



Fie funcțiile g și h :

$$g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dacă } x < 0 \\ x^2 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{dacă } x < 0 \\ x & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

Știind că funcția f verifică condițiile:

$$f^2(g(x)) - f(h(x)) - 6 \leq 0$$

$$f^3(h(x)) + f^2(h(x)) - 8f(g(x)) - 12 \geq 0$$

atunci: $\exists x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$

I. fie $x=1$

$$f^2(g(1)) - f(h(1)) - 6 \leq 0$$

$$f^2(1) - f(1) - 6 \leq 0$$

$$(f(1) - 3)(f(1) - 2) \leq 0$$

$$-2 \leq f(1) \leq 3$$

$$f^3(h(1)) + f^2(h(1)) - 8f(g(1)) - 12 \geq 0$$

$$f^3(1) + f^2(1) - 8f(1) - 12 \geq 0$$

$$(f(1) - 3)(f^2(1) + 4f(1) + 4) \geq 0$$

$$(f(1) - 3)(f(1) + 2)^2 \geq 0$$

$$f(1) - 3 \geq 0$$

$$f(1) \geq 3$$

$$f(1) = 3$$



II. fie $x = -\frac{1}{2}$ $f^2(g(-\frac{1}{2})) - f(h(-\frac{1}{2})) - 6 \leq 0$

$$f^2(-\frac{3}{2}) - f(-\frac{3}{2}) - 6 \leq 0$$

$$(f(-\frac{3}{2}) - 3)(f(-\frac{3}{2}) - 2) \leq 0$$

$$-2 \leq f(-\frac{3}{2}) \leq 3$$

$$f^3(h(-\frac{1}{2})) + f^2(h(-\frac{1}{2})) - 8f(g(-\frac{1}{2})) - 12 \geq 0$$

$$f^3(-\frac{3}{2}) + f^2(-\frac{3}{2}) - 8f(-\frac{3}{2}) - 12 \geq 0$$

$$(f(-\frac{3}{2}) - 3)(f^2(-\frac{3}{2}) + 4f(-\frac{3}{2}) + 4) \geq 0$$

$$(f(-\frac{3}{2}) - 3)(f(-\frac{3}{2}) + 2)^2 \geq 0$$

$$f(-\frac{3}{2}) - 3 \geq 0$$

$$f(-\frac{3}{2}) \geq 3$$

$$f(-\frac{3}{2}) = 3$$

Din I. și II. rezultă că: $f(1) = 3 = f(-\frac{3}{2})$ q.e.d.