

Raza cercului înscris și raza cercului circumscriș unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.1

Arătați că în orice triunghi avem: $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$S = R \frac{a}{\sin \alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$S = \frac{2Ra \sin \beta \sin \gamma}{2}$$

$$S = \frac{\frac{b}{\sin \beta} a \sin \beta \sin \gamma}{2}$$

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.2

Arătați că în orice triunghi avem:

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$r = (p - a) \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$$

$$r = \sqrt{(p - a)^2 \frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$$

$$r = \sqrt{\frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{p^2}}$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{p}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$$



Ex.3

Arătați că în orice triunghi avem:

$$S = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$S = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$S = p(p-a) \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$S = \sqrt{p^2(p-a)^2 \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.4

Arătați că în orice triunghi avem:

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$r = 4R \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$r = 4R \sqrt{\frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{a^2 b^2 c^2}}$$

$$r = \frac{4R}{abc} \sqrt{\frac{p^2 (p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{p^2}}$$

$$r = \frac{4R}{abc} \cdot \frac{S^2}{p}$$

$$r = \frac{1}{S} \cdot \frac{S^2}{p}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscriș unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.5

Arătați că în orice triunghi avem: $p = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

$$p = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$p = 4R \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc} \cdot \frac{p(p-b)}{ac} \cdot \frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$p = 4R \sqrt{\frac{p^2 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2 b^2 c^2}}$$

$$p = 4R \cdot \frac{pS}{abc}$$

$$1 = 4R \cdot \frac{S}{abc}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi

molnar1956@yahoo.com

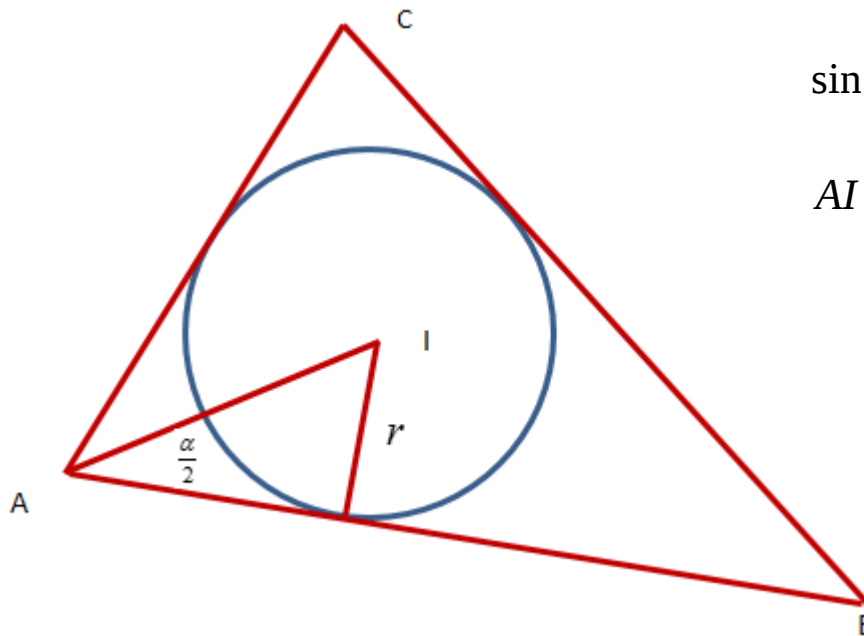


Ex.6 Arătați că în orice triunghi avem: $AI = 4R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$
unde I este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

$$AI = 4R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 4R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{AI}$$

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscriș unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.7

Arătați că în orice triunghi avem: $p = r(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2})$

$$p = r(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2})$$

$$p = r(\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}})$$

$$p = r(\sqrt{\frac{p^2(p-a)^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p^2(p-b)^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p^2(p-c)^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}})$$

$$p = r(\frac{p(p-a)}{S} + \frac{p(p-b)}{S} + \frac{p(p-c)}{S})$$

$$1 = r \cdot \frac{p-a + p-b + p-c}{S}$$

$$1 = \frac{S}{p} \cdot \frac{3p-2p}{S}$$

$$1 = \frac{p}{p}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.8

Arătați că în orice triunghi avem:

$$p = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

$$p = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

$$p = r \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)} \cdot \frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)} \cdot \frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$$

$$p = r \cdot p \sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$1 = r \cdot \sqrt{\frac{p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$1 = r \cdot \frac{p}{S}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Raza cercului înscris și raza cercului circumscriș unui triunghi

molnar1956@yahoo.com



Ex.9

Arătați că în orice triunghi avem: $a \cdot \operatorname{ctg} \alpha + b \cdot \operatorname{ctg} \beta + c \cdot \operatorname{ctg} \gamma = 2(R + r)$

$$a \cdot \operatorname{ctg} \alpha + b \cdot \operatorname{ctg} \beta + c \cdot \operatorname{ctg} \gamma = 2(R + r)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} \cos \alpha + \frac{b}{\sin \beta} \cos \beta + \frac{c}{\sin \gamma} \cos \gamma = 2(R + r)$$

$$2R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = 2R + 2r$$

$$2R(2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}) = 2R + 2r$$

$$2R + 2R(2 \cos \frac{\pi - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}) = 2R + 2r$$

$$4R[\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}] = 2r$$

$$2R(\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}) = r$$

$$2R \sin \frac{\gamma}{2} (\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}) = r$$

$$2R \sin \frac{\gamma}{2} [\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2})] = r$$

$$2R \sin \frac{\gamma}{2} [\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}] = r$$

$$-4R \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}}{2} = r$$

$$-4R \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{-\beta}{2} = r$$

$$4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = r$$