a^7b^4 + 6a^5b^7 + 30a^{10}b^3 = 6a^5b^3 \cdot (3a^2b + b^4 + 5a^5)$$

$$\rightarrow 3a^3 - 2a^2 + a = a \cdot (3a^2 - 2a + 1)$$

$$\rightarrow 6x^3 - 10x^2 + 20 = 2x \cdot (3x^2 - 5x + 1)$$

$$\rightarrow 4b^4 + 8b^3 + 28b^2 - 4b = 4b \cdot (b^3 + 2b^2 + 7b - 1)$$

Szorzáttá alakítás megfelelő csoportosítással és kiemeléssel

Létezik olyan algebrai kifejezés, melyeknél nem tudunk semmit kiemelni az összes tagból. Azonban észrevehetjük, hogy megfelelően csoportosítva bizonyos számú tagnál elvégezhető a kiemelés. Így kapunk egy olyan többtagú kifejezést, amelynél egy ismételt kiemeléssel már szorzatot kapunk.

Példák:

$$\rightarrow ax - bx - ay + by = ax - ay - bx + by = a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b)$$

$$\rightarrow 6ax + 12x + 2ay + 4y = 6x(a + 2) + 2y(a + 2) = (a + 2)(6x + 2y)$$

$$\rightarrow 4ax - 28a - bx + 7b = 4a(x - 7) - b(x - 7) = (x - 7)(4a - b)$$

$$\rightarrow 15ax - 10ay + 6bx - 4by = 5a(3x - 2y) + 2b(3x - 2y)$$

$$\rightarrow ab + 3b - 2a - 6 = b(a + 3) - 2(a + 3) = (a + 3)(b - 2)$$

$$\rightarrow 2ax + bx + 2a + b = 2a(x + 1) + b(x + 1) = (x + 1)(2a + b)$$

$$\rightarrow 2ax + 5y + 10x + ay = 2ax + 10x + 5y + ay = 2x(a + 5) + y(5 + a) = (a + 5)(2x + y)$$

Szorzáttá alakítás azonosság alkalmazásával

Az azonosságok ellentétes irányú alkalmazásával az összeg szorzattá alakítható.

Példák:

$$\rightarrow a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

$$\rightarrow 25x^2 + 60xy + 36y^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 6y + (6y)^2 = (5x + 6y)^2$$

$$\rightarrow 16x^4 - 49y^6 = (4x^2)^2 - (7y^2)^2 = (4x^2 - 7y^2)(4x^2 + 7y^2)$$

$$\text{☞ } 64x^2 + 9 - 48x = (8x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 3 + 3^2 = (8x - 3)^2$$

$$\text{☞ } 121 + 88x + 16x^2 = 11^2 + 2 \cdot 11 \cdot 4x + (4x)^2 = (11 + 4x)^2$$

$$\text{☞ } 16a^4 - 1 = (4a^2)^2 - 1^2 = (4a^2 - 1) \cdot (4a^2 + 1)$$

$$\text{☞ } 36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2 = (6a^3)^2 - 2 \cdot 6a^3 \cdot 5b^2 + (5b^2)^2 = (6a^3 - 5b^2)^2$$

Teljes négyzetté alakítással

A teljes négyzetté alakítást akkor szokás alkalmazni, mikor egy másodfokú és egy elsőfokú tag van a kifejezésben. Az, hogy konstans van-e, nem lényeges.

$$\text{☞ } x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4 =$$

$$(x - 1)^2 - 2^2 = [(x - 1) - 2] \cdot [(x - 1) + 2] = (x - 3)(x + 1)$$

$$\text{☞ } x^2 + x - 6 = (x + 0,5)^2 - 0,25 - 6 = (x + 0,5)^2 - 6,25 =$$

$$(x + 0,5)^2 - 2,5^2 = [(x + 0,5) - 2,5] \cdot [(x + 0,5) + 2,5] = (x - 2)(x + 3)$$

$$\text{☞ } x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 4 - 5 = (x - 2)^2 - 9 =$$

$$(x - 2)^2 - 3^2 = [(x - 2) - 3] \cdot [(x - 2) + 3] = (x - 5)(x + 1)$$

$$\text{☞ } x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9 =$$

$$(x - 1)^2 - 3^2 = [(x - 1) - 3] \cdot [(x - 1) + 3] = (x - 4)(x + 2)$$

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4 =$$

$$(x + 3)^2 - 2^2 = [(x + 3) - 2] \cdot [(x + 3) + 2] = (x + 1)(x + 5)$$