molnar1956@yahoo.com

Ex:1

Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35$, $f \in \mathbf{R}[X]$.

a) Să se arate că $f = \left(X^2 - 6\right)^2 - 1$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

Rezolvare:

$a)\left(X^2 - 6\right)^2 - 1 = X^4 - 12X^2 + 36 - 1 = X^4 - 12X^2 + 35 = f.$

$b)$ *Dacă* $\alpha \in \mathbf{Z}$, *atunci* $\alpha \in D_{35} = \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35\}$.

$\alpha = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 12 + 35 = 24 \neq 0$

$\alpha = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 - 12 + 35 = 24 \neq 0$

$\alpha = \pm 5 \Rightarrow f(\pm 5) = 625 - 300 + 35 \neq 0$

$\alpha = \pm 7 \Rightarrow f(\pm 7) = 2401 - 588 + 35 \neq 0$

$\alpha = \pm 35 \Rightarrow f(\pm 35) = 1500625 - 14700 + 35 \neq 0 \Rightarrow f$ nu are rădăcini întregi.

$c) f = \left(X^2 - 6\right)^2 - 1 = \left(X^2 - 6 + 1\right)\left(X^2 - 6 - 1\right) = \left(X^2 - 5\right)\left(X^2 - 7\right) =$

$= \left(X - \sqrt{5}\right)\left(X + \sqrt{5}\right)\left(X - \sqrt{7}\right)\left(X + \sqrt{7}\right).$

molnar1956@yahoo.com

Ex:2

Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.

a) Să se determine numărul real a astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

b) Pentru $a = 4$ să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 4$.

c) Să se demonstreze că, dacă $a \in (2, +\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

Rezolvare:

$a)\ \alpha = 2$ rădăcină $\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4.$

$b)$ Pentru $a = 4 \Rightarrow f = X^3 - 2X^2 + 4X - 8$

$$\left(X^3 - 2X^2 + 4X - 8\right) : \left(X^2 - 2X + 4\right) = X$$

$$\underline{-X^3 + 2X^2 - 4X}$$

$$/ \quad\quad / \quad\quad / \quad -8 \quad\quad\quad \Rightarrow q = X,\ r = -8$$

$c)$ Calculăm suma pătratelor rădăcinilor. Folosim relaţiile lui Viete:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) = 2^2 - 2a = 4 - 2a < 0,$ *deoarece* $a \in (2, +\infty)$. Dacă suma pătratelor rădăcinilor este negativă, atunci există şi rădăcini complexe $\Rightarrow$ nu toate rădăcinile sunt reale.

Polinoame

molnar1956@yahoo.com

Ex:3

Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a = -1$, $b = -2$ şi $c = 0$.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

Rezolvare:

$a)$ Din relațiile lui Viete: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{2}{1} = -2.$

$$b)\; f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X \Rightarrow f = X\left(X^3 + 2X^2 - X - 2\right) = X\left[X^2(X+2) - (X+2)\right] =$$

$$= X(X+2)\left(X^2 - 1\right) = X(X+2)(X+1)(X-1) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 1.$$

$c)$ Din x_1, x_2, x_3, x_4 progresie aritmetica avem: $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$

Relatiile lui Viete: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_xx_3x_4 + x_2x_3x_4 = -b$$

Din progresie si prima relatie obtinem: $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = -1$

Din a doua relatie: $x_1(x_2 + x_3) + x_4(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = a$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{(x_2 + x_3)}_{=-1}\underbrace{(x_1 + x_4)}_{=-1} + x_1x_4 + x_2x_3 = a \Rightarrow x_1x_4 + x_2x_3 = a - 1 \\ \text{Din a treia relatie: } x_1x_4\underbrace{(x_2 + x_3)}_{=-1} + x_2x_3\underbrace{(x_1 + x_4)}_{=-1} = -b \Rightarrow x_1x_4 + x_2x_3 = b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b = a - 1.$

molnar1956@yahoo.com

Ex:4

În mulțimea $\mathbf{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și $p \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $f(-p)$.

b) Să se determine $p \in \mathbf{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

c) Să se calculeze în funcție de $p \in \mathbf{R}$ suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Rezolvare:

$a)\ f(-p) = (-p)^3 + p\cdot(-p)^2 + 1 = \cancel{-p^3} \cancel{+p^3} + 1 = 1.$

$b)\ f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + p\cdot 1^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2 + p = 0 \Rightarrow p = -2.$

$c)\ x_1$ rădăcină $\Rightarrow x_1^3 + p\cdot x_1^2 + 1 = 0 \,\big|\cdot x_1 \Rightarrow x_1^4 + p\cdot x_1^3 + x_1 = 0$

x_2 rădăcină $\Rightarrow x_2^3 + p\cdot x_2^2 + 1 = 0 \,\big|\cdot x_2 \Rightarrow x_2^4 + p\cdot x_2^3 + x_2 = 0$

x_3 rădăcină $\Rightarrow x_3^3 + p\cdot x_3^2 + 1 = 0 \,\big|\cdot x_3 \Rightarrow x_3^4 + p\cdot x_3^3 + x_3 = 0 \quad (+)$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + p\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + 3 = 0 \qquad (**)$$

Calculăm suma pătratelor rădăcinilor:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\underbrace{\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right)}_{=0} = (-p)^2 - 2\cdot 0 = p^2.$$

Revenim la $(**) \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + p\cdot p^2 + 3 = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p^3 - 3$

Înlocuim în $(*) \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + p\left(-p^3 - 3\right) - p = 0 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = p^4 + 4p.$

molnar1956@yahoo.com

Ex:4 Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

c) Să se calculeze $f(a)$, ştiind că a este o rădăcină a polinomului g.

Rezolvare:

$a)\, X \cdot g + 1 = X\left(X^3 + X^2 + X + 1\right) + 1 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = f.$

$b)\, g = X^2(X+1) + (X+1) = (X+1)\left(X^2+1\right),\ g(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1.$

$x^2 + 1 = 0$ nu are rădăcini reale.

$c)\, Din\ \ a) \Rightarrow f(a) = a \cdot g(a) + 1.$ Din a rădăcină a polinomului $g \Rightarrow g(a) = 0$ şi atunci $f(a) = a \cdot 0 + 1 = 1.$