



Ex.1

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2}{2} \Rightarrow 1 = 1$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Demonstrație:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$



Ex.2

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Rightarrow 1 = 1$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1) \left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right] = \\ &= (k+1) \left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \right] = (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = (k+1) \frac{(k+2)(2k+3)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$



Ex.3

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2 \Rightarrow 1 = \left[\frac{1 \cdot 2}{2} \right]^2 \Rightarrow 1 = 1$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \\ &= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right] = (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$



Ex.4

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$: $1^2 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 3}{3} \Rightarrow 1 = 1$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)[4(k+1)^2 - 1]}{3}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 &= \frac{k(4k^2 - 1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \\ &= (2k+1) \left[\frac{k(2k-1)}{3} + 2k+1 \right] = (2k+1) \left[\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3} \right] = (2k+1) \left[\frac{2k^2 + 5k + 3}{3} \right] = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} = \\ &= \frac{(2k+1)[4k^2 + 6k + 2k + 3]}{3} = \frac{(2k+1)[4k^2 + 8k + 4 - 1]}{3} = \frac{(2k+1)[4(k^2 + 2k + 1) - 1]}{3} = \frac{(2k+1)[4(k+1)^2 - 1]}{3} \end{aligned}$$



Ex.5

$$2^2 + 6^2 + \dots + (4n-2)^2 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=2$:

$$2^2 = \frac{4 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} \Rightarrow 4 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3}{3} \Rightarrow 4 = 4$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$2^2 + 6^2 + \dots + (4k-2)^2 = \frac{4k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$2^2 + 6^2 + \dots + (4k-2)^2 + (4k+2)^2 = \frac{4(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 2^2 + 6^2 + \dots + (4k-2)^2 + (4k+2)^2 &= \frac{4k(2k-1)(2k+1)}{3} + (4k+2)^2 = 4(2k+1) \left[\frac{k(2k-1)}{3} + 2k+1 \right] = \\ &= 4(2k+1) \frac{2k^2 - k + 6k - 3}{3} = \frac{4(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} = \frac{4(2k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} \end{aligned}$$



Ex.6

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$1 \cdot 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} \Leftrightarrow 2 = 2$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2) \left[\frac{k}{3} + 1 \right] = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$



Ex.7

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$1 \cdot 4 = 1(1+1)^2 \Leftrightarrow 4 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) &= k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)[k(k + 1) + 3k + 4] = \\ &= (k + 1)[k^2 + k + 3k + 4] = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2 \end{aligned}$$



Ex.8 Calculați suma: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] + \\ &+ \dots + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Demonstrați cu metoda inducției complete formula găsită.



Ex.9

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} \left[k + \frac{1}{k+2} \right] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + 2k + 1}{k+2} = \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^2}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$



Ex.10

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3k+1} \left[k + \frac{1}{3k+4} \right] = \\ & = \frac{1}{3k+1} \cdot \frac{3k^2 + 4k + 1}{3k+4} = \frac{1}{3k+1} \cdot \frac{(3k+1)(k+1)}{3k+4} = \frac{k+1}{3k+4} \end{aligned}$$



Ex.11

$$\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6)(7n+1)} = \frac{n}{7n+1}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 8} = \frac{1}{7 \cdot 1 + 1} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7k-6)(7k+1)} = \frac{k}{7k+1}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7k-6)(7k+1)} + \frac{1}{(7k+1)(7k+8)} = \frac{k+1}{7k+8}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7k-6)(7k+1)} + \frac{1}{(7k+1)(7k+8)} = \frac{k}{7k+1} + \frac{1}{(7k+1)(7k+8)} = \\ & = \frac{1}{7k+1} \left[k + \frac{1}{7k+8} \right] = \frac{1}{7k+1} \cdot \frac{7k^2 + 8k + 1}{7k+8} = \frac{1}{7k+1} \cdot \frac{(7k+1)(k+1)}{7k+8} = \frac{k+1}{7k+8} \end{aligned}$$



Ex.12

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2(2+1)(2+3)} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 5} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{15}$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} + \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} + \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} + \\ & + \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} \left[\frac{k}{2} + \frac{1}{2k+5} \right] = \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} \cdot \frac{2k^2 + 5k + 2}{2(2k+5)} = \\ & = \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)} \cdot \frac{(2k+1)(k+2)}{2(2k+5)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)} \end{aligned}$$

**Ex.13** Calculați valoarea expresiei

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2 - 1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1^2}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)^2 - 1^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2 - 1^2}{n^2} = \\ &= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

Demonstrați cu metoda inducției complete formula găsită.



Ex.14

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=2$:

$$1 - \frac{1}{2^2} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru p :

$$\prod_{k=2}^p \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{p+1}{2p}$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $p+1$:

$$\prod_{k=2}^{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{p+2}{2(p+1)}$$

Demonstrație:

$$\prod_{k=2}^{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left[\prod_{k=2}^p \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{p+1}{2p} \cdot \frac{(p+1)^2 - 1}{(p+1)^2} = \frac{1}{2p} \cdot \frac{p(p+2)}{p+1} = \frac{p+2}{2(p+1)}$$



Ex.15

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \geq 1$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{3} (A)$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \quad \forall k \geq 1$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad \forall k \geq 1$$

Demonstrație:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

Mai avem de arătat că:

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \Leftrightarrow \frac{2k+1}{4k^2+8k+4} < \frac{1}{2k+3} \Leftrightarrow 4k^2+2k+6k+3 < 4k^2+8k+4 (A)$$



Ex.16

$$\forall n \geq 5 \Rightarrow 2^n > n^2$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=5$:

$$2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25 (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\forall k \geq 5 \Rightarrow 2^k > k^2$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\forall k \geq 5 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$$

Demonstrație:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 3k = k^2 + 2k + k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$



Ex.17

$$\forall n \geq 10 \Rightarrow 2^n > n^3$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=10$:

$$2^{10} > 10^3 \Leftrightarrow 1024 > 1000 (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\forall k \geq 10 \Rightarrow 2^k > k^3$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\forall k \geq 10 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^3$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k \cdot 2 > 2k^3 = k^3 + k^3 > k^3 + 4k^2 = k^3 + 3k^2 + k^2 > k^3 + 3k^2 + 4k = \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 \end{aligned}$$



Ex.18

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad \forall n \geq 2$$

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{8+6}{24} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24} \quad (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} \quad \forall k \geq 2$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} \quad \forall k \geq 2$$



Demonstrație:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \\ &+ \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

Mai avem de arătat că:

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > 0$$

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1-2}{2k+2} > 0$$

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$$

$$\frac{2k+2-2k-1}{(2k+1)(2k+2)} > 0$$

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > 0(A)$$



Ex.19 $n^3 + 11n$ este divizibil cu 6

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$1^3 + 11 \cdot 1 = 1 + 11 = 12 = 6 \cdot 2 (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } k^3 + 11k = 6p$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\exists q \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } (k+1)^3 + 11(k+1) = 6q$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 11(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = (k^3 + 11k) + 3k^2 + 3k + 12 = \\ &= 6p + 3(k^2 + k) + 12 = 6p + 3k(k+1) + 12 = 6\left[p + \frac{k(k+1)}{2} + 2\right] = 6q \end{aligned}$$



Ex.20 $7^n - 1$ este divizibil cu 6

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$7^1 - 1 = 7 - 1 = 6 = 6 \cdot 1(A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 7^k - 1 = 6p$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\exists q \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 7^{k+1} - 1 = 6q$$

Demonstrație:

$$7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 7 + 7 - 1 = 7(7^k - 1) + 6 = 7 \cdot 6p + 6 = 6(7p + 1) = 6q$$



Ex.21 $6^{2n-1} + 1$ este divizibil cu 7

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$6^{2-1} + 1 = 6 + 1 = 7 = 7 \cdot 1(A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 6^{2k-1} + 1 = 7p$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\exists q \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 6^{2k+1} = 7q$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 6^{2k+1} + 1 &= 6^{2k-1} \cdot 6^2 + 36 - 36 + 1 = 36(6^{2k-1} + 1) - 35 = 36 \cdot 7p - 35 = \\ &= 7(36p - 5) = 7q \end{aligned}$$



Ex.22 $10^n + 18n - 28$ este divizibil cu 27

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$10 + 18 - 28 = 0 = 0 \cdot 27 (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 10^k + 18k - 28 = 27p$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\exists q \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 10^{k+1} + 18(k+1) - 28 = 27q$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} + 18(k+1) - 28 &= 10^k \cdot 10 + 180k - 280 - 180k + 280 + 18k + 18 - 28 = \\ &= 10(10^k + 18k - 28) - 162k + 270 = 10 \cdot 27p - 162k + 270 = 27(10p - 6k + 10) = \\ &= 27q \end{aligned}$$



Ex.23 $7^{2n} - 1$ este divizibil cu 48

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 48 \cdot 1 (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 7^{2k} - 1 = 48p$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\exists q \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 7^{2k+2} = 48q$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 7^{2k+2} &= 7^{2k} \cdot 49 - 49 + 49 - 1 = 49(7^{2k} - 1) + 48 = 49 \cdot 48p + 48 = \\ &= 48(49p + 1) = 48q \end{aligned}$$



Ex.24

 $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17

I) Demonstrăm proprietatea pentru $n=1$:

$$3 \cdot 5^3 + 2^4 = 375 + 16 = 391 = 23 \cdot 17 (A)$$

II) Presupunem că proprietatea este adevărată pentru k :

$$\exists p \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17p$$

Avem de arătat că proprietatea este adevărată pentru $k+1$:

$$\exists q \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} = 17q$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} &= 3 \cdot 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 25 \cdot 2^{3k+1} - 25 \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} \cdot 2^3 = \\ &= 25[3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}] - 25 \cdot 2^{3k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = 25 \cdot 17p - 17 \cdot 2^{3k+1} = \\ &= 17(25p - 2^{3k+1}) = 17q \end{aligned}$$



Ex.25

Determinați valoarea sumei:

$$\sum_{k=1}^n k! \cdot k$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k! \cdot k &= \sum_{k=1}^n k!(k+1-1) = \sum_{k=1}^n [k!(k+1) - k!] = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = \\ &= [2! - 1!] + [3! - 2!] + [4! - 3!] + \dots + [(n+1)! - n!] = (n+1)! - 1! \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

Se poate demonstra cu metoda inducției complete.



Ex.26

Determinați valoarea sumei:

$$\sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1)$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1) &= \sum_{k=1}^n k!(k^2 + 2k + 1 - k) = \sum_{k=1}^n k![(k+1)^2 - k] = \sum_{k=1}^n k!(k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k!k = \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)!(k+1) - \sum_{k=1}^n k!k = (n+2)! - 2! - (n+1)! + 1! = (n+2)! - (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1) = (n+2) - (n+1) - 1$$

Se poate demonstra cu metoda inducției complete.