Ecuația de gradul al II-lea

molnar1956@yahoo.com

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a \neq 0$$

se numește ecuație de gradul al II-lea

a, b, c sunt coeficienții ecuației

$\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației

Rezolvarea ecuației de gradul al II-lea

1) $\Delta > 0$ ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2) $\Delta = 0$ ecuația are două rădăcini reale egale: $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

3) $\Delta < 0$ ecuația nu are rădăcini reale

molnar1956@yahoo.com

Ex.1

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$a = 2; b = -1; c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Ex.2

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$a = 2; b = -4; c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2) = 16 - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.3 $4x^2 - 5|x| + 1 = 0$

Cazul x<0

$$4x^2 + 5x + 1 = 0$$
$$\Delta = 25 - 16 = 9$$
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8}$$
$$x_1 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{8}$$
$$x_2 = \frac{-8}{8} = -1$$

Cazul x>=0

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$
$$\Delta = 25 - 16 = 9$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$$
$$x_1 = \frac{8}{8} = 1$$
$$x_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.4

$$2x^2 + x + 1 = 0$$
$$a = 2; b = 1; c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$$

ecuația nu are soluții reale

Relațiile lui Viete

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = 0 \\ &a \neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ &P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ex.5

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$a = 4; b = -3; c = -1$$
$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

molnar1956@yahoo.com


Ex.6 Fie ecuaţia: $x^2 - mx + n = 0$

Determinaţi ecuaţia de gradul al II-lea, care are rădăcinile:
$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= x_2 + 3x_1 \end{aligned}$$

Relaţiile lui Viete:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= m \\ x_1 \cdot x_2 &= n \end{aligned}$$

$$S = y_1 + y_2 = x_1 + 3x_2 + x_2 + 3x_1 = 4x_1 + 4x_2 = 4(x_1 + x_2) = 4m$$

$$P = y_1 \cdot y_2 = (x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = x_1x_2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_1x_2 = 10x_1x_2 + 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] =$$
$$= 10n + 3[m^2 - 2n] = 10n + 3m^2 - 6n = 3m^2 + 4n$$

$$y^2 - Sy + P = 0$$

$$y^2 - 4my + 3m^2 + 4n = 0$$

molnar1956@yahoo.com

Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației de gradul al II-lea atunci ecuația este:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Ex.7

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{4+\sqrt{2}}{2} + \frac{4-\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{2} = \frac{4^2 - \sqrt{2}^2}{4} = \frac{16-2}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 4x + \frac{7}{2} = 0$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

molnar1956@yahoo.com

Ştiind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației de gradul al II-lea $x^2–x-1=0$, calculaţi valoarea expresiei: $\frac{x_1^2+3x_1-2}{x_1^2-2x_1+2}+\frac{x_2^2+3x_2-2}{x_2^2-2x_2+2}$

Ex:8 Relaţiile lui Viete: $\begin{array}{l} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-1 \end{array}$ x_1 și x_2 sunt rădăcini: $\begin{array}{l} x_1^2-x_1-1=0 \\ x_2^2-x_2-1=0 \end{array}$

$$\frac{x_1^2+3x_1-2}{x_1^2-2x_1+2}+\frac{x_2^2+3x_2-2}{x_2^2-2x_2+2}=\frac{(x_1^2-x_1-1)+4x_1-1}{(x_1^2-x_1-1)-x_1+3}+\frac{(x_2^2-x_2-1)+4x_2-1}{(x_2^2-x_2-1)-x_2+3}=\frac{4x_1-1}{-x_1+3}+\frac{4x_2-1}{-x_2+3}=$$

$$=\frac{-4x_1x_2+12x_1+x_2-3-4x_1x_2+x_1+12x_2-3}{x_1x_2-3x_1-3x_2+9}=\frac{-8x_1x_2+13x_1+13x_2-6}{x_1x_2-3x_1-3x_2+9}=\frac{8+13(x_1+x_2)-6}{-1-3(x_1+x_2)+9}=$$

$$=\frac{8+13-6}{-1-3+9}=\frac{15}{5}=3$$

molnar1956@yahoo.com

Descompunerea trinomului de gradul al II-lea în factori de gradul I

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Ex.9

$$6x^2-x-1=6(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})=2\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot(x-\frac{1}{3})=(2x-1)(3x-1)$$

$$a=6; b=-1; c=-1$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-1)=1+24=25$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 5}{12}$$

$$x_1=\frac{1+5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{1-5}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.10 Simplificaţi expresia:

$$E=\frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{3(x-1)(x+\frac{1}{3})}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(x+\frac{1}{3})}{x-3}=\frac{3x+1}{x-3}$$

$$3x^2-2x-1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{6}$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x^2-4x+3=0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}$$
$$x_1=3$$
$$x_2=1$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.11

$$x^2 - x - 1 = (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

$$a = 1; b = -1; c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ex.12

$$2x^2 - 7x + 6m^2 = 2(x - 2m)(x - \frac{3m}{2}) = (x - 2m)(2x - 3m)$$

$$a = 2; b = -7m; c = -6m^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49m^2 - 48m^2 = m^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7m \pm m}{4}$$

$$x_1 = \frac{8m}{4} = 2m$$

$$x_2 = \frac{6m}{4} = \frac{3m}{2}$$

molnar1956@yahoo.com

Forma canonică a trinomului de gradul al II-lea

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Ex.13 Folosind forma canonic arătați că expresia este pozitivă pentru orice număr real

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

Ex.14 Folosind forma canonic arătați că expresia este negativă pentru orice număr real

$$-2x^2 + 8x - 91 = -2(x + \frac{8}{-4})^2 - \frac{8}{-8} = -2(x - 2)^2 - 1 < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 72 = -8$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.15 Determinați valoarea parametrului real m, astfel încât ambele rădăcini să fie mai mici decât 1

$$4mx^2 + 4(1-2m)x + 3(m-1) = 0$$

$$x - 1 = z \Rightarrow x = z + 1$$

$$x_1 < 1 \Rightarrow x_1 - 1 < 0 \Rightarrow z_1 < 0$$

$$x_2 < 1 \Rightarrow x_2 - 1 < 0 \Rightarrow z_2 < 0$$

$$4m(z+1)^2 + 4(1-2m)(z+1) + 3(m-1) = 0$$

$$4m(z^2 + 2z + 1) + (4 - 8m)(z+1) + 3m - 3 = 0$$

$$4mz^2 + 8mz + 4m + 4z + 4 - 8mz - 8m + 3m - 3 = 0$$

$$4mz^2 + 4z - m + 1 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 < 0 \\ z_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 16m(-m+1) \geq 0 \\ \dfrac{-4}{4m} < 0 \\ \dfrac{-m+1}{4m} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 16m^2 - 16m \geq 0 \\ \dfrac{-1}{m} < 0 \\ \dfrac{-m+1}{4m} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 \geq 0 \\ m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow m \in (0;1)$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.16 Determinați valoarea parametrului real m, astfel încât ecuațiile să aibă o rădăcină comună.

$$x^2 + mx + 1 = 0$$
$$x^2 + x + m = 0$$

Fie α rădăcina comună.

$$\begin{cases} \alpha^2 + m\alpha + 1 = 0 \\ \alpha^2 + \alpha + m = 0 \end{cases} \Rightarrow m\alpha - \alpha + 1 - m = 0 \Rightarrow \alpha(m-1) - (m-1) = 0 \Rightarrow (m-1)(\alpha-1) = 0$$

Cazul m=1

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

Nu au rădăcini reale.

Cazul α=1

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 1 \\ x_1 = 1; x_2 = -2 \end{cases}$$

1 este rădăcina comună

molnar1956@yahoo.com

Ex.17 Fie ecuaţia de gradul al II-lea $2x^2+x-m=0$. Determinaţi mulţimile A şi B.

$$A=\{m / x_1; x_2 \in R\}$$

$$B=\{m / x_1+x_2=x_1 \cdot x_2\}$$

$$A=\{m / x_1; x_2 \in R\}=[-\frac{1}{8};+\infty)$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 1+8m \geq 0 \Rightarrow 8m \geq -1 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{8} \Rightarrow m \in [-\frac{1}{8};+\infty)$$

$$B=\{m / x_1+x_2=x_1 \cdot x_2\}=\{1\}$$

$$x_1+x_2=x_1 \cdot x_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{m}{2} \Rightarrow m=1$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.18 Simplificaţi fracţia: $\dfrac{36^{n+1}+24\cdot 2^{n}\cdot 3^{n+1}+32}{5\cdot 6^{n+1}+40}$

$$\frac{36^{n+1}+24\cdot 2^{n}\cdot 3^{n+1}+32}{5\cdot 6^{n+1}+40}=\frac{6^{2(n+1)}+12\cdot 2\cdot 2^{n}\cdot 3^{n+1}+32}{5(6^{n+1}+8)}=\frac{6^{2(n+1)}+12\cdot 2^{n+1}\cdot 3^{n+1}+32}{5(6^{n+1}+8)}=$$

$$=\frac{6^{2(n+1)}+12\cdot 6^{n+1}+32}{5(6^{n+1}+8)}=\frac{(6^{n+1}+4)(6^{n+1}+8)}{5(6^{n+1}+8)}=\frac{6^{n+1}+4}{5}$$

$$6^{n+1}=t \qquad \Rightarrow t^{2}+12t+32=(t+4)(t+8)=(6^{n+1}+4)(6^{n+1}+8)$$

$$\Delta=144-128=16$$

$$t_{1,2}=\frac{-12\pm 4}{2}$$

$$t_{1}=-4$$

$$t_{2}=-8$$

molnar1956@yahoo.com

Ex.19 Determinaţi valorile numărului p prim, astfel încât ecuaţia să aibă rădăcini întregi.

$$x^2 - 3x + p = 0$$

$x_1; x_2 \in Z$

p prim

$$x_1 \cdot x_2 = p \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot p \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = p \end{matrix} \qquad 1^2 - 3 \cdot 1 + p = 0 \Rightarrow p = 2$$

Ecuația de gradul al II-lea

molnar1956@yahoo.com

Ex.20

Demonstraţi că ecuaţia are rădăcini reale pentru orice a,b,c numere reale.

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

$$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$$

$$x^2-bx-cx+bc+x^2-ax-cx+ac+x^2-ax-bx+ab=0$$

$$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+ac+bc)=0$$

Avem de arătat că:

$$\Delta \geq 0$$

$$4(a+b+c)^2-4\cdot 3(ab+ac+bc)\geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3ab-3ac-3bc\geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc \quad \text{(A)}$$