

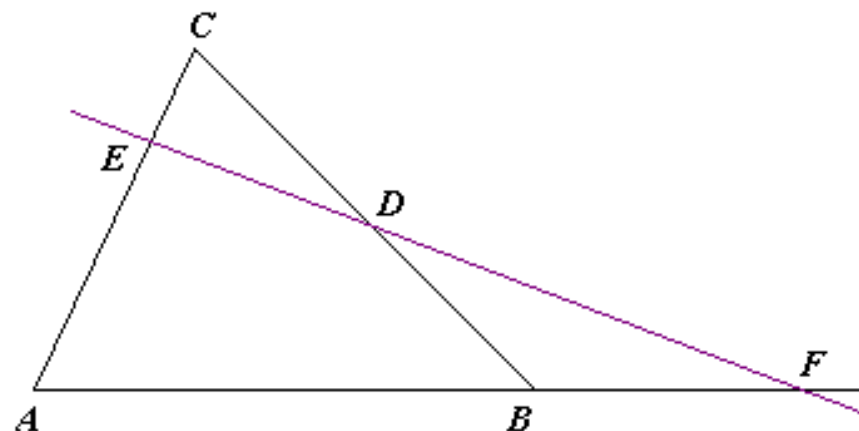


Teorema lui Menelaus

Fie triunghiul ABC și punctele: $D \in BC; E \in AC; F \in AB$

Punctele D, E și F sunt coliniare dacă și numai dacă:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$$

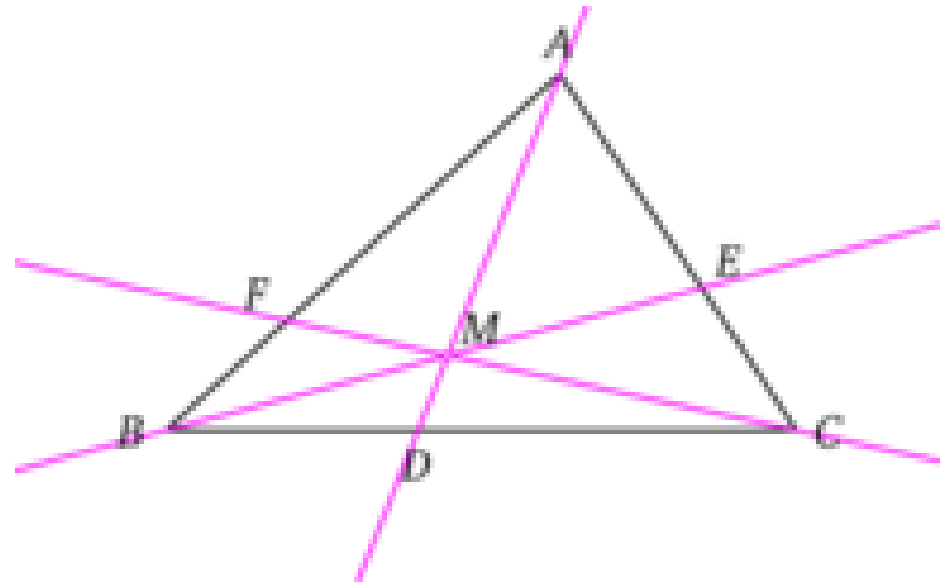




Teorema lui Ceva

Fie triunghiul ABC și D, E, F trei puncte diferite de vârfurile triunghiului aflate respectiv pe laturile acestuia [BC], [CA], [AB]. Atunci dreptele AD, BE și CF sunt concurente dacă și numai dacă:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

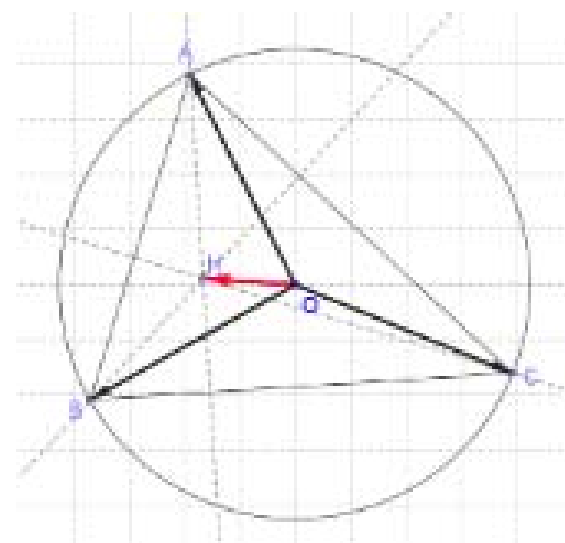




Teorema lui Sylvester:

Dacă O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$





Fie O este centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC , atunci are loc relația:

$$\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HO}$$

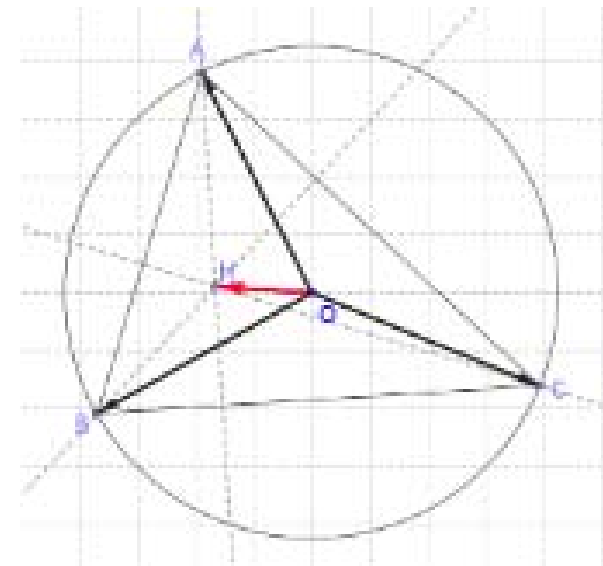
$$\vec{HA} = \vec{HO} + \vec{OA}$$

$$\vec{HB} = \vec{HO} + \vec{OB}$$

$$\vec{HC} = \vec{HO} + \vec{OC}$$

$$\begin{aligned} \vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} &= 3\vec{HO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \stackrel{T}{=} 3\vec{HO} + \vec{OH} = \\ &= 3\vec{HO} - \vec{HO} = 2\vec{HO} \end{aligned}$$

Sylvester





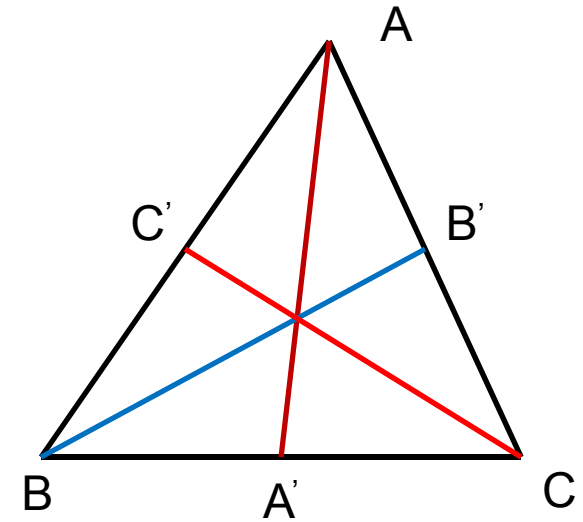
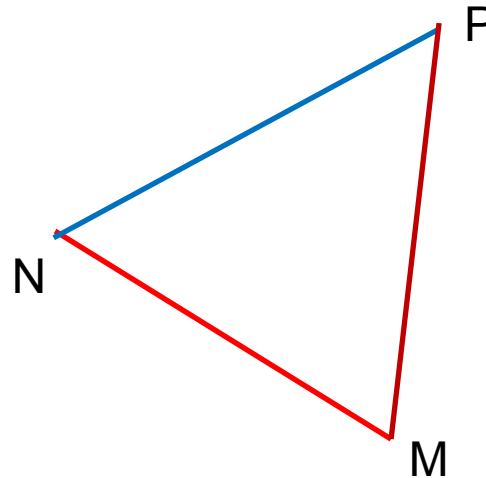
1/178

I: $A' \in BC; BA' = A'C$
 $B' \in AC; AB' = B'C$
 $C' \in AB; AC' = C'B$
 $M \in P$

$$\vec{MN} = \vec{CC'}$$

$$\vec{NP} = \vec{BB'}$$

C: $MP \parallel AA'$



Dem: $\vec{MP} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{CC'} + \vec{BB'} = -\vec{AA'} = \vec{A'A}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{CC'} &= \frac{\vec{CB} + \vec{CA}}{2} \\ \vec{BB'} &= \frac{\vec{BC} + \vec{BA}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{CC'} + \vec{BB'} = \frac{\vec{CA} + \vec{BA}}{2} = -\frac{\vec{AC} + \vec{AB}}{2} = -\vec{AA'}$$

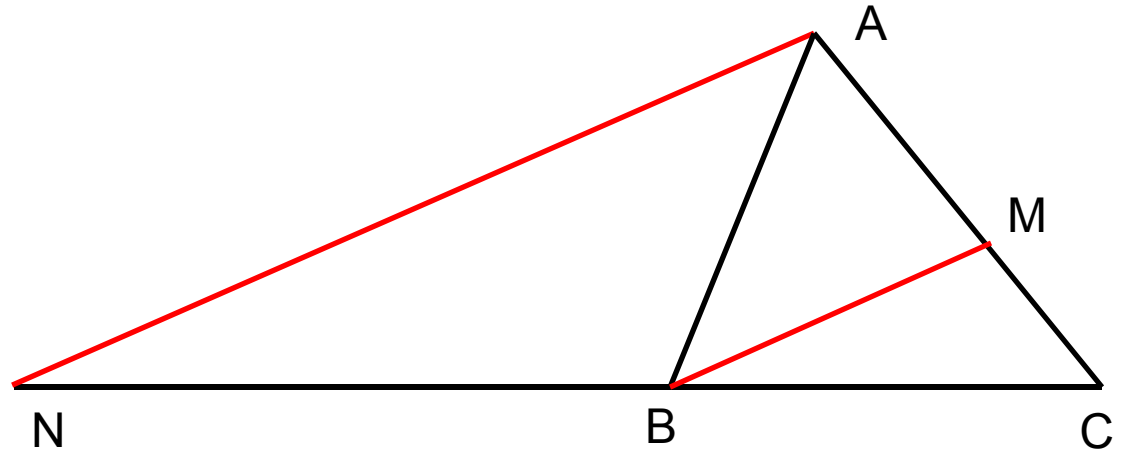


2/178

$$I: \vec{CM} = \frac{1}{3} \vec{CA}$$

$$\vec{CN} = 3 \vec{CB}$$

C: *ANIIMB*



$$\text{Dem: } \vec{CM} = \frac{1}{3} \vec{CA} \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$$

$$\vec{CN} = 3 \vec{CB} \Rightarrow \frac{CB}{CN} = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3} \\ \frac{CB}{CN} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CN} \Rightarrow \text{ANIIMB}$$



3/178

I: ABCD patrulater convex

$ADIIBE; E \in AC$

$AFIIBC; F \in BD$

C: $EFIIDC$

Dem: fie $O = AC \cap BD$

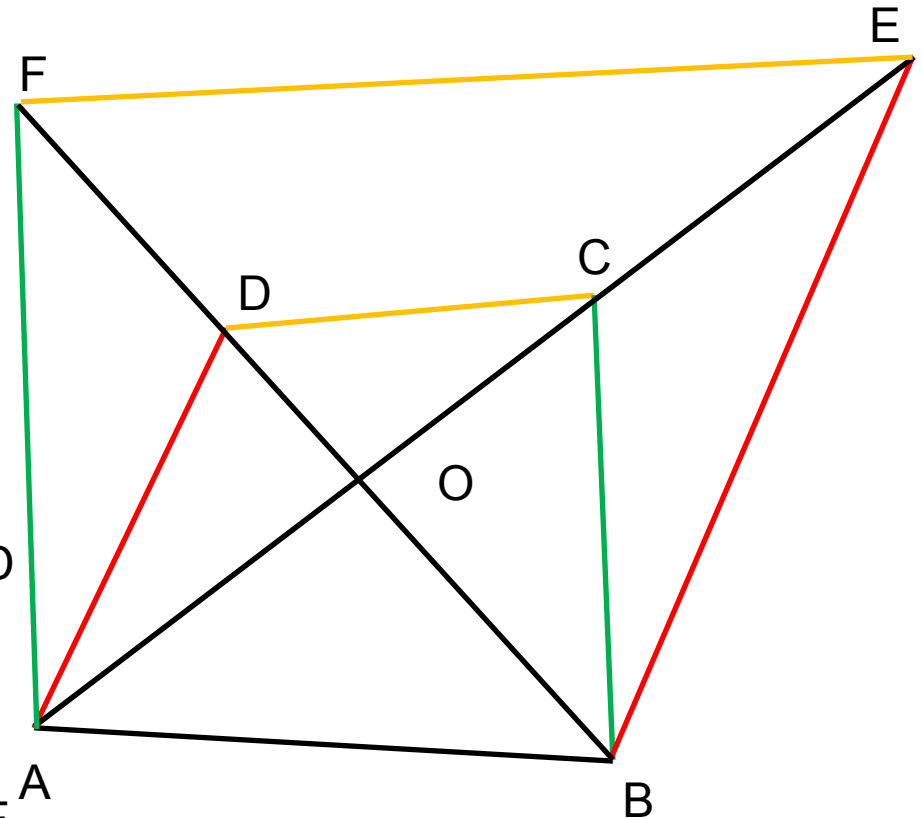
Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul AOD

$$1) \frac{AO}{EO} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow AO \cdot OB = EO \cdot OD$$

Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul AOF

$$2) \frac{AO}{CO} = \frac{OF}{OB} \Rightarrow AO \cdot OB = CO \cdot OF$$

$$\text{din } 1) \text{ și } 2) \Rightarrow EO \cdot OD = CO \cdot OF \Rightarrow \frac{EO}{CO} = \frac{OF}{OD} \Rightarrow CDIIEF$$



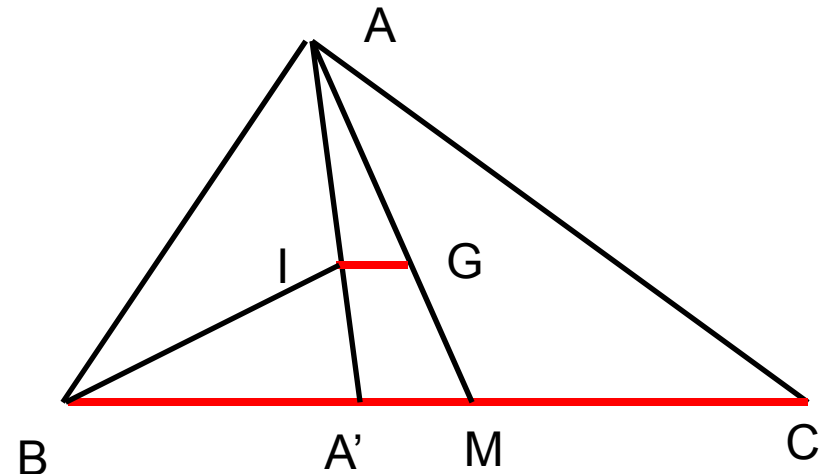


4/178

I: G centrul de greutate
I intersecția bisectoarelor

C: $IGIIBC \Leftrightarrow 2a = b + c$

Dem: AA' bisectoare



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BA'}{A'C} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC + AB} = \frac{BA'}{BA' + A'C} \Leftrightarrow \frac{c}{c + b} = \frac{BA'}{a} \Leftrightarrow BA' = \frac{ac}{b + c}$$

$$IGIIBC \Leftrightarrow \frac{GM}{GA} = \frac{A'I}{IA} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{A'I}{IA} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{A'I}{IA} = \frac{BA'}{BA} = \frac{\frac{ac}{a+b}}{c} = \frac{a}{b+c}$$

$$BI \text{ bisectoare} \Leftrightarrow \frac{A'I}{IA} = \frac{BA'}{BA}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{b+c} \Leftrightarrow 2a = b + c$$