
ELEKTRONIKAI TECHNIKUS KÉPZÉS

2 0 1 3

ELEKTROTECHNIKA III.

VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ HÁLÓZATOK

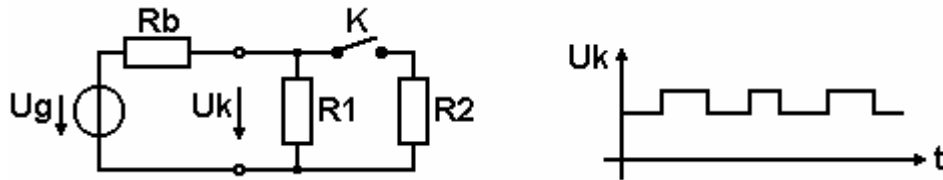
ÖSSZEÁLLÍTOTTA
NAGY LÁSZLÓ
MÉRNÖKTANÁR

Tartalomjegyzék

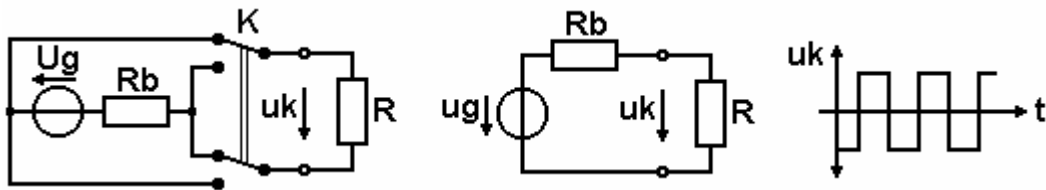
Váltakozó áram fogalma és jellemzői	3
Szinuszos lefolyású váltakozó feszültség előállítása	4
Szinuszos lefolyású váltakozó áram értékei	4
Váltakozó feszültség és áram megadása	6
Ellenállás a váltakozó áramú áramkörben	6
Tekercs a váltakozó áramú áramkörben	7
Kondenzátor a váltakozó áramú áramkörben	8
RLC elemek hálózatai	9
Soros RL és RC kétpólus	9
Párhuzamos RL és RC kétpólus	10
Soros és párhuzamos RLC kétpólus	11
Soros rezgőkör	12
Párhuzamos rezgőkör	13
A váltakozó áramú teljesítmény	13
A valóságos reaktív elemek	14
Valóságos tekercs	14
Valóságos kondenzátor	15
A valóságos rezgőkörök	15
A váltakozó áramú hálózatok számítása	17
Ohm törvény váltakozó áramú értelmezése	17
Csomóponti törvény váltakozó áramú értelmezése	18
Huroktörvény váltakozó áramú értelmezése	18
Sorosan kapcsolt impedanciák számítása	19
Párhuzamosan kapcsolt admittanciák számítása	19
Impedanciák ekvivalens átalakítása	19
Admittanciák ekvivalens átalakítása	20
Feszültségosztó váltakozó áramú számítása	20
Áramosztó váltakozó áramú számítása	21
Teljesítmény váltakozó áramú számítása	21
Fázisjavítás	22
Illesztés értelmezése a váltakozó áramú hálózatban	23
Többfázisú rendszerek	23
Kétfázisú rendszer	24
Háromfázisú rendszer	24
Csillag kapcsolás	24
Delta kapcsolás	24
Csillag kapcsolású fogyasztó	25
Delta kapcsolású fogyasztó	25
A háromfázisú rendszer teljesítménye	26
Mellékletek	27
A $\Delta \sin \omega t / \Delta t = \omega \cos \omega t$ bizonyítása	27
Komplex számok és elektrotechnikai alkalmazásuk	28
Műveletek komplex számokkal:	29
Mintafeladatok komplex számok alkalmazására	30
Mintafeladatok háromfázisú hálózatok számítására	31

Váltakozó áram fogalma és jellemzői

Azokat a feszültségeket vagy áramokat, melyeknek értéke nem állandó és irányuk nem változik, változó feszültségeknek illetve változó áramoknak nevezzük.



Azokat a feszültségeket vagy áramokat, melyeknek értéke és iránya állandóan változik, váltakozó feszültségeknek illetve váltakozó áramoknak nevezzük.



A váltakozó feszültség periodikus, ha az egymás után következő azonos időközökben a feszültséggörbe lefolyása ismétlődik. Egy periódus vagy ciklus lezajlásának időtartama a periódus idő.

Jele: T

Mértékegysége: $[T] = \text{sec}$

Egy időegység alatt lejátszódó periódusok száma a frekvencia.

Jele: $f = \frac{1}{T}$

Mértékegysége: $[f] = 1/\text{sec}, \text{ciklus/sec}, \text{c/sec}, (\text{Hz})$

2π sec alatt lejátszódó periódusok száma a körfrekvencia vagy szögsebesség.

Jele: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$

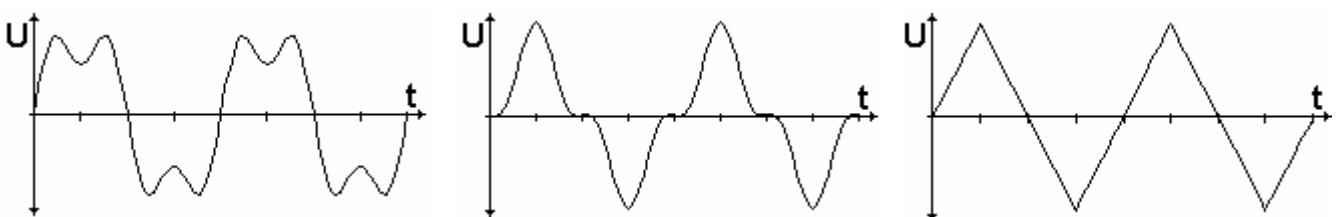
Mértékegysége: $[\omega] = 1/\text{sec}, \text{rad}$

A villamos energia fénysebességgel ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / sec}$) terjed. Egy periódus idő alatt a villamos energia által megtett út a hullámhossz.

Jele: $\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$

Mértékegysége: $[\lambda] = \text{m}$

A váltakozó feszültség időbeli lefolyása lehet szinuszos és nem szinuszos (négyyszög, háromszög, fűrészfű, stb.). Nem szinuszos lefolyású váltakozó feszültségek:

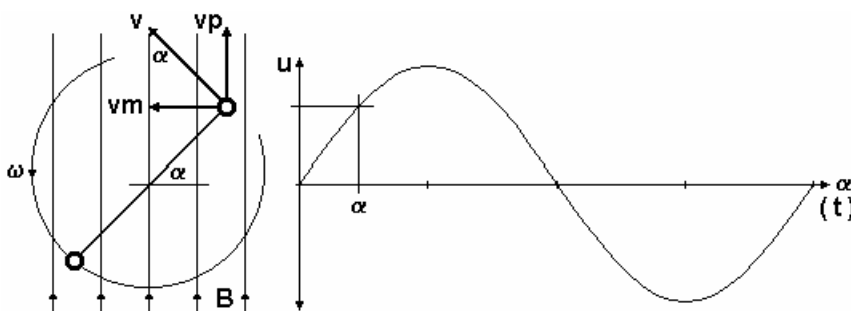


Szinuszos lefolyású váltakozó feszültség előállítása

Homogén mágneses térben, a tér irányára merőlegesen, v sebességgel mozgó vezetőben az indukált feszültség:

$$U_{\max} = B \cdot \ell \cdot v$$

Váltakozó feszültséget egy homogén mágneses térben elhelyezett, indukció vonalakra merőleges forgástengelyű, vezető keret forgatásával lehet előállítani. A vezető keret alapjában véve egy többmenetes tekercs, aminek két vége egy-egy csúszógyűrűre van kivezetve. A csúszógyűrűkhöz csatlakozó szénkeféken keresztül lehet a váltakozó feszültséghez hozzáférni. Forgatás közben a vezető keret vezetője, v kerületi sebességgel mozog. Mivel a vezető egy homogén mágneses térben mozog, ezért benne a mozgási indukció értelmében feszültség indukálódik. A kerületi sebesség felbontható egy a homogén térre merőleges v_m és egy a homogén térrel párhuzamos v_p összetevőre. A párhuzamos összetevő nem metszi az erővonalakat, így nem hoz létre feszültséget. A keret vezetőjében indukált feszültség, csak a sebesség merőleges összetevőjével, azaz $v_m = v \sin \alpha$ -val arányos.



A forgó keret csúszógyűrűin mérhető indukált feszültség:

$$u = B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha = U_{\max} \cdot \sin \alpha$$

A keret ω szögsebességgel forog, tehát t idő alatt α szöggel fordul el:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad \text{amiből} \quad \alpha = \omega \cdot t$$

A forgó keretben indukált szinuszos lefolyású feszültség és az így kialakuló áram:

$$u = U_{\max} \cdot \sin \omega t = U_p \cdot \sin \omega t = \hat{U} \cdot \sin \omega t \quad i = \hat{I} \cdot \sin \omega t$$

A forgó keret T periódus idő alatt 360° -ot fordul el, ezért:

$$u = \hat{U} \cdot \sin \frac{360^\circ}{T} t \quad i = \hat{I} \cdot \sin \frac{360^\circ}{T} t$$

A keret vezetője a 2π hosszúságú kerületet másodpercenként f -szer teszi meg, ezért:

$$u = \hat{U} \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t \quad i = \hat{I} \sin 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t$$

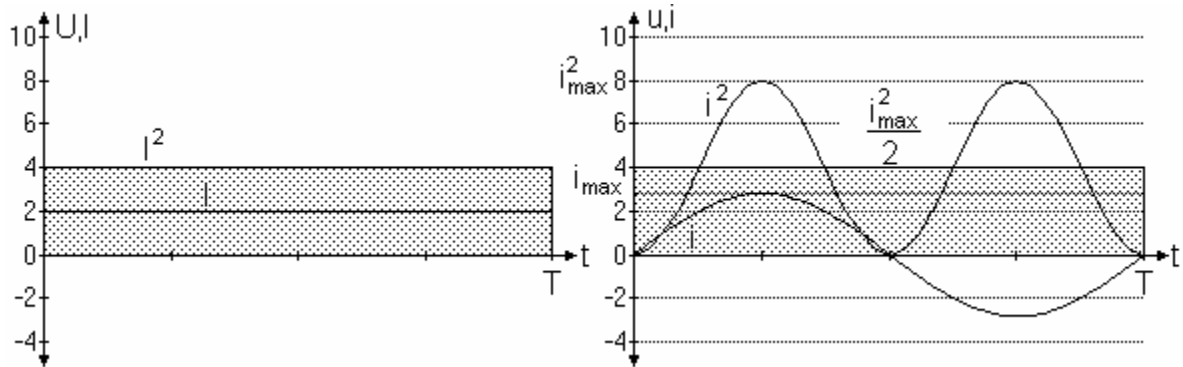
Szinuszos lefolyású váltakozó áram értékei

A váltakozó áram effektív vagy négyzetes középértéke annak az egyenáramnak az értékével egyezik meg, amely ugyanakkora ellenálláson, ugyanannyi idő alatt, ugyanakkora hőmennyiséget termel, mint a váltakozó áram. A hőmennyiség, azaz a villamos áram által végzett

munka mindkét esetben az áram négyzetével, az ellenállással és az idővel arányos. Tehát:

$$W_{\text{egyen}} = I_{\text{egyen}}^2 \cdot R \cdot t = W_{\text{váltó}} = I_{\text{váltó}}^2 \cdot R \cdot t$$

Mindkét munkavégzés azonos R fogyasztón történik, ezért az ellenállások elhagyhatók az egyenlőségből. Az időnek, a váltakozó áram periódus idejét célszerű választani, ezért $t = T$. A munkavégzések akkor lesznek egyelők, ha $I_{\text{egyen}}^2 = I_{\text{váltó}}^2$ teljesül. A váltakozó áram effektív értéke grafikusan meghatározható.

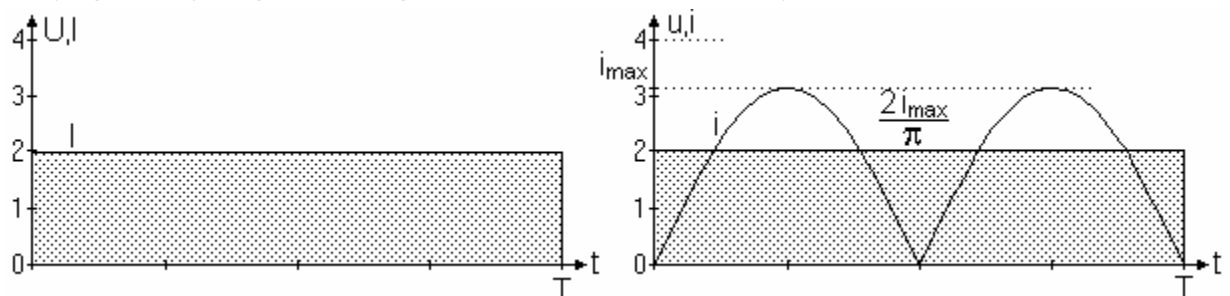


Egy T ideig folyó egyenáram négyzete a baloldali időfüggvény sátirozott területe. Egy T periódusidejű váltakozó áram pontonként képzett négyzete, egy nulla tengelyre helyezett, kétszeres frekvenciájú, negatív koszinusz görbe. Ezen görbe alatti terület arányos a váltakozó áram által végzett munkával. Az összehasonlíthatóság érdekében területt alakítjuk a koszinusz görbét úgy, hogy vesszük a csúcsérték felét, majd a felező vonal feletti "púpokat", függőlegesen ketté vágjuk és a négy területet beillesztjük a felező vonal alatti görbébe. Ezzel a művelettel $i_{\text{max}}^2 / 2$ magasságú területet kapunk, ami a jobboldali időfüggvény sátirozott területe. A váltakozó áram effektív értéke a két terület azonossága alapján:

$$I_{\text{egyen}}^2 = \frac{\hat{I}_{\text{váltó}}^2}{2} \quad I_{\text{egyen}} = \frac{\hat{I}_{\text{váltó}}}{\sqrt{2}} \quad U_{\text{egyen}} = \frac{\hat{U}_{\text{váltó}}}{\sqrt{2}}$$

A szinuszos lefolyású váltakozó áram effektív értéke a csúcsérték $\sqrt{2}$ -ed része. Az összefüggés a szinuszos feszültségre is érvényes. Általános értelemben az effektív érték a pillanatértékek négyzeteinek átlagértéke egy periódusra vonatkoztatva. Ez a meghatározás bármilyen lefolyású váltakozó áramra használható.

A váltakozó áram elektrolitikus vagy abszolút (egyenirányított) középértéke annak az egyenáramnak az értékével egyezik meg, amely ugyanannyi idő alatt, ugyanannyi anyagmennyiséget választ ki egy elektrolitból, mint az egyenirányított váltakozó áram. A kiválasztott anyagmennyiség az áramgörbe alatti területtel arányos.



A szinuszos lefolyású váltakozó áram elektrolitikus középértéke a csúcserőérték kétszeresének π -ed része. Az összefüggés a szinuszos váltakozó feszültségre is érvényes.

$$I_{\text{közép}} = \frac{2 \cdot \hat{I}}{\pi} \qquad U_{\text{közép}} = \frac{2 \cdot \hat{U}}{\pi}$$

Egyutas egyenirányítás esetén a középérték a csúcserőérték, π -ed része. A szimmetrikus félperiódusú váltakozó áram középértéke nulla! Általános értelemben a középérték a pillanatértékek átlaga, egy periódusra vonatkoztatva. Ez a meghatározás bármilyen lefolyású váltakozó áramra használható.

Váltakozó feszültség és áram megadása

Algebrai megadások:

Időfüggvénnyel:

$$u = \hat{U} \cdot \sin \omega t$$

Effektív értékkel és fázishelyzettel:

$$U_{\text{eff}} \text{ V} \quad \angle \varphi^\circ$$

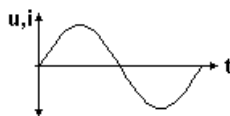
Komplex alakban:

$$\bar{U} = \hat{U} \cdot \cos \varphi^\circ + j \cdot \hat{U} \cdot \sin \varphi^\circ$$

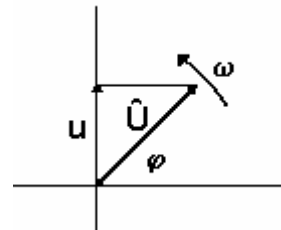
$$\bar{U} = a + j \cdot b \text{ V}$$

Grafikus megadások:

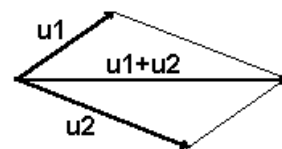
Idő függvényében szinusz görbével:



Forgó vektorral: $\hat{U}$ -al arányos hosszúságú és ω szögsebességgel forogó vektor, mely éppen φ fázishelyzetben van. A pillanatértéket a függőleges tengelyre vett vetület adja meg. Ez a megadás sokban hasonlít a váltakozó feszültséget előállító forgó keretes szemléltetéshez, de a koordináta tengelyek kötöttségeket jelentenek.

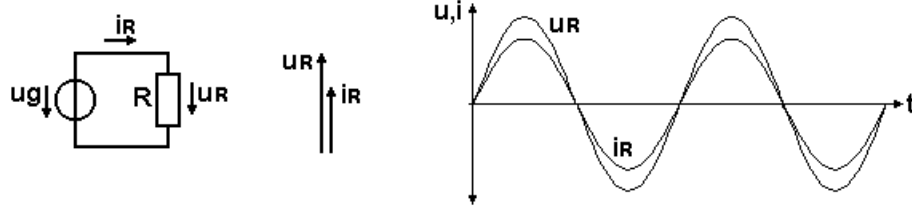


Effektív érték vektorral: effektív értékkel arányos hosszúságú vektor, melynek iránya egy tetszőlegesen felvett vonatkozási irányhoz adható meg. Több feszültség vagy áram esetén az óramutató járásával ellentétes forgásirányt kell figyelembe venni. Az $u_1 + u_2$ feszültséghez viszonyítva az u_1 siet, az u_2 késik. Rugalmas és szemléletes ábrázolási mód. A feszültségek és az áramok együtt is előfordulhatnak.



Ellenállás a váltakozó áramú áramkörben

Egy ellenálláson, váltakozó feszültség hatására, váltakozó áram folyik. A feszültség és az áram azonos fázisban van.



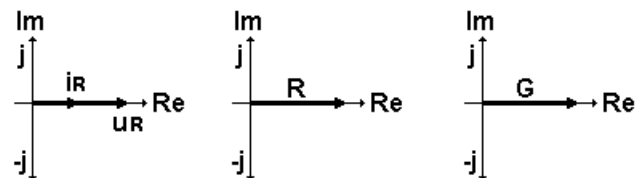
Az Ohm törvényt a pillanatértékekre alkalmazva:

$$\hat{U} \sin \omega t = R \cdot \hat{I} \sin \omega t \quad \hat{U} = R \cdot \hat{I} \quad U_{\text{eff}} = R \cdot I_{\text{eff}}$$

A feszültséget és az áramot komplex alakban megadva és $\omega t = 0^\circ$ -t behelyettesítve:

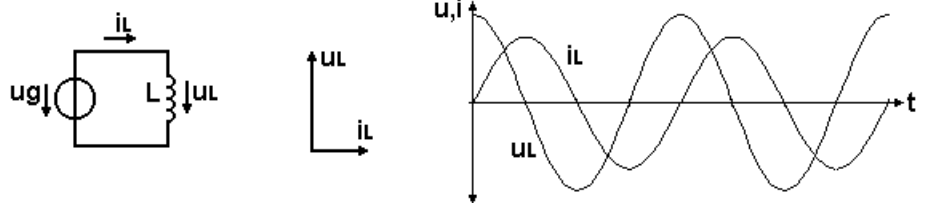
$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{\hat{U} \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ)}{\hat{I} \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ)} = R$$

Komplex számsíkon ábrázolva, az ellenállás matematikai szempontból valós mennyiség.



Tekercs a váltakozó áramú áramkörben

Egy induktivitáson, váltakozó feszültség hatására, váltakozó áram folyik. A tekercsben folyó áram, feszültséget indukál a tekercsben, mely arányos az áram változásával. Az indukált feszültség, az áramcsúcs pillanatában nulla, mert az áram nem változik, és maximális az áram nulla átmeneténél, mert az áram változás maximális. A tekercsben kialakuló önindukciós feszültség polaritása az áram változásának iránya alapján határozható meg: növekvő áram esetén pozitív, csökkenő áram esetén negatív. A tekercsben indukált feszültség, egyben a generátor forrásfeszültsége:



$$u = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = L \cdot \hat{I} \cdot \frac{\Delta \sin \omega t}{\Delta t} = \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot \cos \omega t = \hat{U} \cdot \cos \omega t$$

Az összefüggésben $\Delta i = \Delta \hat{I} \cdot \sin \omega t$, de az $\hat{I}$ állandó, a Δ a $\sin \omega t$, azaz a szinusz függvény változás függvénye. (A $\Delta \sin \omega t / \Delta t = \omega \cos \omega t$ bizonyítása a fejezet végén.)

Az ideális induktivitáson az áram szinuszos a feszültség koszinuszos. a feszültség 90° -al si-et az áramhoz képest, az áram 90° -al késik a feszültséghez képest.

Az ωL a tekercs váltakozó áramú ellenállása, azaz induktív reaktanciája.

Jele: $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$

Mértékegysége: $[X_L] = V / A, \Omega$

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \omega \cdot L = \hat{I} \cdot X_L$$

$$U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} \cdot X_L$$

Az induktív reaktancia reciproka az induktív szuszceptancia.

Jele: B_L

Mértékegysége: $[B_L] = A / V, S$

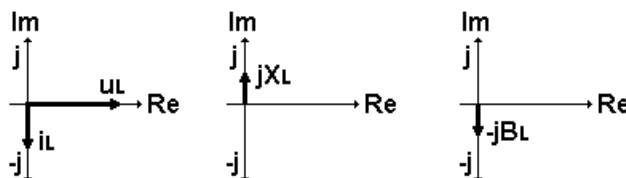
$$\hat{I} = \hat{U} \cdot B_L$$

$$I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \cdot B_L$$

A feszültséget és az áramot komplex alakban megadva és $\omega t = 0^\circ$ -t behelyettesítve:

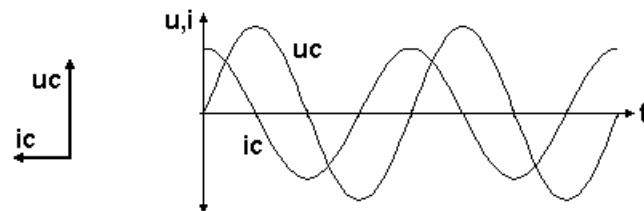
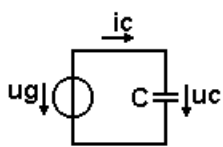
$$\hat{U} \cos \omega t = \hat{U} \sin(\omega t + 90^\circ) \quad \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{\hat{U}(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ)}{\hat{I}(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ)} = j \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = j X_L$$

Komplex számsíkon ábrázolva, az induktív reaktancia matematikai szempontból pozitív képzetes mennyiség.



Kondenzátor a váltakozó áramú áramkörben

Egy kondenzátoron, váltakozó feszültség hatására, váltakozó áram folyik. A kondenzátorra kapcsolt váltakozó feszültség töltésáramlást hoz létre, mely a feszültség változásával arányos. A töltés áramlás a feszültségcsúcs pillanatában nulla, mert a feszültség állandó, és maximális a feszültség nulla átmeneténél, mert a feszültség változás maximális. A kondenzátor árama a feszültség változási sebességével arányos. Az áram iránya a feszültség változásának iránya alapján határozható meg: növekvő feszültség esetén pozitív, csökkenő feszültség esetén negatív.



A váltakozó feszültségre kapcsolt kondenzátor árama:

$$i = C \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} = C \cdot \hat{U} \cdot \frac{\Delta \sin \omega t}{\Delta t} = \omega \cdot C \cdot \hat{U} \cdot \cos \omega t = \hat{I} \cdot \cos \omega t$$

Az összefüggésben $\Delta u = \Delta \hat{U} \cdot \sin \omega t$, de az $\hat{U}$ állandó, a Δ a $\sin \omega t$, azaz a szinusz függvény változás függvénye. (A $\Delta \sin \omega t / \Delta t = \omega \cos \omega t$ bizonyítása a fejezet végén.)

Az ideális kapacitáson az áram koszinuszos a feszültség szinuszos. a feszültség 90° -al késik az áramhoz képest, az áram 90° -al siet a feszültséghez képest.

Az $1/\omega C$ a kondenzátor váltakozó áramú ellenállása, azaz kapacitív reaktanciája.

Jele: X_C

Mértékegysége: $[X_C] = V/A, \Omega$

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \frac{1}{\omega C} = \hat{I} \cdot X_C$$

$$U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} \cdot X_C$$

A kapacitív reaktancia reciproka a kapacitív szuszceptancia.

Jele: B_C

Mértékegysége: $[B_C] = A/V, S$

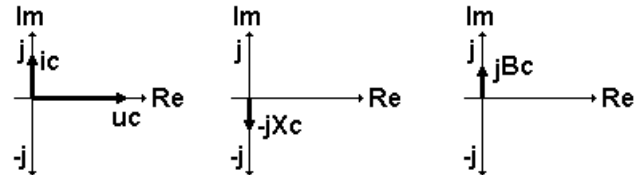
$$\hat{I} = \hat{U} \cdot B_C$$

$$I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \cdot B_C$$

A feszültséget és az áramot komplex alakban megadva és $\omega t = 0^\circ$ -t behelyettesítve:

$$\hat{I} \cdot \cos \omega t = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \quad \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{\hat{U}(\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ)}{\hat{I}(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ)} = -j \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = -j X_C = \frac{1}{j \omega C}$$

Komplex számsíkon ábrázolva, a kapacitív reaktancia matematikai szempontból negatív képzetes mennyiség.



RLC elemek hálózatai

Soros RL és RC kétpólus

A sorosan kapcsolt RL és RC elemeken az áram azonos. Az áramhoz viszonyítva, az ellenálláson eső feszültség azonos fázisú, az induktivitáson eső feszültség 90° -al siet, a kapacitáson eső feszültség 90° -al késik.



A kétpólusokon eső feszültség a részfeszültségek vektoros eredőjével egyezik meg.

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

Az U feszültség hatására kialakuló I áramot, a kétpólus látszólagos vagy váltakozó áramú ellenállása, más néven impedanciája határozza meg.

Jele: Z

Mértékegysége: $[Z] = V/A, \Omega$

$$U = I \cdot Z$$

$$U_R = I \cdot R$$

$$U_L = I \cdot X_L$$

$$U_C = I \cdot X_C$$

A részfeszültségeket behelyettesítve:

$$I \cdot Z = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L)^2}$$

$$I \cdot Z = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_C)^2}$$

Az árammal osztva az impedancia abszolút értéke:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

A soros RL és a soros RC kétpólus feszültsége és árama közötti φ° fáziseltérést az ohmos és reaktív elemeken eső feszültségek aránya határozza meg.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{X_L}{R}$$

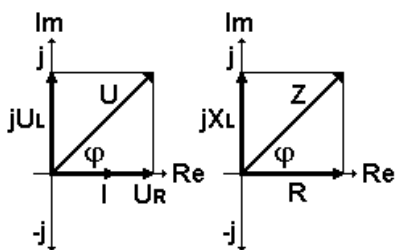
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{X_C}{R}$$

Az impedanciát az abszolút értéke és a fázisszöge jellemzi. A fázisszög pozitív, ha a feszültség siet és negatív, ha a feszültség késik az impedancián folyó áramhoz viszonyítva.

$$Z \Omega, \angle \varphi^\circ$$

$$Z \Omega, \angle -\varphi^\circ$$

A feszültség és az áram vektorok hányadosa a komplex impedancia:



$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \bar{Z} = R + jX_L \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}$$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \bar{Z} = R - jX_C \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X_C}{R}$$

Az impedancia matematikai szempontból komplex vektor mennyiség: nagysága és fázisszöge van. Az impedancia induktív jellegű, ha a fázisszöge pozitív és kapacitív jellegű, ha fázisszöge negatív.

Párhuzamos RL és RC kétpólus

A párhuzamosan kapcsolt RL és RC elemeken a feszültség azonos. A feszültséghez viszonyítva, az ellenálláson folyó áram azonos fázisú, az induktivitáson folyó áram 90° -al késik, a kapacitáson folyó áram 90° -al siet.



A kétpólusokon folyó áram az ág áramok vektoros eredőjével egyezik meg.

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

Az I áram hatására kialakuló U feszültséget, a kétpólus látszólagos vagy váltakozó áramú vezetése, más néven admittanciája határozza meg.

Jele: Y

Mértékegysége: $[Y] = A/V, S$

$$I = U \cdot Y$$

$$I_R = U \cdot G$$

$$I_L = U \cdot B_L$$

$$I_C = U \cdot B_C$$

Az ágramokat behelyettesítve és a feszültséggel osztva:

$$U \cdot Y = \sqrt{(U \cdot G)^2 + (U \cdot B_L)^2}$$

$$U \cdot Y = \sqrt{(U \cdot G)^2 + (U \cdot B_C)^2}$$

Az admittancia abszolút értéke:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B_L^2}$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B_C^2}$$

A kétpólus árama és feszültsége közötti φ° fáziseltérést a konduktív és szuszceptív elemeken folyó áramok aránya határozza meg.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L}{I_G} = \frac{B_L}{G}$$

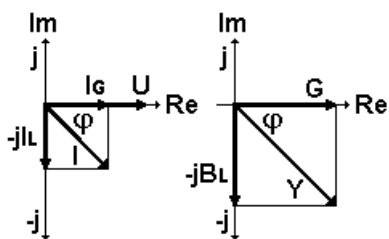
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C}{I_G} = \frac{B_C}{G}$$

Az admittanciát az abszolút értéke és a fázisszöge jellemzi. A fázisszög pozitív, ha az áram siet és negatív, ha az áram késik az admittancián eső feszültséghez viszonyítva.

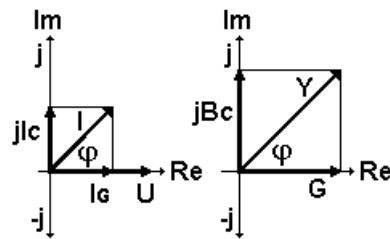
$$Y \text{ S}, \angle -\varphi^\circ$$

$$Y \text{ S}, \angle \varphi^\circ$$

A áram és a feszültség vektorok hányadosa a komplex admittancia:



$$\frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \bar{Y} = G - jB_L \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{B_L}{G}$$

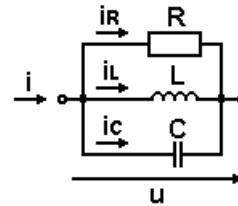
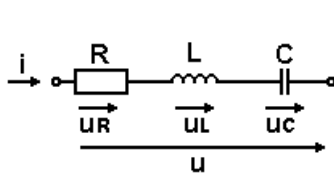


$$\frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \bar{Y} = G + jB_C \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B_C}{G}$$

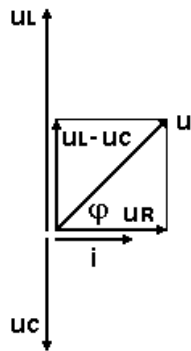
Az admittancia matematikai szempontból komplex vektor mennyiség: nagysága és fázisszöge van. Az admittancia kapacitív jellegű, ha a fázisszöge pozitív, és induktív jellegű, ha fázisszöge negatív.

Soros és párhuzamos RLC kétpólus

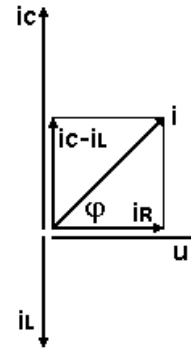
A sorosan kapcsolt RLC elemeken az áram, a párhuzamosan kapcsolt RLC elemeken a feszültség azonos.



A soros kétpóluson eső feszültség a részfeszültségek, a párhuzamos kétpóluson az ágak vektoros eredőjével egyezik meg.



$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$



$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

A soros kétpólus impedanciájának abszolút értéke, komplex alakja és fázisszöge illetve a párhuzamos kétpólus admittanciájának abszolút értéke, komplex alakja és fázisszöge:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$

$$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C)$$

$$\bar{Y} = G + j(B_C - B_L)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_C - B_L}{G}$$

Soros rezgőkör

A sorosan kapcsolt RLC hálózatban a reaktanciákon eső feszültség a frekvencia függvényében ellentétesen változik. Alacsony frekvencián az X_C értéke nagy, a kétpólus eredőben kapacitív jellegű. Magas frekvencián az X_L értéke nagy, a kétpólus eredőben induktív jellegű. $X_L = X_C$ esetén, a reaktív elemeken eső feszültségek eredője nulla, a kétpólus tisztán ohmos jellegű. Azt a frekvenciát ahol a soros RLC hálózat tisztán ohmos jelleget mutat rezonancia frekvenciának (f_0), az állapotot feszültség rezonanciának, a kétpólust soros rezgőkörnek nevezzük.

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$2\pi f_0 = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

A körfrekvenciát illetve a frekvenciát kifejezve (Thomson összefüggés):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ideális reaktív elemek és $R=0$ esetén a soros rezgőkör rezonancia frekvencián rövidzár.

Párhuzamos rezgőkör

A párhuzamosan kapcsolt RLC hálózatban a reaktanciákon folyó áram a frekvencia függvényében ellentétesen változik. Alacsony frekvencián az X_L értéke kicsi, a kétpólus eredőben induktív jellegű. Magas frekvencián az X_C értéke kicsi, a kétpólus eredőben kapacitív jellegű. $X_L=X_C$ esetén, a reaktív elemeken folyó áramok eredője nulla, a kétpólus tisztán ohmos jellegű. Azt a frekvenciát ahol a párhuzamos RLC hálózat tisztán ohmos jelleget mutat rezonancia frekvenciának (f_0), az állapotot áram rezonanciának, a kétpólust párhuzamos rezgőkörnek nevezzük.

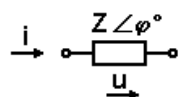
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ideális reaktív elemek és $R=\infty$ esetén a párhuzamos rezgőkör rezonancia frekvencián szakadás.

A váltakozó áramú teljesítmény

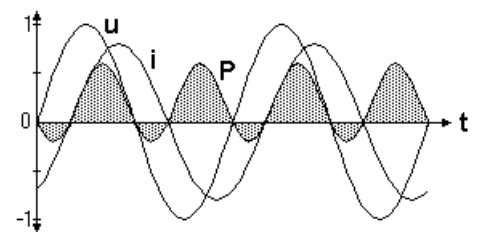
Egy váltakozó áramú fogyasztón kialakuló látszólagos vagy fázisszögtől független teljesítmény, egyenesen arányos az árammal és a feszültséggel.

Jele: S Mértékegysége: [S] = VA



$$S = U \cdot I = \frac{U^2}{|Z|} = I^2 \cdot |Z|$$

A teljesítmény pillanatértéke, a feszültség és az áram előjelétől, fázishelyzettől függ. Azonos fázishelyzet esetén a teljesítmény pillanatértéke pozitív, ellentétes fázishelyzet esetén negatív. Egy kétpóluson kialakuló teljesítmény a pozitív és negatív pillanatértékek átlagának a különbsége.



Részletesebben vizsgálva ez azt jelenti, hogy egy periódusra nézve képezzük a nulla tengely feletti görbe átlagát, azaz a görbe alatti területet, és ebből vonjuk ki a hasonló módon képzett nulla tengely alatti átlagot.

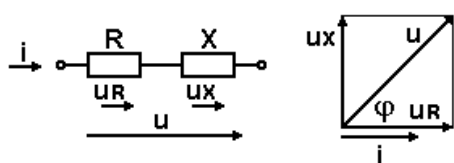
Ohmos fogyasztó fázisszöge 0° , minden pillanatérték és így az átlagérték is pozitív, a teljesítmény hasznos vagy wattos.

Jele: P Mértékegysége: [P] = W

Reaktív fogyasztó fázisszöge 90° , a pozitív és negatív pillanatértékek átlaga 0, a teljesítmény - mivel haszontalanul leng a fogyasztó és a generátor között - reaktív vagy meddő.

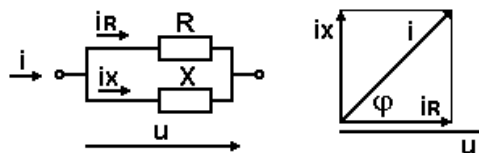
Jele: Q Mértékegysége: [Q] = VAR

Egy impedancia feszültsége vagy árama - a kapcsolási módozattól függetlenül - wattos és reaktív összetevőre bontható.



$$U_R = U \cos \varphi$$

$$U_X = U \sin \varphi$$



$$I_R = I \cos \varphi$$

$$I_X = I \sin \varphi$$

Egy impedancián a fázisszög függvényében kialakuló teljesítmények:

$$S = U I \quad \text{látszólagos [VA]}$$

$$P = U_R I = U I_R = U I \cos \varphi = S \cos \varphi \quad \text{wattos [W]}$$

$$Q = U_X I = U I_X = U I \sin \varphi = S \sin \varphi \quad \text{meddő [Var]}$$

A teljesítmények közötti összefüggés:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\bar{S} = P \pm jQ$$

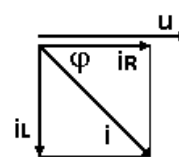
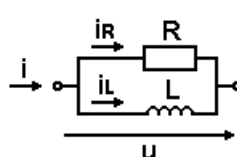
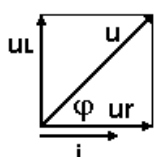
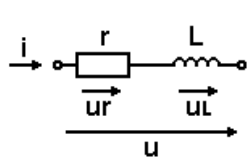
A váltakozó áramú teljesítmény matematikai szempontból komplex mennyiség.

A valóságos reaktív elemek

Az ideális reaktív elemek veszteségmentesek, fázistolásuk 90° , teljesítményük kizárólag meddő. A valóságos reaktív elemek veszteségesek, fázistolásuk kisebb, mint 90° , meddő teljesítményen kívül wattos összetevőt is tartalmaz. A wattos összetevő a reaktív elemek szempontjából veszteség. Egy reaktív elemet végtelenül jónak tehát ideálisnak tekintjük, ha nem keletkezik rajta wattos teljesítmény. A reaktív elemek minőségi jellemzője a Q jósági tényező, mely az alkatrészen kialakuló meddő és wattos teljesítmények aránya. A jósági tényező reciproka a D veszteségi tényező.

Valóságos tekercs

A valóságos tekercset egy ideális induktivitással és a veszteségeket jelképező soros vagy párhuzamos veszteségi ellenállással lehet helyettesíteni. Egy valóságos tekercsben fellépő wattos teljesítményt létrehozó veszteségek: a réz veszteség, ami a tekercs ohmos ellenállásán keletkezik, és a vas veszteség, ami a vasmag hiszterézis és örvényáramú veszteség.



$$Q = \frac{P_m}{P_w} = \frac{i^2 \omega L}{i^2 r} = \frac{\omega L}{r}$$

$$D = \frac{r}{\omega L}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_L}{u_r} = \frac{P_m}{P_w} = Q$$

$$Q = \frac{P_m}{P_w} = \frac{\frac{u^2}{\omega L}}{\frac{u^2}{R}} = \frac{R}{\omega L}$$

$$D = \frac{\omega L}{R}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{i_L}{i_R} = \frac{P_m}{P_w} = Q$$

A soros és párhuzamos veszteségi ellenállások közötti kapcsolat:

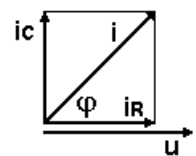
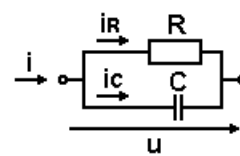
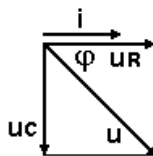
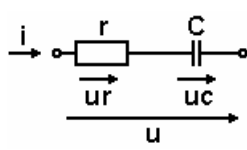
$$R \approx r Q^2$$

$$r \approx R D^2$$

$$L_S \approx L_P$$

Valóságos kondenzátor

A valóságos kondenzátort egy ideális kapacitással és a veszteségeket jelképező soros vagy párhuzamos veszteségi ellenállással lehet helyettesíteni. A valóságos kondenzátorban fellépő veszteségek: a fegyverzetek, kivezetések ohmos ellenállása, a dielektrikum átvezetési ellenállása, a dielektrikum átpolarizálási vesztesége.



$$Q = \frac{P_m}{P_w} = \frac{\frac{i^2}{\omega C}}{i^2 r} = \frac{1}{\omega r C}$$

$$D = \omega r C$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{u_r}{u_c} = \frac{P_w}{P_m} = D$$

$$Q = \frac{P_m}{P_w} = \frac{\frac{u^2 \omega C}{R}}{\frac{u^2}{R}} = \omega R C$$

$$D = \frac{1}{\omega R C}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{i_R}{i_c} = \frac{P_w}{P_m} = D$$

A soros és párhuzamos veszteségi ellenállások közötti kapcsolat:

$$R \approx r Q^2$$

$$r \approx R D^2$$

$$C_S \approx C_P$$

A valóságos rezgőkörök

A sorosan kapcsolt valóságos induktivitás és kapacitás valóságos soros rezgőkört alkot. A reaktív elemek által bevitt soros veszteségi ellenállások összeadódnak. A reaktív elemek egymás veszteségi ellenállásait is látják.



A jósági tényezőket ω -ra rendezve és egyenlővé téve, a soros rezgőkör jósági tényezője:

$$Q = \frac{\omega L}{r} \quad Q = \frac{1}{\omega r C} \quad Q_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Rezonancián a reaktív elemeken eső feszültség az

$$u_L = i \cdot X_L = \frac{u_k}{r} \cdot X_L = u_k \cdot \frac{\omega L}{r} = u_k \cdot Q \quad u_C = i \cdot X_C = \frac{u_k}{r} \cdot X_C = u_k \cdot \frac{1}{\omega r C} = u_k \cdot Q$$

összefüggések alapján, a kapocsfeszültség Q szorosa.

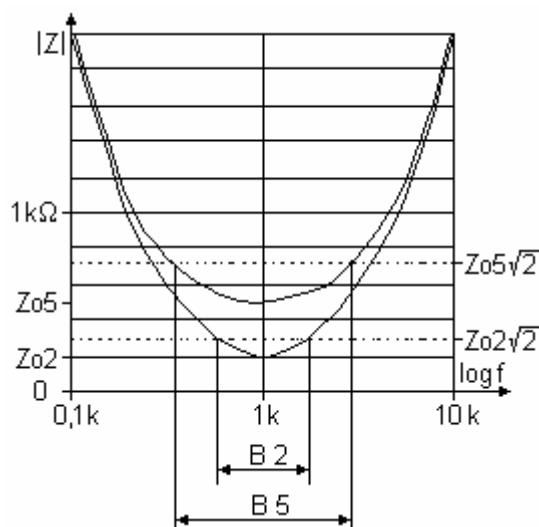
A soros rezgőkör sávszélességét azok az f_0 -tól (ω_0 -tól) szimmetrikusan elhelyezkedő ($\pm \Delta f$) frekvenciák határozzák meg, ahol az f_0 -n mért impedancia abszolút értéke $\sqrt{2}$ szeresére nő, illetve a fázistolás $\pm 45^\circ$.

Jele: B

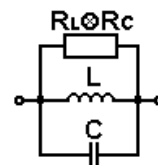
Mértékegysége: $[B] = \text{Hz}$

$$B = 2\Delta f = \frac{f_0}{Q_0}$$

A soros rezgőkör frekvenciamenetei $\omega_0 = 1 \text{ kHz}$ rezonancia környezetében. Reaktív elemek $0,2 \text{ H}$ és $5 \mu\text{F}$. Soros ellenállások 200 és 500Ω . A sávszélességet a $Z_0\sqrt{2}$ metszések adják meg. Jól látszik, hogy a kisebb Z_0 -hoz kisebb sávszélesség tartozik.



A párhuzamosan kapcsolt valóságos induktivitás és kapacitás valóságos párhuzamos rezgőkört alkot. A reaktív elemek által bevitt párhuzamos veszteségi ellenállások repluszolódnak. A reaktív elemek egymás veszteségi ellenállásait is látják.



A jósági tényezőket ω -ra rendezve és egyenlővé téve a párhuzamos rezgőkör jósági tényezője:

$$Q = \frac{R}{\omega L} \quad Q = \omega RC \quad Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Rezonancián a reaktív elemeken folyó áram

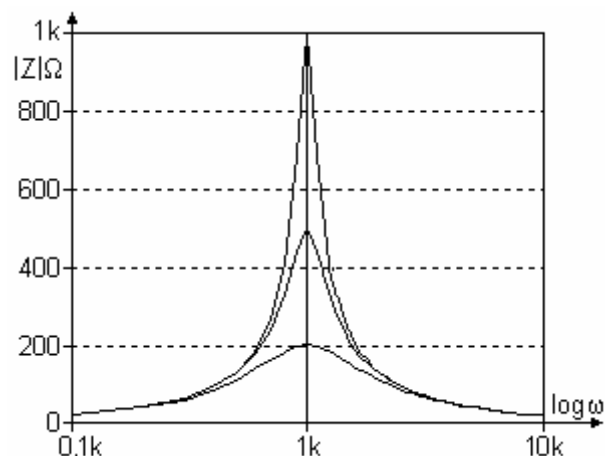
$$i_L = \frac{u_k}{X_L} = \frac{i_k R}{X_L} = i_k \cdot \frac{R}{\omega L} = i_k \cdot Q \quad i_C = \frac{U_k}{X_C} = \frac{i_k R}{X_C} = i_k \cdot \omega RC = i_k \cdot Q$$

az összefüggések alapján, a kapocsáram Q szorosa.

A párhuzamosos rezgőkör sávszélességét azok az f_0 -tól (ω_0 -tól) szimmetrikusan elhelyezkedő frekvenciák határozzák meg, ahol az f_0 -n mért impedancia abszolút értéke $\sqrt{2}$ -ed részére csökken, ill a fázistolás $\pm 45^\circ$. Jelölése és számítása azonos a soros rezgőkör sávszélességével.

$$B = 2\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

Az ábra a párhuzamos rezgőkör impedanciájának alakulását mutatja be a rezonancia frekvencia környezetében. A reaktív alkatrészek 200 mH és 5 μ F, a veszteségi ellenállások 200 Ω , 500 Ω és 1 k Ω értékűek. A nagyobb veszteségi ellenállás keskenyebb rezonancia görbét, áramköri szempontból nagyobb szelektivitást eredményez.



A váltakozó áramú hálózatok számítása

A soros RL és RC kétpólusok feszültségei vagy a párhuzamos RL és RC kétpólusok áramai a 90°-os fázistolások miatt viszonylag egyszerű módon, a Pitagorasz tétel alkalmazásával meghatározhatók. Az impedanciák vagy admittanciák fázistolása $-90^\circ > \varphi > +90^\circ$ tartományba esik, amit a számítások során figyelembe kell venni. A váltakozó áramú hálózatok tervezése és elemzése, az egyenáramú hálózatokhoz viszonyítva azért összetettebb feladat, mert megjelenik egy harmadik jellemző is, a fázisszög. Ez a fejezet az egyenáramú hálózatoknál megismert számítási eljárások, váltakozó áramú áramkörben való alkalmazására mutat be példákat. A feszültségek és áramok csúcs, effektív és középértékre is értelmezhetők.

Ohm törvény váltakozó áramú értelmezése

Feszültség számítása:

$$\begin{array}{ccccccc} U = IR & U = \frac{I}{G} & U = IX & U = \frac{I}{B} & U = IZ & U = \frac{I}{Y} \\ \varphi_U = & \varphi_I & \varphi_I & \varphi_I + \varphi_X & \varphi_I - \varphi_B & \varphi_I + \varphi_Z & \varphi_I - \varphi_Y \end{array}$$

Ha X és Z induktív jellegű, akkor a feszültség előrébb, ha kapacitív, akkor hátrébb tolódik az áram fázishelyzetéhez viszonyítva. Például: egy induktivitáson folyó áram fázisszöge -15° , a feszültség fázisszöge $-15^\circ + 90^\circ = 75^\circ$ lesz, vagy ha egy -30° fázistolású kapacitív impedancián folyó áram fázisszöge 40° , akkor a feszültség fázisszöge $40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$ lesz.

Áram számítása:

$$\begin{array}{ccccccc} I = \frac{U}{R} & I = U \cdot G & I = \frac{U}{X} & I = U \cdot B & I = \frac{U}{Z} & I = U \cdot Y \\ \varphi_I = & \varphi_U & \varphi_U & \varphi_U - \varphi_X & \varphi_U - \varphi_B & \varphi_U - \varphi_Z & \varphi_U + \varphi_Y \end{array}$$

Ha X és Z induktív jellegű, akkor az áram hátrébb, ha kapacitív, akkor előbbre tolódik a feszültség fázishelyzetéhez viszonyítva. Például: ha egy induktivitás feszültségének fázisszöge 60° akkor az áram fázisszöge $60^\circ - (+90^\circ) = -30^\circ$ lesz, vagy ha egy 20° fázistolású

kapacitív impedancia feszültsége 60° -os, akkor az árama $60^\circ - (-20)^\circ = 80^\circ$ lesz.

Csomóponti törvény váltakozó áramú értelmezése

Kirchoff I. törvényét vektorosan kell értelmezni. Az egyenáramú hálózatokban a csomópontok áramai csak "0" vagy "180" fokosak lehetnek, ezért összeadással vagy kivonással egyszerűen számíthatók. Váltakozó áramú hálózatokban a csomópontba be és kifolyó áramok különböző szöghelyzetűek lehetnek, ezért csak vektorosan számíthatók. Ehhez az áramokat fel kell bontani x és y irányú összetevőkre, majd az egyes irányok összetevőiből kell a kérdéses áramot meghatározni. Az áramok vonatkozási irányait az egyenáramú hálózatoknál megismert módon kell felvenni.

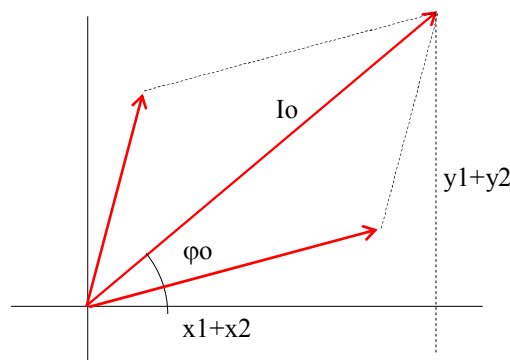
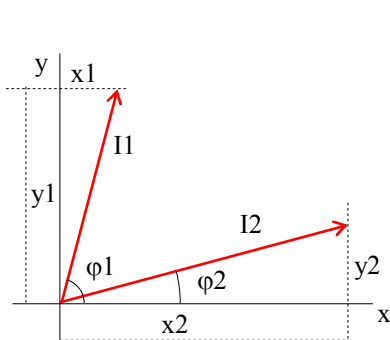
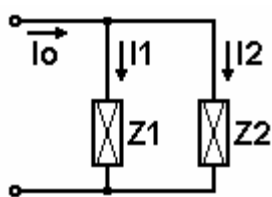
Feladat: a Z_1 és Z_2 impedanciákon folyó áramok ismeretében a főág áramának meghatározása: $I_1 = 0,6 \text{ A}$, $\varphi_1 = 75^\circ$ és $I_2 = 0,8 \text{ A}$, $\varphi_2 = 15^\circ$.

csomóponti törvény: $I_1 + I_2 = I_0$

áramok felbontása: $I_{1x} = I_1 \cdot \cos \varphi_1 = 0,6 \cdot \cos 75^\circ = 0,155$

$I_{2x} = I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 0,8 \cdot \cos 15^\circ = 0,772$

Σx : $x_1 + x_2 = 0,155 + 0,772 = 0,927$



áramok felbontása: $I_{1y} = I_1 \cdot \sin \varphi_1 = 0,6 \cdot \sin 75^\circ = 0,579$

$I_{2y} = I_2 \cdot \sin \varphi_2 = 0,8 \cdot \sin 15^\circ = 0,207$

Σy : $y_1 + y_2 = 0,579 + 0,207 = 0,786$

az I_0 áram értéke: $\sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} = \sqrt{(0,927^2 + 0,786^2)} = 1,215 \text{ A}$

az I_0 áram fázisszöge: $\varphi_0 = \arcsin(\Sigma y / I_0) = \arcsin(0,786 / 1,215) = 40,3^\circ$

Huroktörvény váltakozó áramú értelmezése

Kirchoff II. törvényét szintén vektorosan kell értelmezni. Egy hurok ismeretlen feszültségének és fázisszögének meghatározása a csomóponti törvénynél bemutatott módon történik. A huroktörvény felírása után képezni kell az egyes feszültségek x és y irányú összetevőit, majd ezekből a kérdéses feszültséget és fázisszöget meghatározni.

Sorosan kapcsolt impedanciák számítása

Soros impedanciák eredője szintén x és y irányú összetevőkre bontással, majd ezekből az eredő abszolút értéke és fázisszöge határozható meg.

Feladat: mekkora a Z_1 , Z_2 és Z_3 impedanciák eredője:

$$Z_1 = 15 \, \Omega \quad \varphi_1 = 15^\circ$$

$$Z_2 = 20 \, \Omega \quad \varphi_2 = -75^\circ$$

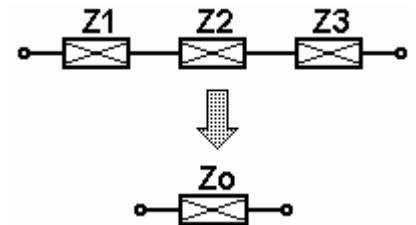
$$Z_3 = 25 \, \Omega \quad \varphi_3 = -15^\circ$$

$$\Sigma x = Z_1 \cdot \cos \varphi_1 + Z_2 \cdot \cos \varphi_2 + Z_3 \cdot \cos \varphi_3 = 43,8$$

$$\Sigma y = Z_1 \cdot \sin \varphi_1 + Z_2 \cdot \sin \varphi_2 + Z_3 \cdot \sin \varphi_3 = -21,9$$

$$Z_o = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} = 48,98 \, \Omega$$

$$\varphi_o = \arcsin(\Sigma y / Z_o) = -26,5^\circ$$



Párhuzamosan kapcsolt admittanciák számítása

Párhuzamos admittanciák eredője szintén x és y irányú összetevőkre bontással, majd ezekből az eredő abszolút értéke és fázisszöge határozható meg. Ha a párhuzamos elemek impedanciával vannak megadva, akkor admittanciára kell alakítani. Impedancia - admittancia átalakítás: $Y = 1 / Z$ $\varphi_Y = -\varphi_Z$ és $Z = 1 / Y$ $\varphi_Z = -\varphi_Y$

Feladat: mekkora az Y_1 , Y_2 és Y_3 admittanciák eredője:

$$Y_1 = 12 \, S \quad \varphi_1 = 15^\circ$$

$$Y_2 = 16 \, S \quad \varphi_2 = -75^\circ$$

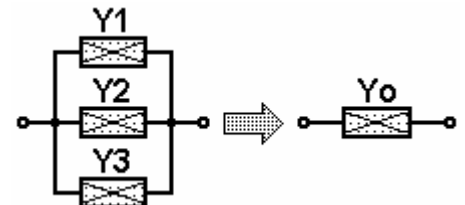
$$Y_3 = 20 \, S \quad \varphi_3 = -15^\circ$$

$$\Sigma x = Y_1 \cdot \cos \varphi_1 + Y_2 \cdot \cos \varphi_2 + Y_3 \cdot \cos \varphi_3 = 35,04$$

$$\Sigma y = Y_1 \cdot \sin \varphi_1 + Y_2 \cdot \sin \varphi_2 + Y_3 \cdot \sin \varphi_3 = -17,52$$

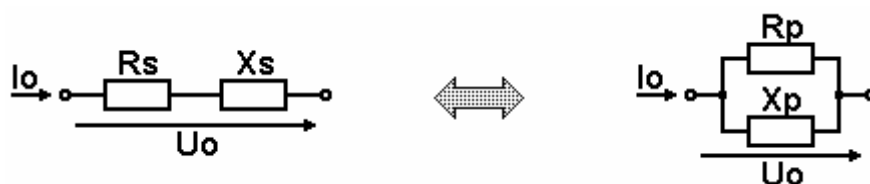
$$Y_o = \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2} = 39,49 \, S$$

$$\varphi_o = \arcsin(\Sigma y / Y_o) = -26,3^\circ$$



Impedanciák ekvivalens átalakítása

Egy impedancia előállítható sorosan vagy párhuzamosan kapcsolt elemekből úgy, hogy mindkét esetben azonos az abszolút érték és a fázisszög. Az impedanciákra kapcsolt azonos U_o feszültség, azonos I_o áramot eredményez, tehát a $Z_s = Z_p = Z$ és a $\varphi_s = \varphi_p = \varphi$.

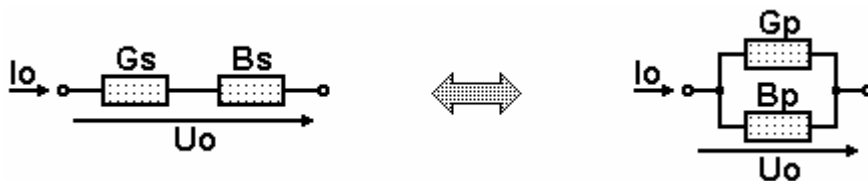


$$Z = \sqrt{R_s^2 + X_s^2} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_s}{R_s} \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{X_p^2}} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R_p}{X_p}$$

$$R_s = Z \cdot \cos \varphi \quad X_s = Z \cdot \sin \varphi \quad R_p = \frac{Z}{\cos \varphi} \quad X_p = \frac{Z}{\sin \varphi}$$

Admittanciák ekvivalens átalakítása

Egy admittancia előállítható sorosan vagy párhuzamosan kapcsolt elemekből úgy, hogy mindkét esetben azonos az abszolút érték és a fázisszög. Az admittancián azonos U_o feszültség, azonos I_o áramot eredményez, tehát a $Y_s = Y_p = Y$ és a $\varphi_s = \varphi_p = \varphi$.



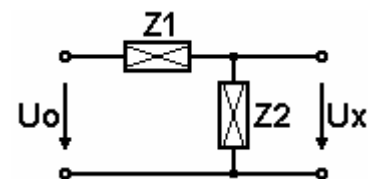
$$\frac{1}{Y} = \sqrt{\frac{1}{G_s^2} + \frac{1}{B_s^2}} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{G_s}{B_s} \quad Y = \sqrt{G_p^2 + B_p^2} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B_p}{G_p}$$

$$G_s = \frac{Y}{\cos \varphi} \quad B_s = \frac{Y}{\sin \varphi} \quad G_p = Y \cdot \cos \varphi \quad B_p = Y \cdot \sin \varphi$$

Az impedancia és admittancia ekvivalensek keresésekor, a szögértékek előjelének meghatározásakor figyelembe kell venni, hogy az induktív X_s és X_p valamint a kapacitív B_s és B_p előjele pozitív, tehát a rajtuk folyó áram 90° -al késik a feszültségükhöz viszonyítva.

Feszültségosztó váltakozó áramú számítása

A feszültségosztót a váltakozó áramú hálózatokban hasonló módon értelmezzük, mint az egyenáramú hálózatoknál. Az eltérés, hogy az osztó nem ellenállásokból, hanem impedanciákból áll. Az ismeretlen feszültségnek az abszolút értékén kívül, annak fázishelyzetét is meg kell határozni. Első lépésben az osztó áramát kell kiszámítani a bemenő feszültségből és a soros impedanciák eredőjének abszolút értékéből. Ez az áram hozza létre az ismeretlen feszültséget a kiválasztott impedancián. A fázisszögeket az Ohm törvénynél leírt módon lehet meghatározni. Az U_x összefüggése csak műveleti sorrendet jelöl, számításra nem alkalmas!



$$U_x = \frac{U_o}{|\Sigma Z|} Z_x$$

Feladat: mekkora a $Z_1 = 50 \, \Omega$, $\varphi_1 = 16,26^\circ$ és $Z_2 = 35 \, \Omega$, $\varphi_2 = 53,13^\circ$ soros impedanciákból álló feszültségosztó U_x feszültsége és annak fázishelyzete, ha a bemenetre $U_o = 24 \, V$, $\varphi_o = -40^\circ$ fázishelyzetű feszültség van kapcsolva?

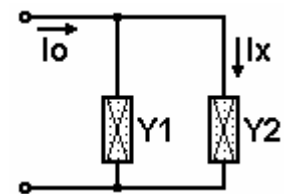
$$Z_{12} = \sqrt{(Z_1 \cos \varphi_1 + Z_2 \cos \varphi_2)^2 + (Z_1 \sin \varphi_1 + Z_2 \sin \varphi_2)^2} = 80,77 \, \Omega \quad \text{és} \quad \varphi_{12} = 31,32^\circ$$

$$I_o = U_o / Z_{12} = 0,297 \, \text{A} \quad \varphi_{I_o} = \varphi_o - \varphi_{12} = -40^\circ - 31,32^\circ = -71,32^\circ$$

$$U_x = I_o Z_2 = 10,395 \, \text{V} \quad \varphi_{U_x} = \varphi_{I_o} + \varphi_2 = -71,32^\circ + 53,13^\circ = -18,19^\circ$$

Áramosztó váltakozó áramú számítása

Az áramosztót a váltakozó áramú hálózatokban hasonló módon értelmezzük, mint az egyenáramú hálózatoknál. Az eltérés, hogy az osztó nem vezetésekből, hanem admittanciákból áll. Az ismeretlen áramnak az abszolút értékén kívül, annak fázishelyzetét is meg kell határozni. Első lépésben az osztó feszültségét kell kiszámítani a bemenő áramból és a párhuzamos admittanciák eredőjének abszolút értékéből. Ez a feszültség hajtja át az ismeretlen áramot a kiválasztott admittancián. A fázisszögeket az Ohm törvénynél leírt módon, figyelembe véve, hogy $\varphi_Y = -\varphi_Z$, lehet meghatározni. Az I_x összefüggése csak műveleti sorrendet jelöl, számításra nem alkalmas!



$$I_x = \frac{I_o}{|\Sigma Y|} Y_x$$

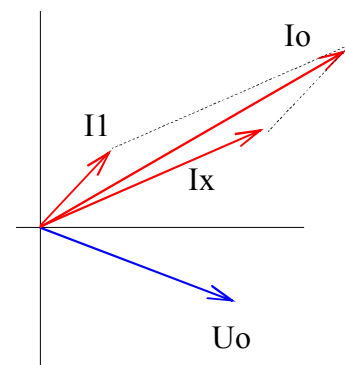
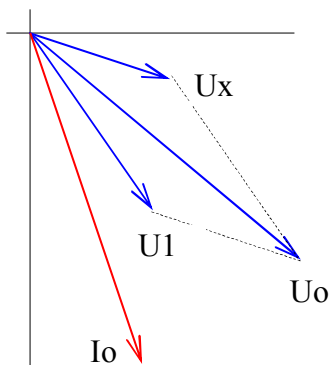
Feladat: mekkora az $Y_1 = 26 \, \text{mS}$, $\varphi_1 = 67,4^\circ$ és $Y_2 = 58 \, \text{mS}$, $\varphi_2 = 43,6^\circ$ párhuzamos admittanciából álló áramosztó I_x árama és annak fázishelyzete, ha a bemeneten $I_o = 1,2 \, \text{A}$, $\varphi_o = 30^\circ$ fázishelyzetű áram folyik?

$$Y_{12} = \sqrt{(Y_1 \cos \varphi_1 + Y_2 \cos \varphi_2)^2 + (Y_1 \sin \varphi_1 + Y_2 \sin \varphi_2)^2} = 82,5 \, \text{mS} \quad \text{és} \quad \varphi_{12} = 50,9^\circ$$

$$U_o = I_o / Y_{12} = 14,5 \, \text{V} \quad \varphi_{U_o} = \varphi_o - \varphi_{12} = 30^\circ - 50,9^\circ = -20,9^\circ$$

$$I_x = U_o Y_2 = 0,84 \, \text{A} \quad \varphi_{I_x} = \varphi_{U_o} + \varphi_2 = -20,9^\circ + 43,6^\circ = 22,7^\circ$$

Feszültségosztó és áramosztó vektorábrái:



Teljesítmény váltakozó áramú számítása

Váltakozó áramú hálózatokban látszólagos, hasznos és meddő teljesítmények határozhatók meg. A látszólagos teljesítmény a fázisszögektől független, a fogyasztóra kapcsolt feszültség és árammérőn látható értékekből számítható ki. A hasznos teljesítmény a feszültség és az áram azon szorzatából képződik, ahol azonos fázisúak. A meddő teljesítmény a feszültség és az áram azon szorzatából képződik, ahol ellenkező fázisúak. A hasznos és meddő tel-

jesítmény a fázisszögtől függ. Ha a fázisszög 0° , akkor csak hasznos, ha 90° , akkor csak meddő teljesítmény képződik.

Feladat: mekkora látszólagos, hasznos és meddő teljesítmény lép fel $Z_1 = 20 \Omega$, $\varphi_1 = 60^\circ$ és $Z_2 = 50 \Omega$, $\varphi_2 = -30^\circ$ párhuzamosan kapcsolt impedanciákon, ha $U_k = 80 \text{ V}$ a közös kapocsfeszültség?

$$I_1 = U_k / Z_1 = 4 \text{ A}$$

$$I_2 = U_k / Z_2 = 1,6 \text{ A}$$

$$S_1 = U_k \cdot I_1 = 320 \text{ VA}$$

$$S_2 = U_k \cdot I_2 = 128 \text{ VA}$$

$$P_1 = S_1 \cdot \cos \varphi_1 = 160 \text{ W}$$

$$P_2 = S_2 \cdot \cos \varphi_2 = 110,8 \text{ W}$$

$$Q_1 = S_1 \sin \varphi_1 = 277,1 \text{ VAr (induktív)}$$

$$Q_2 = S_2 \sin \varphi_2 = -64 \text{ VAr (kapacitív)}$$

$$P = P_1 + P_2 = 270,8 \text{ W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 213,1 \text{ VAr}$$

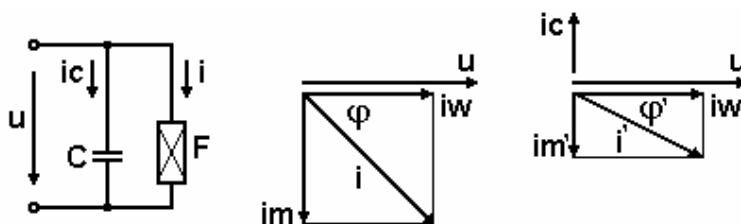
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 344,6 \text{ VA}$$

Ez a megoldás a két párhuzamos impedancián külön-külön határozza meg a három teljesítményt, majd a hasznos és meddő eredőkből a látszólagost. Másik lehetséges megoldás, a két impedancia eredőjén létrejövő teljesítmények meghatározása. Harmadik megoldás az impedanciák párhuzamosra alakítása, az ohmos és a reaktív elemek eredőjét repluszolással lehet meghatározni, de a reaktív összetevőket előjel helyesen ($-X_c$ -t) kell behelyettesíteni. A teljesítmények ezután külön-külön számíthatók.

Fázisjavítás

A váltakozó áramú fogyasztók többsége, a hatásos teljesítmény mellett jelentős induktív meddő teljesítményt is felvesznek. A meddő teljesítmény következtében a hálózatot a hatásos teljesítményhez szükséges áramnál nagyobb áram terheli. Ez az áram az energiaátviteli vezetéken feszültségesést és többletvesztést okoz. A veszteségének csökkentése a fogyasztók meddő teljesítmény igényének részben vagy egészben a felhasználás helyén való előállításával lehetséges, ami egyben a fázisjavítás célja is. Az induktív meddő áramot egy ellentétes irányú, tehát kapacitív meddő árammal, azaz egy megfelelő nagyságú párhuzamos kondenzátorral lehet csökkenteni.

A kondenzátor értékének meghatározásához első lépésben a fogyasztó wattos és meddő áramának értékére van szükség, amelyek a vektorábra alapján:



$$I_w = I \cdot \cos \varphi$$

és

$$I_m = I \cdot \sin \varphi$$

Az adott és a szükséges (') teljesítménytényezők szögértékeinek tangense:

$$\cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi \quad \text{és} \quad \cos \varphi' \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi'$$

A wattos áram a fázisjavítástól függetlenül állandó, tehát:

$$I_w = \frac{I_m}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{I_m'}{\operatorname{tg} \varphi'}$$

Az I_m' kompenzált meddő áram:

$$I_m' = I_m \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi} = I_w \cdot \operatorname{tg} \varphi'$$

A kapacitás árama a meddő és a kompenzált áram különbsége: $I_c = I_m - I_m'$

A szükséges kapacitás:
$$C = \frac{I_c}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U}$$

Feladat: egy $Z = 620 \, \Omega$ és $\varphi = 50^\circ$ impedancia 230 V, 50 Hz-ről működik. Mekkora fázisjavító kondenzátort kell párhuzamosan kapcsolni az impedanciával, hogy a teljesítménytényező $\cos \varphi = 0,8$ legyen.

A fogyasztó áramfelvétele: $I = U / Z = 230 / 620 = 0,37 \, \text{A}$

A fogyasztó wattos árama: $I_w = I \cdot \cos \varphi = 0,37 \cdot \cos 50^\circ = 0,237 \, \text{A}$

A javítandó meddőáram: $I_m = I \cdot \sin \varphi = 0,37 \cdot \sin 50^\circ = 0,283 \, \text{A}$

Az adott és a szükséges teljesítménytényezők tangensei:

$\tan 50^\circ = 1,19$ és $\tan (\cos^{-1}(0,8))' = 0,75$

A kompenzált meddőáram: $I_m' = I_w \cdot \tan \varphi' = 0,237 \cdot 0,75 = 0,177 \, \text{A}$

A fázisjavító kondenzátor árama: $I_c = I_m - I_m' = 0,283 - 0,177 = 0,106 \, \text{A}$

A kondenzátor értéke: $C \cong 1,5 \, \mu\text{F}$

Illesztés értelmezése a váltakozó áramú hálózatban

Az egyenáramú hálózatoknál az illesztés akkor jön létre, ha a terhelő ellenállás értéke azonos a belső ellenállás értékével. Ebben az esetben maximális a teljesítmény átadás az energia leadó és az energia felvevő két pólus között. Váltakozó áramú esetben a generátor valamilyen nagyságú és fázistolású belső impedanciával rendelkezik és ugyanígy a terhelés is valamilyen nagyságú és fázistolású impedancia. A legnagyobb teljesítmény átadás csak akkor lehetséges, ha a fázistolások eredője nulla, azaz csak az ohmos összetevők látszanak a hálózatban. A fázistolások eredője akkor lesz nulla, ha az impedanciák fázisszögei azonos nagyságúak, de ellenkező előjelűek. A váltakozó áramú illesztés tehát akkor jön létre, ha a terhelő impedancia abszolút értéke és fázistolása azonos a belső impedancia abszolút értékével és a fázistolásával, de a fázistolások iránya ellentétes.

Feladat: Egy generátor belső impedanciája: $Z_b = 600 \, \Omega$ és $\varphi_b = 30^\circ$. Mekkora terhelő impedancia veszi fel a maximális teljesítményt a generátorból?

A leírtak alapján: $Z_t = 600 \, \Omega$ és $\varphi_t = -30^\circ$.

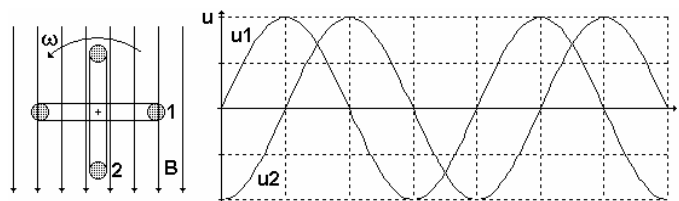
Többfázisú rendszerek

Az egyfázisú váltakozó áramot egy homogén mágneses térben forgatott, csúszógyűrűkre csatlakozó vezető kerettel lehet előállítani. A többfázisú váltakozó áramot több, közös tengelyen forgatott vezető kerettel lehet előállítani. Az egyes keretekben indukált feszültségek közötti fáziseltérés a keretek közötti szögekkel egyezik meg. A vezető keretek gyakorlatilag a szinkron generátor állórész tekercselései vagy transzformátorok szekunder tekercsei. Nem

szimmetrikus a többfázisú rendszer, ha a vezető keretek közötti szögek nem egyenlők. Szimmetrikus a többfázisú rendszer, ha az egyes fázisok feszültségei és a vezető keretek között a szögek is azonosak.

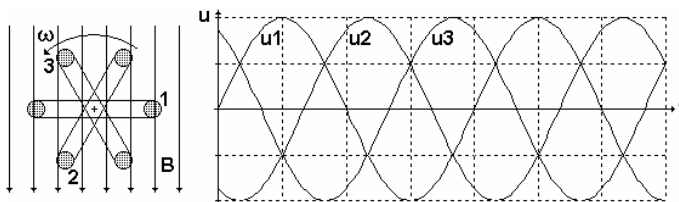
Kétfázisú rendszer

A kétfázisú rendszer nem szimmetrikus mivel az 1 és 2 jelzésű tekercsek között 90° , a 2 és 1 jelzésű tekercsek között 270° a szög. A kétfázisú rendszer gyakorlati alkalmazása: kétfázisú motorok üzemeltetése illetve az egyfázisú motorok indítása.



Háromfázisú rendszer

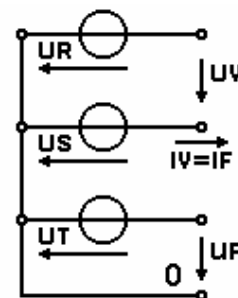
A háromfázisú rendszer szimmetrikus, mivel a tekercsek között $360^\circ / 3 = 120^\circ$ a szög. A háromfázisú rendszer jellegzetessége, hogy az indukált feszültségek vektoros eredője bármely időpillanatban nulla.



A háromfázisú hálózat alkalmazásának jelentős gazdasági és műszaki előnyei vannak a villamosenergia-iparban. A vezető keretek, mint generátorok, működhetnek önállóan vagy valamilyen rendszer szerint összekapcsolva.

Csillag kapcsolás

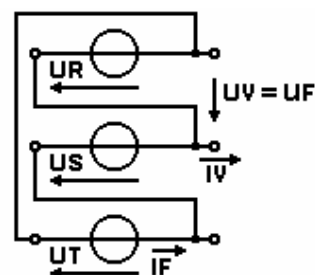
Csillag vagy Y kapcsolás esetén a vezető keretek egyik azonos vége egy csillag vagy nulla pontban közösített, a másik vége a háromfázisú rendszer vonalait hozza létre. A csillagpont kivezetésével ún. négyvezetékes rendszer keletkezik. Az egyes vonalak és a nulla vezető között az U_f fázisfeszültség az egyes vonalak között az U_v vonalfeszültség mérhető. A 120° -os fázis eltérés miatt az $U_v = \sqrt{3} U_f$ (fázis 230V, vonal 400V). Csillagkapcsolás esetén egy vonalon egy generátor árama folyik, tehát $I_v = I_f$.



Delta kapcsolás

Háromszög vagy Δ kapcsolás esetén a keretek kezdetei és végei sorba vannak kapcsolva. A zárt feszültségű hurokban nem jön létre zárlati áram, mivel a fázisfeszültségek vektoros összege minden időpillanatban nulla. A vezető keretek azonos végei hozzák létre a háromve-

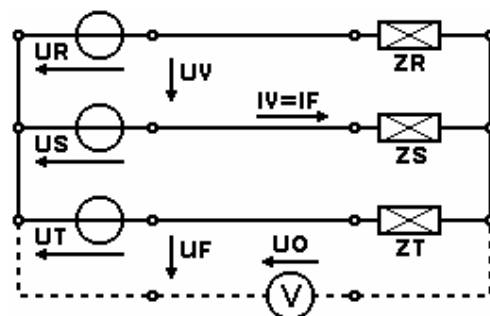
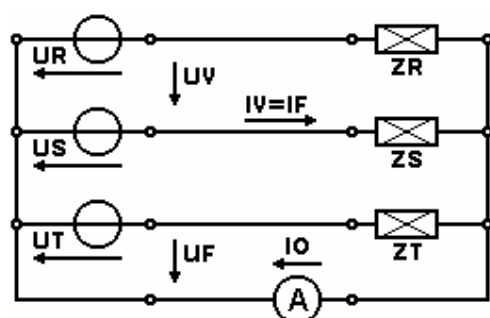
zetékes rendszert. Az egyes vonalak között a fázisok feszültsége mérhető, tehát $U_v = U_f$. A vonalon folyó vonaláram két fázisáram vektoros összege. Ha a terhelés szimmetrikus, akkor $I_v = \sqrt{3} I_f$.



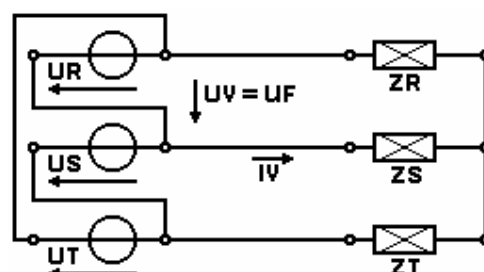
Csillag kapcsolású fogyasztó

Csillag vagy Y kapcsolású terhelés esetén a fogyasztók egyik vége közös, a másik vége a háromfázisú hálózat vonalaira csatlakozik.

Csillagkapcsolású táplálás esetén a 0 vezetőre nézve két lehetőség van. A táp és fogyasztó oldali csillagpontok összekötése esetén a szimmetrikus terhelésen kívül, megengedhető az aszimmetrikus terhelés is. A 0 vezetőn folyó I_0 áram szimmetrikus terheléskor nulla, így elegendő a háromvezetékes táplálás is, aszimmetrikus terheléskor az eltérő vonaláramok vektoros összege. A terhelésre jutó fázisfeszültségek nem függenek a terhelés szimmetriájától. A táp és fogyasztó oldali csillagpontok szakadása esetén kizárólag a szimmetrikus terhelés engedhető meg. A csillagpontok közötti U_0 feszültség, szimmetrikus terheléskor nulla, mert a terhelés oldali csillagpont potenciálja automatikusan beáll a tápoldali csillagpont potenciáljára, aszimmetrikus terheléskor jelentős értéket vehet fel. Ez a fázisfeszültségek rovására fellépő U_0 feszültség eltolódás a terhelés aszimmetriájától függ, szélső esetben túlterhelést okozhat. A csillagpont eltolódási feszültség Millmann vagy szuperpozíció tétellel határozható meg.



Háromszög kapcsolású táplálás esetén a vonalakra kapcsolt fogyasztók azonos feszültsége, csak szimmetrikus terheléskor jöhet létre. Ebben az esetben a fogyasztó egy fázisának feszültsége a vonalfeszültség $\frac{1}{\sqrt{3}}$ -ad részével, a termelői fázisáram a vonaláram $\frac{1}{\sqrt{3}}$ -ad részével, és a fogyasztói fázisáram a vonali árammal egyezik meg.

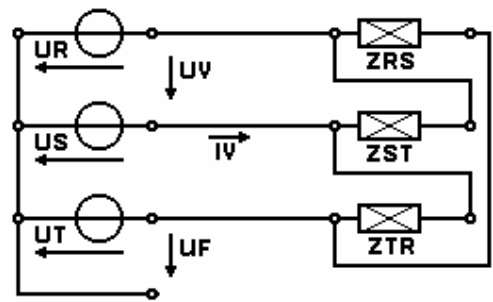


Delta kapcsolású fogyasztó

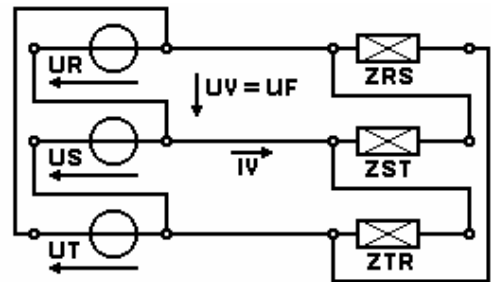
Háromszög vagy Δ kapcsolású terhelés esetén a fogyasztók soros kapcsolása szintén egy

zárt hurkot alkot. A vonalak a fogyasztó egy-egy fázisára kapcsolódnak.

Csillagkapcsolású táplálás esetén a 0 vezető nem használható fel. A terhelés szimmetriájára vonatkozóan nincs kikötés. A fogyasztói fázisfeszültség a vonalfeszültséggel, a termelői fázisáram a vonalárammal és szimmetrikus terhelés esetén a fogyasztói fázisáram a vonali áram $\sqrt{3}$ részével egyezik meg.



Háromszög kapcsolású táplálás esetén a terhelés aszimmetriájára vonatkozóan szintén nincs kikötés. A fogyasztói fázisfeszültség a termelői fázisfeszültséggel, azaz a vonalfeszültséggel azonos. Szimmetrikus terhelés esetén mind a termelői, mind a fogyasztói fázisáram a vonaláram $\sqrt{3}$ része. A gyakorlatban minden kapcsolási mód előfordul (pl. aszinkron motorok csillag - háromszög indítása). Egy kapcsolási mód kiválasztását az adott rendszer üzemeltetési feltételei határozzák meg. Ha egy szimmetrikus háromszög-kapcsolású fogyasztót csillagkapcsolásúra alakítunk, akkor a vonali árama harmadára csökken.



A háromfázisú rendszer teljesítménye

A háromfázisú fogyasztó teljesítményét, három egyfázisú fogyasztó teljesítményeinek összegeként értelmezzük. Ennek megfelelően a teljesítmények:

$$S = U_{Rf} \cdot I_{Rf} + U_{Sf} \cdot I_{Sf} + U_{Tf} \cdot I_{Tf}$$

$$P = U_{Rf} \cdot I_{Rf} \cdot \cos \varphi_R + U_{Sf} \cdot I_{Sf} \cdot \cos \varphi_S + U_{Tf} \cdot I_{Tf} \cdot \cos \varphi_T$$

$$Q = U_{Rf} \cdot I_{Rf} \cdot \sin \varphi_R + U_{Sf} \cdot I_{Sf} \cdot \sin \varphi_S + U_{Tf} \cdot I_{Tf} \cdot \sin \varphi_T$$

Szimmetrikus terheléskor a három fázis teljesítménye azonos, ezért:

$$S = 3 \cdot U_f \cdot I_f$$

$$P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi$$

$$Q = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin \varphi$$

A teljesítmények összefüggései a vonali mennyiségekkel is kifejezhetők, ha figyelembe vesszük, hogy csillagkapcsolásban az $U_f = U_v / \sqrt{3}$ és az $I_f = I_v$, illetve deltakapcsolásban az $U_f = U_v$ és az $I_f = I_v / \sqrt{3}$. A $3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ azonosságot alkalmazva, a háromfázisú rendszer teljesítményei szimmetrikus terhelés esetén:

$$S = \sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v$$

$$P = \sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v \cdot \cos \varphi$$

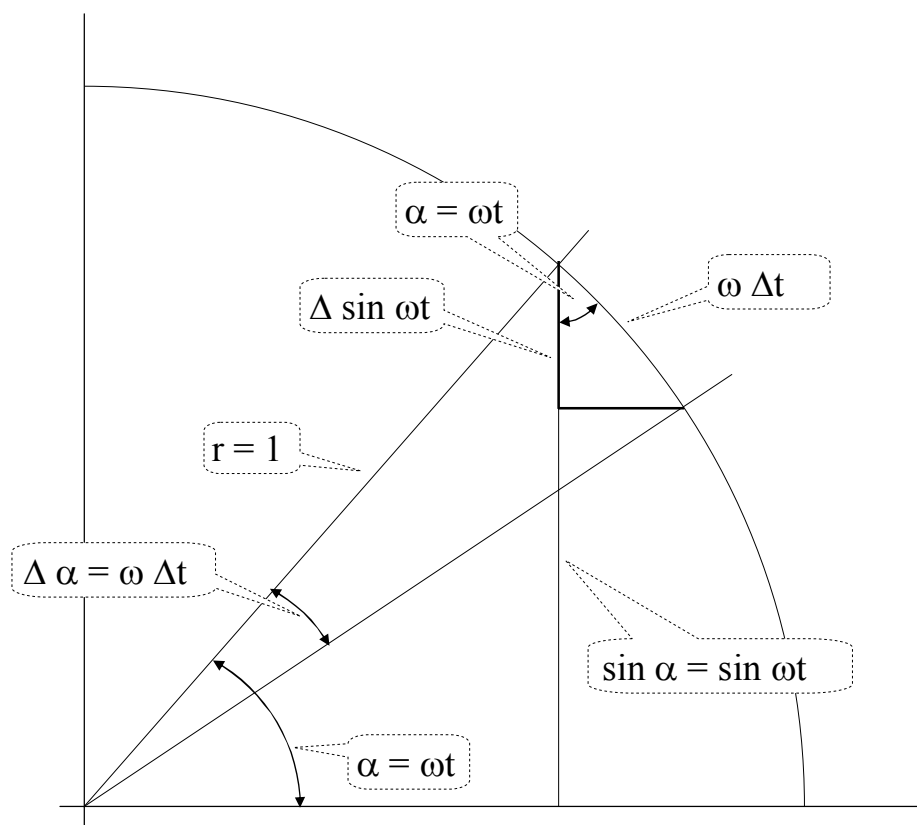
$$Q = \sqrt{3} \cdot U_v \cdot I_v \cdot \sin \varphi$$

Mellékletek

A $\Delta \sin \omega t / \Delta t = \omega \cos \omega t$ bizonyítása

Az ábrán a vízszintes és a függőleges tengely metszéspontjában egy egységsugarú körív van rajzolva. A körívet egy a vízszintes tengellyel α szöget bezáró egyenes metszi el. A

metszéspontból a vízszintes tengelyre merőleges állítunk. Az nyert szakasz hossza az egységnyi sugár miatt: $\sin \alpha$. Ha az α szöget egy nagyon kicsiny értékkel megváltoztatjuk, akkor kapunk egy $\Delta \alpha$ szöget, melynek szára szintén metszi az egységsugarú kört. A keletkezett ív olyan rövid, hogy egyenesnek tekinthető, mivel az α szög változása tart a nullához. Az ív így annak a derékszögű háromszögnek lesz az átfogója, melynek befogói vastagított vonallal vannak ábrázolva. Ebben a



kis háromszögben a felső szög szintén α , mert merőlegesek a szárai a vízszintes tengelyen lévő α szög száraitra. A kis háromszög függőleges befogója a szögváltozás miatt keletkező $\Delta \sin \alpha$. Mivel a szögsebesség a szögforgulás és az idő hányadosa, ezért a szögeket ωt -vel lehet helyettesíteni. Tehát:

$$\alpha = \omega t$$

$$\Delta \alpha = \omega \Delta t \text{ (a szögsebesség állandó az idő a delta)}$$

$$\Delta \sin \alpha = \Delta \sin \omega t$$

Az ív hossza, tehát az átfogó, a kerületi sebesség által Δt idő alatt megtett úttal egyezik meg.

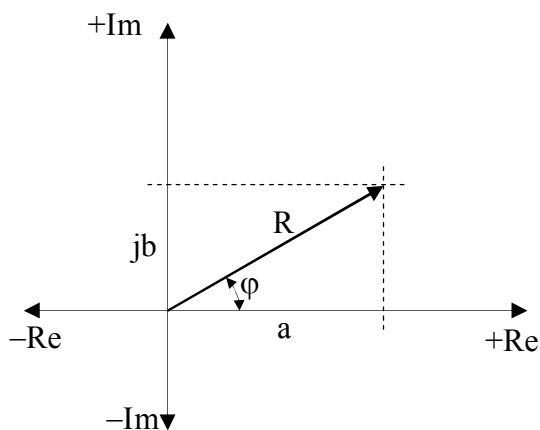
$$\text{sebesség} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$$

$$\text{ív hossz} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \Delta t = \omega \Delta t$$

Ezek alapján a $\Delta \sin \omega t$ -t az $\alpha = \omega t$ szög koszinuszával kifejezve:

$$\frac{\Delta \sin \omega t}{\omega \Delta t} = \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \sin \omega t}{\Delta t} = \omega \cos \omega t$$

A másodfokú egyenlet csak akkor oldható meg, ha a diszkrimináns előjele pozitív. Negatív gyök esetén a Gauss féle számegyenesen a valós számok halmazán nem található olyan szám melyek négyzete negatív számot eredményez. A negatív gyök problémája komplex számok bevezetésével oldható meg. A komplex számok a számegyenesből kilépve az ún. számsíkon helyezkednek el. A számsík végső soron egy olyan koordináta rendszer, melynek az x tengelyén a valós számok, az y tengelyén pedig az x tengellyel azonos léptékű, de a képzetes egységgel jelölt számok helyezkednek el. A képzetes szám egysége a $\sqrt{-1}$, melyet a matematikában i-vel, elektrotechnikában j-vel jelölünk. Egy komplex számot tehát a számsíkon két adat határoz meg, egyrészt az x tengelyre vett merőleges vetülete, másrészt a számegyenessől való képzetes egységben mért távolsága. Az x tengelyt Re(ális), az y tengelyt Im(aginárius) betűk jelölik. Az ábra a számsíkot mutatja be, ahol egy komplex szám valós része "a", képzetes része "jb". Ha ennek a komplex számnak egy Z abszolút értékű és φ fázishelyzetű vektort feleltetünk meg, akkor jól felismerhető a hasonlóság a váltakozó áramú jellemzők, a feszültség, az áram és az impedancia megadásával. A valós számokkal végezhető műveletek, összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás a komplex számokkal is elvégezhetők, a komplex számokra vonatkozó műveleti szabályok betartásával. A komplex számokkal és a vektorokkal végzett műveletek jól megfeleltethetők, azaz a komplex számok összeadása, kivonása, szorzása és osztása grafikusan is elvégezhető.



Komplex számok megadása:

algebrai alak: $Z = a \pm j b$

trigonometrikus alak: $Z = R \cos \varphi \pm j R \sin \varphi = R (\cos \varphi \pm j \sin \varphi)$

abszolút érték: $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

fázisszög tangenssel: $\tan \varphi = \frac{b}{a}$

fázisszög szinusszal: $\sin \varphi = \frac{b}{R}$

fázisszög koszinusszal: $\cos \varphi = \frac{a}{R}$

Műveletek komplex számokkal:

Összeadás: $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Kivonás: $Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Komplex számok összeadását vagy kivonását, a valós és a képzetes részek külön-külön összeadásával illetve kivonásával végezzük el. A matematika szabályai szerint kell az összevonást végrehajtani.

Például:

$$\begin{aligned}(5 + j6) + (3 + j) &= 8 + j7 \\ (5 + j6) - (3 + j) &= 2 + j5 \\ (2 - j3) + (4 - j2) &= 6 - j5 \\ (2 - j3) - (4 - j2) &= -2 - j \\ (-1 - j) + (1 + j) &= 0\end{aligned}$$

Valós számmal szorzás: $c \cdot Z = c \cdot (a + jb) = a \cdot c + jb \cdot c$

Képzetes számmal szorzás: $j c \cdot Z = j c \cdot (a + jb) = -b \cdot c + j a \cdot c$

Komplex számmal szorzás: $Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + j(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

Komplex szám szorzása valós, képzetes vagy komplex számmal, a matematika szabályai szerint, minden tag minden taggal történik. A szorzat valós és képzetes részeit össze kell vonni. Két képzetes szám szorzata negatív valós számot eredményez a $j^2 = -1$ miatt! Tehát $j3 \cdot j2 = -6$ és valós.

Például:

$$\begin{aligned}(5 - j6) \cdot 3 &= 15 - j18 \\ (5 + j6) \cdot j3 &= -18 + j15\end{aligned}$$

Valós számmal osztás: $Z / c = (a + jb) / c = a / c + jb / c$

Képzetes számmal osztás: $Z / jc = (a + jb) / jc = b / c - ja / c$

Komplex szám osztása valós vagy képzetes számmal a matematika szabályai szerint, tagonkénti osztással történik. Két képzetes szám hányadosa valós szám. Tehát $j / j = 1$. Valós és képzetes szám hányadosa negatív képzetes szám! Tehát $2 / j = -j2$. (a törtet j -vel szorozva a számláló képzetes, a nevező és így a tört is a j^2 miatt negatív lesz)

Például:

$$\begin{aligned}(12 + j15) / 3 &= 4 + j5 \\ (12 + j15) / j3 &= 15 - j4\end{aligned}$$

Komplex számmal osztás: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2) \cdot (a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1) \cdot (a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

Komplex szám osztását komplex számmal úgy végezzük el, hogy a nevező konjugált komplexével szorozzuk a számlálót és a nevezőt is, majd a számlálóban a szorzatot összevonás után tagonként osztjuk a valóssá vált nevezővel. Egy komplex szám konjugáltja a képzetes rész előjelének -1 -szerese, tehát $Z_1 = a_1 + jb_1$ konjugáltja: $Z_1^* = a_1 - jb_1$.

Például:

$$\frac{6 + j5}{3 + j4} = \frac{(6 + j5) \cdot (3 - j4)}{(3 + j4) \cdot (3 - j4)} = \frac{38 - j9}{3^2 + 4^2} = \frac{38}{25} - j\frac{9}{25}$$

Mintafeladatok komplex számok alkalmazására

1. A kapcsolásban az $R = 30 \Omega$, $X_{L1} = 20 \Omega$ és $X_{L2} = 40 \Omega$.

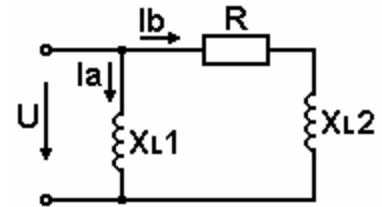
Mekkora a jelölt ágak áramainak abszolút értéke és fázisszöge, ha a feszültség $12V$ és $\varphi_u = 60^\circ$?

$$\bar{u} = U \cdot \cos \varphi_u + jU \cdot \sin \varphi_u = 6 + j10,4 \text{ V}$$

$$\bar{i}_a = \bar{u} / jX_{L1} = 0,52 - j0,3 \text{ A} \quad \varphi_{Ia} = -30^\circ$$

$$Z_b = R + jX_{L2} = 30 + j40 \Omega$$

$$\bar{i}_b = \bar{u} / Z_b = 0,238 + j0,029 \text{ A} \quad \varphi_{Ib} = 6,9^\circ$$



2. A kapcsolásban az $R = 60 \Omega$, $X_{C1} = 45 \Omega$ és $X_{C2} = 30 \Omega$.

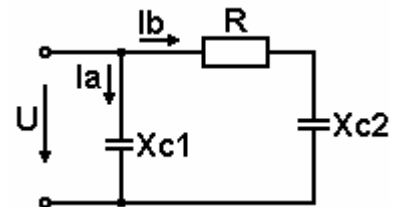
Mekkora a jelölt ágak áramainak abszolút értéke és fázisszöge, ha a feszültség $16V$ és $\varphi_u = -30^\circ$?

$$\bar{u} = U \cdot \cos \varphi_u + jU \cdot \sin \varphi_u = 13,8 - j8 \text{ V}$$

$$\bar{i}_a = \bar{u} / -jX_{C1} = 0,178 + j0,3 \text{ A} \quad \varphi_{Ia} = 60^\circ$$

$$Z_b = R - jX_{C2} = 60 - j45 \Omega$$

$$\bar{i}_b = \bar{u} / Z_b = 0,21 + j0,025 \text{ A} \quad \varphi_{Ib} = 6,8^\circ$$



3. A kapcsolásban $R_1 = 1,5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2,4 \text{ k}\Omega$, $X_C = 3 \text{ k}\Omega$ és $X_L = 1,2 \text{ k}\Omega$. Mekkora a főág áramának abszolút értéke és fázisszöge, ha a feszültség 120 V ?

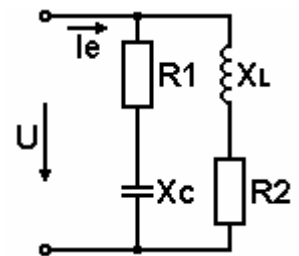
$$Z_1 = R_1 - jX_C = 1,5 - j3 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + jX_L = 2,4 + j1,2 \Omega$$

$$\bar{i}_1 = \bar{u} / Z_1 = 16 + j32 \text{ mA}$$

$$\bar{i}_2 = \bar{u} / Z_2 = 40 - j20 \text{ mA}$$

$$\bar{i}_e = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 = 56 + j12 \text{ mA} \quad \varphi_{Ie} = 12^\circ$$



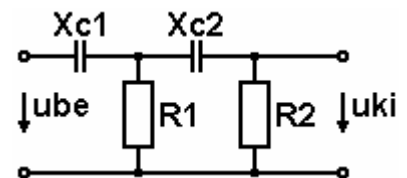
4. A kétlépcsős feszültségosztóban $X_{C1} = X_{C2} = 1 \text{ k}\Omega$ és $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$. Mekkora nagyságú és fázishelyzetű az uki feszültség, ha az u_{be} 1 V és $\varphi_{be} = 0^\circ$?

$$Z_{12} = (R_2 - jX_{C2}) \otimes R_1 = 0,6 - j0,2 \text{ k}\Omega$$

$$\bar{u}_{R1} = u_{be} \cdot Z_{12} / (Z_{12} - jX_{C1}) = 0,333 + j0,333 \text{ V}$$

$$u_{ki} = \bar{u}_{R1} \cdot R_2 / (R_2 - jX_{C2}) = j0,333 \text{ V} \quad \varphi_{uki} = 90^\circ$$

Megj.: a kimenő feszültség $u_{be} / 3$, és 90° -al előbbre mutat!



Mintafeladatok háromfázisú hálózatok számítására

1) Mekkora áram folyik a nulla vezetőn?

Adatok:

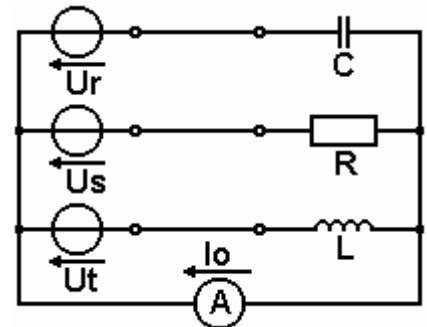
$$U_r = 42 \text{ V} \quad \angle 0^\circ \quad C = 106,1 \text{ } \mu\text{F}$$

$$U_s = 42 \text{ V} \quad \angle 120^\circ \quad R = 50 \text{ } \Omega$$

$$U_t = 42 \text{ V} \quad \angle 240^\circ \quad L = 222,8 \text{ mH}$$

$$\text{A reaktanciák értéke:} \quad X_C = 30 \text{ } \Omega \quad \angle -90^\circ$$

$$X_L = 70 \text{ } \Omega \quad \angle 90^\circ$$



A nulla vezetőn a fázisáramok összege folyik:

$$I_r = U_r / X_C = 42 / 30 = 1,4 \text{ A} \quad \varphi_{I_r} = \varphi_{U_r} - \varphi_{X_C} = 0 - (-90) = 90^\circ$$

$$I_s = U_s / R = 42 / 50 = 0,84 \text{ A} \quad \varphi_{I_s} = \varphi_{U_s} - \varphi_R = 120 - 0 = 120^\circ$$

$$I_t = U_t / X_L = 42 / 70 = 0,6 \text{ A} \quad \varphi_{I_t} = \varphi_{U_t} - \varphi_{X_L} = 240 - (+90) = 150^\circ$$

Az összegzéshez az áramokat wattos és meddő összetevőre kell bontani:

$$I_{rw} = I_r \cdot \cos \varphi_{I_r} = 1,4 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ A} \quad I_{rm} = I_r \cdot \sin \varphi_{I_r} = 1,4 \cdot \sin 90^\circ = 1,4 \text{ A}$$

$$I_{sw} = I_s \cdot \cos \varphi_{I_s} = 0,84 \cdot \cos 120^\circ = -0,42 \text{ A} \quad I_{sm} = I_s \cdot \sin \varphi_{I_s} = 0,84 \cdot \sin 120^\circ = 0,727 \text{ A}$$

$$I_{tw} = I_t \cdot \cos \varphi_{I_t} = 0,6 \cdot \cos 150^\circ = -0,52 \text{ A} \quad I_{tm} = I_t \cdot \sin \varphi_{I_t} = 0,6 \cdot \sin 150^\circ = 0,3 \text{ A}$$

$$\Sigma I_w = -0,94 \text{ A}$$

$$\Sigma I_m = 2,427 \text{ A}$$

A nulla vezetőn az áram:

$$\Sigma I = \sqrt{\Sigma I_w^2 + \Sigma I_m^2} = \sqrt{0,94^2 + 2,427^2} = 2,6 \text{ A}$$

2) Mekkora a fogyasztói oldalon a csillagpont eltolódási feszültség?

Adatok:

$$U_r = 180 \text{ V} \quad \angle 0^\circ \quad Z_r = 125 \text{ } \Omega \quad \angle 60^\circ$$

$$U_s = 180 \text{ V} \quad \angle 120^\circ \quad Z_s = 80 \text{ } \Omega \quad \angle 0^\circ$$

$$U_t = 180 \text{ V} \quad \angle 240^\circ \quad Z_t = 50 \text{ } \Omega \quad \angle -40^\circ$$

A párhuzamos generátorok (Millmann) tétele szerint:

$$U_o = \Sigma I / \Sigma G$$

Az impedanciák átszámítása admittanciákra:

$$Y_r = 1 / Z_r = 1 / 125 = 8,0 \text{ mS} \quad \angle -60^\circ$$

$$Y_s = 1 / Z_s = 1 / 80 = 12,5 \text{ mS} \quad \angle 0^\circ$$

$$Y_t = 1 / Z_t = 1 / 50 = 20 \text{ mS} \quad \angle 40^\circ$$

Az áramgenerátorok forrásáramai:

$$I_r = U_r \cdot Y_r = 180 \cdot 0,008 = 1,44 \text{ A} \quad \varphi_{I_r} = \varphi_{U_r} + \varphi_{Y_r} = 0^\circ - 60^\circ = -60^\circ$$

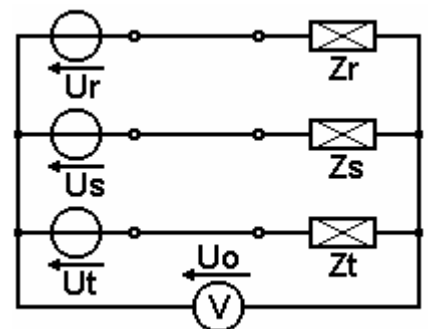
$$I_s = U_s \cdot Y_s = 180 \cdot 0,0125 = 2,25 \text{ A} \quad \varphi_{I_s} = \varphi_{U_s} + \varphi_{Y_s} = 120^\circ + 0^\circ = 120^\circ$$

$$I_t = U_t \cdot Y_t = 180 \cdot 0,02 = 3,6 \text{ A} \quad \varphi_{I_t} = \varphi_{U_t} + \varphi_{Y_t} = 240^\circ + 40^\circ = 280^\circ$$

A forrásáramok eredője:

$$I_{rw} = I_r \cdot \cos \varphi_{I_r} = 1,44 \cdot \cos -60^\circ = 0,72 \text{ A} \quad I_{rm} = I_r \cdot \sin \varphi_{I_r} = 1,44 \cdot \sin -60^\circ = -1,24 \text{ A}$$

$$I_{sw} = I_s \cdot \cos \varphi_{I_s} = 2,25 \cdot \cos 120^\circ = -1,125 \text{ A} \quad I_{sm} = I_s \cdot \sin \varphi_{I_s} = 2,25 \cdot \sin 120^\circ = 1,94 \text{ A}$$



$$I_{tw} = I_t \cdot \cos \varphi_{It} = 3,6 \cdot \cos 280^\circ = 0,625 \text{ A}$$

$$\Sigma I_w = 0,22 \text{ A}$$

Az áramok eredőjének abszolút értéke:

$$\Sigma I = \sqrt{\Sigma I_w^2 + \Sigma I_m^2} = \sqrt{0,22^2 + 2,84^2} = 2,85 \text{ A}$$

Az admittanciák eredője:

$$Y_{rw} = Y_r \cdot \cos \varphi_{Yr} = 4,0 \text{ mS}$$

$$Y_{sw} = Y_s \cdot \cos \varphi_{Ys} = 12,5 \text{ mS}$$

$$Y_{tw} = Y_t \cdot \cos \varphi_{Yt} = 15,3 \text{ mS}$$

$$\Sigma Y_w = 31,8 \text{ mS}$$

$$I_{tm} = I_t \cdot \sin \varphi_{It} = 3,6 \cdot \sin 280^\circ = -3,54 \text{ A}$$

$$\Sigma I_m = -2,84 \text{ A}$$

$$Y_{rm} = Y_r \cdot \sin \varphi_{Yr} = -6,92 \text{ mS}$$

$$Y_{sm} = Y_s \cdot \sin \varphi_{Ys} = 0 \text{ mS}$$

$$Y_{tm} = Y_t \cdot \sin \varphi_{Yt} = 12,85 \text{ mS}$$

$$\Sigma Y_m = 5,93 \text{ mS}$$

Admittanciák eredőjének abszolút értéke:

$$\Sigma Y = \sqrt{\Sigma Y_w^2 + \Sigma Y_m^2} = \sqrt{31,8^2 + 5,93^2} = 32,34 \text{ mS}$$

A párhuzamosan kapcsolt generátorok feszültsége:

$$U_o = \Sigma I / \Sigma G = 2,85 / 0,0323 = 88,2 \text{ V}$$

3) Mekkora a háromszög kapcsolású fogyasztó wattos és meddő teljesítménye?

Adatok:

$$U_r = 230 \text{ V} \quad \angle 0^\circ$$

$$Z_{rs} = 800 \Omega \quad \angle 0^\circ$$

$$U_s = 230 \text{ V} \quad \angle 120^\circ$$

$$Z_{st} = 1000 \Omega \quad \angle -30^\circ$$

$$U_t = 230 \text{ V} \quad \angle 240^\circ$$

$$Z_{tr} = 1200 \Omega \quad \angle 60^\circ$$

A vonalfeszültség a fázisfeszültség $\sqrt{3}$ -szorososa:

$$U_{rs} = U_{st} = U_{tr} = 230 \cdot \sqrt{3} = 398,4 \text{ V}$$

A háromszög kapcsolású fogyasztók áramai:

$$I_{rs} = U_{rs} / Z_{rs} = 398,4 / 800 = 0,498 \text{ A}$$

$$I_{st} = U_{st} / Z_{st} = 398,4 / 1000 = 0,398 \text{ A}$$

$$I_{tr} = U_{tr} / Z_{tr} = 398,4 / 1200 = 0,332 \text{ A}$$

A fellépő wattos teljesítmények:

$$P_{rs} = U_{rs} \cdot I_{rs} \cdot \cos \varphi_{Z_{rs}} = 398,4 \cdot 0,498 \cdot \cos 0^\circ = 198,4 \text{ W}$$

$$P_{st} = U_{st} \cdot I_{st} \cdot \cos \varphi_{Z_{st}} = 398,4 \cdot 0,398 \cdot \cos -30^\circ = 137,3 \text{ W}$$

$$P_{tr} = U_{tr} \cdot I_{tr} \cdot \cos \varphi_{Z_{tr}} = 398,4 \cdot 0,332 \cdot \cos 60^\circ = 66,1 \text{ W}$$

$$\Sigma P = 401,8 \text{ W}$$

A fellépő meddő teljesítmények:

$$Q_{rs} = U_{rs} \cdot I_{rs} \cdot \sin \varphi_{Z_{rs}} = 398,4 \cdot 0,498 \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ VAr}$$

$$Q_{st} = U_{st} \cdot I_{st} \cdot \sin \varphi_{Z_{st}} = 398,4 \cdot 0,398 \cdot \sin -30^\circ = -79,3 \text{ VAr}$$

$$Q_{tr} = U_{tr} \cdot I_{tr} \cdot \sin \varphi_{Z_{tr}} = 398,4 \cdot 0,332 \cdot \sin 60^\circ = 114,5 \text{ VAr}$$

$$\Sigma Q = 35,2 \text{ VAr}$$

