

MATEMATIKAI KOMPETENCIATERÜLET „A”

Matematika
11–12. évfolyam
TANULÓK KÖNYVE

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési Terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült.

Szakmai vezetők
Pála Károly szakmai igazgató
Puskás Aurél fejlesztési igazgatóhelyettes
Rápli Györgyi, a programfejlesztési központ vezetője

Matematika szakmai vezető
Oláh Vera

Szakmai tanácsadók
Csatár Katalin, Árváné Doba Mária

Szakmai lektor
Urbán János

Alkotószerkesztő
Oláh Judit

Felelős szerkesztő
Teszár Edit



© Educatio Társadalmi Szolgáltató Közhasznú Társaság

A kiadvány ingyenes, kizárólag zárt körben, az NFT HEFOP 3.1-es és 2.1.-es intézkedés pályázati komponensében nyertes intézmények körében használható fel.
Kereskedelmi forgalomba nem kerülhet. Másolása, terjesztése szigorúan tilos!

Kiadja az Educatio Társadalmi Szolgáltató Közhasznú Társaság
1134 Budapest, Váci út 37.
A kiadásért felel: Kerekes Gábor ügyvezető igazgató
Nyomdai munkák: Pátria Nyomda Zrt.

TARTALOM

1. modul: Sorozatok (Lövey Éva)	5
2. modul: Gazdasági matematika (Lövey Éva)	57
3. modul: Síkidomok kerülete, területe (Lövey Éva)	75
4. modul: Poliéderek felszíne, térfogata (Vidra Gábor)	105
5. modul: Térfogat és felszínszámítás ₂ (Vidra Gábor).....	127
6. modul: Statisztika és valószínűség (Lövey Éva)	155
Mellékletek	181

A könyvben kidolgozott **MINTAPÉLDÁK** segítenek a tananyag megértésében.

A FELADATOK szintjét a sorszám előtti házikó mutatja:

alapszintű feladatok: 

középszintű feladatok: 

emelt szintű feladatok: 

Ahol nincs ilyen jelzés, azt a példát mindenkinek ajánljuk.

1. MODUL

SOROZATOK

Készítette: Lövey Éva

I. Sorozatok fogalma és megadása

Logikai feladványokban gyakran szerepelnek olyan kérdések, mi lenne egy megkezdett számsor vagy ábrasor 100. tagja. Ilyenkor bizonyos törvényszerűséget kell felfedezni az első néhány tag alapján. Hasonló témával már az általános iskolában is foglalkoztatok, sőt már tanultatok sorozatokról. Idézzük fel ezt!

Keressünk a felsorolt elemek tulajdonságai között szabályszerűséget, és annak megfelelően folytassuk még 5 taggal!

I. -2 1 4 7 10 ...

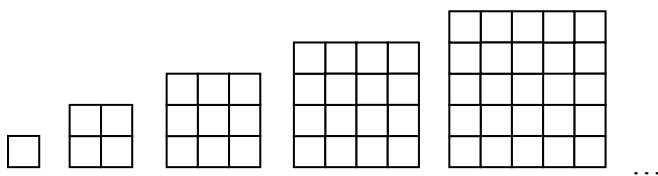
II. ♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ...

III.



IV. C D E F G ...

V.



Bizonyára mindenkinek támadt ötlete, hogyan lehetne ezeket az elemeket folytatni. Matematikailag ezek egyikét sem lehet sorozatnak nevezni, ugyanis ha ezek jól megadott valódi sorozatok lennének, csak egyféleképpen lehetne folytatni őket. Ezeket viszont többféleképpen is lehet:

-2 1 4 7 10 13 16 19 22 25 ... és ettől kezdve minden tag 3-mal nagyobb az előzőnél, vagy

-2 1 4 7 10 10 10 10 10 10 ... és ettől kezdve minden tag 10.

♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ♥ ... és ettől kezdve mindig az első négy tag ismétlődne, vagy

♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ● ● ● ● ... és ettől kezdve minden tag zöld kör.



és ettől kezdve mindig ebben az arányban nőnének a babák.

Vagy akár folytatódhatna így is:



majd ismét növekednek, és újabb 5 baba

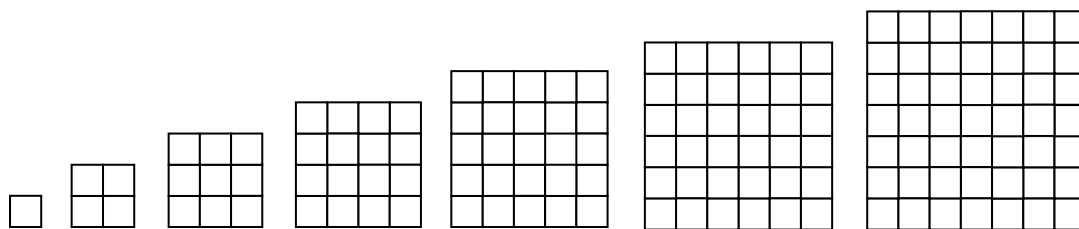
után megint csökken a méretük.

A következő 5 betűben felfedezhetjük a zenei hangok sorát, amit akár folytathatunk így is:

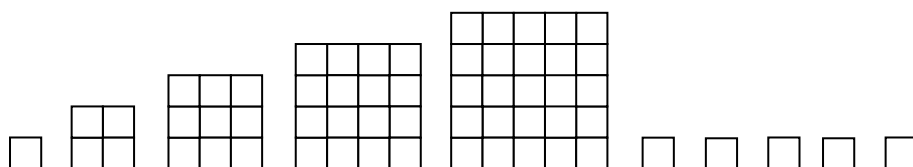
C D E F G A H C D E és így folytatva ez a hét betű ismétlődik a végtelenségig, vagy felfoghatjuk az öt leírt nagybetű egy lehetséges permutációjának, melyet követhet a többi 119 permutáció, majd vége a sorozatnak.

C D E F G C D E G F

A négyzeteket is folytathatnánk több módon, a legkézenfekvőbb, hogy a négyzet oldalai mindig egy egységgel nőnek:



de az is elképzelhető, hogy ettől kezdve csupa egységnégyzettel folytatódnak:



Az I–V. feladatoknál többféleképpen is folytathattuk a hiányzó elemek keresését, ezért kell pontosítanunk a sorozat fogalmát:

egy sorozatot csak akkor tekintünk megadottnak, ha elemei egyértelműen meghatározottak. Ilyen esetekben meg tudjuk azt is mondani, hogy mi lesz a sorozat 15., 100., 1000., ... n -edik tagja.

Azt is mondhatjuk, hogy minden pozitív egész számhoz egyértelműen hozzárendelünk valamit. Valójában tehát függvényről van szó, ami két halmaz közti egyértelmű hozzárendelés. Sorozat esetén a függvény értelmezési tartománya: a pozitív egész számok halmaza, értékészlete pedig: a sorozat tagjai. Amit úgy írunk a függvényeknél, hogy $x \mapsto f(x)$, azt most pl. a II. sorozatnál úgy tekintjük, hogy

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \clubsuit \\ 2 &\rightarrow \heartsuit \\ 3 &\rightarrow \spadesuit \\ 4 &\rightarrow \diamondsuit \\ 5 &\rightarrow \clubsuit \dots \end{aligned}$$

Például a II. sorozat esetében ezt így írjuk: $a_1 = \clubsuit, a_2 = \heartsuit, a_3 = \spadesuit, a_4 = \diamondsuit, a_5 = \clubsuit, \dots$

Összefoglalva tehát:

Sorozatnak nevezünk egy olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékészletének elemei pedig a sorozat **tagjai**. A sorozat n -edik tagját általában a_n jelöli.

Mintapélda₁

Adjuk meg a következő sorozatok első öt, illetve 100. tagját, és vizsgáljuk meg, hogy a megadott szám beletartozik-e a sorozatba!

I. $a_n = n + 5, \quad a = 2007,$

II. $b_n = -6n, \quad b = -770,$

III. $c_n = \frac{5n}{n+3}, \quad c = 20,$

IV. $d_n = a \frac{2}{7}$ tört tizedestört alakjának tizedesvessző utáni n -edik számjegye, $d = 6.$

Megoldás:

I. ha $n = 1,$	a ₁ = 1 + 5 = 6;	ha $n = 4,$	a ₄ = 4 + 5 = 9;
ha $n = 2,$	a ₂ = 2 + 5 = 7;	ha $n = 5,$	a ₅ = 5 + 5 = 10;
ha $n = 3,$	a ₃ = 3 + 5 = 8;	ha $n = 100,$	a ₁₀₀ = 100 + 5 = 105.

Nézzük meg, van-e olyan n pozitív egész szám, amelyre $a_n = n + 5 = 2007$?

$n = 2002$ esetén $a_{2002} = 2007$, azaz 2007 ennek a sorozatnak a 2002. tagja.

- II. ha $n = 1$, $b_1 = -6 \cdot 1 = -6$; ha $n = 4$, $b_4 = -6 \cdot 4 = -24$;
 ha $n = 2$, $b_2 = -6 \cdot 2 = -12$; ha $n = 5$, $b_5 = -6 \cdot 5 = -30$;
 ha $n = 3$, $b_3 = -6 \cdot 3 = -18$; ha $n = 100$, $b_{100} = -6 \cdot 100 = -600$.

Oldjuk meg a $-6n = -770$ egyenletet! $n = \frac{385}{3}$, ami nem pozitív egész szám, tehát

nincs olyan n , hogy $b_n = -770$ legyen, a -770 nem tagja a sorozatnak.

- III. ha $n = 1$, $c_1 = \frac{5 \cdot 1}{1+3} = \frac{5}{4}$; ha $n = 4$, $c_4 = \frac{5 \cdot 4}{4+3} = \frac{20}{7}$;
 ha $n = 2$, $c_2 = \frac{5 \cdot 2}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$; ha $n = 5$, $c_5 = \frac{5 \cdot 5}{5+3} = \frac{25}{8}$;
 ha $n = 3$, $c_3 = \frac{5 \cdot 3}{3+3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; ha $n = 100$, $c_{100} = \frac{5 \cdot 100}{100+3} = \frac{500}{103}$.

Az $\frac{5n}{n+3} = 20$ egyenlet megoldása $n = -4$, ami egész ugyan, de nem pozitív, így a 20 sem tagja a sorozatnak.

- IV. Írjuk fel a $\frac{2}{7}$ törtet tizedestört alakban, azaz végezzük el a $2 : 7$ osztást!

$$\begin{array}{r} 2 : 7 = 0,285714 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \end{array}$$
 Látható, hogy amint újra megjelenik a 2 mint maradék, a hányadosban szereplő számjegyek ismétlődni fognak, ismét 2, 8, 5, 7, 1, 4, majd ismét ez a 6 hosszúságú szakasz következik.

$$\begin{array}{r} 50 \\ 10 \\ 30 \\ 2 \end{array}$$
 Így $d_1 = 2$, $d_2 = 8$, $d_3 = 5$, $d_4 = 7$, $d_5 = 1$.

A századik tag kiszámításához nem kell az előtte levő 99 tagot felírni, elég, ha észrevevessük, hogy minden 6. tag azonos, és a 100. tag ezek szerint ugyanannyi lesz, mint a 4. tag, mivel $100 = 16 \cdot 6 + 4$, így $d_{100} = 7$.

Mivel az osztás eredményében csak az 1, 2, 4, 5, 7, 8 számjegyek ismétlődnek, így a 6 nem tagja a sorozatnak.

Mintapélda₂

Adjuk meg a következő sorozatok első öt, illetve 100. elemét ($n \geq 2$)!

V. $e_1 = -2, e_n = e_{n-1} - 2$

VI. $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Fibonacci-sorozat

Megoldás:

Ennél a két sorozatnál az egyes elemeket az őt megelőző elemek segítségével kell meghatározni.

V. A sorozat minden eleme 2-vel kevesebb az őt megelőző elemnél.

$$e_1 = -2 \qquad e_2 = e_1 - 2 = -2 - 2 = -4 \qquad e_3 = e_2 - 2 = -4 - 2 = -6$$

$$e_4 = e_3 - 2 = -6 - 2 = -8 \qquad e_5 = e_4 - 2 = -8 - 2 = -10.$$

A 100. tag kiszámításához a képlet utasítása szerint ismernünk kellene az előtte levő tagot, az a_{99} -et. Ha nem ügyeskedünk, ez hosszú számolást igényel.

Ha egy sorozat tagjait úgy adjuk meg, hogy az n -edik tag meghatározásához szükség van a sorozat előző tagjaira is, akkor a sorozatot **rekurzív definícióval** adtuk meg.

Példánkban észrevehetjük, hogy a negatív páros számok csökkenő sorozatához jutunk, a sorozat n -edik tagja $e_n = (-2) \cdot n$. Tehát $e_{100} = -200$.

VI. Ez a sorozat a leghíresebb rekurzív sorozat, melyet **Leonardo Pisano** „fedezett fel”.

Leonardo Pisano (1170–1250?), azaz FIBONACCI

Itáliai matematikus; a középkor legnagyobb európai matematikusa. BONACCIO pisai kereskedő fia, innen a Fibonacci (Bonaccio fia) név. Egy észak-afrikai városban nőtt fel, majd kereskedelmi utazásokat tett Egyiptomban, Szíriában, Görögországban és Szicíliában. Röviddel hazatérte után publikálta híres Liber Abaci című művét. A könyv nagymértékben elősegítette az arab algebra és a hindu-arab számírás elterjedését Európában. Nevét őrzi a Fibonacci-sorozat.



A sorozat tagjai közül megadtuk az első két tag értékét, és minden további tagot az öt megelőző két tag összegeként számolhatunk ki.

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2, \quad f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3,$$

$$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5.$$

A sorozat 100. tagját most – hiába töprengünk – csak az előző 99 tag ismeretében tudjuk meghatározni. Ennek a tagnak közelítő értéke: $f_{100} \approx 3,54 \cdot 10^{20}$.

Mintapéllda₃

Megadtuk a következő sorozatokat:

a) 11; 102; 1 003; 10 004; 100 005;...

b) 3; 6; 11; 18; 27;...

Keress képletet vagy rekurzív definíciót, amellyel meghatározható a sorozat n -edik tagja!

Add meg a sorozat 30. tagját is!

Megoldás:

a) $a_n = 10^n + n$ $a_{30} = 10^{30} + 30 = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,030$, ahol az 1-es és a 3-as között 28 darab 0 van.

b) Az egymást követő számok különbsége a páratlan számok részsorozata, tehát

$$b_2 = b_1 + 3, \quad b_3 = b_2 + 5, \quad b_4 = b_3 + 7, \quad b_5 = b_4 + 9, \quad \text{általánosan:}$$

$$b_1 = 3, \quad b_n = b_{n-1} + (2n - 1). \quad \text{Ha valaki ezt a rekurzív definíciót követve akarja}$$

megadni a 30. tagot, annak ki kell számolnia a sorozat összes előbbi tagját is.

Észrevehetjük azonban, hogy

$$b_1 = 1^2 + 2, \quad b_2 = 2^2 + 2, \quad b_3 = 3^2 + 2, \dots, \quad \text{azaz általánosan: } b_n = n^2 + 2. \quad \text{Ezzel az}$$


összefüggéssel könnyedén kiszámítható a sorozat 30. tagja is: $b_{30} = 30^2 + 2 = 902$.

Az utóbbi megadással azt kapjuk, hogy a két egymást követő tag különbsége mindig a páratlan számok növekvő sorozata:


$$b_{n-1} + (2n - 1) = (n - 1)^2 + 2 + (2n - 1) = (n^2 - 2n + 1) + 2 + (2n - 1) = n^2 + 2 = b_n.$$

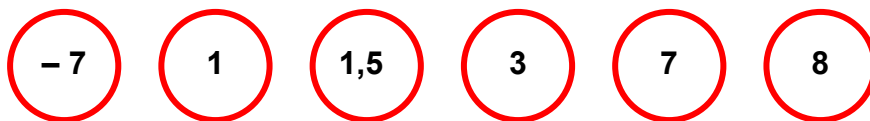
Láttuk, hogy sorozatokat többféle módon is megadhatunk: **képlettel**, **utasítással** vagy **rekurzív definícióval** (azaz „visszavezető” lépésekkel).

Feladatok

 1. Add meg az alábbi sorozatok első 10 elemét:


- a) $a_n = 5n - 4$, $(n \in \mathbb{N}^+)$;
- b) a 7-re végződő pozitív egész számok növekvő sorozata;
- c) $c_n = P(n; -1)$ ahol P a derékszögű koordináta-rendszer egy pontja;
- d) $d_n = n^2 - 2n$, $(n = 1, 2, 3, \dots, 10)$;
- e) a prímszámok növekvő sorozata;
- f) origó középpontú n egység sugarú kör, $(n \in \mathbb{N}^+)$;
- g) $g_n = (-1)^n \cdot n$, $(n \in \mathbb{N}^+)$;
- h) $h_1 = 7$, $h_2 = 8$, $h_n = h_{n-1} - h_{n-2}$, $(n \geq 3 \text{ egész szám})$.

 2. Válaszd ki azokat a sorozatokat, amelyeknek tagjai között a következő számok valamelyike megtalálható:



$$a_n = 2n - 1; \quad b_n = n^2 + 2; \quad c_n = \frac{n+5}{n}; \quad d_n = 1 - n^3;$$

$$e_1 = 12; \quad e_n = \frac{1}{2} \cdot e_{n-1}; \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + 3.$$

 3. Adj meg egy képletet vagy rekurzív definíciót, amellyel ki lehet számítani a sorozat n -edik tagját! Add meg a sorozat 20. tagját is!

- a) 3; 6; 9; 12; 15; ...
- b) 1; -1; -3; -5; -7; ...
- c) 6; 3; 1,5; 0,75; ...
- d) 1; 4; 9; 16; 25; ...
- e) 100; 121; 144; 169; 225; ...
- f) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$



4. Jelöljük a sorozat első n elemének összegét S_n -nel.

Például $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ...

Mit ad meg $S_4 - S_3$, $S_6 - S_5$, illetve általában az $S_n - S_{n-1}$ különbség?

Add meg a sorozat első 5 elemét, ha

a) $S_n = 5n$; b) $S_n = n^2$; c) $S_n = 3$.

II. Sorozatok grafikonja, tulajdonságai

Tudjuk, hogy a sorozatok olyan speciális függvények, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. A függvények tulajdonságaival sokat foglalkoztunk. Ezen tulajdonságok közül néhány a sorozatoknál is érdekes lehet.

Mintapélda₄

Tekintsük a következő sorozatokat, és írjuk fel néhány elemüket!

$$a_n = (-1)^n. \quad a_1 = 1; \quad a_2 = -1; \quad a_3 = 1; \quad a_4 = -1; \dots$$

$$b_n = \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right). \quad b_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad b_2 = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad b_3 = \sin \pi = 0$$

$$b_4 = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad b_5 = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b_6 = \sin 2\pi = 0 \quad b_7 = \sin \frac{7\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots$$

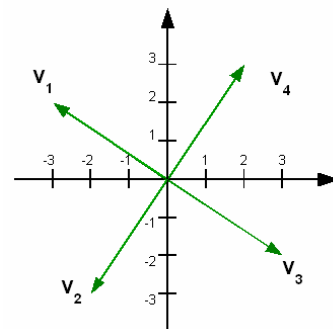
$c_n = a \frac{170}{333}$ tört tizedestört-alakjának n -edik számjegye a tizedesvessző után.

$$\frac{170}{333} = 0,51\dot{0} = 0,510510510\dots, \text{ tehát}$$

$$c_1 = 5; \quad c_2 = 1; \quad c_4 = 5 = c_1; \quad c_5 = 1 = c_2; \quad c_6 = 0 = c_3.$$

$\mathbf{v}_n = a \mathbf{v}(2;3)$ helyvektor elforgatottja az origó körül $n \cdot 90^\circ$ -kal.

$\mathbf{v}_1 (-3;2); \quad \mathbf{v}_2 (-2;-3); \quad \mathbf{v}_3 (3;-2);$
 $\mathbf{v}_4 (2;3)$, és innen újra ismétlődnek a vektorok.



A tárgyalt sorozatok közös tulajdonsága, hogy tagjaik periodikusan ismétlődnek.

Az a_n sorozat periódusa $p = 2$, azaz $a_{n+2} = a_n$.

A b_n sorozat periódusa $p = 6$, azaz $b_{n+6} = b_n$.

A c_n sorozat periódusa $p = 3$, azaz $c_{n+3} = c_n$.

A v_n sorozat periódusa $p = 4$, azaz $v_{n+4} = v_n$.

Periodikusnak nevezzük azt a sorozatot, amelyhez van olyan p pozitív egész szám, hogy a sorozat bármely n -edik elemére $a_{n+p} = a_n$.

Mintapélda₅

Állapítsuk meg a következő sorozatok periódusát:

- a) a_n = húrtrapéz $+90^\circ$ -os elforgatásai az átlók metszéspontja körül.
- b) b_n = az n pozitív egész szám 5-tel való osztási maradékai.
- c) c_n = az n^3 szám utolsó számjegye.
- d) $d_n = 2 \cdot \sin(n \cdot 30^\circ) \cdot \cos(n \cdot 30^\circ)$.

Megoldás:

a) 4 különböző helyzet lehetséges, így $a_{n+4} = a_n$.

b) Írjuk fel a sorozat első néhány elemét: $b_1 = 1$ $b_2 = 2$ $b_3 = 3$ $b_4 = 4$ $b_5 = 0$ $b_6 = 1$...

A sorozat elemei ettől kezdve ismétlődnek, tehát a periódus 5, azaz $b_{n+5} = b_n$. Azt kell belátnunk, hogy $n + 5$ ugyanannyi maradékot ad 5-tel osztva, mint az n . Ez akkor következik be, ha a két szám különbsége osztható 5-tel. És valóban: $(n + 5) - n = 5$.

c) Írjuk fel a sorozat első néhány elemét:

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 8 \quad c_3 = 7 \quad c_4 = 4 \quad c_5 = 5 \quad c_6 = 6 \quad c_7 = 3 \quad c_8 = 2 \quad c_9 = 9 \quad c_{10} = 0 \quad c_{11} = 1 \dots$$

Sejtésünk szerint az ismétlődés most már bekövetkezik. Sejtésünket igazoljuk is, azaz megmutatjuk, hogy a sorozat periódusa 10, azaz minden n esetén $c_{n+10} = c_n$.

Két szám utolsó számjegye akkor és csak akkor egyenlő, ha a két szám különbsége 0-ra végződik, azaz a két szám különbsége osztható 10-zel. Vizsgáljuk meg azt a két számot, melyeknek utolsó számjegye adja a sorozat megfelelő tagjait:

$$(n+10)^3 = n^3 + 30n^2 + 300n + 1000 \quad \text{valamint} \quad n^3.$$

$$\text{A két szám különbsége: } (n+10)^3 - n^3 = n^3 + 30n^2 + 300n + 1000 - n^3 =$$

$$= 30n^2 + 300n + 1000 = 10 \cdot (3n^2 + 30n + 100) \text{ osztható 10-zel, tehát a két szám utolsó számjegye megegyezik, a periódus 10.}$$

d) Abban biztosak lehetünk, hogy a $p = 12$ jó periódus lenne, hiszen a sorozat minden 12. tagjában olyan szögek szerepelnek, melyeknek mindkét szögfüggvénye azonos, hiszen a szögek eltérése 360° . De van-e vajon ennél kisebb lehetséges periódus?

Írjuk fel a sorozat első néhány elemét:

$$d_1 = 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0,8660, \quad d_2 = 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,8660.$$

Itt juthatnánk arra az elhamarkodott következtetésre, hogy a sorozat periódusa 1, azaz $d_{n+1} = d_n$, átrendezve $d_{n+1} - d_n = 0$, de ez csak bizonyos n -ekre lenne igaz.

Ha a sorozat néhány további tagját felírjuk:

$$d_3 = 2 \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos 90^\circ = 0 \quad d_4 = 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = -0,8660$$

$$d_5 = 2 \cdot \sin 150^\circ \cdot \cos 150^\circ = -0,8660 \quad d_6 = 2 \cdot \sin 180^\circ \cdot \cos 180^\circ = 0$$

$$d_7 = 2 \cdot \sin 210^\circ \cdot \cos 210^\circ = 0,8660 \dots, \text{ tehát } d_{n+6} = d_n.$$

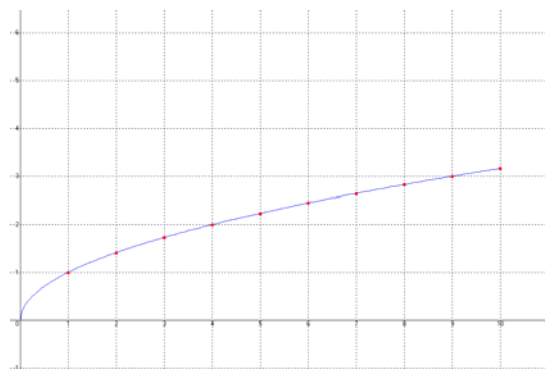
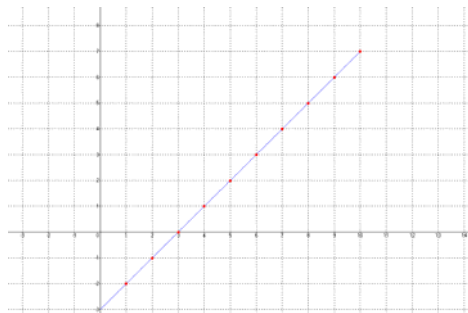
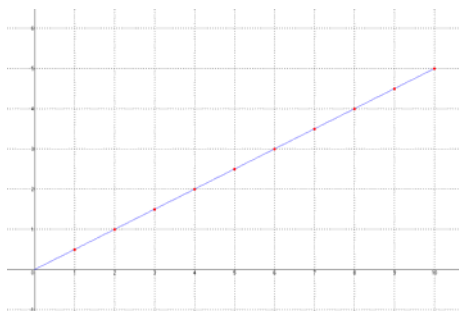
A továbbiakban csak számsorozatokat (röviden: sorozatokat) tekintünk, azaz olyan függvényeket, melyeknek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészletük pedig a valós számok egy részhalmaza. E függvények grafikonjai tehát mindig pontsorozatok.

A most következő sorozat-tulajdonságokat **csak számsorozatokra** értelmezzük.

Az alábbi $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ függvényekről tudjuk, hogy szigorúan monoton növekedők:

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$g(x) = x - 3$$



$$h(x) = \sqrt{x}$$

A c_n sorozat csökkenő, mivel $c_n - c_{n-1} = c_{n-1} \cdot 4 - c_{n-1} = 3 \cdot c_{n-1}$. Ennek előjele attól függ, hogy c_{n-1} pozitív, vagy negatív. Látható, hogy a sorozat minden eleme (köztük a c_{n-1} is) negatív, mivel a második elemtől kezdve mindig egy negatív szám háromszorosát számítjuk ki.

A d_n sorozat se nem csökkenő, se nem növekvő sorozat. Ha valaki mégis megpróbálná bebizonyítani, hogy csökkenő, vagy növekvő, a $d_n - d_{n-1}$ különbséget kellene vizsgálnia. Most próbaként tegyük ezt meg! $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} \cdot (-2) - d_{n-1} = -3 \cdot d_{n-1}$. Ennek előjele d_{n-1} előjelétől függ, az viszont váltakozó.

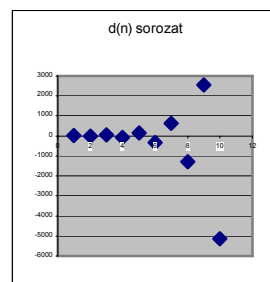
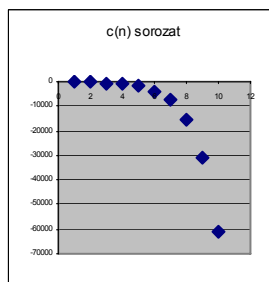
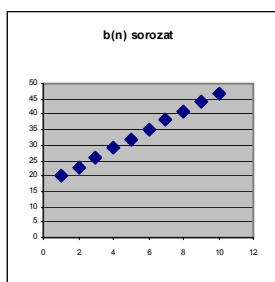
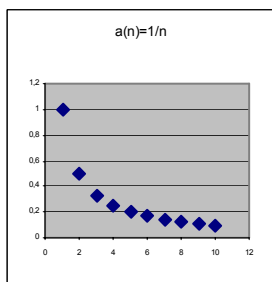
A sorozatok monotonitásának vizsgálatát megkönnyíti, ha ismerjük annak a függvénynek a grafikonját, amelyből a sorozat elemeit képezzük.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$x \mapsto 3x + 17$$

$$x \mapsto -120 \cdot 4^{x-1}$$

$$x \mapsto 10 \cdot (-2)^{x-1}$$



Feladat

5. Írd fel a sorozatok első 10 elemét! Válaszd ki az alábbi sorozatok közül a periodikus sorozatokat. Add meg a periódusukat! Határozd meg a monoton növekvőket és a monoton csökkenőket ($n \in \mathbb{N}^+$)!

$$a_n = 7 - 3 \cdot n;$$

$$e_n = \sin(n \cdot 10^\circ);$$

$$b_n = (-2)^n;$$

$$c_n = \text{az } n^2 \text{ szám utolsó számjegye};$$

$$f_n = \frac{2n}{n+1};$$

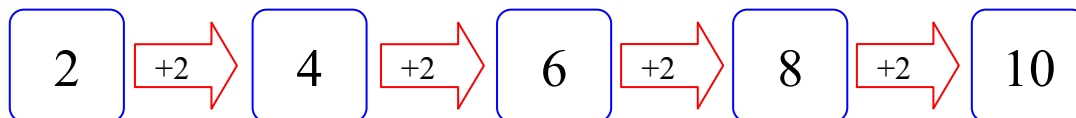
$$d_n = (-5) \cdot 2^n;$$

$$g_n = \text{az } n \text{ szám osztóinak száma}.$$

III. A számtani sorozat

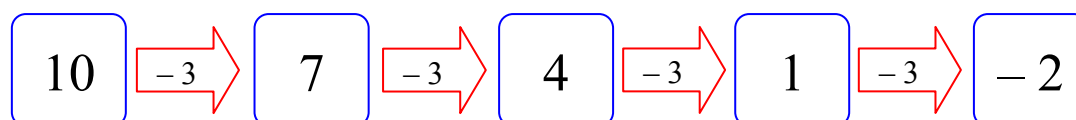
Vizsgáljuk meg, mi a közös az alábbi sorozatokban:

$$a_n = 2n,$$

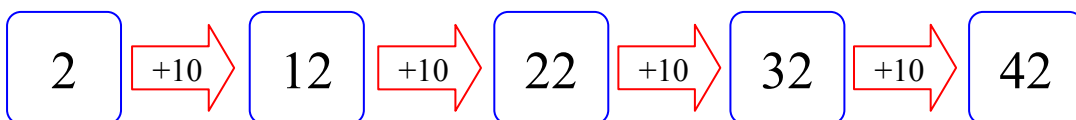


$$b_1 = 10,$$

$$b_n = b_{n-1} - 3,$$



c_n = az n -edik olyan pozitív egész, melynek utolsó számjegye 2.

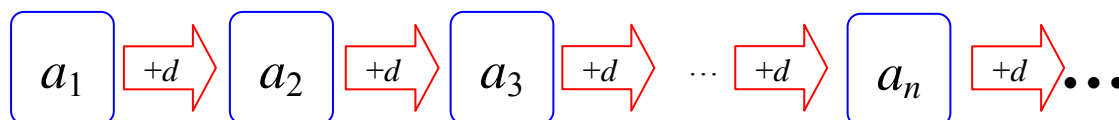


Valamennyi sorozat közös tulajdonsága, hogy az egymás utáni tagokat megkaphatjuk úgy is, ha az előző taghoz mindig ugyanazt a számot adjuk, tehát az egymást követő tagok különbsége (differenciája) állandó. Az ilyen sorozatokat számtani sorozatnak nevezzük.

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot,
amelyben az egymást követő tagok különbsége állandó.
Ezt az állandót **differenciának** (latin: különbség) nevezzük, jele: d .

A számtani sorozatban a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához hozzáadjuk a differenciát. A számtani sorozatot általában úgy adjuk meg, hogy megadjuk az első tagját és a differenciát. Nézzük meg, ennek segítségével hogyan lehet meghatározni a sorozat többi tagját!

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d; \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \dots$$



A sorozat n -edik tagjához úgy jutunk el, hogy a sorozat első tagjához $n - 1$ -szer hozzáadjuk a d -t.

A számtani sorozat n -edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Mintapélda₇

Ismerjük egy számtani sorozat első tagját és differenciáját:

a) $a_1 = -17$, $d = 3$; b) $b_1 = 15$, $d = 0,64$; c) $c_1 = 12,4$, $d = -2$.

Számítsuk ki a számtani sorozatok tizedik, huszadik, századik tagját!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_{10} &= a_1 + (10 - 1) \cdot d = -17 + 9 \cdot 3 = 10; \\ a_{20} &= a_1 + (20 - 1) \cdot d = -17 + 19 \cdot 3 = 40; \\ a_{100} &= a_1 + (100 - 1) \cdot d = -17 + 99 \cdot 3 = 280. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } b_{10} &= b_1 + 9d = 15 + 9 \cdot 0,64 = 20,76; \\ b_{20} &= b_1 + (20 - 1) \cdot d = 15 + 19 \cdot 0,64 = 27,16; \\ b_{100} &= b_1 + (100 - 1) \cdot d = 15 + 99 \cdot 0,64 = 78,36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } c_{10} &= c_1 + 9d = 12,4 + 9 \cdot (-2) = -5,6; \\ c_{20} &= c_1 + (20 - 1) \cdot d = 12,4 + 19 \cdot (-2) = -25,6; \\ c_{100} &= c_1 + (100 - 1) \cdot d = 12,4 + 99 \cdot (-2) = -185,6. \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy a számtani sorozat monoton csökken, ha $d < 0$,
 monoton nő, ha $d > 0$.

Ha a differencia nulla, a sorozat minden tagja azonos.

Az ilyen sorozatot **konstans sorozatnak** nevezzük.

Mintapélda₈

Számítsd ki a sorozat tizedik elemét, ha tudjuk, hogy $a_9 = 14$ és $a_{11} = 29$.

Megoldás:

1. módszer: Alkalmazzuk a számtani sorozat mindkét tagjára az ismert képletet, majd megoldjuk a kapott egyenletrendszert:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, \text{ tehát } \left. \begin{aligned} 14 &= a_1 + 8d \\ 29 &= a_1 + 10d \end{aligned} \right\} \text{ Innen (kivonással): } d = 7,5.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe:

$$14 = a_1 + 8 \cdot 7,5$$

$$a_1 = 14 - 8 \cdot 7,5 = -46.$$

Alkalmazva képletünket a 10. elemre $a_{10} = -46 + 9 \cdot 7,5 = 21,5$.

2. módszer: Tudjuk, hogy $a_{10} = a_9 + d$, átrendezve $a_9 = a_{10} - d$, valamint $a_{11} = a_{10} + d$,

$$\text{tehát } a_9 + a_{11} = a_{10} - d + a_{10} + d = 2a_{10}.$$

$$a_{10} \text{-et megkaphatjuk tehát a } \frac{a_9 + a_{11}}{2} = \frac{14 + 29}{2} = 21,5 \text{ számítás eredményeként.}$$

Az első módszer mindig alkalmazható, ha adott a számtani sorozat két tagja, és meg akarjuk határozni az első tagot és a differenciát.

A második módszerből az derült ki számunkra, hogy a számtani sorozat tizedik eleme a kilencedik és tizenegyedik elem **számtani közepe**. (Innen származik az ilyen tulajdonságú sorozatok „számtani” jelzője.)

Ez általában is érvényes:

Az első tag kivételével a számtani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepe. Képlettel:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ ha } n > k > 0 \text{ egészek.}$$

Feladat



6. Mutasd meg az alábbi sorozatokról, hogy számtani sorozatot alkotnak, és add meg a differenciájukat!

a) $a_n = 5n - 2$;

b) $b_n = 10 - n$;

c) $c_n = n^2 - (n-1)^2$.






7. Néhány számtani sorozat első tagját és differenciáját adtuk meg. Számítsd ki a keresett tagokat!

a) $a_1 = -37$, $d = 3$, $a_8 = ?$ $a_{21} = ?$

b) $b_1 = 5$, $d = \frac{2}{3}$, $b_8 = ?$ $b_{34} = ?$

c) $c_1 = 103,9$, $d = -0,4$, $c_{20} = ?$ $c_{51} = ?$

-  **8.** Egy nagyon erős dohányos szilveszterkor megfogadja, hogy leszokik a dohányzásról. Január elsején még elszívja az addig szokásos két doboz (40 szál) cigarettáját, majd ettől kezdve minden nap 3 szállal csökkenti az adagját.
- Ha tartja magát elhatározásához, sikerül-e a születésnapjáig (január 20-ig) leszoknia a dohányzásról?
-  **9.** Add meg a számtani sorozat jellemzőit (a_1 -et és d -t), ha elemei között fennáll a következő algebrai kapcsolat:
- $$\left. \begin{array}{l} a_{15} - a_9 = 36 \\ a_2 \cdot a_1 = 16 \end{array} \right\}$$
-  **10.** Egy háromszög szögei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Leghosszabb és legrövidebb oldala 4, illetve 2 cm.
- a) Számítsd ki a háromszög területét!
- b) Számítsd ki a háromszög harmadik oldalát!

IV. A számtani sorozat első n tagjának összege

Egy trapéz alakú nézőtéren 20 sor van. Minden sorban kettővel több szék van, mint az előtte levőben. Hány néző fér el a színházban, ha az első sorba tízen ülhetnek le?

A sorokban levő székek száma számtani sorozatot alkot, melynek első tagja 10, differenciája pedig 2. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hányan férnek el a nézőtéren, az

$S_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ összeget kell kiszámítanunk, és ehhez a számtani sorozat mind a 20 tagját meg kell

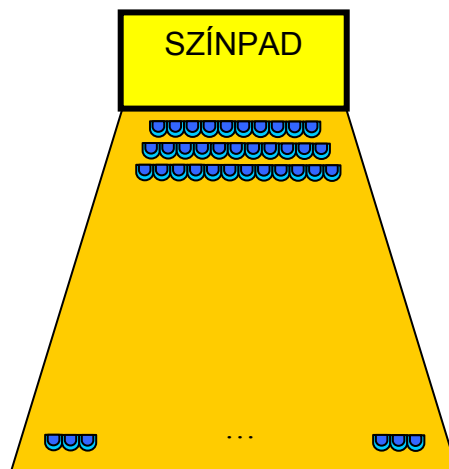
állapítanunk, és azokat összegezni kell. Vajon nincs ennél egyszerűbb módszer?

Egy sorozat tagjainak összegére gyakran van szükségünk. Egy sorozat első n elemének összegén következőt értjük:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. (Az S_n kifejezés S betűje a summa=összeg latin szóból ered.)

Az ilyen típusú összegeket szokás röviden így is írni: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$. (Σ a görög „nagy szigma” betű.)

A számtani sorozat első n elemének összegének meghatározásához Gauss ötletét alkalmazzuk.



Gauss, Karl Friedrich (1777–1855) német matematikus, fizikus és csillagász.

A matematikusok „fejedelme”. Korának legnagyobb matematikusa volt, aki megújította szinte az egész matematikát. A szászországi Braunschweigben született szegény családból. Tehetségét tanítója fedezte fel. A több osztállyal foglalkozó tanító a tizenéveseknek gyakorlásul feladta a számok összeadását 1-től 100-ig. Palatábláján Gauss rögtön megmutatta az eredményt: 5050. A csodálkozó tanítónak elmagyarázta, hogy nem a szokásos módon számolt, hanem az $1+100 = 101$ összeget vette 50-szer.

Két különböző sorrendben adjuk össze a tagokat, először az első, majd az utolsó (n -edik) tagtól kezdve:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Adjuk össze a két sort úgy, hogy az egymás alatt álló tagokat összepárosítsjuk:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_k + a_{n-k}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen összefüggés van az egy zárójelben szereplő tagok között!

$a_2 + a_{n-1}$ felírható $a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$ alakban, de ez igaz lesz minden zárójelben szereplő kifejezésre, hiszen

$$\left. \begin{array}{l} a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \\ a_{n-k} = a_n - (k-1) \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow a_k + a_{n-k} = a_1 + (k-1) \cdot d + a_n - (k-1) \cdot d = a_1 + a_n.$$

Így egyenletünk jobb oldalán minden zárójelben levő kifejezés helyettesíthető $a_1 + a_n$ -nel,

tehát $2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$, tehát $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Gyakran előfordul, hogy a számtani sorozatot első elemével és a differenciával adják meg, így célszerű az $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ kifejezés behelyettesítése után kapott következő képlettel is

megbarátkozni: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$.

Ha egy **számtani sorozat** első tagja a_1 , n -edik tagja a_n és differenciája d , akkor a sorozat **első n elemének összegét** a következő képlettel tudjuk kiszámítani:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n.$$

Oldjuk most meg a fejezet elején felvetett problémát!

Mintapélda₉

Egy trapéz alakú nézőtéren 20 sor van. Minden sorban kettővel több szék van, mint az előtte levőben. Hány néző fér el a színházban, ha az első sorba tízen ülhetnek le?

Megoldás:

$$a_1 = 10, d = 2. \text{ Képletünket alkalmazva } S_{20} = \frac{2 \cdot 10 + (20-1) \cdot 2}{2} \cdot 20 = 580.$$

Mintapélda₁₀

Hány sor van abban a kör alakú arénában, amelyről tudjuk, hogy az első sorban 100 ülőhely van, majd minden sorban 4-gyel több a helyek száma, mint az egyvel alacsonyabban levő sorban? Az egész arénában 3700 néző fér el.



Megoldás:

Jelöljük a sorok számát n -nel! Az egyes sorokban levő ülőhelyek száma számtani sorozatot alkot, melynek differenciája 4.

Ismerjük még a számtani sorozat első tagját: $a_1 = 100$, valamint az első n elem összegét: $S_n = 3700$. Ha az ismert adatokat beírjuk képletünkbe, egyetlen ismeretlenünk marad, az n .

$$3700 = \frac{2 \cdot 100 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n \quad / \cdot 2$$

$$7400 = [200 + (n-1) \cdot 4] \cdot n$$

Rendezés után a $0 = n^2 + 49n - 1850$ másodfokú egyenlethez jutunk.

A megoldóképletet alkalmazva:

$$n_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot (-1850)}}{2} = \frac{-49 \pm 99}{2} \Rightarrow n_1 = -74; n_2 = 25.$$

A negatív eredmény nem jöhet szóba, így $n = 25$, tehát az arénában 25 sor van.

$$\text{Ellenőrzés: } S_{25} = \frac{2 \cdot 100 + 24 \cdot 4}{2} \cdot 25 = 3700.$$

Mintapélda₁₁

Egy számtani sorozat 113. tagja 23. Mennyi az első 225 tag összege?

Megoldás:

$a_{113} = 23 = a_1 + 112d$. Látható, hogy kevés az adatunk ahhoz, hogy megállapítsuk a számtani sorozat első elemét és differenciáját, ugyanis végtelen sok ilyen számtani sorozat van. Szerencsére az összeg megállapításához nincs szükségünk a fenti adatokra, ugyanis az olyan sorozatokban, melyeknek 113. tagja 23, mind azonos az első 225 tag összege.

Használjuk most az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ képletet az összeg kiszámítására:


$$S_{225} = \frac{a_1 + a_{225}}{2} \cdot 225.$$

Mivel a 113. taghoz képest az első és a 225. tag szimmetrikusan helyezkedik el,


$$\frac{a_1 + a_{225}}{2} = a_{113}. \text{ Így } S_{225} = a_{113} \cdot 225 = 23 \cdot 225 = 5175.$$


Ha egy számtani sorozatnak páratlan sok tagját adjuk össze, mindig megtehetjük, hogy a középső tagot szorozzuk meg a tagok számával.

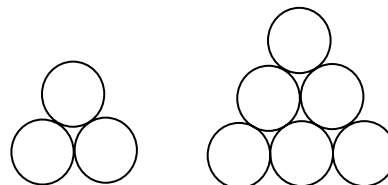
Feladatok


 **11.** Számítsd ki a hiányzó adatokat!

- a) $a_1 = 12$; $d = 2,5$. $S_{12} = ?$
 b) $b_1 = 12$; $d = -1,5$. $S_{10} = ?$
 c) $c_1 = -4,3$; $S_{15} = 9$. $d = ?$
 d) $d = -2,1$; $S_{20} = 1661$. $a_1 = ?$
 e) $d = 0,2$; $S_5 = 57$. $e_1 = ?$
 f) $S_{10} = 13$; $S_{20} = -34$. $f_1 = ?$ $f_{10} = ?$


 **12.** Valaki összeadta az összes olyan – legfeljebb 4 jegyű – pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy a számjegyek összege osztható 9-cel. Mennyi lett ez az összeg?

 **13.** Egyforintosokból az ábrán látható alakzatokat raktuk ki. Hány forint szükséges a 100. ilyen alakzat megformálásához?



 **14.** Egy sorozatot az $a_n = (n + 5)^2 - n^2$ képlettel adtak meg.

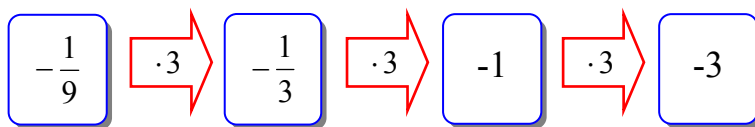
- a) Számítsd ki a sorozat első 10 elemének összegét!
 b) Milyen képlet adja meg a sorozat első n elemének összegét?

 **15.** Nagymama vastag fonalból babakocsiba való lábzsákot köt a kisunokájának. A szabásminta szerint a zsák hátsó része trapéz alakú. Ezt a formát úgy alakította ki, hogy az első sorban 40 szemet kötött, majd minden ötödik sorban 2 szemet szaporított. Az utolsó 5 sorban 80 szemet kötött. Milyen hosszú lesz a lábzsák, ha minden kötőssor 0,5 cm-nek felel meg? Összesen hány szemet kötött, míg elkészült a munkával?

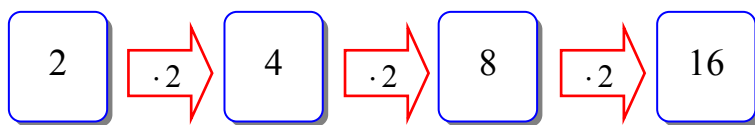
V. A mértani sorozat

Vizsgáljuk meg, mi a közös az alábbi sorozatokban:

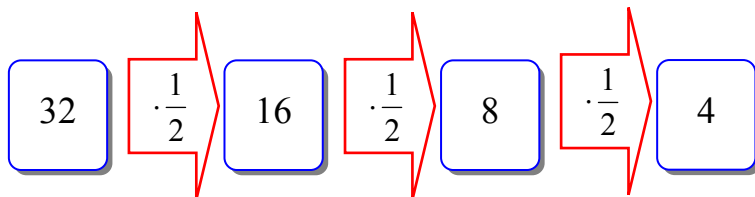
a) $a_1 = -\frac{1}{9}; \quad a_n = a_{n-1} \cdot 3.$



b) $b_n = 2^n.$



c) $c_1 = 32; \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{2}.$



Az a közös a sorozatokban, hogy mind a háromnál úgy kapjuk meg a sorozat tagjait az előzőből, hogy ugyanazzal a számmal megszorozzuk.

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelyben a szomszédos tagok hányadosa – a sorozatra jellemző – nullától különböző állandó. Ezt az állandót **hányadosnak** (kvóciensnek) nevezzük, jele q .

A kvóciens elnevezés a latin *quotiens* = hányados szóból származik, ezért szoktuk q -val jelölni. **A mértani sorozatokban a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagját q -val (a kvócienssel) megszorozzuk.**

Az (a_n) , (b_n) , (c_n) sorozatok tehát mértani sorozatok.

Mintapélda₁₂

Mutassuk meg, hogy az előző három sorozat mindkét definíciónak megfelel!

Megoldás:

Az (a_n) sorozat tagjai úgy keletkeznek, hogy minden tag az őt megelőző 3-szorosa, tehát az egy 3 kvóciensű sorozat.

Ha a (b_n) sorozat bármely tagját 2-vel szorozzuk, a következő tagot kapjuk:

$$b_n \cdot 2 = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} = b_{n+1}.$$

A (c_n) sorozat képletét átrendezve $c_n = \frac{1}{2} \cdot c_{n-1}$, tehát ez egy $q = \frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sorozat.

Látható, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatoknál állandó az egymást követő tagok hányadosa:

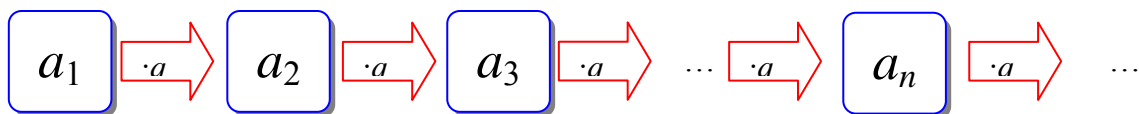
$$a_1 = -\frac{1}{9}, \quad a_n = a_{n-1} \cdot 3, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3;$$

$$b_n = 2^n, \quad b_{n-1} = 2^{n-1}, \quad \frac{b_n}{b_{n-1}} = 2.$$

A harmadik sorozat megadása eleve olyan volt, hogy az egymást követő tagok hányadosa $\frac{1}{2}$ legyen.

A mértani sorozatok esetében gyakran megadjuk az első tagot és a q -t.

Hogyan tudjuk meghatározni a_1 és q ismeretében a sorozat tagjait anélkül, hogy az összes előzőt ki kellene számolnunk?



A sorozat n -edik tagját úgy kapjuk meg, hogy az első tagot $n-1$ -szer megszorozzuk q -val, tehát $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

A mértani sorozat n -edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Mintapélda₁₃

Számítsuk ki a bevezetésben szereplő sorozatok hatodik tagjait!

Megoldás:

$$a_1 = -\frac{1}{9}; \quad q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3; \quad a_6 = \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 3^{6-1} = \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 243 = -27;$$

$$b_1 = 2; \quad q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = 2; \quad b_6 = 2 \cdot 2^{6-1} = 2^6 = 64;$$

$$c_1 = 32; \quad q = \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{2}; \quad c_6 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 32 \cdot \frac{1}{32} = 1.$$

Mintapélda₁₄

Egy mértani sorozat két tagját ismerjük: $a_{20} = 10$, $a_{22} = 1000$. Számítsuk ki a sorozat 21. tagját!

Megoldás:

1. módszer:

Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ egyenlet segítségével állítsunk fel egyenletrendszert a_1 és q

$$\text{kiszámítására: } \left. \begin{array}{l} 10 = a_1 \cdot q^{19} \\ 1000 = a_1 \cdot q^{21} \end{array} \right\}.$$

A két egyenlet megfelelő oldalait elosztjuk egymással (másodikat az elsővel):

$$q^2 = 100 \text{ innen } q_1 = 10 \text{ vagy } q_2 = -10.$$

A két értéket behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$a_1 = \frac{10}{10^{19}} = 10^{-18} \left. \begin{array}{l} q = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 10^{-18} \cdot 10^{20} = 10^2 = 100, \text{ vagy}$$

$$a_1 = \frac{10}{(-10)^{19}} = -10^{-18} \left. \begin{array}{l} q = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{21} = (-10^{-18}) \cdot (-10)^{20} = (-10^{-18}) \cdot 10^{20} = -10^2 = -100.$$

2. módszer:

a_{20} értékét megkaphatjuk úgy, hogy a_{21} -et elosztjuk q -val, vagy a_{19} -et megszorozzuk

$$a_{20} = \frac{a_{21}}{q} \Rightarrow a_{21} = a_{20} \cdot q$$

q -val:

$$a_{20} = a_{19} \cdot q \Rightarrow a_{19} = \frac{a_{20}}{q}$$

$$\text{Tehát } a_{19} \cdot a_{21} = \frac{a_{20}}{q} \cdot (a_{20} \cdot q) = (a_{20})^2.$$

$$\text{Így } (a_{20})^2 = 10 \cdot 1000 = 10000 \Rightarrow a_{20} = -100 \text{ vagy } a_{20} = 100.$$

Az első módszer alkalmazható minden olyan esetben, amikor adott a mértani sorozat két tagja, és meg akarjuk határozni az első tagot és a kvócienszt. A második módszerben kapott összefüggés általánosan is igaz:

Az első tag kivételével a mértani sorozat bármely tagjának négyzete megegyezik a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával, azaz

$$(a_n)^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}.$$


Ha kikötjük, hogy a mértani sorozat összes tagja pozitív, akkor a fenti összefüggésből $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ következik. Kimondhatunk a számtani sorozatban megismerthez hasonló jellegű tételt:

A pozitív tagú mértani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe. Képlettel:

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}} \text{ ha } n > k \text{ és minden } a_i > 0, i \in \mathbb{N}^+.$$

(Ezért nevezik az ilyen tulajdonságú számsorozatokat mértani sorozatnak.)

Feladatok

 **16.** Írd fel a következő mértani sorozatok első 5 elemét! Állapítsd meg a sorozatok monotonitását! Sejtésedet igazold!


a) $a_1 = 100$; $q = 0,5$.

b) $b_1 = -64$; $q = 0,25$.

c) $c_1 = 1,2$; $q = -3$.

d) $d_1 = 72$; $q = 1,5$.

e) $e_1 = -36$; $q = 2$.

 **17.** Számítsd ki a megadott mértani sorozatok hiányzó adatait:


a) $a_1 = -4$; $q = 3$; $a_5 = ?$

b) $b_1 = 4$; $q = -3$; $a_5 = ?$

c) $c_1 = \frac{2}{3}$; $c_4 = \frac{9}{4}$; $q = ?$

d) $d_1 = \frac{2}{3}$; $d_5 = \frac{27}{8}$; $q = ?$

e) $e_1 = 1$; $e_5 = -16$; $q = ?$

 **18.** Adott egy mértani sorozat az első elemével és a kvóciensével. Döntsd el, hogy tagja-e a sorozatnak a t -vel jelölt szám, és ha igen, akkor hányadik tagja ez a sorozatnak?

a) $a_1 = 256$; $q = 0,5$; $t = 16$;

b) $b_1 = 125$; $q = 0,24$; $t = 0,41472$;

c) $c_1 = 1800$; $q = 0,3$; $t = 20000$.

VI. Kamatos kamat

Először ismételjük át a százalékszámításról tanultakat!

Egy A mennyiség p százaléka az adott összeg $\frac{p}{100}$ -ad része, tehát ha ki akarjuk számítani az

A mennyiség p százalékát, meg kell szoroznunk A -t $\frac{p}{100}$ -zal.

Az A mennyiség p %-a: $\frac{p}{100} \cdot A$.

Ha az A mennyiséget p %-kal növeljük, akkor az A -hoz hozzá kell adni az A mennyiség $\frac{p}{100}$ -szorosát:

Az A mennyiség p %-kal növelve: $A + \frac{p}{100} \cdot A = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot A$.

Hasonlóan, ha most p %-kal csökkenteni akarjuk A -t:

Az A mennyiség p %-kal csökkentve: $A - \frac{p}{100} \cdot A = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot A$.

Mintapélda₁₅

A havi kötelező felelősségbiztosítás összege 4942 Ft-ról 5125 Ft-ra változott. Hány százalékkal nőtt a havi díj?

Megoldás:

1. módszer:

Először számítsuk ki, hányszorosa az új díj az eredetinek: $\frac{5125}{4942} \approx 1,037$. Ez 103,7

századrészt, azaz 103,7 százalékot jelent. Tehát a növekedés (100%-ról) 3,7%.

2. módszer:

Azt nézzük meg, hogy a növekedés hányadrésze az eredeti összegnek!

$\frac{5125 - 4942}{4942} = \frac{183}{4942} \approx 0,037$. Ez az eredeti összeg 3,7 századrésze, tehát 3,7%-a.

Mintapélda₁₆

Egy üzlet forgalma az előző hónaphoz képest 7%-kal nőtt. Ebben a hónapban 9846000 Ft volt. Mekkora volt az elmúlt hónapban?

Megoldás:

Jelölje x az eredeti forgalom értékét. Ez 7%-kal növekedett, vagyis

$$x + \frac{7}{100}x = 9846000.$$

$$1,07x = 9846000$$

$$x = \frac{9846000}{1,07} \approx 9201869$$

Tehát az elmúlt hónap forgalma 9201869 Ft volt.

Mintapélda₁₇

Magyarországon a halálozások száma 2005-ben 135732 volt, 2006-ban pedig 131500 (KSH adat). Hány százalékkal csökkent a halálozások száma 2005-ről 2006-ra?

Megoldás:1. módszer:

Először megvizsgáljuk, hányadrésze (hányszorosa) a 2006. évi halálozások száma a

2005. évihez képest: $\frac{131500}{135732} \approx 0,969$, százalékban megadva 96,9%, tehát a csökkenés

3,1%-os.

2. módszer:

Vizsgáljuk meg, hogy a csökkenés hányadrésze (hányszorososa) a 2005. évi adatnak:

$$\frac{135732 - 131500}{135732} \approx 0,031. \text{ Ez 3,1 századrésznek, azaz 3,1%-nak felel meg.}$$

Mintapélda₁₈

A bankba berakott pénzem havonta kamatozik úgy, hogy 0,9%-át minden hónap végén jóváírják a számlámon.

Vizsgáljuk meg, milyen összegek szerepelnek a számlámon hónapról hónapra, ha január 1-jén beteszek 10 000 Ft-ot, és egész évben nem nyúlok a számlámhoz!

Megoldás:

Ha x összeg van a számlán, ez az összeg a 0,9% kamat miatt 1,009-szorosára nő.

2007. január 1.	10000
február 1.	$10000 \cdot 1,009$
március 1.	$10000 \cdot 1,009 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^2$
április 1.	$10000 \cdot 1,009^2 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^3$
május 1.	$10000 \cdot 1,009^3 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^4$
június 1.	$10000 \cdot 1,009^4 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^5$
július 1.	$10000 \cdot 1,009^5 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^6$
augusztus 1.	$10000 \cdot 1,009^6 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^7$
szeptember 1.	$10000 \cdot 1,009^7 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^8$
október 1.	$10000 \cdot 1,009^8 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^9$
november 1.	$10000 \cdot 1,009^9 \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^{10}$
december 1.	$10000 \cdot 1,009^{10} \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^{11}$
2008. január 1.	$10000 \cdot 1,009^{11} \cdot 1,009 = 10000 \cdot 1,009^{12} \approx 10000 \cdot 1,1135 = 11135 \text{ Ft}$

Észrevehetjük, hogy az egymást követő pénzösszegek mértani sorozatot alkotnak.

A 2008. január 1-én felvehető pénzt kiszámíthattuk volna a mértani sorozat n -edik elemének képlete segítségével is:

$$a_1 = 10000; \quad q = 1,009; \quad n = 13; \quad a_{13} = 10000 \cdot 1,009^{12} \approx 11135.$$

Amikor egy bizonyos pénzösszegnek azonos mértékű ismételt kamatát számítjuk ki (vagyis a kamattal növelt összeg kamatát számítjuk), **kamatos kamatról** beszélünk.

Mintapélda₁₉

Egy természetvédelmi területen egy növény egyedszáma úgy változik, hogy évről-évre 4%-kal nő. Ha a körülmények nem változnak, hány év múlva lesz a növények egyedszáma az eredeti szám másfélszerese?

Megoldás:

Legyen a növények eredeti egyedszáma N , ekkor a feladat:

$$a_1 = N; \quad q = 1,04; \quad a_n = 1,5N; \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1,5N = N \cdot 1,04^{n-1} \quad / : N$$

$$1,5 = 1,04^{n-1}$$

Most az ismeretlen a kitevőben szerepel, a megoldást ezért megkapjuk, ha vesszük az egyenlet mindkét oldalának logaritmusát. Ezt megtehetjük, hiszen ha két pozitív mennyiség egyenlő, akkor (és csak akkor) a logaritmusuk is egyenlő. (Az $x \mapsto \log x$ függvény kölcsönösen egyértelmű a pozitív valós számokra.)

$$\lg 1,5 = \lg(1,04)^{n-1}$$

A hatvány logaritmusának azonosságát alkalmazva:





$$\lg 1,5 = (n-1) \cdot \lg 1,04 \quad / : \lg 1,04$$

$$n-1 = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,04} \approx 10,34, \text{ innen}$$

$$n \approx 11,34.$$

A sorozat első tagjának mondtuk az induló egyedszámot, ami igazából a 0. év, így a másfélszeres populációt a 10,34-edik évben éri el a növény. Tehát 10 év elteltével még nem, de 11 év elteltével a populáció egyedszáma már meg is haladja az eredeti másfélszeresét. Észrevehetjük, hogy a feladat megoldása nem függ az eredeti egyedszámtól.

Feladatok

-  **19.** Magyarországon 2005-ben az elveszületések száma 97496 volt, 2006-ban pedig 99850 (KSH adat). Hány százalékkal változott az elveszületések száma 2005-ről 2006-ra?
-  **20.** Egy személygépkocsi árát 5%-kal megemelték, majd ebből az árból egy akció alkalmával 5%-ot elengedtek. Hogyan változott a gépkocsi ára az eredeti árhoz képest?
-  **21.** Egy nagymama unokája születésekor olyan 500000 forintos betétet helyezett el számára a bankban, mely évente 8%-ot kamatozik. Unokája ezt 18 éves korában felveszi, hogy a továbbtanulását anyagilag fedezze. Mekkora összeget tud ekkor felvenni?
-  **22.** Egy ország 2007-ben vállalja, hogy a károsanyag-kibocsátást évi 3%-kal csökkenti. Hány év kell ahhoz, hogy a szennyezés a mostani érték 70%-a legyen?

VII. A mértani sorozat első n tagjának összege

Mintapélda₂₀

A legenda szerint egy indiai király udvari bölcsé volt a sakk feltalálója. Az uralkodó annyira örült az új játéknak, hogy felajánlotta a bölcsnek, kérjen, amit csak akar, megkapja. A bölcs kérése szerénynek látszott:



„Tégy a sakktábla első mezőjére egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább, minden mezőre kétszer annyit, amennyi az előtte lévőn volt. Annyi búzaszem legyen a jutalmam, amennyi ilyen módon a sakktáblán van!”

Számítsuk ki, hány szem búza lett volna a 64. kockán, ha a bölcs „szerény” kérését a király teljesíteni tudja!

Megoldás:

A kérés szerint az elhelyezett búzaszemek száma 2 hányadosú mértani sorozatot alkot, mert első tagja $a_1 = 1$, a másodikat úgy kapjuk meg, hogy az elsőt szorozzuk kettővel, és így tovább:

$$a_2 = 2,$$

$$a_3 = 2 \cdot 2 = 2^2,$$

$$a_4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3,$$

$$\dots a_{64} = 2^{63} \approx 9,22 \cdot 10^{18}.$$

Tehát az utolsó mezőn több mint 9 trillió búzaszemnek kellene elférnie.

A tudós azonban nemcsak a 64. mezőre jutó búzát kérte, hanem a sakktáblára elhelyezett összes búzát. Ki kellene számítanunk a mértani sorozat első 64 tagjának összegét!

A mértani sorozat első n elemének összegének kiszámításakor hasonló „cselt” alkalmazunk, mint a számtani sorozat képletének levezetésekor. Itt is kétszer írjuk fel az összeget, de a második sorban az összeg helyett az összeg q -szorosa szerepel:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\ q \cdot S_n &= a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{aligned}$$

Észrevehetjük ugyanis, hogy a két egymás alatt álló összegben nagyon sok azonos tag van, ezért, ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, a következőt kapjuk:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1),$$

Innen, ha $q \neq 1$, $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Ha $q = 1$, a sorozat minden tagja azonos, konstans sorozat keletkezik, tehát $S_n = n \cdot a_1$.

A mértani sorozat első n elemének összege

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ ha } q \neq 1 \text{ és } S_n = n \cdot a_1, \text{ ha } q = 1.$$

Mintapélda₂₁

Számítsuk ki, hány szem búza járt volna a sakk feltalálójának!

Megoldás:

$$a_1 = 1 \quad q = 2 \quad n = 64$$

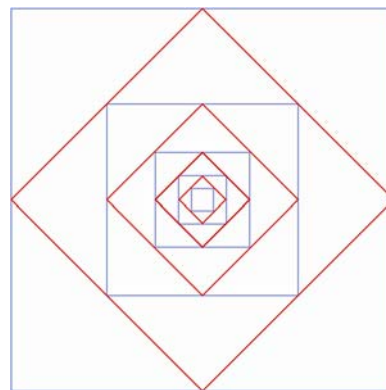
$$\text{Alkalmazzuk a képletet: } S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}.$$

Észrevehetjük, hogy ez az érték az utolsó négyzetre tett búzaszemek kétszerese, azaz a legutolsó mezőn annyi búza van, mint a másik 63 mezőn összesen.

Ha egy szem búza tömegét kb. 0,04 g-nak tekintjük, akkor ez a búzamennyiség $7,36 \cdot 10^{11}$ tonna, és a Földön ennyi búza eddig még összesen nem termett.

Mintapélda₂₂

Kerítésünket olyan 1-szer 1 méteres négyzet alakú elemekből akarjuk elkészíteni, amit betonacél rudakból hegesztünk össze a következő módon: Az 1 méteres oldalú négyzet oldalfelező pontjaiba rudakat hegesztve kisebb négyzetet formálunk, majd eljárásunkat addig folytatjuk, míg az eredetivel együtt már 7 négyzet van a mintánkban.



- a) Mekkora lesz a legkisebb négyzet oldala?
 b) Hány m acélrúd kell egy ilyen kerítéselem elkészítéséhez?

Megoldás:

- a) A legnagyobb négyzet oldala 1 m, a következőé egy $\frac{1}{2}$ oldalú négyzet átlója, tehát

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ami az előző adat (1 m) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -szöröse. Minden kis négyzetoldal az előzőnek ennyiszere, tehát az oldalak hosszai mértani sorozatot alkotnak, melynek kvóciense $\frac{\sqrt{2}}{2}$, első tagja 1, és keressük a hetedik tagot:

$$a_7 = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ m. Tehát a legrövidebb rúd hossza 12,5 cm.}$$

- b) A négyzetek kerületei is mértani sorozatot alkotnak, melynek kvóciense szintén $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\text{hiszen } K = 4a, \quad K' = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (4a) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot K.$$

A mértani sorozat első tagja most $K_1 = 4$, a kvóciens $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de most az első hét tag összegét keressük:

$$S_7 = 4 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^7 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = 4 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2} - 16}{8 \cdot (\sqrt{2} - 2)} = \frac{\sqrt{2} - 16}{2 \cdot (\sqrt{2} - 2)} \approx 12,45.$$

Egy kerítéselem elkészítéséhez tehát körülbelül 12,5 m anyag kell.

Mintapélda₂₃

Egy mértani sorozat első öt tagjának összege -28989 , kvóciense 11 . Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját!

Megoldás:

Alkalmazzuk az összegképletet:

$$-28989 = a_1 \cdot \frac{11^5 - 1}{11 - 1},$$

$$-28989 = a_1 \cdot 16105,$$

$$a_1 = -1,8.$$

Mintapélda₂₄

Egy mértani sorozat első tagja 24 , kvóciense $q = -2,5$. A sorozat első néhány tagját összeadtuk, és azt kaptuk, hogy $S_n = 676,5$. Hány tagotadtunk össze?

Megoldás:

Alkalmazzuk a mértani sorozat első n elemének összegére vonatkozó képletet:

$$676,5 = 24 \cdot \frac{(-2,5)^n - 1}{-2,5 - 1}$$

$$28,1875 = \frac{(-2,5)^n - 1}{-3,5}$$

$$-98,65625 = (-2,5)^n - 1$$

$$-97,65625 = (-2,5)^n$$

Most az ismeretlenünk a kitevőben van. Ilyenkor a logaritmust szoktuk segítségül hívni, de ebben az esetben azt most sajnos nem tehetjük, hiszen negatív számnak nem vehetjük a logaritmusát. Szerencsére az n számot a pozitív egész számok körében keressük, így egy kicsit ügyeskedhetünk:

$$-97,65625 = (-1)^n \cdot 2,5^n.$$

Tudjuk, hogy $[(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n$, és $a > 0$ esetén ez csak akkor lesz negatív, ha az n szám páratlan, tehát a jelen esetben $(-1)^n = -1$.

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát -1 -gyel, és ezután már vehetjük mindkét oldal logaritmusát:

$$97,65625 = 2,5^n$$

$$\lg 97,65625 = n \cdot \lg 2,5$$

$$n = \frac{\lg 97,65625}{\lg 2,5} = 5.$$

Tehát a mértani sorozat első 5 tagját adtuk össze.

Mintapélda₂₅

Számítsuk ki a mértani sorozat kvóciensét, ha tudjuk, hogy az első három tag összege 39,368, és az első tag $a_1 = 3,8$.

Megoldás:

1. módszer:

Tudjuk, hogy $a_2 = 3,8 \cdot q$ és $a_3 = 3,8 \cdot q^2$, tehát a $39,368 = 3,8 + 3,8q + 3,8q^2$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ezt átrendezve és a megoldóképletet alkalmazva:

$$3,8q^2 + 3,8q - 35,568 = 0 \quad / : 3,8$$

$$q^2 + q - 9,36 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 9,36}}{2} = \frac{-1 \pm 6,2}{2} \Rightarrow a \ q_1 = -3,6 \quad \text{és a } q_2 = 2,6$$

megoldásokat kapjuk. És valóban, ha $q = -3,6$; $3,8 + (-13,68) + 49,248 = 39,368$;
és ha $q = 2,6$; $3,8 + 9,88 + 25,688 = 39,368$.

2. módszer:

Alkalmazzuk az összegképletet:

$$39,368 = 3,8 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

$$10,36 = \frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

Ha most beszoroznánk az egyenlet mindkét oldalát $(q - 1)$ -gyel ($q \neq 1$), harmadfokú egyenlethez jutnánk. Ha viszont alkalmazzuk az $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosságot, átalakíthatjuk a törtünk számlálóját, majd egyszerűsíthetünk $(q - 1)$ -gyel:

$$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = \frac{q^3 - 1^3}{q - 1} = \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = q^2 + q + 1. \text{ Tehát egyenletünk így alakul:}$$

$$q^2 + q + 1 = 10,36 \Rightarrow q^2 + q - 9,36 = 0, \text{ ami az előzőekben megoldott egyenlet.}$$

Mintapélda₂₆

Egy mértani sorozat első 6 tagjának összege 49,6496. Ha csak a páratlan sorszámú tagokat adjuk össze, akkor 22,568-t kapunk, azaz $a_1 + a_3 + a_5 = 22,568$.

Mekkora a sorozat első tagja?

Megoldás:

A mértani sorozat páratlanadik tagjai szintén mértani sorozatot alkotnak, hiszen $a_1; a_1q^2; a_1q^4$ olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja $b_1 = a_1$ és kvóciense $q' = q^2$. Írjuk fel mindkét sorozat esetén a megfelelő tagok összegét:

$$49,6496 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

$$22,568 = b_1 \cdot \frac{(q^2)^3 - 1}{q^2 - 1} = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{(q + 1)(q - 1)}.$$

Ha a második egyenlet mindkét oldalát $(q + 1)$ -gyel szorozzuk, az $a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}$ kifejezés

helyére 49,6469-ot helyettesíthetünk:

$$22,568 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{(q - 1)(q + 1)}$$

$$22,568 \cdot (q + 1) = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} \Rightarrow 22,568 \cdot (q + 1) = 49,6496. \text{ Innen}$$

$$q + 1 = 2,2$$

$$q = 1,2.$$

A sorozat első tagjának kiszámításához újra elő kell vennünk valamelyik összegképletet:

$$49,6496 = a_1 \cdot \frac{1,2^6 - 1}{1,2 - 1}$$

$$a_1 = \frac{49,6496 \cdot 0,2}{1,2^6 - 1} = 5$$

A sorozat első tagja tehát 5.

Mintapélda₂₇

Hogyan írható fel a legnagyobb 7-jegyű szám a 3-as számrendszerben? Add meg ennek értékét tízes számrendszerben!

(Ahogy a tízes számrendszerben pl. a 120 szám értéke $120 = 0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$, úgy a hármas számrendszerben a $120_3 = 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 15$.)

Megoldás:

A hármas számrendszerben a legnagyobb számjegy a 2, így a legnagyobb hétjegyű szám

$$\text{a } 2222222_3 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + \dots + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 3^7 - 1 = 2186.$$

Az eredmény nem túl meglepő, hiszen a legnagyobb hétjegyű után a legkisebb nyolcjegyű következik, ami a $10000000_3 = 3^7 = 2187$. A feladat tehát azzal az ötlettel is megoldható, hogy a 3-as számrendszer legkisebb nyolcjegyű számából (3^7) 1-et levonunk.

Feladatok

 **23.** Írd fel tízes számrendszerben a következő 5-ös számrendszerbeli számot: 333333_5 .

(Ahogy a tízes számrendszerben pl. a 769 szám értéke $9 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$, úgy az ötös számrendszerben pl. a $234_5 = 4 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 = 69$.)

 **24.** Számítsd ki a mértani sorozat első n tagjának összegét!

a) $a_1 = 2,7; \quad q = 0,4; \quad n = 9.$

b) $b_1 = 3,2; \quad q = -0,5; \quad n = 10.$


c) $c_1 = -3,2; \quad q = -0,5; \quad n = 10.$

d) $d_1 = -3,2; \quad q = 0,5; \quad n = 10.$

e) $e_1 = 0,36; \quad q = -1; \quad n = 11.$

f) $f_1 = 0,36; \quad q = -1; \quad n = 12.$

g) $g_1 = 0,36; \quad q = 1; \quad n = 12.$

 **25.** Egy mértani sorozat első tagja 12, első három tagjának összege 57.
Írd fel a sorozat első három tagját!

 **26.** Számítsd ki a mértani sorozat első tagját, ha

a) $q = 4;$ $S_6 = -13650;$

b) $q = 0,2;$ $S_7 = -390,62.$

VIII. A mértani sorozat gyakorlati példákban

Mintapélda₂₈

Két üzlet közül az első forgalma január elején 1,5-szer akkora, mint a másodiké. Az első üzlet forgalmát később havi 10%-kal, a másodikét havi 20%-kal sikerül növelni.

- a) Melyik hónapban lesz a második üzlet forgalma legalább akkora, mint az elsőé?
b) Melyik hónapban éri el az addigi forgalom összege a második üzletben az elsőét?

Megoldás:

- a) Mindkét üzlet havi forgalmát mértani sorozatnak tekintjük. Jelölje F a második üzlet eredeti forgalmát, ekkor

$$\text{az első üzlet esetében: } a_1 = 1,5F, \quad q = 1,1 \quad a_n = 1,5F \cdot 1,1^{n-1},$$

$$\text{a második üzlet esetében: } b_1 = F, \quad q = 1,2 \quad b_n = F \cdot 1,2^{n-1}.$$

Azt akarjuk megtudni, milyen n esetén lesz $b_n \geq a_n$.

$$\begin{aligned} F \cdot 1,2^{n-1} &\geq 1,5 \cdot F \cdot 1,1^{n-1} \\ 1,2^{n-1} &\geq 1,5 \cdot 1,1^{n-1} & / : 1,1^{n-1} > 0 \\ \frac{1,2^{n-1}}{1,1^{n-1}} &\geq 1,5 \\ \left(\frac{1,2}{1,1}\right)^{n-1} &\geq 1,5. \end{aligned}$$

Az ismeretlen a kitevőben van, tehát az egyenlőtlenség mindkét oldalának logaritmusát vesszük. Tehetjük ezt, mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő, így ha $a \geq b$, akkor $\lg a \geq \lg b$ is teljesül.

$$\begin{aligned} (n-1)\lg\left(\frac{1,2}{1,1}\right) &\geq \lg 1,5 & / : \lg\left(\frac{1,2}{1,1}\right) > 0 \\ n-1 &\geq 4,66 \\ n &\geq 5,66. \end{aligned}$$

A fenti eredmény azt mutatja, hogy az indulástól számított hatodik hónapban lesz először a második üzlet forgalma nagyobb, mint az elsőé.

- b) Most ismét az előbbi sorozatokkal számolva azt kell megtudnunk, hogy milyen n esetén lesz $s_n \geq S_n$. (S_n -nel az első, s_n -nel pedig a második üzlethez tartozó bevétel

$$\text{összegét jelöltük.) } S_n = 1,5F \cdot \frac{1,1^n - 1}{1,1 - 1}, \quad s_n = F \cdot \frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1},$$

$$1,5F \cdot \frac{1,1^n - 1}{1,1 - 1} \leq F \cdot \frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1}$$

$$1,5 \cdot \frac{1,1^n - 1}{0,1} \leq \frac{1,2^n - 1}{0,2}$$

$$3 \cdot (1,1^n - 1) \leq 1,2^n - 1$$

$$3 \cdot 1,1^n - 3 \leq 1,2^n - 1$$

$$3 \cdot 1,1^n \leq 1,2^n + 2$$

$$3 \cdot 1,1^n - 1,2^n \leq 2.$$

Az ilyen típusú feladatokat algebrai módszerrel általában nem tudjuk megoldani. Mivel most csak pozitív egész számok körében keressük a megoldást, sőt azt is tudjuk, hogy $n \geq 6$, hiszen csak abban a hónapban érte utol a második üzlet forgalma az elsőét, próbálgatással igyekszünk választ adni. Készítsünk táblázatot!

n	6	7	8	9	10
$3 \cdot 1,1^n - 1,2^n$	2,33	2,26	2,13	1,91	1,59

A táblázatból látható, hogy a második üzlet összegzett forgalma az indulástól számított 9. hónapban már meghaladja az elsőét:

$$S_9 = 1,5 \cdot F \cdot \frac{1,1^9 - 1}{1,1 - 1} \approx 20,37F,$$

$$s_9 = F \cdot \frac{1,2^9 - 1}{1,2 - 1} \approx 20,80F.$$

Mintapélda₂₉

Karcsinak édesapja azt ígérte, ha minden évben saját zsebpénzéből 10 könyvet vásárol, pontosan tizedannyi (általa kiválasztott) könyvet vesz neki karácsonyra, mint ahány a polcán sorakozik. Ekkor éppen 200 saját könyve volt. A könyveket nagyon szereti, de a zsebpénze kevés, így évente pontosan 10 könyvet tudott vásárolni.

Hány könyve lesz így 5 év elteltével?

Megoldás:

Ha édesapja tizedannyi könyvet vásárol, mint ahány éppen volt, a könyvek számát azok $\frac{1}{10}$ -ével növeli, tehát a könyvek száma 1,1-szeresére nő.

	Év végén
1.	$(200 + 10) \cdot 1,01 = 200 \cdot 1,1 + 10 \cdot 1,1$
2.	$(200 \cdot 1,1 + 10 \cdot 1,1 + 10) \cdot 1,1 = 200 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1$
3.	$(200 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1 + 10) \cdot 1,1 = 200 \cdot 1,1^3 + 10 \cdot 1,1^3 + 10 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1$
4.	$(200 \cdot 1,1^3 + 10 \cdot 1,1^3 + 10 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1 + 10) \cdot 1,1 = 200 \cdot 1,1^4 + 10 \cdot 1,1^4 + 10 \cdot 1,1^3 + 10 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1$
5.	$(200 \cdot 1,1^4 + 10 \cdot 1,1^4 + 10 \cdot 1,1^3 + 10 \cdot 1,1^2 + 10 \cdot 1,1 + 10) \cdot 1,1 = 200 \cdot 1,1^5 + 10 \cdot 1,1^5 + 10 \cdot 1,1^4 + \dots + 10 \cdot 1,1$

Észrevehetjük, hogy az 5. év végén megjelenő összegben megjelenik a kezdetben meglevő könyvek évi 10%-kal növelt száma, valamint az éves könyvvásárlások számának évenként 1,1-szeresére növelt értéke. Az összeadandó tagok egy mértani sorozatot alkotnak, ahol az első tag $10 \cdot 1,1$, a kvóciens pedig $1,1$. Így az 5. év végén Karcsi könyveinek száma:

$$200 \cdot 1,1^5 + S_5 = 200 \cdot 1,1^5 + 10 \cdot 1,1 \cdot \frac{1,1^5 - 1}{1,1 - 1} = 200 \cdot 1,1^5 + 110 \cdot (1,1^5 - 1) = 310 \cdot 1,1^5 - 110 \approx 389,26.$$

Így 5 év elteltével körülbelül 389 könyve lesz Karcsinak.

Mintapélda₃₀

Egy gazdaságban 4000 nyúl van. A gazdaságnak érvényes szerződése van arra, hogy 4 havonta 5000 nyulat átvesznek tőle. Havonta átlagosan 25%-kal nő a nyulak száma. Ilyen feltételek mellett hány nyúl lesz a gazdaságban 1 év elteltével?

Megoldás:

	A nyulak száma az egyes hónapokban:
1.	$4000 \cdot 1,25$
2.	$4000 \cdot 1,25^2$
3.	$4000 \cdot 1,25^3$
4.	$4000 \cdot 1,25^4 - 5000$
5.	$(4000 \cdot 1,25^4 - 5000) \cdot 1,25 = 4000 \cdot 1,25^5 - 5000 \cdot 1,25$
6.	$(4000 \cdot 1,25^5 - 5000 \cdot 1,25) \cdot 1,25 = 4000 \cdot 1,25^6 - 5000 \cdot 1,25^2$
7.	$(4000 \cdot 1,25^6 - 5000 \cdot 1,25^2) \cdot 1,25 = 4000 \cdot 1,25^7 - 5000 \cdot 1,25^3$
8.	$(4000 \cdot 1,25^7 - 5000 \cdot 1,25^3) \cdot 1,25 - 5000 = 4000 \cdot 1,25^8 - 5000 \cdot 1,25^4 - 5000$
9.	$(4000 \cdot 1,25^8 - 5000 \cdot 1,25^4 - 5000) \cdot 1,25 = 4000 \cdot 1,25^9 - 5000 \cdot 1,25^5 - 5000 \cdot 1,25$

10.	$(4000 \cdot 1,25^9 - 5000 \cdot 1,25^5 - 5000 \cdot 1,25) \cdot 1,25 = 4000 \cdot 1,25^{10} - 5000 \cdot 1,25^6 - 5000 \cdot 1,25^2$
11.	$(4000 \cdot 1,25^{10} - 5000 \cdot 1,25^6 - 5000 \cdot 1,25^2) \cdot 1,25 = 4000 \cdot 1,25^{11} - 5000 \cdot 1,25^7 - 5000 \cdot 1,25^3$
12.	$(4000 \cdot 1,25^{11} - 5000 \cdot 1,25^7 - 5000 \cdot 1,25^3) \cdot 1,25 - 5000 = 4000 \cdot 1,25^{12} - 5000 \cdot 1,25^8 - 5000 \cdot 1,25^4 - 5000$

A 12. hónap végén tehát $4000 \cdot 1,25^{12} - 5000 \cdot 1,25^8 - 5000 \cdot 1,25^4 - 5000$ nyúl van a gazdaságban. Ez a szám egyrészt tartalmazza azt a nyúlszámot, ami akkor adódna, ha nem adtunk volna el egy nyulat sem az év folyamán, másrészt kivonódik belőle az eladott nyulak száma, de nem a $3 \cdot 5000 = 15000$, mert a számítás azt is figyelembe veszi, hogy az eladott nyulak szaporulata is elvész. Ez utóbbi rész – amit kivonunk – egy mértani sorozat összege. A mértani sorozat első tagja $a_1 = 5000$, $q = 1,25^4$.

Az év végén tehát a nyulak száma

$$4000 \cdot 1,25^{12} - S_3 = 4000 \cdot 1,25^{12} - 5000 \cdot \frac{(1,25^4)^3 - 1}{1,25^4 - 1} \approx 58208 - 47009 \approx 11200.$$

Egy év elteltével 11200 nyúl lesz a gazdaságban.

Feladatok



27. Egy gazdaságban 20000 sertést nevelnek. A sertések száma évről évre megháromszorozódik, de két évente (az állomány megújítása érdekében) vásárolnak 4000 sertést. Hány sertésük lesz 10 év múlva, ha évi 41000 sertést a vágóhídra visznek?



28. Egy 200000 fős kisvárosban sokan születnek, de kevesen halnak meg, ennek következtében lakossága 10 év alatt 10%-kal nő. Ha évente 1000 új lakos érkezne a városba, hány fővel nőne a lakosság 10 év alatt?

IX. Számtani és mértani sorozatokat is tartalmazó feladatok

Mintapélda₃₁

Három szám egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első számhoz 3,6-et adunk, egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk, melyek összege 15,6.

Határozzuk meg ezeket a számokat!

Megoldás:

Jelölje a számtani sorozat három egymást követő tagját $a-d$, a , $a+d$. Ha a mértani sorozat három tagjához úgy jutunk, hogy a számtani első tagjához 3,6-et adunk, akkor a számtani sorozat három egymást követő tagjának összegét megkapjuk, ha a mértani sorozat összegéből levonunk 3,6-et.

	1. tag	2. tag	3. tag	Összeg
Számtani	$a-d$	a	$a+d$	12
	$\downarrow +3,6$			$\uparrow -3,6$
Mértani	$a-d+3,6$	a	$a+d$	15,6

Ha tudjuk, hogy a számtani sorozat három egymást követő tagjának összege 12, a középső tagot megkaphatjuk úgy, hogy az összeget osztjuk 3-mal, tehát $a = 4$. Még azt nem használtuk ki, hogy a $a-d+3,6$, a , $a+d$ számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A mértani sorozatról tudjuk, hogy bármely tag négyzete a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával egyenlő, tehát: $(a-d+3,6) \cdot (a+d) = a^2$, ezt 0-ra redukálva a $-d^2 + 3,6d + 14,4 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.

Ennek gyökei $d_1 = 6$ és $d_2 = -2,4$.

A két sorozat tagjai tehát:

Számtani	-2	4	10	VAGY	6,4	4	1,6
Mértani	1,6	4	10		10	4	1,6

Ellenőrzés: Az 1,6; 4; 10 számhármass valóban mértani sorozat egymást követő elemei, hiszen $q = 2,5$ és összegük $1,6 + 4 + 10 = 15,6$.

Hasonlóan, a 10; 4; 1,6 számhármass is mértani sorozatot alkot, ekkor $q = 0,4$.

Összegük ugyanannyi, mint az előbb, hiszen a tagok ugyanazok, csak más sorrendben.

Mintapélda₃₂

Két városban (nevezzük őket **A** és **B** városnak) 2006. január 1-én elhatározzák, hogy a buszbérlet árát hónapról hónapra emelve 2008. január 1-ig felemelik 100 fabatkáról 200 fabatkára. Ezt **A** város úgy valósította meg, hogy havonta azonos %-kal, **B** város pedig úgy, hogy havonta azonos összeggel növelte az árát.

- Hány százalékkal nőtt hónapról hónapra **A** városban a bérlet ára?
- Hány fabatkával nőtt havonta **B** városban a bérlet ára?
- Ha egy polgár minden hónapban vásárol bérletet, melyik városban költ rá többet a 24 hónap alatt?
- Hány százalékkal költ többet bérletre egy **B** városban lakó a második évben, mint az elsőben?

Megoldás:

- a) **A** városban a bérlet havi költsége a mértani sorozat szabályai szerint nő:

$$a_1 \text{ (2006. jan. 1-i állapot)} = 100, \quad a_{25} \text{ (2008. jan. 1-i állapot)} = 200.$$

$$100 \cdot q^{24} = 200$$

$$q^{24} = 2 \quad \Rightarrow \quad q = 2^{\frac{1}{24}} \approx 1,0293,$$

tehát a növekedés havi 2,93%.

- b) **B** városban a bérlet havi költsége a számtani sorozat szabályai szerint nő:

$$b_1 = 100, \quad b_{25} = 200.$$

$$200 = 100 + 24 \cdot d$$

$$24d = 100$$

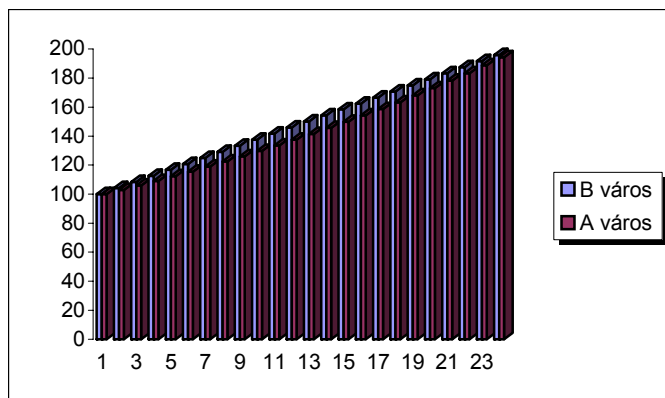
$$d = \frac{25}{6} \approx 4,17$$

Tehát a növekedés körülbelül havi 4,17 fabatka.

- c) Számítsuk ki mindkét sorozat az első 24 tagjának összegét!

$$S_A = 100 \cdot \frac{\left(2^{\frac{1}{24}}\right)^{24} - 1}{2^{\frac{1}{24}} - 1} = 100 \cdot \frac{2 - 1}{2^{\frac{1}{24}} - 1} \approx 3412,71; \quad S_B = \frac{2 \cdot 100 + 23 \cdot \frac{25}{6}}{2} \cdot 24 = 3550.$$

Tehát **B** városban költenek többet bérletre két év alatt. (Grafikonunkon is látszik, hogy a kék oszlopok összmagassága nagyobb.)





- d) A **B** városban lakó az első évben $S_{12} = \frac{2 \cdot 100 + 11 \cdot \frac{25}{6}}{2} \cdot 12 = 1475$ fabatkát, a második évben pedig $3550 - 1475 = 2075$ fabatkát költ bérletre. A növekedés tehát $\frac{2075}{1475} \approx 1,407$ -szeres, tehát 40,7%-kal költ többet a második évben bérletre, mint az elsőben.

Feladatok


 29. Folytasd a sorozatot még 5 taggal úgy, hogy


- I. számtani sorozat legyen!
 - II. mértani sorozat legyen!
- a) 2; 4 ...
 - b) 2; -2 ...
 - c) 6; 3 ...
 - d) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$...
 - e) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$...
 - f) $\sin 90^\circ$; $\sin 270^\circ$; ...


 **30.** Body Béla és Gyúró Gyula elhatározták, hogy a strandszezon előtt formába hozzák magukat. Béla napi 10 fekvőtámasszal kezdte, de elhatározta, hogy naponta 1-gyel növeli a gyakorlatok számát. Gyúró Gyula óvatosabb volt, napi 5 fekvőtámasszal kezdte az első hét minden napján, de elhatározta, hogy hétről hétre megduplázza napi adagját. Mindketten február 1-jén, hétfőn kezdték az önsanyargatást. Február végéig ki csinált meg több fekvőtámasszt? (Történetünk nem szökőévben játszódik.)

 **31.** Egy üzletlánc tagjai feladatuk kapták, hogy forgalmukat hónapról hónapra 2 év, azaz 24 hónap alatt rendszeresen növelve, havi 10 000 000 Ft-ról 15 000 000 Ft-ra növeljék. Ezt az üzletlánc két tagja is teljesítette, de az utasítást másképp értelmezték. Az egyik üzlet havonta ugyanakkora összeggel növelte bevételeit, a másik pedig hónapról hónapra ugyanannyi %-kal.


a) Mennyivel növelte havonta forgalmát az első üzlet?
b) Hány %-kal növelte havonta forgalmát a második üzlet?
c) A két év alatt összesen mekkora forgalmat bonyolított le a két üzlet külön-külön?


 **32.** Egy egyetem két kara is azt az utasítást kapta, hogy az eddig évente felvett tanulók számát 1000-ról 5 év alatt évi 600-ra csökkentsék. Az utasítást az egyik kar úgy hajtotta végre, hogy évente azonos számmal csökkentette a felvehető tanulók számát, a másik pedig úgy, hogy a keretszámot évről évre azonos százalékkal csökkentette. Hány hallgatót vett fel 5 év alatt az egyetem egyik, illetve másik kara?

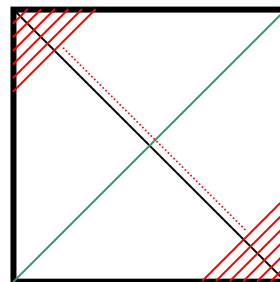
 **33.** Egy henger alakú medencéből minden nap elpárolog a víz 5%-a. Ha a feltöltés után 20 nappal 10 cm magasan áll a víz, milyen magasan állt feltöltéskor?


 **34.** Helyezz el 8 számot a 10 és a 100 közé úgy, hogy a 10 szám egymást kövesse egy

a) számtani sorozatban; b) mértani sorozatban!

 **35.** Számítsd ki a 3 első 7 hatványának a) összegét; b) szorzatát!

-  **36.** Egy 10 cm oldalú négyzet átlóját 20 egyenlő részre osztottuk, és minden osztópontban merőlegeset állítottunk az átlóra. Mekkora a merőlegesek négyzetbe eső részeinek összege?



-  **37.** Három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Szorzatuk 1728. Ha az első számból 6-ot levonunk, egy számtani sorozat három egymást követő tagjához jutunk. Mekkora ennek a számtani sorozatnak a differenciája?

Kislexikon

Sorozat: az a függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Az ilyen függvénynél az értékkészlet elemeit a sorozat **tagjainak** vagy elemeinek nevezzük.

Rekurzív megadás: ha egy sorozat tagjait úgy adjuk meg, hogy az n -edik tag kiszámolásához szükség van a sorozat előző tagjaira is.

Periodikus a sorozat, ha van olyan pozitív egész p szám, hogy a sorozat bármely n -edik elemére igaz, hogy $a_n = a_{n+p}$.

Egy **sorozat monoton nő**, ha minden tagja legalább akkora, mint az előző tag.

$$a_n \geq a_{n-1}.$$

Egy **sorozat monoton csökken**, ha minden tagja legfeljebb akkora, mint az előző tag.

$$a_n \leq a_{n-1}.$$

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelynél a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához – a sorozatra jellemző – állandó számot hozzáadjuk. Ezt az állandót **differentiának** (latin: különbség) nevezzük.

A számtani sorozat n -edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

A számtani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagoknak számtani közepe. Képlettel:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \text{ ha } n > k.$$

Ha egy **számtani sorozat** első tagja a_1 , n -edik tagja pedig a_n , a sorozat **első n elemének összege**:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelynél a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagját – a sorozatra jellemző – állandó, nullától különböző számmal megszorozzuk. Ezt az állandót **hányadosnak** (kvóciensnek) nevezzük.

A mértani sorozat n -edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

A pozitív tagú mértani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe. Képlettel:

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}} \text{ ha } n > k \text{ és minden } a_i > 0.$$

Negatív tagokat is tartalmazó sorozat esetén: $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$.

A mértani sorozat első n elemének összege:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ ha } q \neq 1 \quad \text{és} \quad S_n = n \cdot a_1, \text{ ha } q = 1.$$

Konstans sorozat: ha egy sorozat minden tagja azonos. Számtani sorozat esetén $d = 0$, mértani sorozat esetén $q = 1$.

Kamatos kamat számítása: egy bizonyos mennyiség azonos mértékű ismételt kamatozását úgy számítjuk, hogy a kamattal növelt összeg kamatát számítjuk. Ha a t_0 kiindulási összeg n évig kamatozik, p százalékos kamattal, akkor a kamatokkal felnövekedett összeg értéke:

$$t = t_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

2. MODUL

GAZDASÁGI MATEMATIKA

Készítette: Lövey Éva

I. Betétek

Mintapélda₁

Számítsuk ki, mekkora éves kamatot jelent az, ha a bankba tett 200 000 Ft-ot évi 6%-kal

- a) hathavonta (azaz évente kétszer),
- b) kéthavonta,
- c) havonta tőkésítik.

A fenti tőkésítési gyakoriságot **kamatperiódusnak** nevezik.

Megoldás:

Legyen a tőke $A = 200\,000$ Ft.

- a) Ha egy bank évente kétszer tőkésít, az azt jelenti, hogy az éves kamat felét két alkalommal hozzáírja a tőkéhez. Tehát a 6% felét, 3% kamatot hozzáadnak az A tőkéhez,

így két tőkésítés után $A \cdot \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 = A \cdot 1,03^2 = 1,0609 \cdot A$ -ra nő a tőke.

Ez megfelel 6,09%-os éves kamatnak.

- b) Ha a bank évente 6-szor tőkésít, azt jelenti, hogy az éves kamat hatodrészt 6 alkalommal hozzáírja a tőkéhez. Tehát a 6% hatodát, 1% kamatot hozzáadnak az A tőkéhez,

így 6 tőkésítés után $A \cdot \left(1 + \frac{0,06}{6}\right)^6 = A \cdot 1,01^6 \approx 1,06152A$ -ra nő a tőke.

Ez évi 6,152%-os kamatnak felel meg.

- c) Ha a bank évente 12-szer tőkésít, az azt jelenti, hogy az éves kamat tizenkettedrészét adják hozzá tizenkét alkalommal az aktuális tőkéhez. Tehát 12 kamatperiódus után a

tőke $A \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = A \cdot 1,005^{12} \approx 1,06168A$. Ez 6,168%-os kamatnak felel meg.

Számunkra ez a legkedvezőbb megoldás.

Megjegyzés: Látható, hogy számításunk eredménye független attól, hogy mekkora az A tőke.

Általánosan: Ha a bank $p\%$ -os évi kamat mellett évi n alkalommal tőkésít, akkor az

induló tőke $\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$ -szeresére nő.

Mintapélda₂

Azt tervezzük, hogy betesszünk a bankba 2007. január 1-jén 1 millió forintot, és 2 éven át nem nyúlunk hozzá. A következő banki ajánlatok közül választhattunk 2007-ben. Segíts dönteni!

El- neve- zés	Sáv- határok	Kamatláb(bruttó) % / EBKM %					Minimá- lisan le- köthető összeg (Ft)	Betétlejárát előtti fel- mondás- kor alkalmazott kamatláb	Kamat- prémium
		1 hónapos	2 hónapos	3 hónapos	6 hónapos	1 éves			
Kamat- csúcs betét	1 000 000 – 2 999 999	X	6,34/6,49	X	X	X	1 000 000	0,00 Ft	0,00 Ft
Határ- idős hozam- betét	1 000 000-tól	5,15/5,22	5,15/5,22	5,20/5,27	5,20/5,27	5,20/5,27	1 000 000	0,00%	0,25
Família betét- számla	1 000 000 Ft – 9 999 999 Ft	X	X	X	X	6,00/6,17	50 000		

A következőket lehet még tudni a fenti betétekről:

A határidős hozambetét a lejárat után nem kamatozik.

A Família betétszámla havi kamatjóváírású.

Mi is az az EBKM?

Az **egységesített betéti kamatláb mutató** egyike azoknak a mutatószámoknak, amelyek segítenek bennünket a különböző banki ajánlatok összehasonlításában. Ahogy a boltokban kötelesek feltüntetni minden mosópornál, hogy abból a mosóporból mennyibe kerülne 1 kg, ugyanígy a bankok is megadják, milyen éves kamat adódik a betétjeiknél, hogy a különböző időpontokban történő tőkésítések ellenére is össze tudjuk hasonlítani az egyes betéti kamatokat. Tehát az **EBKM azt adja meg, hogy mekkora valamely betét tényleges éves hozama**. Ezt köteles minden bank azonos elvek alapján kiszámítani.

Megoldás:

A *Kamatcsúcs betét* esetén úgy tudunk két éven át takarékoskodni, ha kéthavonta újra és újra lekötjük 2 hónapra. Bár erről nem szól a hirdetmény, a kamatjóváírás is valószínűleg kéthavonta történik meg. Ilyenkor az éves kamat $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ részével számolnak, így

1 év alatt az 1 millió forintunk

$$1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,0634}{6}\right)^6 \approx 1,065099 \cdot 1000000 = 1065099 \text{ Ft-ra nő.}$$

Ez az összeg az 1 millió forintunk 6,51%-os növekedését jelzi az első évben, ami nagyon hasonlít a táblázatunkban szereplő 6,49%-hoz.

Tulajdonképpen már ezek után, különösebb számolgatás nélkül dönthetünk is, azt a betéti formát érdemes választanunk, amelynél az EBKM a legnagyobb. Az egyes lehetőségeknél: *Kamatcsúcs betét* 6,49%, *Határidős hozambetét* 5,27%, *Família betétszámla* 6,17%, vagyis az első lekötés a legkedvezőbb.

Mintapélda₃

Számítsuk ki, mekkora összeghez jutunk két év elteltével a fenti – legjobb – ajánlat esetén!

Megoldás:

A tényleges összeg kiszámításához figyelembe kell venni, hogy betétünk kamata után kamatadót kell fizetni. A kamatadó mértéke a mindenkor kamat 20%-a, így a két hónap elteltével az A összeg után $\frac{0,0634}{6} \cdot A$ kamatot írnának jóvá (tőkésítenének), de ennek

20%-át rögtön az államnak utalják, így számlánkon csak a kamat 80%-a, azaz

$$\frac{0,0634}{6} \cdot A \cdot 0,8 = \left(\frac{0,0634}{6} \cdot 0,8\right) \cdot A \text{ kamat jelenik meg. Tehát 1 millió forintunk 24 hónap,}$$

$$\text{azaz 12 kamatperiódus alatt } 1000000 \cdot \left(\frac{0,0634}{6} \cdot 0,8\right)^{12} \approx 1331484 \text{ Ft-ra nő.}$$

A továbbiakban úgy tekintjük, mintha a megadott kamat mértéke az adózás utáni kamat lenne, azaz a meghirdetett kamat 80%-ával számolnánk.

Mintapélda₄

Ha a bank évi 12%-ot ígér havi tőkésítéssel, az azt jelenti, hogy minden hónap végén az aktuális betét után az éves kamat tizenketted részényi kamatot fizetnek. A kamatot havonta írják jóvá (és **tőkésítik**). Ez azt jelenti, hogy minden hónap végén az éppen bankba levő pénzünk 1%-át hozzáadják a betéthez, ettől kezdve a kamat is kamatozik.

Havonta 20 000 Ft-ot tudunk félretenni, és ezt minden hónap elején a számlánkra tesszük. Olyan bankot választottunk, amelyik (ha 2 éven belül nem nyúlunk a pénzünkhöz) évi 12% kamatot fizet.

Célszerű egy táblázatot készíteni a hónap eleji és év végi helyzetünkről.

Megoldás:

	Hónap elején	Hónap végén
1.	20 000	$20\,000 \cdot 1,01$
2.	$20\,000 \cdot 1,01 + 20\,000$	$20\,000 \cdot 1,01^2 + 20\,000 \cdot 1,01$
3.	$20\,000 \cdot 1,01^2 + 20\,000 \cdot 1,01 + 20\,000$	$20\,000 \cdot 1,01^3 + 20\,000 \cdot 1,01^2 + 20\,000 \cdot 1,01$
...		
24.	$20\,000 \cdot 1,01^{23} + \dots + 20\,000 \cdot 1,01 + 20\,000$	$20\,000 \cdot 1,01^{24} + \dots + 20\,000 \cdot 1,01 + 20\,000 \cdot 1,01$

Észrevehetjük, hogy a 24. hónap végén egy olyan mértani sorozat első 24 elemének összegét kapjuk, melynél $a_1 = 20\,000 \cdot 1,01$ és $q = 1,01$.



Tehát a 24 hónap leteltével felvehető összeg:

$$S_{24} = 20\,000 \cdot 1,01 \cdot \frac{1,01^{24} - 1}{1,01 - 1} \approx 544\,864.$$

Két év elteltével 544 864 Ft-unk lesz a bankban.

A fenti típusú takarékosagot **gyűjtőjárdéknak** nevezzük: rendszeres időközönként (pl. havonta, évente) azonos összeget fizetünk be, és az a számlánkon kamatozva gyűlik.

Feladatok

-  1. Az újságban ezt olvashattuk: „Nyolc nap alatt elkapkodták a magánbefektetők a CIB 2006. augusztus elején, 3 milliárd forint értékben piacra dobott, hároméves futamidejű, a futamidő alatt összesen 24 százalékos kamatot fizető CIB Classic 2009A kötvényét.” Mekkora évi kamatnak felel meg ez?
-  2. Döntsd el, az a), b), és c) esetekben mennyit kapunk kézhez 1 év után, ha a bankba tett pénzünk százezer forint! (A kamatadót most ne vedd figyelembe!)
- a) Évi 6% kamat esetén, havi kamatperiódussal.
 - b) Évi 6,3% , ha a tőkésítés kéthavonta történik.
 - c) Évi 6,4% kamat, ha évente kétszer tőkésítenek.



3. Számítsd ki az EBKM értékét, ha az éves kamat 4,8%, és a kamatperiódus
a) 1 hónap; b) 3 hónap; c) 4 hónap.



4. Egy életbiztosítással kombinált megtakarítási számlára 10 éven át minden év elején 150 000 Ft-ot fizetünk be. Ebből 20 000 Ft az éves biztosítás díja. Ezek általában évente változó kamatozású számlák, de az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy évi 6% kamatot fizetnek. A 10 év elteltével mennyi pénz felett rendelkezünk a számlán?

II. Járadék

Takarékoskodni nem csak azért lehet, hogy valami vágyott dologra összegyűjtsük a pénzt, hanem hogy később, azonos időközökben – amikor szükségünk van rá – fölvegyük. Ilyenkor **járadékot** biztosítunk magunknak.

Mintapélda₅

Egy idős házaspár elhatározza, hogy – nyaralójuk eladásából származó – 5 millió forintjukat bankba teszik évi 9%-os kamatra, és amíg pénzüket tart, minden évben a kamat tőkésítése után kivesznek 500 000 Ft-ot, hogy abból utazzanak. A kamatot minden év végén írják jóvá.

Mennyi pénzüket marad a 10. év végén?

Megoldás:

	Év elején	Év végén
1.	5 000 000	$5\,000\,000 \cdot 1,09 - 500\,000$
2.	$5\,000\,000 \cdot 1,09 - 500\,000$	$5\,000\,000 \cdot 1,09^2 - 500\,000 \cdot 1,09 - 500\,000$
3.	$5\,000\,000 \cdot 1,09^2 - 500\,000 \cdot 1,09 - 500\,000$	$5\,000\,000 \cdot 1,09^3 - 500\,000 \cdot 1,09^2 - 500\,000 \cdot 1,09 - 500\,000$
...		
10.	$5\,000\,000 \cdot 1,09^9 - S_9$	$5\,000\,000 \cdot 1,09^{10} - S_{10}$

Az év végén kamatozik a pénzünk, ezért az év elején levő vagyonunkat megszorozzuk

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{9}{100} = 1,09 \text{-dal, majd kivonunk belőle } 500\,000 \text{ Ft-ot.}$$

Észrevehetjük, hogy a levont összegek egy mértani sorozat tagjai, melynek első tagja

$$a_1 = 500\,000, \text{ kvóciense pedig } q = 1,09.$$

Számítsuk ki, mekkora összeggel rendelkezik az idős házaspár a tizedik év végén:

$$5\,000\,000 \cdot 1,09^{10} - S_{10} = 5\,000\,000 \cdot 1,09^{10} - 500\,000 \cdot \frac{1,09^{10} - 1}{1,09 - 1} \approx 11\,836\,818 - 7\,596\,465 =$$

$= 4\,240\,354$. Láthatjuk, hogy a tizedik év végén még majdnem az eredeti összeg áll a rendelkezésükre. (Eltekintettünk az inflációtól és a kamatadótól, ezért ez az ideális, szép eredmény.)

Mintapélda₆

Számítsuk ki, hogy az előző példában szereplő összeg évi 500 000 Ft kivétele esetén hány évre elegendő az idős házaspárnak.

Megoldás:

Az előző feladatban szereplő képletet használhatjuk most is, csak úgy, hogy a 10 év helyett n év szerepeljen mindig. A rendelkezésre álló összeg n év elteltével:

$$\ddot{O}(n) = 5\,000\,000 \cdot 10^n - S_n = 5\,000\,000 \cdot 1,09^n - 500\,000 \cdot \frac{1,09^n - 1}{1,09 - 1}.$$

Amíg van pénz a számlájukon, addig ez a különbség pozitív, tehát az $\ddot{O}(n) \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

$$5\,000\,000 \cdot 1,09^n - 500\,000 \cdot \frac{1,09^n - 1}{1,09 - 1} \geq 0 \quad / : 500\,000$$

$$10 \cdot 1,09^n - \frac{1,09^n - 1}{0,09} \geq 0 \quad / \cdot 0,09$$

$$0,9 \cdot 1,09^n - (1,09^n - 1) \geq 0$$

$$-0,1 \cdot 1,09^n + 1 \geq 0 \quad / -1$$

$$0,1 \cdot 1,09^n \leq 1 \quad / \cdot 10$$

$$1,09^n \leq 10$$

Mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan nő, vehetjük mindkét oldal logaritmusát:



$$\lg 1,09^n \leq \lg 10,$$

$$\text{mivel } \lg 10 = 1, \text{ ezért } n \cdot \lg 1,09 \leq 1 \quad / : \lg 1,09 > 0$$

$$n \leq \frac{1}{\lg 1,09} \approx 26,72.$$

Ez azt jelenti, hogy a telek árából idealizált körülmények között 26 éven át tudnak utazni.

Feladatok

-  5. Egymillió forintot beteszünk a bankba, majd a következő évtől minden év elején kivesszünk 100 000 Ft-ot. Az évi 9,6%-os kamatot minden év végén tőkésítik. Mennyi pénzünk marad a 11. év elején?
-  6. 200 000 Ft kölcsönt vettünk fel a bankból, évi 12%-os kamatra.
Ha minden hónap elején 15 000 Ft-ot tudunk törleszteni, mennyi idő alatt fizetjük vissza a hitelt?

III. Kölcsönök, THM, diákhitel

Egy üzletlánc hirdetésében a következőket olvashatjuk:

A fűnyíró megvásárolhatja 12 havi részletre is, 0% kamat, THM: 5,8%.

A fűnyíró ára (ha készpénzzel fizetünk) 48000 Ft, a havi törlesztőrészlet 4000 Ft – mi is lehet hát akkor a THM?



A **THM**, azaz **teljes hiteldíjmutató** is egyike azoknak a mutatóknak, ami segít nekünk abban, hogy eligazodjunk a különböző bankok ajánlatai között. **A THM az összes olyan költséget tartalmazza, ami egy év alatt felmerül a kölcsön törlesztése kapcsán.**

Ilyen lehet például a banki kamaton kívül a hitelbírálati díj, a folyósítási jutalék, a kezelési költség stb. Ha lakást vásárolunk, beszámít a THM-be a megvásárolandó ingatlan értékbecslési díja is. Fenti, „fűnyíró” példánkban valószínűleg fizetnünk kell valami okból (például hitelbírálat díjként) $48000 \cdot 0,058 = 2784$ Ft-ot. Még valószínűbb, hogy ez 2800 Ft lesz, mivel a

$$\frac{2800}{48000} \approx 0,05833 \text{ kerekített értéke is } 5,8\%.$$

Mintapélda₇

Kerékpárt akarunk vásárolni a négyfős család minden tagjának, és ezért személyi kölcsönt veszünk fel, melyet 4 hónap múlva egy összegben kell visszafizetni. Tudjuk, hogy a bank évi 15% kamatot számít fel, és a 100 000 Ft-os kölcsön kiutalásakor 1%-os kezelési költséget levonnak.

Számítsuk ki, mekkora a THM?

Megoldás:

Számítsuk ki, mekkora kamatot kell fizetni 4 hónapra a felvett összeg után! 4 hónap az év $\frac{1}{3}$ része, így a kamat 5%, a visszafizetendő összeg $100\,000 \cdot 1,05 = 105\,000$ Ft. Nézzük meg, hogy ez hány-szorosa annak az összegnek, amihez hozzájutottunk. Igazából csak

99 000 Ft-ot kaptunk, hiszen 1%-ot a kifizetéskor levontak: $\frac{105\,000}{99\,000} \approx 1,0606$. A THM

megállapításakor a jobb összehasonlíthatóság kedvéért mindig 1 évre számolnak. Az



egy évre számított kamat hatványozódik: $1,0606^4 \approx 1,2653$. Tehát a THM itt 26,53% lesz, ami meglehetősen magas érték.

Mintapéllda₈

Vannak olyan kölcsönök, melyekhez igen könnyű gyorsan hozzájutni, de igen magas kamatozásúak. Ilyenkor – mivel a különböző futamidők esetén különböző kamattal számolnak – csak így adják meg a THM értékét: pl: THM: 25–30%. Lehet azonban hitelkalkulációt kérni, ahol ha beadjuk a kért összeget és a futamidőt, kiszámítják a törlesztőrészletet. Ilyenkor már megadják a THM értékét is. Egy ilyen ajánlatot találtunk az interneten. Nézzük meg, a kamaton kívül kell-e számítanunk valami egyéb költségre is a hitel felvételekor?

Megoldás:

Ha az éves kamat 23,85%, akkor havi törlesztések esetén a havi ka-

* Hitel célja: **családi esemény**

Lehetséges hitelösszeg: **300000 - 500001 Ft**

Lehetséges futamidő: **24 - 36 hó**

* Hitel összeg: **500000** Ft

* Futamidő: **24** hónap

Törlesztőrészlet: **26400 Ft**

Éves ügyleti kamat: **23.85 %**

Teljes hiteldíjmutató (THM): **26.64 %**

Számol

Amennyiben a fenti feltételek megfelelőek Önnek, a megfelelő gombra kattintva elindíthatja Hiteligénylését.

Hiteligénylés

A*-al jelölt adatok megadása kötelező.

mat ennek tizenkettedrésze lesz, ami éves kamatban $\left(1 + \frac{0,2385}{12}\right)^{12} \approx 1,2664$, és ez pontosan a THM-mel megegyező érték, tehát ennél a kölcsönnél a kamaton kívül nincs egyéb teher.



Hamarosan leérettségiztek, és lehet, hogy lesz köztetek olyan is, aki **diákhitelt** vesz igénybe a továbbtanuláshoz. A hitelt államilag támogatott vagy önköltséges nappali tagozatos képzésben továbbtanuló egyetemi hallgatók vehetik igénybe. Dönthetsz, hogy hány félévre kéred a folyósítását. Egy tanulmányi félév során 5 havi diákhitelt folyósítanak.

Akkor kezded el törleszteni a kölcsönt, amikor munkába állsz. Az első két évben a minimálbér 6%-át kell fizetned havonta mint törlesztőrészletet. A harmadik évtől kezdve a havi törlesztőrészletet úgy számítják ki, hogy a két évvel korábbi egész éves béréd tizenketted részének 6%-át kell havonta törlesztésként befizetned egészen addig, amíg nem fizetted vissza az adósságod.

Mintapélda,

Az államilag támogatott képzésben választhatsz, hogy havonta 15, 21, 25 vagy 30 ezer forintot veszel fel. A 2006/07-es tanévben az éves kamat 9,5%. Ha úgy döntesz, hogy 10 félévre veszed fel a hitelt, havi 30 ezer forintot, és minden félévben 1 összegben kéred, milyen tartozással zárod tanulmányaidat? (Feltételezzük, hogy az 5 év folyamán a kamat változatlan marad.)

Megoldás:

Az első kölcsön felvétele és a 10. félév vége között (pl. 2008. október–2013. június)

57 hónap telik el. Az 1 hónapra számított kamat az éves kamat tizenketted része: $\frac{0,095}{12}$.

A félévben felvett kölcsön	Ennek kamattal növelt összege:
1. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{57}$
2. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{52}$
3. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{45}$
4. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{40}$
5. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{33}$
6. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{28}$
7. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{21}$
8. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{16}$
9. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^9$
10. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^4$

A jobb oldali oszlop összege lesz a fennálló tartozásunk. Észrevehetjük, hogy ha minden második sort tekintjük, azok mértani sorozat egymást követő tagjai. Ha alulról felfelé

nézzük a sorozatok egymást követő tagjait, mindkét sorozat esetén $q = \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{12}$,

mindkettő 5 tagból áll, de az októberi sorozatnál $o_1 = 150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^9$, míg a már-

ciusnál $m_1 = 150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^4$. A fennálló kölcsöntartozásunk tehát

$$S_o + S_m = 150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^9 \cdot \frac{\left(\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{12}\right)^5 - 1}{\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{12} - 1} + 150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^4 \cdot \frac{\left(\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{12}\right)^5 - 1}{\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{12} - 1} =$$

$$150\,000 \cdot \left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^4 \cdot \frac{\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{60} - 1}{\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^{12} - 1} \cdot \left(\left(\frac{0,095}{12} + 1\right)^5 + 1\right) \approx 1925\,342.$$

Mintapélda₁₀

A bankokban **deviza alapú hitelek**et is fel lehet venni. Ez azt jelenti, hogy a felvett összeget, majd a mindenkori tartozást nem forintban tartják nyilván, hanem valamely más pénznemben. A mindenkori törlesztőrészletet is ebben a valutában határozzák meg. Ha a jövedelmünk forintban keletkezik, módunkban áll a törlesztést is forintban befizetni, de úgy, hogy az összeg idegen valutára átváltva akkora legyen, mint a megállapított részlet. Így fordulhat elő az, hogy a deviza alapú hitelünk törlesztőrészlete azonos kamat és kezelési költség mellett is hónapról hónapra változik.

A következő táblázat azt mutatja, milyen ajánlatot adhat egy bank egy adott összegű kölcsön fölvételére.

- Számítsuk ki, mekkora a felvett hitel!
- Számítsuk ki, a meghirdetés pillanatában mennyi volt a svájci frank ára!
- Számítsuk ki, hogy ha a hitelt 10 éves futamidőre vettük fel, milyen törlesztőrészletet kell fizetni 2007. március 28-án, ha 1 svájci frank ára 158,53 Ft az adott bankban azon a napon!

Hiteltípus	Kamat %	Kezelési költség/év	Törlesztőrészlet a futamidő függvényében	
	1 évre fix		10 év	20 év
Svájci frank alapú	2,49	2,5% (125 eFt)	301 CHF (48,6 eFt)	170 CHF (27,4 eFt)
Ft alapú forrásoldali támogatással	6,99	2,0% (100 eFt)	58,3 eFt	39 eFt

Megoldás:

a) A felvett hitel összegét ki tudjuk számítani, hiszen látjuk, hogy 2%-a 100 000 Ft. Így

maga a felvett kölcsön $\frac{100\,000}{0,02} = 5\,000\,000$ Ft. Ugyanezt az eredményt adja a CHF

alapú hitelajánlat is: $\frac{125\,000}{0,025} = 5\,000\,000$ Ft.

b) A bank ajánlatában az szerepel, hogy 301 CHF (svájci frank) 48,6 eFt-nak felel meg,

tehát $1 \text{ CHF} = \frac{48\,600}{301} \approx 161,46$ Ft. Ugyanakkor az is szerepel, hogy 170 CHF 27,4 eFt-

nak felel meg, ebből $1 \text{ CHF} = \frac{27\,400}{170} \approx 161,18$ Ft. A különbség valószínűleg annak a ke-

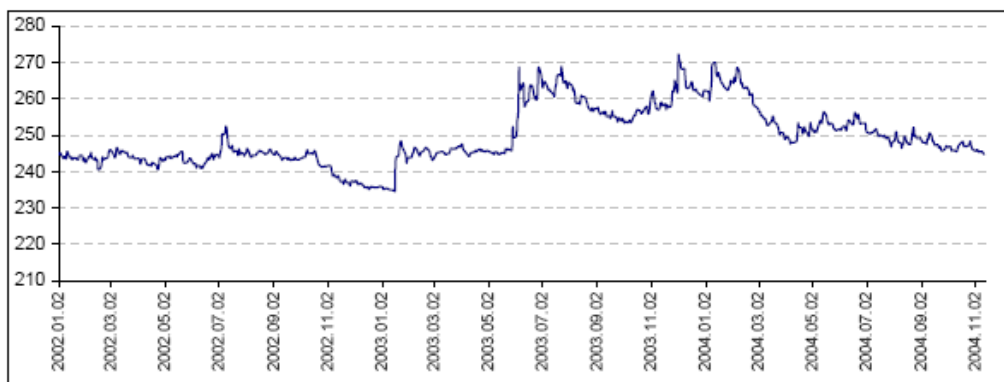
rekítésnek a hibájából adódik, hogy a törlesztés forintértékét ezer forint pontossággal adták meg.

c) 10 éves futamidő esetén 1 havi törlesztőrészlet 301 CHF, amiért 2007. március 28-án $301 \cdot 158,53 \approx 47\,718$ Ft-ot kell fizetni.

Mintapélda₁₁

A következő grafikon azt mutatja, hogyan változott a forint árfolyama az euróhoz képest, azaz hány forintért lehetett vásárolni 1 eurót:

1. grafikon – A forint/euró árfolyam alakulása 2002 január és 2004 november között



Forrás: MNB (2004)

a) Olvasd le a grafikonról, hány forintért lehetett vásárolni 1 eurót

2003. január 2-án, 2003. május 2-án, 2004. szeptember 2-án.

b) Olvasd le a grafikonról, a vizsgált időszak alatt, mikor ért a legtöbbet a forint (az euróhoz képest) és mikor a legkevesebbet!

Megoldás:

a) 2003. január 2-án körülbelül 236 Ft-ba került 1 euró,

2003. május 2-án körülbelül 246 Ft-ba került 1 euró,

2004. szeptember 2-án körülbelül 252 Ft-ba került 1 euró.

b) Akkor ér a legtöbbet a forint, ha a legkevesebbe kerül 1 euró, tehát keressük a grafikon minimumhelyét, és az 2003. januárjában van. Ekkor 1 € (euró) körülbelül 235 Ft-ba kerül.

Akkor ér a legkevesebbet a forint, amikor a legtöbbet kell fizetni 1 €-ért, ezért keressük a grafikon maximumhelyét, amit körülbelül 2003 decemberében találunk, amikor több mint 270 Ft-ot kellett fizetni 1 €-ért.

Feladatok




7. Olvasd el figyelmesen az alábbi hirdetményt. Mi az, ami óvatosságra int?


Van-e olyan vásárlási összeg, ami esetén nem tudod, mekkora az önrész?


ÁLTALÁNOS FELTÉTELEK:	
IGÉNYELHETŐ HITELÖSSZEG:	30 000–1 000 000 Ft
ÖNRÉSZ:	300 000 Ft-ig a termék vételárának 0%-a, 300 001 Ft felett a termék vételárának 20%-a
FUTAMIDŐ:	6–60 hónap
KEZELÉSI KÖLTSÉG:	a hitelösszeg 2%-a

„A hitel megítélése a Bank hitelbírálatának függvénye. Ez a hirdetés kizárólag a figyelemfelkeltés célját szolgálja, nem minősül a Bank részéről nyilvános tájékoztatónak és ajánlattételnek. A teljes hiteldíj-mutató (THM): 0–44,23%, a választott hitelkonstrukció és a futamidő függvényében. A hitelről szóló részletes tájékoztatást az áruházakban elhelyezett hirdetmények adnak.”

Számítsd ki, ha vásárolsz az adott bank által nyújtott hitel segítségével egy televíziót 120000Ft-ért, milyen költségekkel jár ez számodra a magasabb THM esetén? A futamidőt 1 évnek válaszd, és 1 év elteltével egy összegben fizeted be a tartozásod.

 **8.** Egy mezőgazdasági vállalkozó 3 millió forint kölcsönt vett fel gép vásárlására, melyet 2 év múlva kezd el törleszteni 3 év alatt, 3 egyenlő részletben, minden év elején. A bank a fennálló tartozásra évi 18%-os kamatot számít fel. Mekkora lesz a törlesztőrészlet?

 **9.** Az 1 200 000 Ft kölcsönt évi 12%-os kamatra vettük fel. 1 év alatt fizetjük vissza. Mekkora a törlesztőrészlet, ha
a) 12 részletben; b) 3 részletben fizetjük vissza?
A kamat tőkésítése mindkét esetben havonta történik.

 **10.** Számítsd ki, az alábbi hitel esetén mekkora volt az aktuális euró-árfolyam?
Hány forint lenne ez a havi törlesztőrészlet 2002. január 2-án, 2003. január 2-án, illetve 2004 decemberében, amikor olyan magas volt az euró ára?
Használd a 11. mintapéldában található grafikont!
Mit gondolsz, miért alacsonyabb a törlesztőrészlet 3 hónapos kamatperiódus esetén?
Mit gondolsz, 20 éves futamidő esetén miért nem fele akkora a törlesztőrészlet?

5 millió forint hitelösszeg 20 év futamidő 3 hónapos kamatperiódus esetén	Havi törlesztő részlet: 148,58 € 39 140 Ft.	
5 millió forint hitelösszeg 20 év futamidő 1 éves kamatperiódus esetén	Havi törlesztő részlet: 149,74 € 39 446 Ft.	
5 millió forint hitelösszeg 10 év futamidő 1 éves kamatperiódus esetén	Havi törlesztő részlet: 99,83 € 26 297 Ft.	

3. MODUL

SIKIDOMOK

KERÜLETE, TERÜLETE

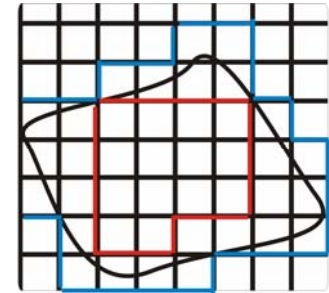
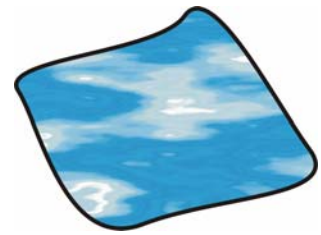
Készítette: Lövey Éva

I. Bevezetés

Becsüljük meg, mekkora lehet ennek a tónak a területe és a kerülete?

Fedjük le a tó térképét 100 m oldalú (10000 m^2 területű) négyzetekkel! Azoknak a négyzeteknek a területösszege, amelyek beférnek a tóba, kisebb, míg azoknak a területösszege, melyek magukba foglalják a tavat, pedig nagyobb, mint a tó területe.

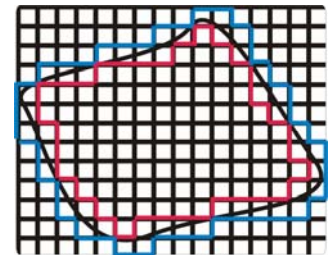
Tehát a tó területe $180000 \text{ m}^2 < T_{\text{tó}} < 400000 \text{ m}^2$.



Ha még pontosabban meg akarjuk tudni a területet, akkor kisebb négyzetekkel is lefedhetjük a tó térképét. Például csökkentsük a négyzet oldalát felére, ekkor 2500 m^2 területű négyzetek keletkeznek. Így pontosabb becslést kapunk:

$92 \cdot 2500 \text{ m}^2 < T_{\text{tó}} < 119 \cdot 2500 \text{ m}^2$, azaz

$230000 \text{ m}^2 < T_{\text{tó}} < 297500 \text{ m}^2$, azaz $23 \text{ km}^2 < T_{\text{tó}} < 29,75 \text{ km}^2$.



A második ábrán, ahol kisebb négyzetek területösszegeként becsültük a területet, a körülírt sokszög területe kisebb lesz, mint az előző esetben. Általában, ha a négyzetrács oldalát csökkentjük, az alakzat köré írt sokszög területe csökken – vagy legalábbis nem nő – az előzőhöz képest, hiszen az újabban felrajzolt becslés mindig „befér” az előzőbe. A körülírt sokszögek területe tehát csökken, de értéke nem csökken a mérendő alakzat területé alá, csak egyre inkább megközelíti azt.

Hasonlóan, a beírt sokszögek területe egyre nő, ahogy a négyzetrács oldala csökken, hiszen az új beírt sokszög mindig tartalmazza az előzőt. Területük tehát növekvő sorozatot alkot, de értéke sosem haladja meg a mérendő alakzat területét (hiszen befér), csak egyre inkább megközelíti azt.

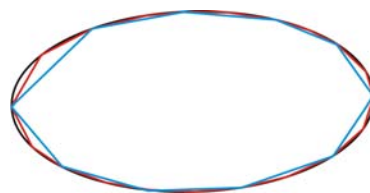
A négyzetek oldalát tovább csökkentve, egyre pontosabban megkaphatjuk a tó területét.

Ha a tó kerületét (a határoló görbevonal hosszát) akarjuk megbecsülni, közelítsük azt olyan sokszögek kerületével, melyeknek csúcspontjai a határoló íven vannak.

Ha a csúcspontok számát növeljük (például megkétszerezzük a csúcspontok számát úgy, hogy két-két csúcspont közé újabbat illesztünk), a sokszög kerülete egyre jobban hozzásimul az alakzat kerületéhez, így hossza egyre jobban közelíti a görbe hosszát.

Egy sokszöget fel lehet osztani háromszögekre, és a háromszögek területének összege megadja a sokszög területét.

Ezért is igen fontos, hogy felelevenítsük a sokszögek kerületének és területének, ezen belül is a háromszögek területének kiszámítási módjait.



II. Háromszögek

Foglaljuk össze, **milyen képleteink vannak a háromszög területének kiszámítására!**

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög valamely oldala és a hozzá tartozó magasság adott.

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög két oldala és az oldalak közbezárt szöge adott. Ez a háromszögben bármely két oldalpárra és azok közbezárt szögére vonatkozhat:

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}$$

$$T = \frac{r}{2} \cdot K = \frac{r \cdot K}{2} = r \cdot s$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög kerülete és a beírt kör sugara adott.

$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög mindhárom oldalát ismerjük (Heron-képlet). Ebben a

képletben s a háromszög kerületének felét jelenti: $s = \frac{K}{2} = \frac{a + b + c}{2}$.

Mintapélda₁

A kertészeti vállalat következő feladata, hogy egy háromszög alakú területet füvesítsenek. Itt a terület határoló oldalainak hosszát tudták lemérni.

$AB = 100$ m, $BC = 130$ m, $AC = 70$ m.

Mekkora a párosítandó terület?

1. megoldás:

A háromszög területének kiszámításához ki kell számítani a háromszög valamely szögét. Ehhez a koszinusztételt használjuk:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma, \quad a = 130, \quad b = 70, \quad c = 100.$$

$$100^2 = 130^2 + 70^2 - 2 \cdot 130 \cdot 70 \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{130^2 + 70^2 - 100^2}{2 \cdot 130 \cdot 70} \approx 0,6484 \Rightarrow \gamma \approx 49,58^\circ.$$

Ezt a szöget felhasználva, a háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{130 \cdot 70 \cdot \sin 49,58^\circ}{2} \approx 3464,1.$$

A parkosítandó terület tehát 3464,1 m².

2. megoldás:

Kiszámíthatjuk a fenti háromszög területét a Héron-képlet segítségével is.

$$\text{Először számítsuk ki a kerület felét: } s = \frac{K}{2} = \frac{a + b + c}{2} = \frac{130 + 70 + 100}{2} = 150.$$

A Héron-képlet szerint tehát a terület:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{150 \cdot (150 - 130) \cdot (150 - 70) \cdot (150 - 100)} = \sqrt{150 \cdot 20 \cdot 80 \cdot 50} = \\ &= \sqrt{12\,000\,000} = 2000 \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ez az érték pontos érték, de egy kertész számára nem hasznosítható. Közelítő értéke természetesen ugyanaz, mint az előbb, tehát körülbelül 3464,1 m².

Mintapélda₂

A Bermuda-háromszög egy titokzatos terület, mivel több hajó és repülőgép tűnt el ott sokáig megmagyarázhatatlan módon. A háromszög három csúcsát a Bermuda-szigetek, Puerto Rico és Fort Lauderdale alkotják. Tudjuk a következő távolságokat:

Bermuda-szigetek–Puerto Rico: 1500 km,

Bermuda-szigetek–Fort Lauderdale: 1510 km,

Puerto Rico–Fort Lauderdale: 1410 km.

Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, melynek oldalai ezek a távolságok, majd hasonlítsuk össze a térképészek által megadott területtel, mely 704 000 km².



Megoldás:

$$\text{Használjuk a Héron-képletet: } s = \frac{1500 + 1510 + 1410}{2} = 2210.$$

$$T = \sqrt{2210 \cdot 710 \cdot 700 \cdot 800} \approx 937\,388 \text{ km}^2.$$

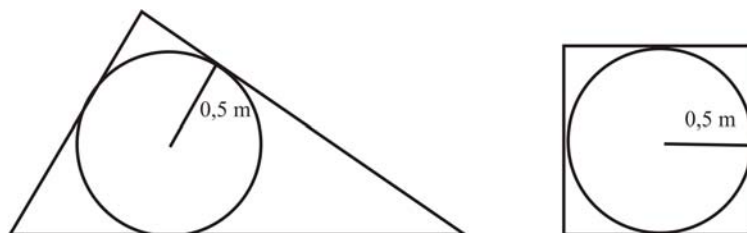
Ez erősen eltér a „hivatalosan” megadott $704\,000 \text{ km}^2$ értéktől! Mi lehet a magyarázat az eltérésre?

A fenti képlettel egy síkidom területét számoltuk ki. Oldalai szakaszok. A valóságban a Bermuda-háromszög a földgömb felszínén van, oldalai a főkörök egy-egy íve, vagyis valójában egy **gömbháromszögről** van szó. Egy gömb felszínének egy bizonyos részét kellene kiszámítani. A kiszámításhoz a térképészetben gyakran használatos gömbháromszögtani ismeretekre lenne szükség. (A gömbi háromszögekről ugyan már esett szó a korábbi osztályokban, de velük kapcsolatos számolási feladatokkal sem akkor, sem most nem foglalkozunk.) Síkmértani módszerekkel tehát csak akkor szabad földdarabok területét kiszámítani, ha a távolságok nem túl nagyok, ugyanis ilyenkor a gömbfelszín kicsiny darabja jól közelíthető síkidommal.

Mintapéllda₃

Egy 1 méter átmérőjű körhenger alakú mély gödör van a kertben, amit el kell keríteni. Ezt három darab, összesen 6,2 m hosszú kerítéssel oldjuk meg. Számítsuk ki, mennyivel nagyobb területet kerítettünk így el, mintha négyzet alakban vettük volna körbe a gödröt!

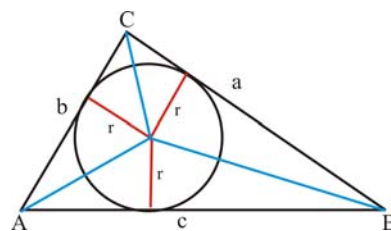
Megoldás:



Először számoljuk ki a négyzet területét! Az 1 m átmérőjű kör köré 1 m oldalú négyzet rajzolható. Ennek területe 1 m^2 .

A háromszög területének kiszámításához látszólag kevés az adatunk. Ha azonban egy kicsit ügyeskedünk, elegendő lesz a terület kiszámításához.

Kössük össze a kör középpontját a háromszög három csúcsával. Ezek a szakaszok a háromszögünket három olyan háromszögre bontják, melyeknek az egyik magassága közös: a háromszögbe írt kör sugara. Jelöljük ezt r -rel.



A háromszög területe kiszámítható a beírt kör sugara, valamint a kerület segítségével

$$(s \text{ ismét a kerület felét jelenti}): T = \frac{r}{2} \cdot K = \frac{r \cdot K}{2} = r \cdot s$$

A körbekerített terület tehát $T_{\Delta} = 0,5 \cdot \frac{6,2}{2} = 1,55 \text{ m}^2$, ez $0,55 \text{ m}^2$ -rel nagyobb, mintha négyzet alakban kerítettük volna körbe.

Mintapélda₄

Egy kerítéssel körbevett 940 m^2 -es háromszög alakú területről tudjuk, hogy két oldalán a kerítés hossza 40 és 50 méter. Meg tudjuk-e állapítani ezekből az adatokból, hogy milyen hosszú a kerítés harmadik része?

Megoldás:

Látszólag egyszerű a dolgunk, van egy képletünk, amelynek segítségével két oldal és a terület ismeretében meghatározható a közbezárt szög szinusza: $T_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$. Legyen

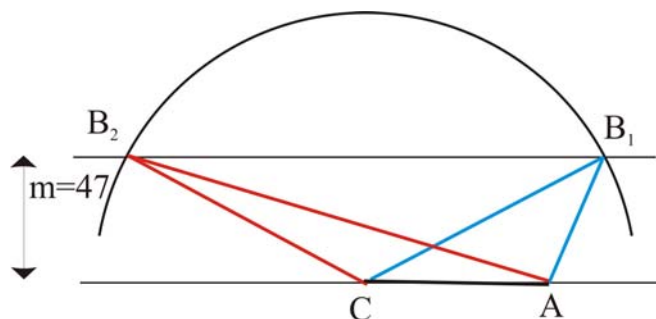
most a és b oldal a két ismert kerítéshossz, és számítsuk ki azt a szöget, amelyet ez a két oldal bezár:

$$940 = \frac{40 \cdot 50 \cdot \sin \gamma}{2} \Rightarrow \sin \gamma = 0,94.$$

Ez a szinuszérték azonban 0° és 180° között két szöget is meghatároz: $\gamma_1 = 70,05^\circ$, illetve $\gamma_2 = 109,95^\circ$. Tehát a telek alakja nem egyértelmű.

A területből és a 40 méteres b oldalból kiszámíthatjuk a háromszög b oldalhoz tartozó

$$\text{magasságát: } T = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{2T}{b} = \frac{2 \cdot 940}{40} = 47.$$



Elemi geometriai ismereteinkből tudjuk, hogy a háromszög B csúcsa rajta van azon az egyenesen, amely párhuzamos az AC oldallal, és attól 47 m távolságra van. Másrészt a B csúcs illeszkedik a C középpontú 50 méter sugarú körre. A körív és a párhuzamos

egyenes két pontban metszi egymást, tehát két olyan háromszög is van, melynek két oldala 40 és 50 méter, területe pedig 940 m². Az ábrából és a számításból is látszik, hogy a két lehetséges γ szög 180°-ra egészíti ki egymást.

Számítsuk ki mindkét esetben a harmadik oldal hosszát a koszinusztétel felhasználásával:

$$c_1^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 70,05^\circ \Rightarrow c_1 \approx 52,3.$$

$$c_2^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 109,95^\circ = 40^2 + 50^2 + 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 70,05^\circ$$

$$c_2 \approx 73,9.$$

A harmadik kerítéselem tehát 52,3 méter, vagy 73,9 méter, így a telek bekerítéséhez annak alakjától függően 142,3 m, illetve 164 m hosszú kerítésre van szükség.

Mintapélda₅

Péter és Pál földje háromszög alakú. Meg akarták tudni, hogy mekkora a területe. Egyik sarkába letűztek egy karót, a háromszög másik két csúcsába pedig Péter és Pál állt. Ez volt az utcai oldal, tehát tudták, hogy a hossza 170 méter. Péter teodolittal megmérte, hogy Pált és a karót 74°-os szög alatt látja, Pál is megmérte, hogy ő a Péter és a karó közti oldalt 43°-os szög alatt látja. Számítsuk ki a föld területét!

Megoldás:

Most ismerjük a háromszög egyik oldalát és a rajta fekvő két szöget. Ezek az adatok a háromszöget egyértelműen meghatározzák. Legyen a háromszög 170 méteres oldala AB , ekkor ha az A csúcsban áll Péter, tehát az α szög 74°-os lesz, Pál pedig a B csúcsban, így a β szög lesz 43°.

Ha a $T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ képletet akarjuk használni, ki kell

számítanunk a háromszögnek még egy oldalát.

A szinusztétel segítségével kiszámíthatjuk az AC oldalt:

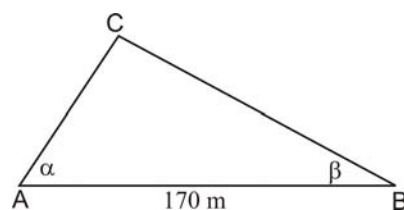
$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

A képletben szerepel a γ szög, amit ki tudunk számítani, mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°.

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (74^\circ + 43^\circ) = 63^\circ.$$

Ezt behelyettesítve képletünkbe: $AC = 170 \cdot \frac{\sin 43^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 130,12$ (m). Most már ismerjük a


háromszög két oldalát és a közbezárt szögét, a terület tehát:

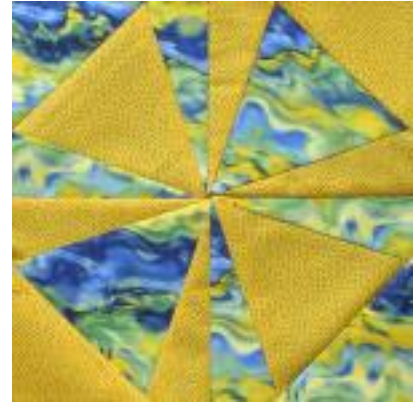



$$T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} \approx \frac{170 \cdot 130,12 \cdot \sin 74^\circ}{2} \approx 10631,7.$$

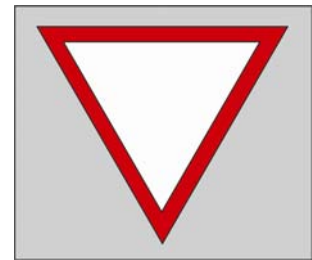
Péter és Pál földjének területe tehát 10 631,7 m².




Feladatok

-  1. A képen látható pachworkben a minta középpontosan szimmetrikus. Számítsd ki a legnagyobb területű háromszög kerületét és területét! (A kép 36 cm oldalú négyzet. A bal felső háromszög jobb oldali csúcsa harmadolja a négyzet oldalát.)
Mekkorák azok a szögek, melyek az ábra szimmetriaközéppontjában keletkeznek?



-  2. Az „elsőbbségadás kötelező” KRESZ táblát úgy készítik, hogy előbb lefestik az egész táblát fehérre, majd a szélére 5 cm széles piros csíkot festenek. A tábla egyenlőoldalú háromszög, melynek oldala 60 cm. Számítsd ki, 100 ilyen tábla lefestéséhez hány négyzetméterre való fehér, illetve piros festéket kell vásárolni!



-  3. Egy közpark sarkából egy kertészeti áruda kihasít egy háromszög alakú területet. Az eredeti terv szerint kerítésük a saroktól az Ó utcán 80 méterig, az Új utcán pedig 70 méterig tart, de kiegyeznek abban is, ha a két utcafronton 75-75 méteres kerítésük lehet. Mikor veszít kevesebb területet a közpark? (Tudjuk, hogy az Ó utca és az Új utca 80°-os szögben találkozik.)
-  4. Milyen hosszú kerítéssel lehet körbevenni azt a háromszög alakú kertet, melynek területe 2500 m², két oldala pedig 80-80 méter?
-  5. Egy háromszög alakú kerteskérő az állítják, egyik oldala 30 méter, területe 300 m², kerülete pedig 70 méter. Honnan tudjuk, hogy valamelyik adat téves? (Azaz mekkora lesz egy olyan háromszög minimális kerülete, melynek egyik oldala 30 méter, területe pedig 300 m²?)

III. Négyyszögek

Egy négyszög egy átlójával mindig felbontható két háromszögre, így a négyszög területe mindig előállítható két háromszög területének összegeként. Vannak olyan négyszögek, melyek területének kiszámítására ismerünk egyszerűbb módszert is.

Foglaljuk össze, milyen képleteket ismertünk meg a négyszögek területének kiszámítására!

Trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{a + c}{2} \cdot m$$

ahol a és c a két párhuzamos oldal hossza, m a trapéz magassága. Mivel a paralelogramma, a rombusz, a téglalap és a négyzet mind trapéz, ezzel a képlettel ezek területei is számolhatók.

Paralelogramma területe:

$$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

$$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$T_{\text{paralelogramma}} = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}$$

ahol a, b a paralelogramma oldalai, m a magassága, e, f az átlói, γ az a, b oldalak által bezárt szög, φ pedig az átlók által bezárt szög.

Mivel a rombusz, a téglalap és a négyzet is paralelogramma, ezekkel a képletekkel ezek területei is számolhatók. Speciálisan

$$T_{\text{téglalap}} = a \cdot b$$

$$T_{\text{négyzet}} = a^2$$

Deltoid területe:

$$T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}$$

ahol e, f a deltoid átlói.

Érintőnégyyszög területe:

$$T_{\text{érintőnégyyszög}} = \frac{K \cdot r}{2}$$

ahol K a négyyszög kerülete, r a beírt kör sugara.

Általános négyyszög területe:

$$T_{\text{négyyszög}} = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}$$

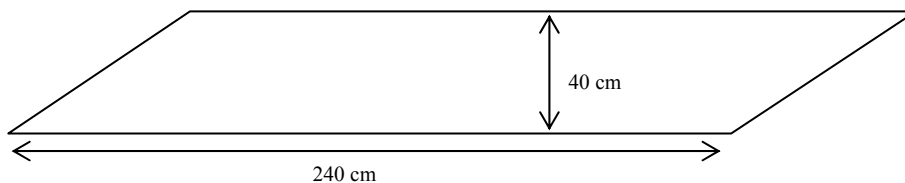
Ezzel a képlettel bármely négyyszög területét meghatározhatjuk, ha ismerjük a négyyszög átlóit (e, f) és az átlók által bezárt φ szöget.

Mintapélda₆

Egy húsfeldolgozó üzem egyik munkapadját védőfestékkel kell bevonni. A felület paralelogramma alakú, 60 cm széles pallóból vágták ki, hosszabb oldala 250 cm.

Elegendő lesz-e 1 doboz, 1 m² lefestésére alkalmas festéket vásárolni?

Megoldás:



A paralelogramma területe $T_{\text{paralelogramma}} = 240 \cdot 40 \text{ cm}^2 = 9600 \text{ cm}^2 = 0,96 \text{ m}^2$.

Tehát szűken, de elég lesz egy doboz festéket megvásárolni.

Mintapélda₇

A húsvéti nyuszinak a kertben úgy választottunk le területet, hogy egy régi gyerekjáróka rácsát használtuk fel hozzá. A járóka eredetileg téglalap alapú volt, de már nincs meg az alja, ami megtartaná a derékszöget. A rács hosszabb oldala 150 cm, a rövidebb 100 cm. Mekkora területet választottunk le a nyuszinak, ha a kert egy olyan sarkába illesztettük be a járókát, ahol a két kerítés 70°-os szöget zár be?



Megoldás:

Ha a járóka alapja eredetileg téglalap volt, szemközti oldalai egyenlők lesznek, csak a derékszög nem biztosított, így paralelogramma területét kell kiszámítanunk. Ha a járókát olyan kerítésrészhez állítottuk, ahol a bezárt szög 70° , akkor a paralelogrammánk két szomszédos oldala által bezárt szög is 70° lesz, így a járóka aljának területe

$T = 100 \cdot 150 \cdot \sin 70^\circ \approx 14095 \text{ cm}^2$, azaz majdnem másfél négyzetméter a leválasztott terület.

Mintapélda₈

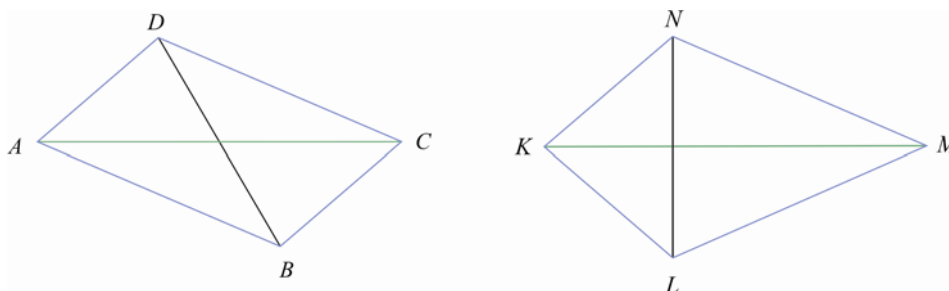
Egy kertészeti vállalat azt a feladatot kapta, hogy egy négyszög alakú parkban a két átló mentén sétáló utat létesítsen. A kert alaprajzát nem találják, de az eddigi munkálatok leírásából kiderül, hogy a parknak 2-2 oldala egyenlő 200-200, illetve 180-180 méteres, és az odaszállított fűmag mennyisége alapján a területe $30\,000 \text{ m}^2$.

Meg tudjuk-e mondani, hogy milyen hosszúak az átlók?

Megoldás:

Ha a négyszögnek két-két oldala egyenlő hosszú, akkor a négyszög vagy paralelogramma, vagy deltoid.

Az egyik átlója mindkét esetben két egybevágó háromszögre bontja, ezek területe a négyszög területének fele, tehát $T_{ACD} = T_{KMN} = 15\,000 = \frac{200 \cdot 180 \cdot \sin \gamma}{2}$.



A γ szög a paralelogrammában az ADC szög, a deltoidban pedig a KMN szög. Fenti képből γ -ra két érték adódik: $\sin \gamma = 0,83333 \Rightarrow \gamma_1 = 56,44^\circ$ vagy $\gamma_2 = 123,56^\circ$. Ez a paralelogrammánál nem ad két lényegesen különböző megoldást, hiszen az ACD és BDC háromszögeknek azonos a területük (mindkettő területe a paralelogramma területének fele), és két oldaluk is azonos hosszúságú.

A deltoidnál azonban két lényegesen különböző megoldást kapunk. Ha az N pontnál tompaszög van, akkor mindenképpen konvex deltoidhoz jutunk, tehát $\gamma_2 = 123,56^\circ$ -kal számolva számítsuk ki az AC , illetve KM átló hosszát koszinusztétel felhasználásával:

$$AC = KM = \sqrt{200^2 + 180^2 - 2 \cdot 200 \cdot 180 \cdot \cos 123,56^\circ} \approx 334,97 \text{ m.}$$

A paralelogramma másik átlóját megkapjuk, ha $\gamma = 56,44^\circ$ -kal számolunk:

$$DB = \sqrt{200^2 + 180^2 - 2 \cdot 200 \cdot 180 \cdot \cos 56,44^\circ} \approx 180,55 \text{ m.}$$

Ha az N pontnál hegyesszög van, akkor 180,55 m lesz a deltoid szimmetriatengelye is. Ilyenkor előfordulhat, hogy a deltoid konkáv lesz. Feladatunknak azonban ez nem megoldása, hiszen akkor nem a parkon halad át a másik sétány. Ha a KMN háromszögben K -nál vagy M -nél tompaszög van, akkor a deltoid konkáv. Tompaszög a háromszögben csak a legnagyobb oldallal szemben lehet, tehát vizsgáljuk meg, hogy a KMN háromszögben milyen szög van a 200 méteres oldallal szemben. A legnagyobb oldallal szemben akkor van tompaszög, ha a másik két oldal négyzetének összege kisebb, mint a legnagyobb oldal négyzete. $40\,000 = 200^2 < 180^2 + 180,55^2 \approx 64\,998$, tehát a másik formájú deltoid is konvex.

Számítsuk most ki a deltoidok másik átlóját! Ha a deltoid egyik átlója (a szimmetriatengely) $e_1 = 334,97$, akkor a KMN háromszögben ehhez az oldalhoz tartozó magasság a

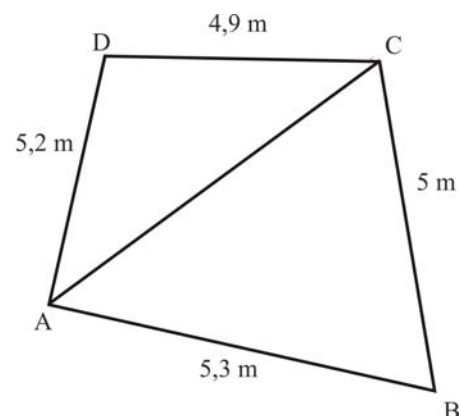
másik átló fele lesz. Ezt a területképletbe helyettesítve: $\frac{334,97 \cdot \frac{f_1}{2}}{2} = 15\,000$, ebből

megkapjuk a másik átló hosszát: $f_1 \approx 179,12$. Hasonlóan, a területképletbe helyettesítve az $e_2 = 180,55$ értéket, megkapjuk, hogy $f_2 \approx 332,32$.

A két sétaút hossza tehát körülbelül 335 m és 180,5 méter, ha a park paralelogramma alakú. Deltoid alakú park esetén két lehetőség is van: a két sétaút hossza körülbelül 335 m és 179 m, vagy 180 m és 332 méteres.

Mintapélda₉

Egy szabálytalan négyszög alapú szoba parkettázásáért kell fizetnünk. Megmértük a négy fal hosszát: $AB = 5,3$ m, $BC = 5$ m, $CD = 4,9$ m és $DA = 5,2$ m. Sajnos ezek az adatok nem elegendőek a terület kiszámításához, hiszen nem határozzák meg egyértelműen sem a szoba alakját, de még a területét sem. (Gondoljunk az összecsucodó járókára!) Ha csak mérőszalagunk van, hogyan segíthetünk magunkon, hogy mégis ki tudjuk számítani a szoba alapterületét?



Megoldás:

Ha megmérjük a szoba egyik átlóját, két egyértelműen meghatározott háromszögre bonttuk a szobát. Ezek területének összege megadja a szoba területét. Tegyük fel, hogy mérésünk eredménye is megvan már, $AC = 7,1$ m. Az ABC háromszög területe a Héron-képlet segítségével:

$$s = \frac{7,1 + 5,3 + 5}{2} = 8,7;$$

$$T_{ABC} = \sqrt{8,7 \cdot (8,7 - 7,1) \cdot (8,7 - 5,3) \cdot (8,7 - 5)} \approx 13,23 \text{ m}^2.$$

Az ACD háromszög területe pedig:

$$s = \frac{5,2 + 4,9 + 7,1}{2} = 8,6; \quad T_{ACD} = \sqrt{8,6 \cdot (8,6 - 5,2) \cdot (8,6 - 4,9) \cdot (8,6 - 7,1)} \approx 12,74 \text{ m}^2.$$

A két háromszög területét összeadjuk. A szoba alapterülete tehát $25,97 \text{ m}^2 \approx 26 \text{ m}^2$.

Mintapélda₁₀

Az ábrán látható deltoid alakú sárkány két oldala 40 és 60 cm, a benne levő kör sugara pedig 30 cm. Hány négyzetcentiméter pauszpapírt használtunk fel az elkészítéséhez? (5% veszteséggel számolj!)

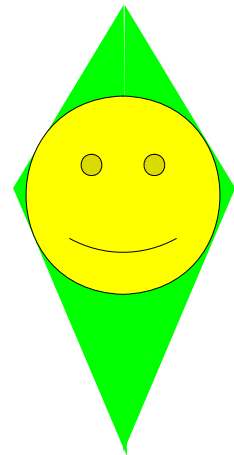
Megoldás:

Ez a sárkány – mint minden deltoid – érintőnégyyszög, hiszen a szemközti oldalak összege egyenlő. Az érintőnégyyszög területe kiszámítható


a $T = \frac{K \cdot r}{2}$ képlettel, így a sárkány kerülete:

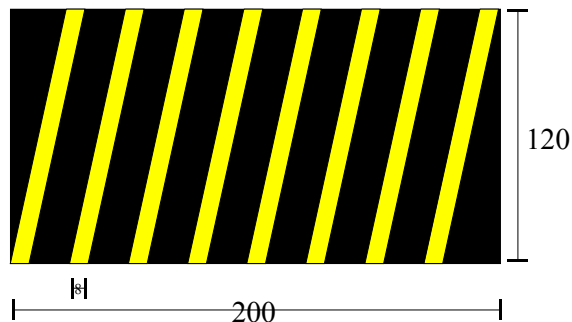
$$K = 2 \cdot (40 + 60) = 200 \text{ cm}, \text{ a területe}$$


$T = \frac{30 \cdot 200}{2} = 3000 \text{ cm}^2$. Ennek 5%-kal megnövelt értéke, azaz 3150 cm^2 pauszpapír szükséges a sárkányhoz.

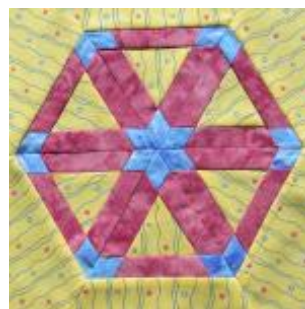



Feladatok

-  6. Forgalomtól elzárt területet jelöl ez a csíkozás. A csíkok jelölt szélessége 8 cm. 1 m^2 felület befestésére vásárolt festékkal elkészíthető-e ez a csíkozás? Ha maradna festék, akkor lehetne-e egy 8 cm széles sávot még körbe festeni?



-  7. A fotón látható falikép oldala 1 m, a hatszög oldala 40 cm. A csíkminta szélessége 5 cm. Hány négyzetcentiméter kék színű alapanyagot használtak fel hozzá?



-  8. Amikor legutóbb kitört az ajtó legkisebb ablaka, az üvegesnél 600 Ft-ot fizettünk. Tudjuk, hogy az árak egyenesen arányosak az üvegtábla területének méretével. Mennyit fogunk most fizetni, amikor a legnagyobb ablak törött ki? A legkisebb ablak méretei: 15 cm széles és 25 cm magas, a legnagyobb (trapéz alakú) ablak leghosszabb oldala 200 cm, a trapéz vízszintes oldala 38 cm, hegyesszőge pedig 40° .



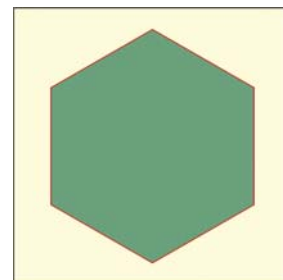
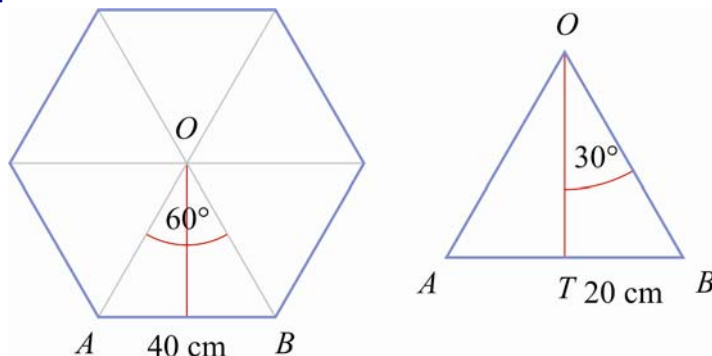
IV. Szabályos sokszögek

Egy sokszöget akkor nevezünk szabálynak, ha minden oldala és szöge egyenlő.

Mintapélda₁₁

Egy négyzet alakú terítő közepén szabályos hatszög van, melynek oldala 40 cm. Számítsd ki a hatszögminta területét!

Megoldás:



A hatszög szimmetriatengelyeinek metszéspontjából a csúcsokhoz húzott szakaszok a hatszöget hat egybevágó szabályos háromszögre bontják. Egy ilyen kis háromszög területének meghatározásához szükségünk van az OT magasságra is, ezt tangens szögfüggvénnyel határozzuk meg:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{20}{OT}, \quad OT = \frac{20}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 20 \cdot \sqrt{3}$$

Így már minden adatunk megvan a hatszög területének meghatározásához:

$$T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot \frac{40 \cdot (20 \cdot \sqrt{3})}{2} = 2400 \cdot \sqrt{3} \approx 4157 \text{ cm}^2.$$

Mintapélda₁₂

Kör alakú, 3 méter átmérőjű felfújható medencénk alá akarunk (a lehető legkisebb) szabályos 12 szög alakú betonlapot készíteni úgy, hogy a medence szélétől mindenhol legalább fél méter szélesen beton legyen. Milyen hosszú legyen ennek a tizenkétszögnek egy oldala, és mekkora területet fedünk le vele?

Megoldás:

Fogalmazzuk meg a feladatot másképpen: Adott egy szabályos 12-szög, ami érinti a medence minden oldalát. Ha ezt a tizenkétszöget a kör középpontjából úgy nagyítjuk ki, hogy a két szemközti érintési pont távolsága az eredeti méretnél 2-szer 50 cm-rel nagyobb legyen, akkor megkapjuk a feladatban kívánt tizenkétszöget.

Mekkora az a tizenkétszög, amely érinti ezt a kört?

Ha a kör középpontját a tizenkétszög csúcaival összekötjük, olyan 12 egybevágó egyenlőszárú háromszöget kapunk, melynek szárszöge $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. A háromszögnek az alaphoz tartozó magassága a kör sugara lesz. A nagyobb tizenkétszögnél ugyanez az adat 0,5 méterrel hosszabb:

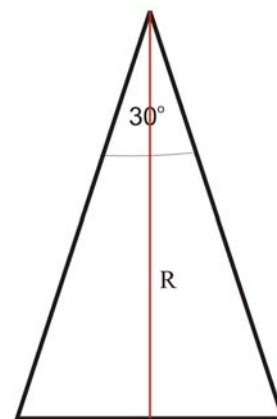
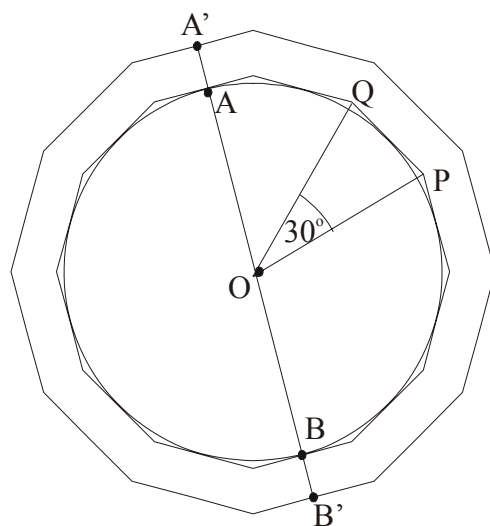
$R = 1,5 + 0,5 = 2$. A nagyobbik sokszög oldalának kiszámításához az OPQ egyenlőszárú háromszöget használjuk:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{a}{R} = \frac{a}{2 \cdot 2} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \approx 1,07.$$


Tehát a medencét alulról védő betonsokszög oldalai körülbelül 107 cm hosszúak legyenek.

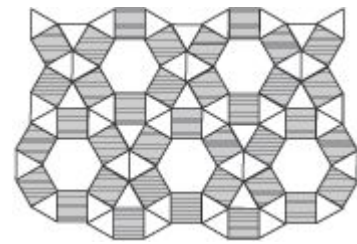
A beton területét megkapjuk, ha a 12 egyenlőszárú háromszög területét összeadjuk:


$$T_{\text{beton}} = 12 \cdot \frac{107 \cdot 200}{2} = 128\,400 \text{ cm}^2 = 12,8 \text{ m}^2.$$




Feladatok

-  9. A rajzon egy parkettázást látsz, azaz a síkot hézagmentesen lefedték szabályos sokszögekkel. A tizenkétszög oldala 12 cm. Mekkora a rajzon látható többi szabályos síkidom területe?




-  10. A képen látható homokozó készen kapható. Szabályos nyolcszög alakú, és úgy hirdetik, hogy 35 m² területű. Mekkora lehet a leghosszabb átlója? A számítás elvégzése előtt becsüld meg az eredményt!



-  11. Számítsd ki annak az n oldalú szabályos sokszögnek az oldalát, amely érinti az 1 m sugarú kört!
- | | | |
|--|--------------|---------------|
| | a) $n = 3$; | b) $n = 4$; |
| | c) $n = 8$; | d) $n = 12$. |

Hány százaléka lesz a sokszög kerülete a kör kerületének? Hány százaléka lesz a sokszög területe a kör területének? Hogyan változnak ezek az arányok?

-  12. Számítsd ki annak az n oldalú szabályos sokszögnek a területét, amelynek csúcsai az 1 m sugarú körön vannak! Számítsd ki, hány százaléka ez a kör területének! Hogyan változik ez az arány?
- | | | |
|--|--------------|---------------|
| | a) $n = 3$; | b) $n = 4$; |
| | c) $n = 8$; | d) $n = 12$. |

V. Kör és részei

Foglaljuk össze, milyen képleteket ismertünk meg a körre és a kör részeire vonatkozóan.

Kör:

$$K_{\text{kör}} = 2r\pi$$

$$T_{\text{kör}} = r^2\pi$$

ahol r a kör sugara, $\pi \approx 3,14159$ állandó. (Használjuk 3,14 helyett a számológépben tárolt π értéket!)

Körcikk:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{i \cdot r}{2}$$

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$$

ahol r a kör sugara, i a körcikk ívhossza, α a körcikk középponti szöge.

Körgyűrű:

$$K_{\text{körgyűrű}} = 2R\pi + 2r\pi = 2\pi(R + r)$$

$$T_{\text{körgyűrű}} = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$$

ahol R a külső, r a belső kör sugara.

Körszelet:

$$T_{\text{körszelet}} = \frac{ir - h(r - m)}{2}$$

ahol h a határoló húr hossza, i a körszelet ívhossza, r a kör sugara, m a körszelet magassága.

Mintapélda₁₃

A 8 méter átmérőjű szökőkút mellé 2 méter széles járdát terveznek díszburkolattal. Hány négyzetmétert kell burkolni? A járda két oldala szegélykövekkel van határolva. Hány folyóméternyi szegélykővet kell a helyszínre vinni?

Megoldás:

A járda felülete körgyűrű alakú. Területét megkapjuk, ha a külső kör területéből levonjuk a belső kör területét: $T = (10^2 - 8^2) \cdot \pi \approx 113,1 \text{ m}^2$.

Amikor a szegélykövek mennyiségére vagyunk kíváncsiak, a körgyűrű kerületét kell kiszámítanunk, az pedig – értelemszerűen – a külső és belső körök kerületének összege:

$$K = 2 \cdot (10 + 8) \cdot \pi \approx 113,1 \text{ m lesz.}$$

Mintapélda₁₄

Számítsd ki, hogy az ajtó felületének hány százaléka üveg? Méretek: Az ajtó szélessége 91 cm, magassága: 204 cm. Egy téglalap alakú üvegtábla szélessége 17 cm, magassága 34 cm. Két – vízszintesen egymás melletti – üvegtábla távolsága 33 cm. Két ablakot elválasztó lécszélessége 8 cm.



Megoldás:

Számoljuk ki először az egész ajtó felületét:

$$T_{\text{ajtó}} = 91 \cdot 204 = 18564 \text{ cm}^2.$$

A téglalap alakú ablakokból 6 van, területük együttesen:

$$6 \cdot T_{\text{téglalap}} = 6 \cdot 17 \cdot 34 = 3468 \text{ cm}^2.$$

A két felső ablak körgyűrűcikk formájú, de mégsem az, hiszen a középső lécszélessége nem sugár irányúak. Nem csalogatunk sokat, ha a két felső ablak együttes területét úgy számoljuk ki, hogy egy fél körgyűrű területéből egy 8 cm széles, 17 cm magas téglalap területét vonjuk le. Az elválasztó lécszélessége itt valójában nem téglalap, de területe csak kevéssel különbözik a számított téglalapétól. A körgyűrűnk belső átmérője akkora, mint két szomszédos ablaktábla távolsága, azaz $2r = 33$ cm, a külső kör átmérőjét pedig úgy kapjuk meg, hogy a szomszédos ablaktáblák távolságához hozzáadjuk két téglalap alakú ablak szélességét: $2R = 33 + 2 \cdot 17 = 67$ cm.

$$\text{A fél körgyűrű területe tehát } \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{67}{2} \right)^2 - \left(\frac{33}{2} \right)^2 \right) \cdot \pi \approx 1335 \text{ cm}^2.$$

Ebből még ki kell vonni az elválasztó „téglalap” területét:

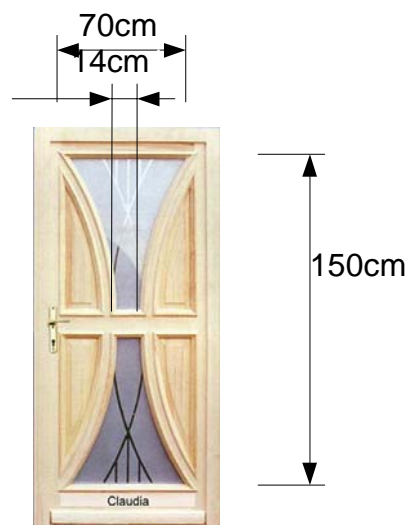
$$T_{\text{felső üveg}} = 1335 - 8 \cdot 17 = 1199 \text{ cm}^2.$$

Az összes üvegfelület tehát $T_{\text{üveg}} = 3468 + 1199 = 4667 \text{ cm}^2$. Ezt elosztva az egész ajtó területével, megkapjuk, hogy

$$\frac{4667}{18564} \approx 0,251 \text{ az egész ajtó } 25\%-a \text{ üveg.}$$

Mintapélda₁₅

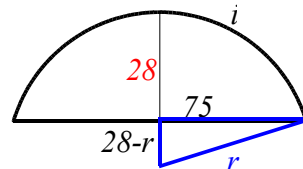
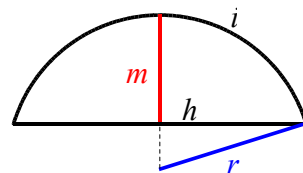
Ezt a formájú ajtót meg lehet rendelni úgy is, hogy a közepső, üveges rész helyett fatáblát helyeznek be. 1 m^2 (1 cm vastag) fa tömege 6600 g-mal könnyebb, mint 1 m^2 (0,4 cm vastag) üvegé. Mennyivel nehezebb az üveges ajtó a csupa fa ajtónál? Méretek: függőleges nyíl: 150 cm, vízszintesen mért távolságok: 70 cm és 14 cm.

**Megoldás:**

A válaszadáshoz ki kell számítanunk az ablakok területét. Az ablakok területét úgy a legegyszerűbb megkapni, ha a 150 cm magas és 70 cm széles téglalap területéből kivonjuk a két körszelet területét.

A terület meghatározásához szükséges adatok közül nekünk csak a húr hossza adott ($h = 150 \text{ cm}$). A körszelet magassága igen egyszerűen kiszámítható: ($m = \frac{70-14}{2} = 28 \text{ cm}$). Az ábrán látható derékszögű háromszögből r Pitagorasz tételével kiszámítható:

$75^2 + (28 - r)^2 = r^2$. Elvégezve a négyzetreemelést, majd kifejezve r -et, $r = \frac{6409}{56} \approx 114,45 \text{ cm}$.



Az ív hosszának kiszámításához derékszögű háromszögünkben ki-

számítjuk az ív középponti szögének felét: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{75}{114,45} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 40,94^\circ$, $\alpha = 81,89^\circ$.

Az ív hossza egyenesen arányos a középponti szög nagyságával, $\frac{i}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$, jelen esetben

$$i = \frac{81,89^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 114,45 \cdot \pi \approx 163,58 \text{ cm}.$$


Most már semmi akadály, hogy használjuk a képletet:

$$T_{\text{körszelet}} = \frac{163,58 \cdot 114,45 - 150 \cdot (114,45 - 28)}{2} \approx 2877,12 \text{ cm}^2. \text{ Az ajtón két körszelet van, tehát}$$


$$T_{\text{üveg}} = 2 \cdot 2877,12 = 5754,24 \text{ cm}^2 = 0,575424 \text{ m}^2.$$

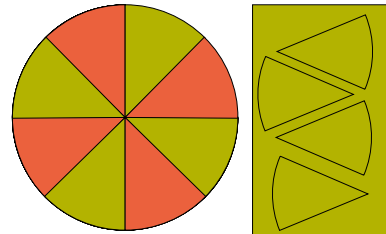
Mivel egy négyzetméter üveg 6600 g-mal nehezebb egy négyzetméter fánál, ezért az üveges ajtó $0,575424 \cdot 6600 \approx 3797,8 \text{ g}$ -mal, azaz 3,8 kg-mal nehezebb, mint a faajtó.


Feladatok

-  **13.** A képen látható legyező hossza összecsuksva 16 cm. Ha a lehető legjobban széthúzzuk, a középponti szög 200° . Számítsd ki, mekkora területű felülettel tudunk legyezni, ha a legyezőt csak 60° -osra, félkörre, vagy teljesen kinyitjuk!




-  **14.** Az ábrán látható 1 méter átmérőjű terítő körcikkeit szeretnénk kiszabni. A szálirány miatt, és mert nem lehet tetszőlegesen széles anyagot kapni, így szabjuk ki a darabokat egy 70 cm széles, 1 m hosszú anyagból. Számítsd ki, hány százalék lesz a hulladék a körcikkek kiszabásakor!




-  **15.** Ádám és Zoltán ablakok és ajtók üvegfelületének lemosását vállalta. Ádám a két bejárati ajtót és a kerek ablakot, Zoltán pedig a nagyobbfajta ablakot mosta le. Melyikük dolgozott többet? (Egy-egy ablakon belül a léceket ne vegyük figyelembe.) Méretek:




Az ajtókon a félkörök szélessége 63 cm, a bal oldali ajtón a fa félkör átmérője 13 cm. A kör alakú ablak átmérője 60 cm, a nagy ablak szélessége 80 cm, magassága közepén 120 cm.

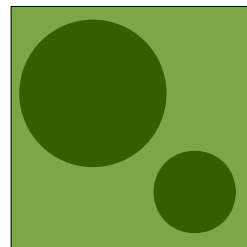
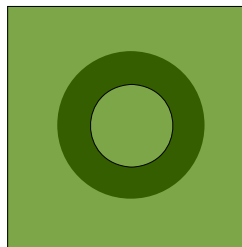
-  **16.** Számítsd ki, a „megállni tilos” táblán mekkora a pirossal és kékkel festett területek aránya! (A tábla átmérője 60 cm, a piros vonalak vastagsága 5 cm.)



-  **17.** Egy 5, egy 20 és egy 100 Ft-os érmét az ábrán látható módon szorosan egymás mellé rakunk. Mekkora lesz az általuk közrezárt terület? Az érmék átmérője 21 mm, 26 mm és 24 mm.



-  **18.** A bal oldali terítőn a sötét terület 350 cm^2 , a jobb oldalin pedig 1650 cm^2 . Mekkora a jobb oldali ábrán a két kör területe? (A két terítőn a körök sugara ugyanakkora.)

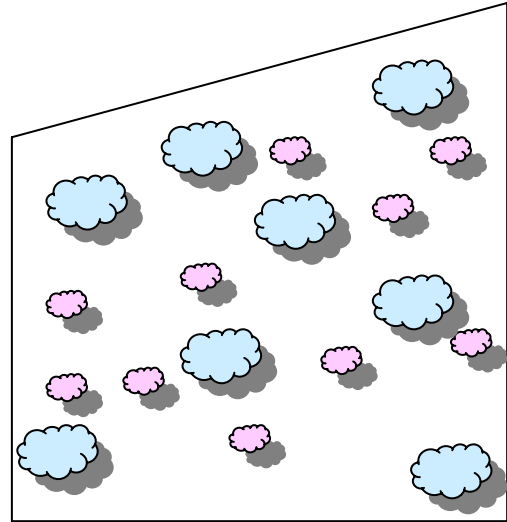


VI. Hasonló síkidomok kerülete és területe

Ha két síkidom hasonló, akkor kerületük aránya megegyezik hasonlóságuk arányával, területük aránya pedig a hasonlóságuk arányának négyzetével egyezik meg.

Mintapélda₁₆

Egy óvoda tűzfalát lefestették fehérre, majd az alábbi tervek alapján díszítik nagy kék és kis rózsaszín felhőkkel. A kék felhők festésével már készen vannak, 10 doboz festék fogyott. Hány doboz rózsaszín festéket vásároljanak? (Tudjuk, hogy a kicsi felhők szélessége pontosan a fele a nagy felhőkének.)



Megoldás:

A kék és rózsaszín felhők hasonló síkidomok. Ha a kék felhő szélessége kétszerese a rózsaszín megfelelő szakaszának, akkor a hasonlóság aránya 1:2. Ilyenkor a területek aránya 1:4, tehát egy rózsaszín felhő területe negyedakkora, mint egy kék felhőé.

Ha 8 kék felhő festéséhez 10 doboz festék kell, akkor 10 doboz festék $4 \cdot 8 = 32$ rózsaszín felhő befestésére elegendő. Azaz 1 rózsaszín felhő befestéséhez $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$ doboz fes-

ték kell, 10 rózsaszín felhő befestéséhez $10 \cdot \frac{5}{16} = 3,125$ doboz festék kell, tehát 4 dobozt kell megvásárolnunk.

Mintapélda₁₇

Olvassuk le a térképről a megfelelő adatokat, majd számítsuk ki, mekkora az Orczy-kert területe, és milyen hosszú kerítés határolja!



425 m

Gyakran hasznos, hogy egy több lépésből megoldandó feladat kiszámítása előtt megoldási tervet készítünk. Ebben a feladatban bemutatjuk ezt a módszert.

Megoldás:

Terv: 1) Mérjük le a térképen a négyszög szükséges adatait; 2) Számítsuk ki a térképen levő síkidom területét; 3) A mért adat és a skála összehasonlításával állapítsuk meg a hasonlóság arányát; 4) Határozzuk meg a valós kerületet és területet.

Számítás:

1) Legyen az Üllői út felé eső oldal a négyszög AB oldala. $AB = 58$ mm, $BC = 36$ mm, $CD = 61$ mm és $DA = 71$ mm. Mivel ez általános négyszög, még legalább egy adatát le kell mérnünk: $AC = 83$ mm.

2) $T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{CDA}$. A Héron-képletet használjuk ki az ABC háromszög és a CDA háromszög területét: $s = \frac{58 + 36 + 83}{2} = 88,5$, így

$$T_{ABC} = \sqrt{88,5 \cdot (88,5 - 58) \cdot (88,5 - 36) \cdot (88,5 - 83)} \approx 882,84 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Hasonlóan CDA háromszög területére: $s = \frac{61 + 71 + 83}{2} = 107,5$ így

$$T_{CDA} = \sqrt{107,5 \cdot (107,5 - 61) \cdot (107,5 - 71) \cdot (107,5 - 83)} \approx 2114,27 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

$$T_{ABCD} = 882,84 + 2114,27 = 2997,11 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

3) A térkép alatti léptékről leolvasható, hogy az ábrán 47 mm felel meg a valóságban

425 méternek, így a hasonlóság aránya $\frac{47}{425000}$, azaz $1 : 9\,042,5$.

A valódi kerület a mért kerületnek 9 042,5-szerese, azaz


$$K = 9042,5 \cdot (0,058 + 0,036 + 0,061 + 0,071) \approx 2043 \text{ (m)}.$$

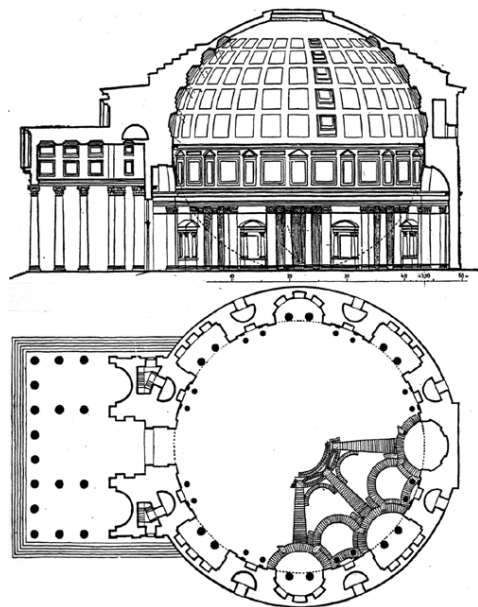
4) A valódi terület a térképi területnek $9\,042,5^2$ -szerese.


$$T_{ABCD} = 2997,11 \text{ mm}^2 = 0,00299711 \text{ (m}^2\text{)}, \text{ tehát a park területe}$$

$$T_{\text{park}} = 9042,5^2 \cdot 0,00299711 \text{ m}^2 \approx 245\,063 \text{ m}^2.$$

Feladatok

-  **19.** A római Pantheonról mindenhol megemlítik, hogy magassága ugyanakkora, mint a kör alakú főhajó átmérője, azaz 43,5 m. Mérd meg az alaprajzon szereplő méreteket, majd állapítsd meg az alaprajz és az eredeti épület méreteinek arányát!
- Számítsd ki az épület alapterületét!



-  **20.** Egy termékkatalógusban a közúton használatos STOP-tábla méretét 60 cm-esnek adják meg, az iskolai közlekedési parkokban használatosakét pedig 30 cm-esnek. Nem közlik, hogy ez a leghosszabb átló mérete, vagy a tábla vízszintes legnagyobb kiterjedéséé.



- Számítsd ki mindkét esetben a közúti közlekedésben használatos STOP-tábla területét.
- Ha egy adag piros festékkel a közúton használatos táblák közül 20-at tudunk befesteni, akkor hány táblára elegendő ez az iskolai parkban használatosak közül?

Kislexikon

A **háromszög** kerülete és területe: $K_{\Delta} = a + b + c$.

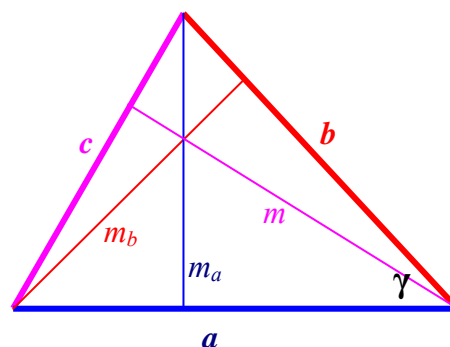
$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}$$

$$T_{\Delta} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)},$$

ahol s a háromszög kerületének fele, azaz $s = \frac{a + b + c}{2}$

$$T_{\Delta} = \frac{K \cdot r}{2} = s \cdot r, \text{ ahol } K \text{ a kerülete, } r \text{ a háromszögbe írt kör sugara, } s \text{ pedig a kerület fele.}$$



A **négyzet** kerülete és területe: $K_{\text{négyzet}} = 4a$;

$$T_{\text{négyzet}} = a^2.$$

A **téglalap** kerülete és területe: $K_{\text{téglalap}} = 2 \cdot (a + b)$;

$$T_{\text{téglalap}} = a \cdot b.$$

A **trapéz** kerülete és területe: $K_{\text{trapéz}} = a + b + c + d$;

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{a + c}{2} \cdot m, \text{ ahol } a \text{ és } c \text{ a két párhuzamos oldal hossza, } m \text{ pedig a trapéz magassága.}$$

A **paralelogramma** kerülete és területe: $K_{\text{paralelogramma}} = 2 \cdot (a + b)$.

$$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b.$$

$$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot b \cdot \sin \gamma, \text{ ahol } \gamma \text{ az } a \text{ és } b \text{ hosszúságú oldalak bezárt szöge.}$$

$$T_{\text{paralelogramma}} = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}, \text{ ahol } e \text{ és } f \text{ a két átló hossza, } \varphi \text{ az általuk bezárt szög.}$$

A rombusz kerülete és területe: $K_{rombusz} = 4a$; $T_{rombusz} = a \cdot m$.

$$T_{rombusz} = \frac{e \cdot f}{2}, \text{ ahol } e \text{ és } f \text{ a két átló hossza.}$$

$$T_{rombusz} = a^2 \cdot \sin \alpha, \text{ ahol } \alpha \text{ a rombusz egyik szöge.}$$

A deltoid kerülete és területe: $K_{deltoid} = 2 \cdot (a + b)$;

$$T_{deltoid} = \frac{e \cdot f}{2} \text{ ahol } e \text{ és } f \text{ a két átló hossza.}$$

Az érintőnégyyszög területe: $T_{\text{érintő négyyszög}} = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c + d) = \frac{r \cdot K}{2}$.

Bármely konvex négyszög területe:

$$T_{\text{négyszög}} = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}, \text{ ahol } e \text{ és } f \text{ a két átló hossza, és } \varphi \text{ az általuk bezárt szög.}$$

4. MODUL

POLIÉDEREK FELSZÍNE, TÉRFOGATA

Készítette: Vidra Gábor

I. A hasáb

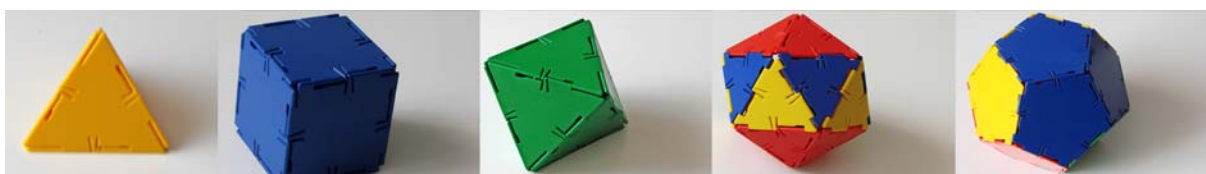
A lakásban szeretnénk átalakításokat végezni: új falat emelni gipszkartonból, légkondicionálót beszereltetni, a falat lefestetni. Csupa olyan probléma, amelynek megoldásához alapvető térgeometriai ismeretekre van szükség: a festék mennyiségének meghatározásához területet, felszínt kell számolni, a megfelelő hűtőrendszer kiválasztásához pedig ismernünk kell a helyiség térfogatát.

A test térfogata annak a térrésznek a mértéke, amelyet a test felülete határol. A térfogatot mindig valamilyen térfogategységhez hasonlítjuk, amely az egységélű kocka térfogata.

A test felszíne a testet határoló felület területe. Síklapokkal határolt testek esetén a határoló lapok területének összege.

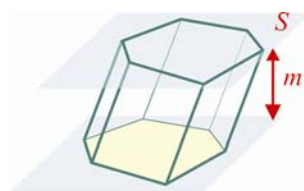
Poliédernek nevezünk egy testet, ha azt véges sok sokszöglap határolja. A poliéder konvex, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza.

Minden konvex poliéderre teljesül Euler tétele: $l + c = e + 2$, azaz: lapok + csúcsok száma = élek száma + 2. A poliéder szabályos, ha élei, élszögei és lapszögei egyenlők. Összesen öt ilyen test van: tetraéder (4 lap), hexaéder (kocka; 6 lap), oktaéder (8 lap), dodekaéder (12 lap), ikozaéder (20 lap).

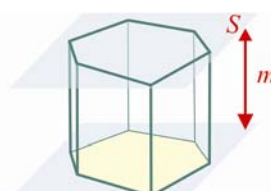


A középiskolában leggyakrabban a poliéderek közül a hasábokkal, gúlákkal és csonkagúlákkal foglalkozunk. A **test hálójá** poliéderek esetén az a sokszöglap, amelyet ha egy síklapból kivágunk, akkor összehajtogatható belőle a test felülete.

Adott az alapsíkon egy sokszög (**alaplap**) és egy egyenes, amely az **alapsíkkal** nem párhuzamos. Ha a sokszög minden pontján keresztül párhuzamost húzunk az adott egyenessel, hasábfelületet kapunk. Ezt elmetsszük egy, az alapsíkkal párhuzamos síkkal (**fedőlap**). Az így keletkező korlátos (zárt) térrészt nevezzük **hasábnak**. **Egyenes hasábot kapunk**, ha az adott egyenes merőleges az alapsíkra. Az oldallapokat együtt **palástnak** nevezzük. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága adja a **hasáb magasságát**.



Hasáb



Egyenes hasáb

A hasáb térfogata: $V = \text{alapterület} \cdot \text{testmagasság}$,
 felszíne: $A = 2 \cdot \text{alapterület} + \text{a palást területe}$.

A térfogat és felszínképletek bizonyítható állítások. Speciális hasábok a téglatest és a kocka.

- A kocka térfogata: $V = a^3$, felszíne $A = 6a^2$ (a a kocka élhossza).
- A téglatest térfogata $V = abc$, felszíne $A = 2(ab + bc + ac)$ (a , b és c a téglatest egy csúcsából kiinduló éleinek hossza).

Mintapélda₁

Az ábrán látható prizma egy fényképezőgép alkatrésze. Négy darab téglalap határolja, amelyek közül a szomszédosak egy-egy oldala közös és 4 cm hosszú, valamint két szimmetrikus trapéz, amelyek alapjai 4 cm és 2 cm, magassága 2 cm. A két trapéz síkja merőleges a prizma alap és fedőlapjára. Számítsuk ki a prizma felszínét és a térfogatát!



Megoldás:

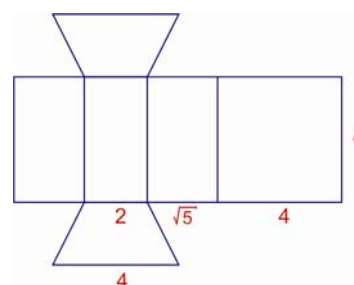
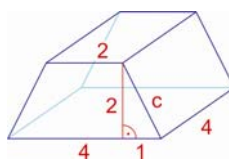
A felszín kiszámításához szükségünk van a trapéz szárára:

$$c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

A test hálóját felrajzolva láthatók a testet határoló síkidomok. A felszín ezek területének összege:

$$A = 4 \cdot (2\sqrt{5} + 2 + 4) + \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 30 + 8\sqrt{5} \approx 47,9 \text{ cm}^2.$$

A térfogat kiszámításához felhasználjuk, hogy a test egy trapéz alapú egyenes hasáb, az alapterület a trapéz területe: $T = \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 6 \text{ cm}^2$, a testmagasság $M = 4 \text{ cm}$, így a térfogat: $V = T \cdot M = 24 \text{ cm}^3$.



Mintapélda₂

Egy négyzet alapú ferde hasáb két oldallapja téglalap, másik két oldallapja olyan paralelogramma, melynek egyik szöge 60° . Mekkora a hasáb térfogata és felszíne, ha az alapél hossza 14 cm, az oldalél hossza 20 cm?

Megoldás:

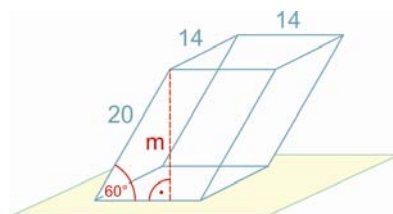
Ábrát készítünk, és ráírjuk a megfelelő adatokat. Az alapterület $T = 14^2 = 196 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Az egyik alapél és az oldalél által alkotott derékszögű háromszögből számítható a testmagasság, amely ebben az esetben az egyik oldallap magassága is egyben: $\sin 60^\circ = \frac{m}{20}$, ahonnan $m = 20 \cdot \sin 60^\circ \approx 17,32 \text{ (cm)}$.



A térfogat $V = T \cdot m \approx 3394,7 \text{ cm}^3$.

A felszín kiszámításához minden adatot ismerünk:


$$A = 2 \cdot (14^2 + 20 \cdot 14 + 14 \cdot 17,32) \approx 1436,96 \text{ cm}^2.$$




Feladatok


-  1. Mekkora az a alapélű, b oldalélű négyzetes oszlop a térfogata és felszíne, ha
- a) $a = 12 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ dm}$; b) $a = 2,4 \text{ cm}$, $b = 35 \text{ mm}$; c) $a = 400 \text{ mm}$, $b = 4 \text{ dm}$;
 d) $a = 55 \text{ mm}$, $b = 0,3 \text{ dm}$.
-  2. Egy négyzetes oszlop magassága háromszorosa az alapélnek. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!


	alapél	térfogat	felszín
a)	6 cm		
b)	4,6 dm		
c)			686 cm^2
d)		$46,875 \text{ m}^3$	

-  3. Egy építkezéshez 32 darab, négyzetes oszlop alapú gerendát használnak fel. A gerenda keresztmetszete $10,5 \text{ cm} \times 10,5 \text{ cm}$, hosszuk egységesen $8,4 \text{ m}$.

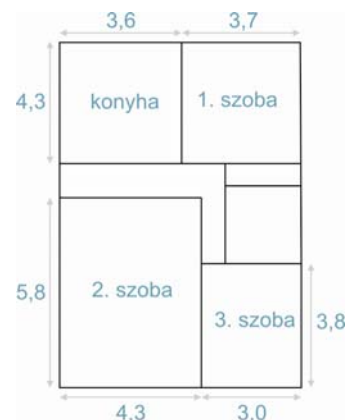
- a) Hány m^3 a gerendák térfogata összesen?
 b) A gerendákat olyan felületkezelő anyaggal vonják be, amelynek kiadóssága $10 \text{ m}^2/\text{liter}$. Hány liter vegyszerre van szükség?


-  4. Számítsd ki az egyenlőszárú háromszög alapú hasáb térfogatát és felszínét, ha az alaplap alapja 50 cm , szárai 45 cm hosszúak, és a hasáb magassága 70 cm !

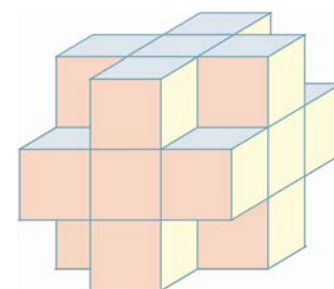
-  5. Az üzletben 750 ml -es utántöltőben is árulják a folyékony szappant. Van egy hasáb alakú tartónk, amelynek alaplapja egy 6 cm és 12 cm alapú, $7,2 \text{ cm}$ szárú trapéz, a testmagassága 18 cm , és a tartó térfogatából 85% a tartály. Betölthető-e ebbe a szappantartóba a vásárolt folyékony szappan?


-  6. Az alábbi lakás szobáiba és konyhájába szeretnének klímaberendezést vásárolni. A lakás magassága $2,8$ méter. Becsüljük meg, mekkora teljesítményű berendezéseket vásároljanak az egyes helyiségekbe! Átlagosan 35 W/m^3 teljesítményegységgel számolhatunk.

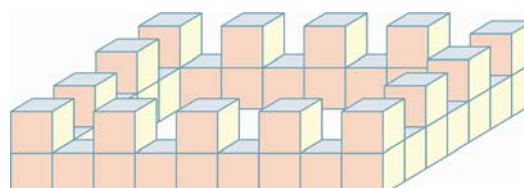
Megjegyzés: A kapott érték valóban becslés, mert a kívánt teljesítmény függ a helyiség használatának jellegétől, a benne tartózkodó személyek számától, a burkolófelületek anyagától, a tájolástól stb.

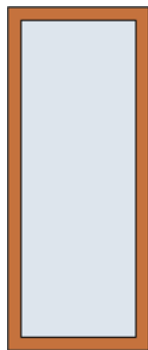


-  7. Egy 9 cm oldalhosszúságú kocka sarkaiból levágunk egy-egy 3 cm oldalélű kockát az ábra szerint. Mekkora a megmaradó rész térfogata és felszíne?



-  8. Mekkora az ábrán látható, 2 cm élű játékkockákkal kirakott játékbástya térfogata és felszíne?



9. Egy téglatest egyik éle 3 m-rel hosszabb a másiknál, a harmadik éle 20 m, a térfogata 2600 m^3 . Mekkora az élei és a hasáb felszíne?
10. Egy téglatest felszíne 8576 cm^2 . Egyik oldaléle 2,4 dm, a másik két oldalél különbsége 12 cm. Mekkora az élei és térfogata?
11. Egy ajtóban az üveg keretét $8 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ széles deszkából készítették. Az ajtó 210 cm magas és 86 cm széles, az üveg 8 mm vastag. Az ajtó térfogatának hány százaléka az üveg térfogata?
- 
12. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb magassága másfélszerese az alapélének. Mekkora a hasáb felszíne, ha térfogatának pontos értéke $3888\sqrt{3}$?
13. Egy szabályos sokszög alapú egyenes hasáb alapéle 12 cm, testmagassága 25 cm. Számítsd ki a hasáb térfogatát és felszínét, ha az alaplap
a) hatszög; b) ötszög; c) nyolcszög; d) tízsög.
14. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm hosszú, palástjának területe (az oldallapok területösszege) hatszorosa az egyik alaplap területének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?

Mintapélda₃

Egy ideiglenes, téglatest alakú színpad vas keretéhez merevítésként be kell hegeszteni síkonként egy-egy lapátlót és két testátlót (amelyek metszik egymást, ezért a két testátlót négy egyforma darabból kell összeállítani). Számítsuk ki, hogy a kerettel együtt mennyi vas anyagra lesz szükség, ha a színpad 1,6 m magas, és $10 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ a felület, amin fellépnek a művészek. Mekkora szögben illeszkedik egymáshoz a két testátló, és milyen hosszú az a négy darab, amiből összehegesztve megkapjuk a merevítést?

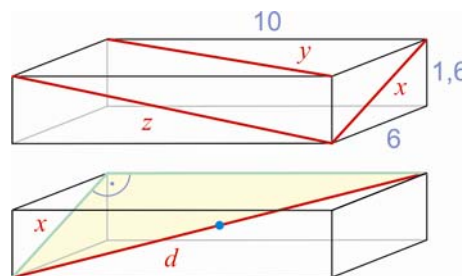
Megoldás:

A téglatest lapátlóit Pitagorasz-tétellel számítjuk

ki: $x = \sqrt{6^2 + 1,6^2} = \sqrt{38,56} \approx 6,21 \text{ (m)}$

$$y = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \approx 11,66 \text{ (m)}$$

$$z = \sqrt{1,6^2 + 10^2} = \sqrt{102,56} \approx 10,13 \text{ (m)}$$



A testátlót a kiemelt derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel határozzuk meg:

$$d^2 = 10^2 + x^2 = 10^2 + 6^2 + 1,6^2, \text{ ahonnan } d^2 = 138,56, \quad d \approx 11,77 \text{ (m)}.$$

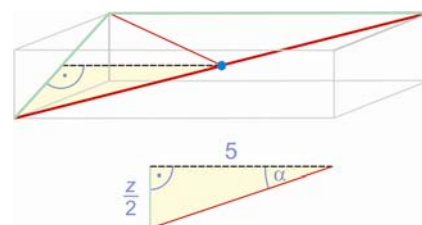
A megfelelő darabok hosszát összeadva kapjuk a szükséges anyagmennyiséget:

$$4 \cdot (10 + 6 + 1,6) + 2 \cdot (x + y + z) + 2 \cdot 11,77 \approx 150 \text{ m anyagra van szükség.}$$

A hajlásszög kiszámításához derékszögű háromszöget keresünk a testátlók által meghatározott síkban.

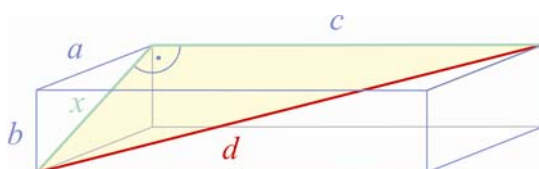
Szögfüggvény segítségével $\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{5} = \frac{z}{10}$, ahonnan

$$\alpha \approx 45,5^\circ.$$



A feladat megoldása során láttuk, hogy a **testátló hossza** hogyan függ az oldalak hosszától:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \text{ Ebből kapunk egy általánosan is igaz összefüggést:}$$



$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = x^2 \\ x^2 + c^2 = d^2 \end{array} \right\} a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

A téglatest testátlójának hossza: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ahol a , b és c a téglatest egy csúcsban összefutó éleinek hossza.

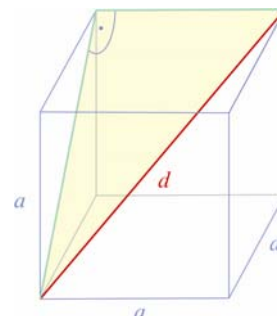
Mintapélda₄

Hogyan függ a kocka testátlójának hossza a kocka oldalhosszától (a)?

Megoldás:

A kocka is téglatest, így a testátlóra kapott összefüggést itt is alkalmazhatjuk. Most minden oldal egyenlő:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2}, \text{ ahonnan } d = a\sqrt{3}.$$



Feladatok

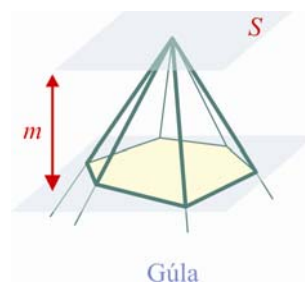
15. Egészítsd ki a táblázat hiányzó részeit! a , b és c egy téglatest egy csúcsban összefutó élei, d a testátló, A a felszín és V a térfogat.

	a	b	c	d	A	V
a)	5 cm	8 cm	10 cm			
b)	12,3 cm	0,46 dm	72 mm			
c)	10 m	20 m		34,3 m		
d)	6 cm		14,8 cm	19,4 cm		
e)		$a + 8$	$a + 11$	26,1 dm		

16. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója
 a) a kocka éleivel; b) a kocka lapjaival; c) a kocka egy másik testátlójával?
17. Mekkora a kocka térfogata és a felszíne, ha testátlója 12 cm?
18. Egy téglatest két éle 8 cm és 16 cm, felszíne 1168 cm^2 . Mekkora szöget zár be a testátlója azokkal az élekkel és lapokkal, amelyek a testátló egyik csúcspontjában találkoznak?
19. Mekkora szöget zár be a 4 cm alapélű, 499 cm^3 térfogatú, szabályos hatszög alapú hasáb leghosszabb testátlója az alaplappal?
20. Egy szabályos sokszög alapú egyenes hasáb alapéle a , oldaléle b . Fejezd ki a leghosszabb testátlót a és b segítségével, ha az alaplappal
 a) négyzet; b) hatszög; c) nyolcszög.






II. A gúla


Adott az alapsíkon egy sokszög (**alaplap**) és egy pont az alapsíkon kívül (**csúcspont**). Ha a sokszög minden pontját egyenesekkel összekötjük az adott ponttal, gúlafelületet kapunk. A keletkező korlátos térrészt nevezzük **gúlának**. A **gúla magassága** az alaplap síkjának és a csúcspontnak a távolsága.




Szabályos a gúla, ha az alaplapja szabályos sokszög, és a gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges az alaplap középpontján megy át.

Feladatok

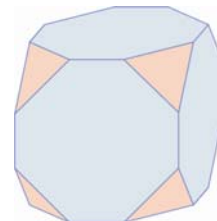
-  **21.** Kheopsz fáraó négyzet alapú szabályos gúlát formáló Nagy Piramisának eredeti alapéle 230 m, magassága 147 m volt. Számítsuk ki, hogy mekkora a térfogata és a felszíne!
-  **22.** Egy négyzet alapú szabályos gúla alapéle 3,5 dm. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 50 cm
- a) a testmagassága; b) az oldallapjának magassága; c) az oldaléle?
-  **23.** Egy hatszög alapú szabályos gúla alapéle $a = 12$ cm. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 20 cm
- a) testmagassága; b) oldallapjának magassága; c) oldaléle?
-  **24.** Egy négyzet alapú szabályos gúla alapéle 10 cm. Mekkora a gúla térfogata és a felszíne, ha 75°
- a) az oldalél és az alaplap hajlásszöge; b) az oldallap és az alaplap hajlásszöge?
-  **25.** Egy hatszög alapú szabályos gúla alaplapja köré 12 cm átmérőjű kör írható. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 45°
- a) az oldalél és az alaplap hajlásszöge; b) az oldallap és az alaplap hajlásszöge?


 **26.** Két szabályos gúla magassága megegyezik. Az egyik alaplapja szabályos ötszög, a másiké szabályos hatszög. A két sokszög köré írható körök sugara is megegyezik. Hány százalékkal nagyobb az egyik test térfogata a másik térfogatánál?

 **27.** Reklámcélra egy cég legyártja az ábrán látható testet: egy 120 cm élű kocka éleinek harmadoló pontjait kötötték össze, és levágták a kocka így adódó sarkait.


a) Mekkora a keletkező test térfogata?


b) Mekkora a felülete a piros és a kék részeknek összesen?



 **28.** a) Számítsuk ki az a élű szabályos tetraéder térfogatát és felszínét!

b) Mekkora az alaplap és az oldallap, illetve az alaplap és az oldalél hajlásszöge?

 **29.** A Téglatest együttes új nevet vett fel: Pyramys. Az együttes koncertjein árult, műanyagból készült, $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ élű téglatestekből 360 darab megmaradt. Ezeket megolvasztják, és olyan négyzet alapú szabályos piramisokat gyártatnak belőle, amelyek alapéle 7 cm, testmagassága 3,5 cm. A gyártás során 7%-os térfogatvesztéssel kell számolni. Hány ilyen piramis készíthető?

 **30.** Egy vállalkozás reklámcélokra hatszög alapú szabályos gúlákat csináltat, amit fából készítenek el. A gúla alapélei 4,2 cm hosszúak, magassága 25 mm. Eddig 250 ilyen ajándékot osztottak ki.

a) Hány cm^3 faanyag van az eddig kiosztott gúlákban?

b) A gúla oldallapjait színesre festik. Hány cm^2 felületet festenek be egy gúla oldallapjainak a színezésekor? Mennyi festékre volt szükség a 250 ajándék befestésekor, ha 1 m^2 -hez 3,6 liter festék kell?

Mintapélda₅

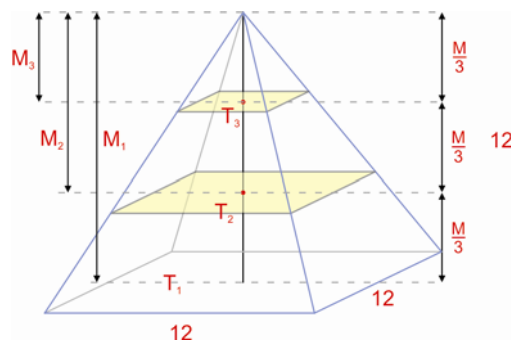
Egy 12 cm alapélű, 12 cm magasságú négyzet alapú szabályos gúlát elvágunk a testmagasság harmadoló pontjain átmenő, alaplappal párhuzamos síkokkal.

a) Határozzuk meg az így keletkező három test térfogatát!

Megoldás:

A vázlat elkészítése a megoldás egyik kulcs lépése.

Három gúlát kapunk, amelyek alaplapja hasonló



egymáshoz (a gúla csúcsából történő középpontos hasonlósággal ezek az alaplappal párhuzamos síkmetszetek egymásba vihetők).

A hasonlóság arányát a megfelelő szakaszok, most a testmagasságok arányából határozzuk meg. A hasonló síkidomok területe a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg: $T_2 : T_3 = (M_2 : M_3)^2 = 2^2$, ami azt jelenti, hogy $T_2 = 2^2 \cdot T_3 = 4T_3$, és hasonlóan $T_1 = 3^2 \cdot T_3 = 9T_3$.

A szabályos gúla alapterülete: $T_3 = \frac{T_1}{9} = \frac{12^2}{9} = 16 \text{ cm}^2$, $T_2 = 64 \text{ cm}^2$, a gúla térfogata

$$V = \frac{T \cdot M}{3}, \text{ a legkisebb gúlaé } V_3 = \frac{16 \cdot 4}{3} = \frac{64}{3} \approx 21,3 \text{ cm}^3.$$

A másik két test térfogata gúla térfogatának különbségeként állítható elő:

$$V_2 = \frac{64 \cdot 8}{3} - V_3 \approx 149,3 \text{ cm}^3, \text{ illetve } V_1 = \frac{12^2 \cdot 12}{3} - (V_2 + V_3) \approx 405,3 \text{ cm}^3.$$

Megjegyzés: A gúla alaplapjával párhuzamos síkok által levágott testek közül a gúla csúcsánál egy újabb gúla keletkezett, a másik két test pedig egy-egy csonkagúla, amellyel a későbbiekben részletesen foglalkozunk. A keletkezett kis gúla hasonló az eredetihez. A hasonlóság a térbeli alakzatokra is ugyanazt jelenti, mint a síkidomokra megadott definíció.

Mintapélda₆

Egy T alapterületű, M testmagasságú gúlát a csúcsából k -szorosára nagyítunk. Írd fel T , M és k segítségével a keletkező új gúla térfogatát!

Megoldás:

Az eredeti gúla térfogata $V = \frac{T \cdot M}{3}$. A nagyított gúla térfogata $V' = \frac{T' \cdot M'}{3}$, ahol T' az új

test alapterülete, M' pedig a testmagassága. A nagyított és az eredeti gúla hasonlósága

miatt $M' = k \cdot M$, míg az alapterület $T' = k^2 \cdot T$. Ezeket behelyettesítve




$$V' = \frac{T' \cdot M'}{3} = \frac{(k^2 \cdot T) \cdot (k \cdot M)}{3} = k^3 \cdot \frac{T \cdot M}{3} = k^3 \cdot V$$

Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának második hatványa. **Hasonló testek térfogatának aránya** a hasonlóság arányának harmadik hatványa.

Ha az 1. és a 2. test hasonló, és k a hasonlóság aránya, akkor

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2 \quad \text{és} \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3.$$

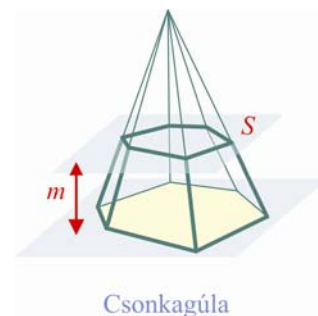
Feladatok

-  **31.** Egy szabályos gúlát úgy vágunk el egy alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a keletkező két rész térfogata megegyezzen. A magasság hányad részénél kell elvágunk a gúlát?
-  **32.** Egy hatszög alapú szabályos gúla testmagassága és alapéle egyaránt 24 cm. Úgy vágjuk el a gúlát egy alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a keletkező két rész térfogatának aránya 3 : 2 legyen!
- a) Számítsd ki a keletkező részek térfogatát!
- b) Hol kell elvágni a gúlát?
-  **33.** Egy 8,5 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla oldaléle az alaplappal 65° -os szöget zár be. Az alaplaptól milyen távolságokban vágjuk el a gúlát két, alaplappal párhuzamos síkkal, hogy a keletkező részek térfogata egyenlő legyen?

III. A csonkagúla

Ha a gúlát elmetsszük egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, **csonkagúlát** kapunk.

Egy szabályos gúlát elmetszve **szabályos csonkagúlát** kapunk.



Mintapélda₇

Hány liter virágföldet vásároljunk abba a négyzet alapú, csonkagúla alakú virágládába, amelynek belső méretei: az alaplap éle 26 cm, a fedőlap éle 38 cm, a láda magassága 47 cm?

Megoldás: A cserép térfogatának meghatározásához ismerni kell a csonkagúla térfogatának kiszámítási módját. Hasonlóság segítségével a következő képletet lehet levezetni:

$$\text{A csonkagúla térfogata: } V = \frac{M}{3} (T + \sqrt{t \cdot T} + t), \text{ ahol } M \text{ a testmagasság, } t \text{ a fedőlap, } T \text{ az alaplap területe.}$$

Az adatokat a képletbe behelyettesítve:

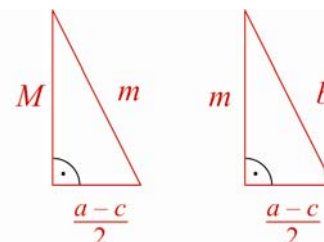
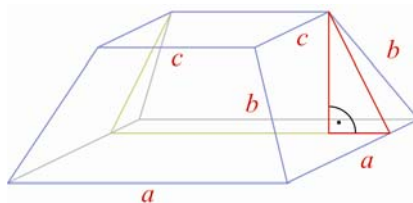
$$V = \frac{47}{3} (26^2 + \sqrt{38^2 \cdot 26^2} + 38^2) = 48692 \text{ cm}^2 \approx 48,7 \text{ liter.}$$

Érdemes tehát egy 50 literes zsák virágföldet megvásárolni.

A **csonkagúla felszínének** kiszámításához nincs képlet, minden feladatot egyedi módon oldunk meg. Ha a csonkagúla négyzet alapú szabályos gúlából származott, melynek adatai az ábrán láthatók, akkor meghatározzuk az oldallapok (trapézok) területét. Az oldallap magassága (m) és testmagasság (M), valamint az oldallap magassága és az oldalél (b) között a Pitagorasz-tétel teremt kapcsolatot:

$$m^2 = M^2 + \left(\frac{a-c}{2} \right)^2$$

$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a-c}{2} \right)^2$$



Feladatok

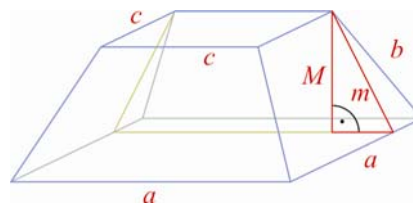
34. Egy egyiptomi matematikátörténeti emlék, a moszkvai papirusz a következőképpen írja le a csonkagúla térfogatának kiszámítását:

„[...] alapélek: 2, illetve 4 könyök, magasság: 6 könyök.

1. Add össze ezt a 16-ot
2. ezzel a 8-cal és ezzel a 4-gyel:
3. kijön 28. Számítsd ki
4. $\frac{1}{3}$ -át a 6-nak. Kijön 2.
5. Számolj 28-asával kétszer. Kijön 56.
6. Nézd, ez 56. Helyesen számítottad ki.”

Valóban helyes a számolás? Ellenőrizd!

35. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!





	a	b	c	m	M	V	A
a)	10	6	6				
b)	18		10	6			
c)		5	8	4			
d)			5	15	12		

36. Egy 3,6 dm élű kocka egyik oldalának csúcsait összekötjük a szemközti oldal középpontjával, majd az így kapott gúlát elvágjuk az adott oldallal párhuzamos, a kocka középpontján átmenő síkkal. Határozd meg az így kapott csonkagúla térfogatát és felszínét!

37. Egy sokszög alapú szabályos csonkagúla alaplajának éle 18 cm, fedőlapjának éle 8 cm, oldaléle 20 cm. Mekkora a térfogata és felszíne, ha az alaplaj
- a) négyzet; b) szabályos hatszög?


38. Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla alapéle 26 cm, fedőlapjának éle 18 cm, és az oldallapok 73° -os szöget zárnak be az alaplappal. Mekkora a térfogata és a felszíne?

 **39.** Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla alapéle 16 cm, fedőlapjának éle 8 cm, és az oldalélek 64° -os szöget zárnak be az alaplappal. Mekkora a térfogata és a felszíne?

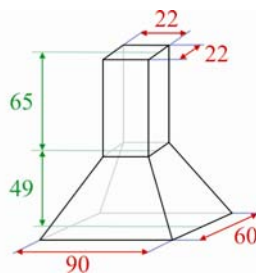
 **40.** Egy szobor talapzata 1,7 méter magas hatszög alapú szabályos csonkagúla, az alaplappal éle 120 cm, és a fedőlap éle 30%-kal kisebb az alaplappal élénél.

a) Mekkora a talapzat tömege, ha az anyaga $2,7 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű márvány?

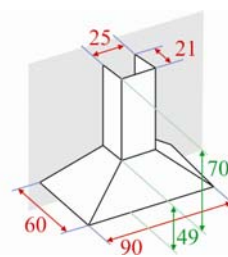
b) Télire becsomagolják a szobor talapzatát, hogy megóvják az időjárás viszonyosságaitól. Mennyi csomagolóanyagra van szükség, ha a kötéshez a talapzat felszínén kívül még 10% anyagot rá kell számolni?


 **41.** Az ábrákon kürtös páraelszívók láthatók. Számítsd ki a térfogatukat és a felszínüket! A páraelszívók szimmetrikusak egy olyan síkra, amelyik az alaplappal 60 cm-es élével párhuzamos és az alaplappra merőleges. Minden távolságot cm-ben értendő.

a)



b)



 **42.** Egy háromszög alapú szabályos csonkagúla oldallapjai az alaplappal 70° -os szöget zárnak be. A csonkagúla magassága 19 cm, az alaplappal éle 32 cm. Mekkora a felszíne és a térfogata?

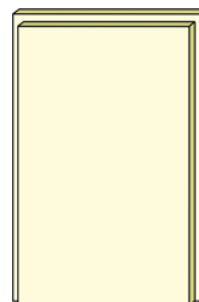
IV. Vegyes feladatok

43. Mekkora annak a háromszög alapú egyenes hasábnak a térfogata és felszíne, amelynek alapélei 10 cm, 12 cm és 14 cm, oldaléle pedig 20 cm hosszú?

44. Egy négyzetes oszlop oldalhosszai centiméterrel mérve egész számok, térfogata 72 cm^3 . Mennyi lehet a felszíne?

45. Egy ajtót úgy készítettek, hogy két bútorlapot összeragasztottak. Az egyik méretei: $82 \text{ cm} \times 201 \text{ cm} \times 23 \text{ mm}$, a másik méretei: $85 \text{ cm} \times 202,5 \text{ cm} \times 15 \text{ mm}$.

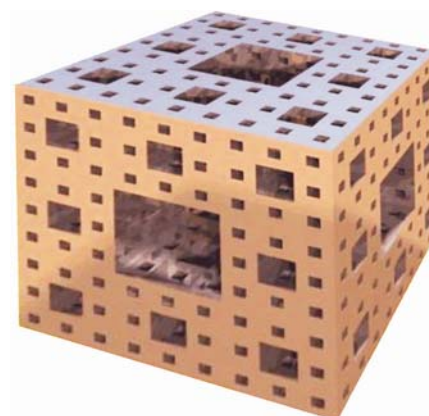
- a) Számítsd ki az egyes bútorlapok, majd az egész ajtó anyagának térfogatát!
- b) Mekkora a tömege az ajtónak, ha a bútorlap sűrűsége 600 kg/m^3 ?



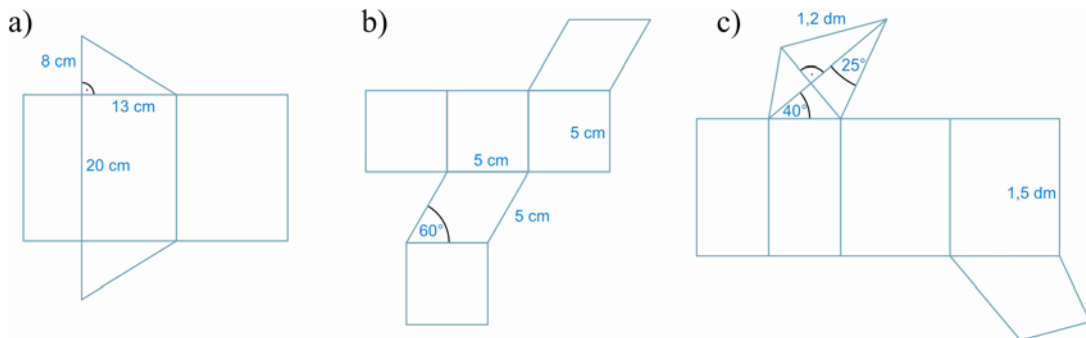
A sűrűség, a tömeg és a térfogat közötti összefüggés: $\rho = \frac{m}{V}$.

46. Egy 108 cm élű kocka oldalait kilenc egybevágó négyzetre osztjuk, és a középső négyzeteknek megfelelően teljesen átfúrjuk a kockát.

- a) Mennyi a megmaradó rész térfogata?
- b) A kocka lapjain megmaradó 8-8 négyzetet újra 9 egybevágó négyzetre osztjuk, és az itt megjelenő középső négyzeteknek megfelelően ismét átfurkáljuk a kockából megmaradt testet. Mekkora az így keletkező test térfogata?

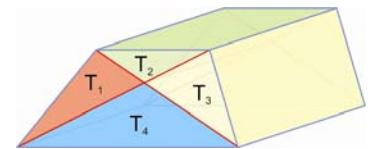


47. Mekkora annak a hasábnak a térfogata és felszíne, amelynek hálóját és méreteit az ábra mutatja?



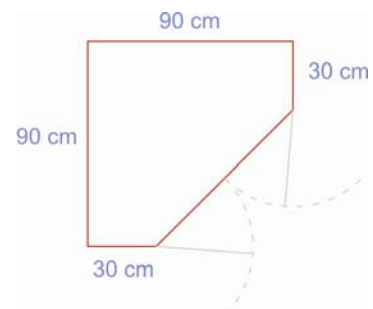
48. Egy egyenes hasáb alaplappja olyan trapéz, amelynek egyik alapja kétszerese a másiknak. Hogyan tudnánk három, egyenlő térfogatú hasábra vágni két olyan síkkal, ami párhuzamos az oldalélekkel?

49. Egy trapéz alapú egyenes hasábot az alaplapp átlóját tartalmazó, alaplappra merőleges síkokkal négy darab háromszög alapú hasábra bontunk az ábra szerint. Milyen összefüggések találhatók a keletkező hasábok térfogatai között? A trapéz rövidebbik alapja 6 cm, a hosszabbik 15 cm.











50. A 10 cm alapélű, 15 cm testmagasságú, rombusz alapú egyenes hasábok közül melyiknek a legnagyobb a térfogata? Számítsd ki a maximális térfogatot és azt is, hogy ekkor mennyi a felszín!

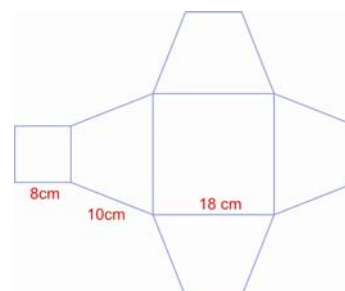
51. Egy hasáb alakú sarokgardrób alaplappja látható az ábrán. Mennyibe kerül a bútorlap költsége, ha a szekrény magassága 193 cm, körbe mindenhol bútorlap határolja és a négyzetméter-ár 2400 tallér?



52. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle az alapél kétszerese. Mekkora szöget zár be az alaplapp az oldallappal?

53. Egy szabályos négyoldalú gúla alapélének és testmagasságának aránya 3 : 5, térfogata 1875 cm^3 . Mekkora a felszíne?

-  **54.** Egy 24 cm élű kocka egyik oldalának csúcsait összekötjük a szemközti oldal középpontjával. Határozd meg az így kapott gúla térfogatát és felszínét!
-  **55.** Egy kerítésdísz úgy készítenek, hogy egy 26 cm élű kocka szemközti oldalainak csúcsait összekötik a kocka középpontjával (középen pontszerűen összehegesztik). Határozd meg az így kapott dísz térfogatát és felszínét!
-  **56.** A 20 cm magasságú, 18 cm alapélű, négyzet alapú szabályos gúlát az alaplappal felfelé fordítjuk, és a magasság feléig megtöltjük vízzel. Ezután lezárjuk, és a gúlát az alaplappal fordítva lerakjuk az asztalra. Milyen magasan áll benne a víz?
-  **57.** Egy ötszög alapú szabályos gúla alaplappja köré 6,8 cm sugarú kör írható. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 45°
 a) az oldalél és az alaplapp hajlásszöge; b) az oldallap és az alaplapp hajlásszöge?
-  **58.** Egy nyolcszög alapú szabályos gúla alaplappja köré 2,3 dm sugarú kör írható. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha 35°
 a) az oldalél és az alaplapp hajlásszöge; b) az oldallap és az alaplapp hajlásszöge?
-  **59.** Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla testmagassága 25° -os szöget zár be az oldallap magasságával, és a két magasság különbsége 6,8 cm. Mekkora a térfogata és a felszíne, ha a fedőlap éle 23 cm?
-  **60.** Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla fedőlapjának és alaplappjának élei közötti különbség 12 cm, testmagassága 13,8 cm. Mekkora a felszíne, ha a térfogata 2498 cm^3 ?
-  **61.** Mekkora annak a négyzet alapú csonkagúlának a térfogata és felszíne, amelyiknek hálóját az ábrán látható?



Kislexikon

A **test térfogata**: annak a térrésznek a mértéke, amelyet a test felülete határol. A térfogatot mindig valamilyen térfogategységhez hasonlítjuk.

Térfogategység: az egységélű kocka térfogata.

A **test felszíne**: a testet határoló felület területe. Síklapokkal határolt testek esetén a határoló lapok területének összege.

Poliédernek nevezünk egy testet, ha azt véges sok sokszög határolja.

Konvex poliéder: bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza.

Euler tétele: $l + c = e + 2$ (lapok + csúcsok száma = élek száma + 2); minden konvex poliéderre teljesül.

Szabályos poliéder: élei, élszögei és lapszögei egyenlők.

Hasáb: Adott az alapsíkon egy sokszög (**alaplapp**) és egy egyenes, amely az **alapsíkkal** nem párhuzamos. Ha a sokszög minden pontján keresztül párhuzamost húzunk az adott egyenessel, hasábfelületet kapunk. Ezt elmetsszük egy, az alapsíkkal párhuzamos síkkal (**fedőlap**). Az így keletkező bezárt térrészt nevezzük **hasábnak**.

Egyenes hasáb: olyan hasáb, amelynél az adott egyenes merőleges az alapsíkra.

Palást: a poliéder oldallapjainak együttese.

Gúla: Adott az alapsíkon egy sokszög (**alaplapp**) és egy pont az alapsíkon kívül (**csúcspont**). Ha a sokszög minden pontját egyenesekkel összekötjük az adott ponttal, gúlafelületet kapunk. A keletkező bezárt térrészt nevezzük **gúlának**. A gúla **magassága** az alaplap síkjának és a csúcspontnak a távolsága.

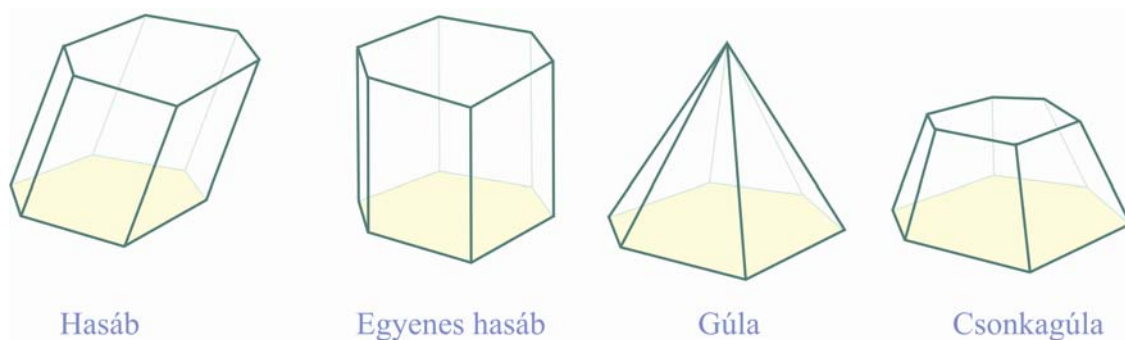
Szabályos gúla: ha az alaplapja szabályos sokszög, és a gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges az alaplap középpontján megy át.

Csonkagúlát kapunk, ha a gúlát elmetsszük egy, az alaplappal párhuzamos síkkal.

Szabályos csonkagúla: ha szabályos gúlát metszünk el egy, az alaplappal párhuzamos síkkal..

Gyakran előforduló poliéderek térfogata és felszíne:

- A kocka térfogata: $V = a^3$, felszíne $A = 6a^2$ (a a kocka éle).
- A téglatest térfogata $V = abc$, felszíne $A = 2(ab + bc + ac)$ (a , b és c a téglatest élei).
- A hasáb térfogata: $V = \text{alapterület} \cdot \text{testmagasság}$,
felszíne: $A = 2 \cdot \text{alapterület} + \text{a palást területe}$.
- A gúla térfogata $V = \frac{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}{3}$, felszínét a határoló lapok területeinek összege adja.
- A csonkagúla térfogata: $V = \frac{M}{3}(T + \sqrt{t \cdot T} + t)$, ahol M a testmagasság, t a fedőlap, T az alaplappal területe.



Hasonló testek: két test hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikhoz rendeli. Hasonló testek esetén fennáll a síkidomokra is érvényes állítás: az egyik alakzat két tetszőleges pontjának egymástól való távolsága s a másik alakzat megfelelő pontjainak egymástól való távolsága között levő arány állandó.

Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.

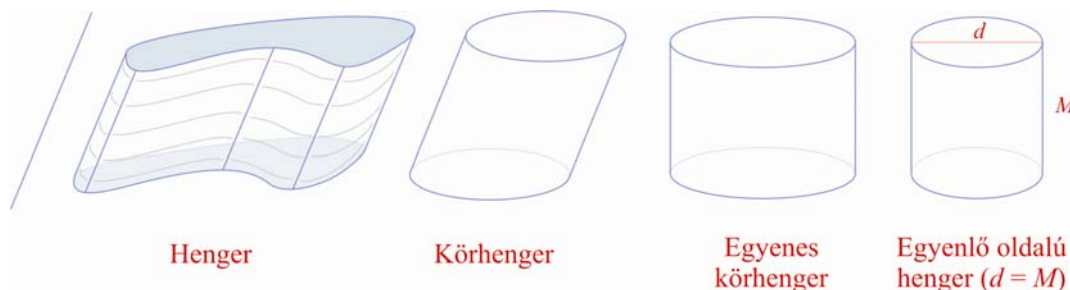
5. MODUL

TÉRFOGAT ÉS FELSZÍNSZÁMÍTÁS₂

Készítette: Vidra Gábor

I. A henger

A henger származtatása, jellemzői

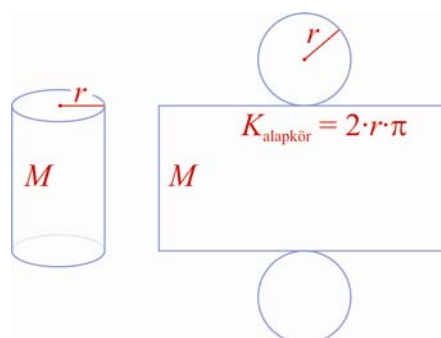


Adott az alapsíkon egy görbe vonallal határolt síkidom (alaplap) és egy egyenes, amely az alapsíkkal nem párhuzamos. Ha a görbe minden pontján keresztül párhuzamost húzunk az adott egyenessel (alkotók), **hengerfelületet** kapunk. Ezt elmetsszük egy, az alapsíkkal párhuzamos síkkal (fedőlap). Az így keletkező, az alaplap és a fedőlap közé eső térrészt nevezzük **hengernek**. Ha a görbe kör, a test neve **körhenger**. **Egyenes körhengernél** az alkotók merőlegesek az alapsíkra. A test görbe határoló felületét **palástnak** nevezzük. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága adja a **testmagasságot**.

A hasáb térfogatához hasonló a **henger térfogata**: az alapterület és a testmagasság szorzatával határozhatjuk meg.

Körhenger esetén: $V = r^2 \cdot \pi \cdot M$, ahol r az alapkör sugara, M a testmagasság.

Az egyenes körhenger (a továbbiakban ezt nevezzük hengernek, ha a feladat szövege nem utal a henger egyéb tulajdonságaira) felszínének kiszámításakor figyelembe vesszük, hogy a henger palástja síkba kiterítve téglalap.



A henger felszíne: $A = 2r^2\pi + 2r\pi M = 2r\pi(r + M)$.

Mintapélda₁

Az üvegben a címke szerint 750 ml méz található. Milyen magasan áll a méz a henger alakú üvegben, ha az alaplap belső átmérője 9 cm?



Megoldás:

$750 \text{ ml} = 750 \text{ cm}^3$. A térfogat képlete $V = r^2 \cdot \pi \cdot M$, behelyettesítve

$$750 = 4,5^2 \cdot \pi \cdot M \Rightarrow M \approx 11,8 \text{ cm}.$$

A méznek az üvegben kb. 12 cm magasan kell állnia.

Mintapélda₂

Egy henger magassága kétszerese az alaplap átmérőjének. Mekkora a térfogata, ha a felszíne $985,2 \text{ cm}^2$?

Megoldás:

$M = 2d = 4r$; behelyettesítve a felszín képletébe:

$$A = 2r\pi \cdot (r + 4r) = 2r\pi \cdot 5r = 10r^2 \cdot \pi = 985,2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$r = \sqrt{\frac{985,2}{10 \cdot \pi}} \approx 5,6 \text{ (cm)}$. A térfogat értéke a $V = r^2 \cdot \pi \cdot M = 4r^3 \cdot \pi$ összefüggésből:

$$V \approx 2206,9 \text{ cm}^3.$$

Feladatok

1. Számítsd ki annak a hengernek a térfogatát és felszínét, amelyet egy $16 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ -es téglalap megforgatásával kapunk, ha a téglalapot a

- a) rövidebb oldalának felezőmerőlegese; b) hosszabb oldalának felezőmerőlegese;
c) rövidebb oldala; d) hosszabb oldala körül forgatjuk meg.

Töltsd ki a táblázatot!

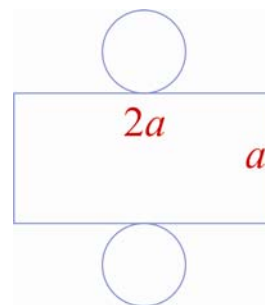
	r	M	V	A
a)				
b)				
c)				
d)				

2. Az a és b oldalú téglalapot megforgatjuk az a oldala körül, a keletkező test térfogata V , felszíne A . Keresd meg az összetartozó betű–szám párosokat!

A) $a = 15; b = 5$; B) $a = 18; b = 12$; C) $a = 4; b = 3$; D) $b = 7; a = 3$;

1) $\frac{V}{A} = \frac{18}{5}$; 2) $\frac{A}{V} = \frac{20}{21}$; 3) $\frac{V}{A} = \frac{15}{8}$; 4) $\frac{V}{A} = \frac{6}{7}$.

3. Mekkora az ábrán látható henger térfogata? $a = 15$ cm.



4. Egy 6 hengeres motorról a henger leírásában a következőt találjuk:

furat \varnothing / lökethossz = 89,00/74,8 mm. Hány cm^3 -es a motor?

5. Kati mamája egy fektetett félhenger alakú fóliasátrat szeretne, amelyikben ki is tud egyenesedni. Ezért szeretnék, hogy a 23 méter hosszú sátor teteje 2 méter magas legyen.

- a) Hány m^2 fóliával lehet a sátrat bevonni?
b) Hány m^3 a sátor térfogata?


6. Egy henger kiterített palástja négyzet, a felszíne $3384,5 \text{ cm}^2$. Mekkora a térfogata?


7. Egy betoncső külső átmérője 50 cm, a belső átmérő 40 cm. Mekkora a 6 méteres betoncső tömege, ha a beton sűrűsége 2200 kg/m^3 ? (A sűrűséget a $\rho = \frac{m}{V}$ összefüggés adja, ahol m a tömeg, V a térfogat, és a csőben levő levegő tömege elhanyagolható.)

8. Egy henger alakú vödör átmérője 26 cm, és felmosáskor 20 cm magasan áll benne a víz. A felmosószer kupakján ez áll: „5 liter vízhez 1 kupakkal öntsön”. Hány kupakkal kell öntenünk felmosáskor a vödörbe?

9. Egy henger alaplappjának átmérője harmada a testmagasságnak. Mekkora

- a) a térfogata, ha a felszíne $395,8 \text{ cm}^2$; b) a felszíne, ha a térfogata $217,1 \text{ dm}^3$.


-  **10.** Egy körhenger alakú hordó átmérőjének és magasságának aránya $5 : 6$. Úgy szeretnénk az oldalukra fordítva és kiékelve elhelyezni egymás mellett a hordókat, hogy közöttük $8\text{--}10\text{ cm}$ hely maradjon. Hány ilyen 15 hektoliteres hordót tudunk elhelyezni egy $7,5$ méter hosszú pincerészben?


-  **11.** Egy ferde henger alkotói 55° -os szöget zárnak be a 8 cm átmérőjű alaplappal, az alkotók hossza 10 cm .

a) Válaszd ki, hogy milyen alakú a ferde henger palástja!



b) Mekkora a henger térfogata?


-  **12.** Egy henger palástja síkba kiterítve $12\text{ cm} \times 18\text{ cm}$ -es téglalap. Mennyi a henger felszíne és térfogata? Ne csak egy megoldásra gondolj!

-  **13.** Egy henger palástja olyan négyzet, amelynek átlója 12π . Mekkora a térfogata és a felszíne?

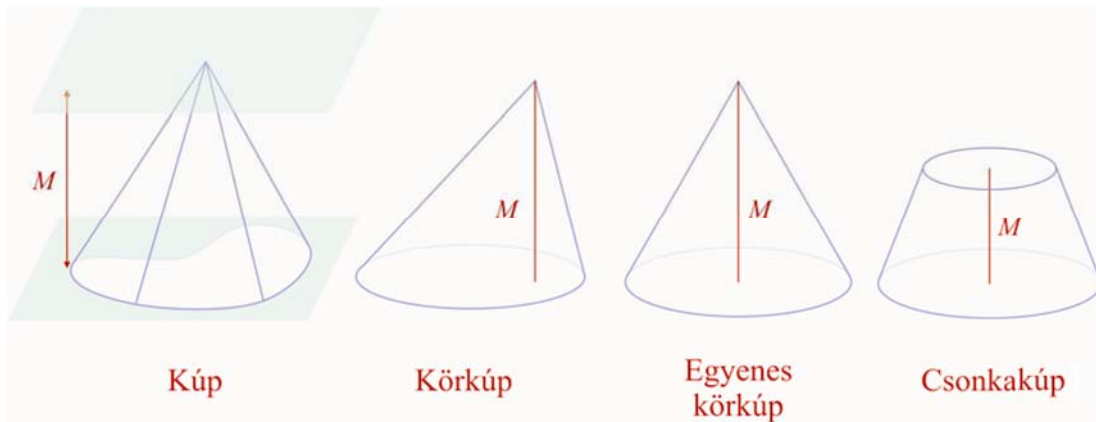
-  **14.** Egyenlő oldalú henger (az alapkör átmérője egyenlő a magassággal)

a) térfogata $2155,1\text{ m}^3$. Mennyi a felszíne?

b) felszíne $2851,7\text{ dm}^2$. Mennyi a térfogata?

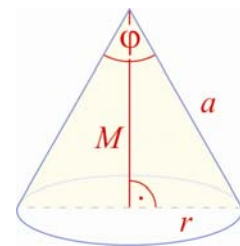
-  **15.** Egy 15 cm átmérőjű, 42 cm magasságú körhenger alakú üvegben a vízszint az átmérő kétharmadánál van, ha az üveget elfektetjük. Hány liter víz van az üvegben?

II. A kúp



Adott az alapsíkon egy görbe vonallal határolt síkidom (alaplapp) és egy pont az alapsíkon kívül (csúcspont). Ha a görbe minden pontját egyenesek segítségével összekötjük az adott ponttal, kúpfelületet kapunk. A keletkező korlátos testet **kúp**nak nevezzük. Ha a zárt görbe kör, a test neve **körkúp**. **Egyenes körkúp**nak nevezzük a körkúpot, ha a pontnak az alaplap síkjára eső merőleges vetülete az alapkör középpontjába esik. A test határoló felületét nevezzük **palást**nak (egyenes körkúp síkba kiterített palástja körcikk; a palást az alaplapot nem tartalmazza), a csúcspont és a görbe pontjai által meghatározott szakaszokat pedig **alkotó**knak. Az alaplap síkjának és a csúcshoz a távolsága adja a **kúp magasságát**.

Ha az egyenes körkúpot elmetsszük egy olyan síkkal, amely a kúp magasságának egyenesét tartalmazza (tengelymetszet), akkor egyenlőszárú háromszöget kapunk (alapja az alapkör átmérője, szárai a kúp alkotói). Másként: az egyenes körkúp tengelymetszete egyenlőszárú háromszög. A szárak által bezárt szöget (φ) a **kúp nyílásszöge**nek nevezzük. Az egyenes körkúp szimmetrikus bármely, a tengelyét tartalmazó síkra. A sugár, a testmagasság és az alkotók között fennáll az $r^2 + M^2 = a^2$ összefüggés.



Bizonyítható, hogy a kúp térfogata a gúla térfogatához hasonlóan, a

$$V = \frac{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}{3}$$
 összefüggéssel számítható ki. Az egyenes körkúp térfogata tehát:

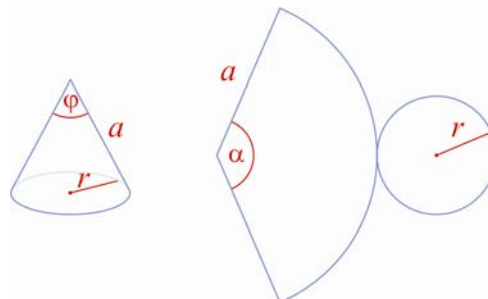
$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3},$$
 ahol r az alapkör sugara, M a kúp magassága.

Az egyenes körkúp felszínének meghatározásához a kúpot az egyik alkotója mentén „szét kell vágunk”: a palást síkba kiterítve egy körcikk, amelynek ívhossza egyenlő az alapkör kerületével.

A körcikk területe kiszámítható a $T_{\text{körcikk}} = \frac{l \cdot r}{2}$

összefüggéssel, ami most $T_{\text{körcikk}} = \frac{2r\pi \cdot a}{2} = ra\pi$, ez a

kúp palástjának felszíne. Ehhez hozzáadva az alapkör területét a kúp felszínére az $A = r\pi(r + a)$ képletet kapjuk.



Az egyenes körkúp térfogata: $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$, felszíne: $A = r\pi(r + a)$.

A képletben r az alapkör sugara, M a kúp magasságának, a az alkotójának a hossza.


Feladatok

16. Számítsd ki a következő adatokkal megadott kúpok nyílásszögeit, és csoportosítsd az egyenlőket! (Minden távolságadat cm-ben értendő. K az alapkör kerülete, T a területe, a az alkotó hossza, r az alapkör sugara, M a kúp magassága.)

A1. $r = 2$, $a = 4$;	A2. $r = 3$, $M = 3,4$;	A3. $a = 12$, $K = 47,1$;	A4. $M = 19,4$, $T = 78,5$
B1. $r = 2,2$, $a = 8,8$;	B2. $r = 3$, $M = 5,2$;	B3. $a = 15$, $K = 62,8$;	B4. $M = 20$, $T = 804,2$
C1. $r = 4$, $a = 6$;	C2. $r = 10$, $M = 12,5$;	C3. $a = 64$, $K = 100,5$;	C4. $M = 19,1$, $T = 380,1$
D1. $r = 5$, $a = 8$;	D2. $r = 3,5$, $M = 13,6$;	D3. $a = 9,6$, $K = 30,2$;	D4. $M = 13,4$, $T = 452,4$

17. Döntsd el a következő állításokról, hogy melyik igaz és melyik hamis.

- A kúp alkotójának hossza egyenlő a testmagasságával ($a = M$).
- Ha a kúp alkotója kétszerese az alapkör átmérőjének, akkor a kúp nyílásszöge 29° .
- Minden kúp nyílásszöge egyenlő a kiterített palást középponti szögével.
- Ha egy kúpban a kiterített palást félkör, akkor a nyílásszöge 90° .
- A palást középponti szöge és az alapkör sugara egyértelműen meghatározza a kúpot.
- Ha egy kúpot kétszeresére nagyítunk, a palástjának felszíne is kétszeresére növekszik.

-  **18.** Egy a alapú, b szárú egyenlőszárú háromszöget megforgatunk a szimmetriatengelye körül. Állítsd térfogatuk szerint növekvő sorrendbe a keletkező kúpokat!

	A	B	C	D
a	0,8 dm	1 dm	6 cm	12 cm
b	10 cm	8 cm	1,2 dm	8 cm

Mintapélda₃

Egy alul nyitott kúp alakú sátor alapkörének átmérője 4 m. Szeretnénk felállni a sátorban, ezért úgy akarjuk elkészíteni, hogy a szélétől 1,5 m távolságban 1,9 m magas legyen.

- Milyen magas a sátor?
- Mekkora a kiterített sátorlap körcikkének középponti szöge?
- Hány m^2 anyagból készíthető el a sátorlap?

Megoldás:

a) A hasonlóság miatt $M = \frac{2}{1,5} \cdot 1,9 \approx 2,53$ m.

b) Az alkotóra érvényes: $a^2 = r^2 + M^2$, ebből

$$a = \sqrt{2^2 + 2,53^2} \approx 3,23 \text{ m.}$$

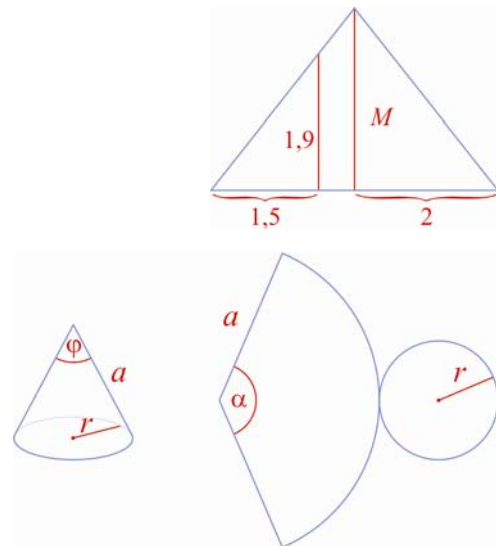
A körcikk sugara egyenlő az alkotóval, ívhossza pedig az alapkör kerületével. A középponti szög egyenesen arányos a körív hosszával, ezért

$$\alpha = \frac{i}{K_{\text{kör}}} \cdot 360^\circ. \quad i = 2r\pi = 4\pi \text{ (m)}, \quad K_{\text{kör}} = 2a\pi \approx 6,46\pi \text{ (m)}.$$








A középponti szög nagysága: $\alpha = \frac{4\pi}{6,46\pi} \cdot 360^\circ \approx 223^\circ$.

c) A körcikk területe: $T_{\text{körcikk}} = \frac{i \cdot a}{2} \approx 20,3 \text{ m}^2$.

Tehát a sátorlap előkészítéséhez kb. $20,3 \text{ m}^2$ anyag kell.

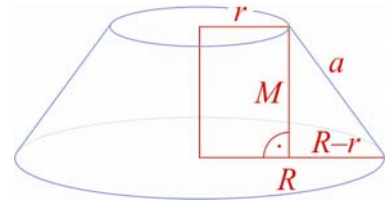


Feladatok

-  **19.** Egy csokigyárban naponta 12000 darab csokikúpot gyártanak, amelyet egyenként fóliába csomagolnak. A kúpok alapkörének átmérője és magassága egyaránt 4 cm.
- Hány liter csokoládéból készül el a napi készlet?
 - Mekkora felületű fóliát használnak naponta csomagolásra, ha a hajtogatás miatt 5%-kal többet kell számítani?
-  **20.** Egy kúp alkotója 15 cm. A csúcstól számítva a testmagasság negyedénél elvágjuk a kúpot egy alaplappal párhuzamos síkkal. A keletkező síkmetszet területe $15,9 \text{ cm}^2$. Mekkora az eredeti kúp térfogata és felszíne?
-  **21.** Egy kúp kiterített palástjának területe 63 cm^2 , az alkotó és az alaplap hajlásszöge $73^\circ 18'$. Mekkora a kúp térfogata és a palást középponti szöge?
-  **22.** Egy 4,8 m sugarú körlapot négy egybevágó körcikkre vágunk. Milyen magas körkúp alakú sátor készíthető egy-egy darabból?
-  **23.** Egy kúp palástjának felszíne $2\sqrt{2} \cdot \pi$ területegység, alapkörének területe 2π területegység. Mekkora a kúp nyílásszöge?
-  **24.** Egy kúp felszíne 792π , alkotója 8 egységgel hosszabb a sugaránál. Mekkora a térfogata?
-  **25.** Egy forgáskúp alapkörének átmérője egyenlő a kúp alkotójával. A kúp magasságának hossza $5\sqrt{3}$ cm. Készíts vázlatot!
- Mekkora a kúp felszíne?
 - Mekkora a kúp térfogata?
 - Mekkora a kúp kiterített palástjának középponti szöge?

III. A csonkakúp

Ha a kúpot elmetsszük egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, akkor egy kisebb kúpot és egy másik testet is kapunk, amelyet **csonkakúp**nak nevezünk. Az alaplappal és a fedőlap síkjának távolsága adja a csonkakúp **testmagasságát**.



Az egyenes körkútból származtatott csonkakúp térfogata:

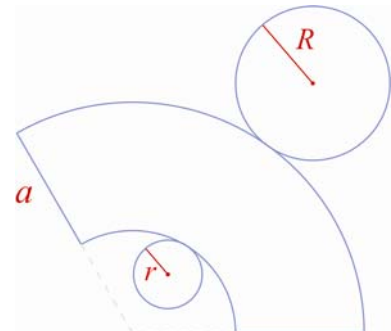
$$V = \frac{M \cdot \pi}{3} (r^2 + r \cdot R + R^2).$$

Megjegyzés: a képlet levezetésekor felhasználjuk, hogy a levágott (ún. kiegészítő kúp) hasonló ahhoz a kúphoz, amiből a csonkakúp keletkezett.

A csonkakúp felszínét megkapjuk, ha az alapkör és a fedőkör területéhez hozzáadjuk a csonkakúp palástjának felszínét. A palást síkba kiterítve körgyűrűcikket alkot.

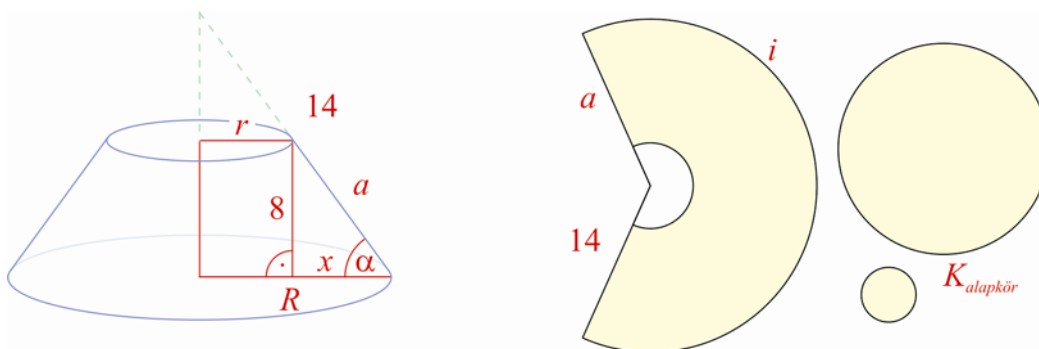
A csonkakúp felszíne $A = \pi \cdot (r^2 + R^2 + (r + R) \cdot a)$.

A a felszín, r az alapkör sugara, R a fedőkör sugara, a az alkotó.



Mintapélda₄

Készítsük el egy csonkakúp alakú vulkán kicsinyített modelljét A4-es papírok felhasználásával! A 14 cm sugarú körcikk még ráfér az A4-es kartonra úgy, hogy 228°-os a középponti szöge. Az alapkört, a fedőkört és a körgyűrűcikket kisebb ívét neked kell kiszámítanod és megrajzolnod. A modell magassága 8 cm legyen! Figyelj arra is, hogy a ragasztáshoz a megfelelő helyeken fülecskéket kell hagyni.

Megoldás:

A körcikk ívhosszából kiszámítjuk az alapkör sugarát: $i = \frac{228^\circ}{360^\circ} \cdot K_{\text{alapkör}} = \frac{228^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 14 \cdot \pi$, és

ez egyenlő az R sugarú kör területével: $\frac{228^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 14 \cdot \pi = 2 \cdot R \cdot \pi$, ahonnan

$$R = 14 \cdot \frac{228}{360} \approx 8,9 \text{ cm.}$$

A magasság: $M = 8$ cm, a fedőkör sugarát szögfüggvény segítségével állapítjuk meg:

$$\cos \alpha = \frac{R}{14} = \frac{8,9}{14} \Rightarrow \alpha \approx 50,5^\circ. \quad a = \frac{8}{\sin \alpha} \approx 10,4 \text{ cm}, \quad x = \frac{8}{\tan \alpha} \approx 6,6 \text{ cm.}$$

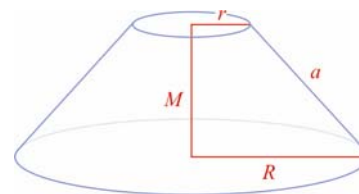
Mivel $x = R - r$, $r \approx 2,3$ cm. A körcikkből $14 - a \approx 3,6$ cm sugarú körcikket kell kivágni.

Feladatok





26. Egy csonkakúp alapkörének sugara 9 cm, a fedőköré 4 cm, az alkotója 15 cm.

- Számítsd ki a csonkakúp térfogatát!
- Számítsd ki a csonkakúp palástjának területét és felszínét!

27. Egészítsd ki a táblázat hiányzó részeit! Minden adat azonos egységrendszerben értendő. r a fedőkör sugara, R az alapkör sugara, M a csonkakúp magassága, a az alkotó, P a palást felszíne, A a csonkakúp felszíne és V a csonkakúp térfogata.



	r	R	a	M	V	P	A
a)	5	10	12				
b)	12	18		8,0			
c)	4		20			1131,0	

-  **28.** Egy csonkakúp alapkörének sugara 12 cm, a fedőköré 8 cm, a magassága 15 cm.
- Számítsd ki a kiegészítő kúp alkotójának hosszát!
 - Számítsd ki, hogy mekkora középponti szögű körcikkből lehet elkészíteni a csonkakúp palástját!
 - Számítsd ki, hogy a kiegészítő kúp térfogata hány százaléka a csonkakúp térfogatának!
-  **29.** Egy gyertyaöntő olyan csonkakúp alakú gyertyákat önt, amelyek alapkörének átmérője 10 cm, a fedőköré 6 cm, és a magassága 8 cm.
- Hány gyertyát tud kiönteni 50 liter folyékony viaszból?
 - Minden gyertyát külön celofánba csomagol, és a gyertya felszínénél 17%-kal többet kell számolnia a csomagoláshoz. Hány m² celofánt használ fel a kiöntött gyertyák csomagolásához?
-  **30.** Összekeveredett az építőjáték, szétestek a kúpok. A számok csonkakúpokat, míg a betűk kiegészítő kúpokat jelölnek, és a távolságok cm-ben adóttak. Találd meg az összeillőket az alábbi adatok alapján! Az ábra csak illusztráció.
- 
- | | |
|---------------------------------|---|
| A) $M = 6$ cm, $a = 1$ dm; | B) $M = 8$ cm, $a = 1$ dm; |
| C) $r = 3$ cm; $a = 58$ mm; | D) $r = 3$ cm; $a = 0,5$ dm; |
| 1) $M = 100$ mm; $a = 11,7$ cm; | 2) $r = 3$ cm; $R = 2,1$ dm; $M = 16$ cm; |
| 3) $M = 72$ mm; $a = 1,2$ dm; | 4) $r = 6$ cm; $R = 90$ mm; $a = 1,5$ dm. |
- A) – D) kúpokat jelöl, amelyeknél a az alkotó, M a magasság, r az alapkör sugara.
- 1) – 4) csonkakúpokat jelöl, amelyeknél R az alapkör sugara, r a fedőkör sugara, a az alkotó, M a magasság.

IV. A gömb

A gömb a természet egyik, talán a legfontosabb alapformája. Bizonyítható, hogy az egyenlő térfogatú testek közül a gömbnek a legkisebb a felszíne, ezért ugrik össze gömb alakú cseppé a folyadék, ha teheti (például a higany). Az égitestek alakja többé-kevésbé gömb, és kis golyókkal modellezzük a természet sok jelenségét (például az atommagot és a körülötte keringő elektronokat csakúgy, mint a gázrészecskéket az ideális gázban, vagy a légszennyezést okozó aeroszol részecskéket).



A **gömb** egy adott ponttól (a középponttól) egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben. Minden síkmetszete kör, a legnagyobb területű síkmetszetet *főkörnek* nevezzük. Ha a gömböt egy síkkal metsszük, akkor gömbsüveg keletkezik (a gömbsüvegre vonatkozó összefüggéseket megtalálod a függvénytáblázatban).




A gömb térfogatát, illetve felszínét az integrálszámítás segítségével határozzuk meg, ami túlmutat a középszintű érettségi tananyagán.


Az r sugarú gömb térfogata és felszíne:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi, \quad A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$


Feladatok


-  **31.** Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! r a gömb sugara cm-ben, V a térfogat cm^3 -ben, A a felszín cm^2 -ben mérve.


	r	A	V
a)	3		
b)		254,5	
c)			44,6
d)			523,6

 **32.** Döntsd el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, illetve melyik hamis!

- a) Ha egy gömb sugarát háromszorosára növeljük, a felszíne és a térfogata is háromszorosára változik.
- b) Az egység sugarú gömb felszínének mérőszáma háromszorosa a térfogat mérőszámának.
- c) Ha egy 5 cm-nél nagyobb r sugarú gömb sugarát 3 cm-rel növeljük, a felszíne $4 \cdot (r + 3)^2$ -nel növekszik.
- d) Ha egy 5 cm-nél nagyobb r sugarú gömb sugarát 3 cm-rel növeljük, a térfogata $\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ -vel növekszik.
- e) Ha két gömb felszínének különbsége 490 cm^2 , akkor a két gömb sugarát R -rel és r -rel jelölve $R^2 - r^2 = 39$.

 **33.** Mekkora annak a gömbnek a sugara, amelyre igaz, hogy térfogatának mérőszáma duplája a felszíne mérőszámának?

 **34.** Egy 7 cm átmérőjű üveggolyó belül üreges, a falvastagság 6 mm. Mekkora az üveggolyó tömege, ha az üvegben elhanyagolható súlyú levegő van, és az üveg sűrűsége $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$, és a tömeg az $m = \rho \cdot V$ képlettel számolható?

 **35.** Mekkora oldalú fémkockából tudnak önteni 120 darab, 4,6 cm átmérőjű gömböt?

V. Testekkel kapcsolatos számítások

Mintapélda₅

A szilikon tömítőanyagot hengerekben árulják. A henger belső átmérője 45



mm, a tubus hossza 21,6 cm, és az aljától 4 cm-nyi helyet nem szilikon tölt ki. A henger folytatása egy 10,6 cm alkotójú csanak alakú kinyomócső, amelynek egyik végén 8 mm, a másik végén 2 mm átmérőjű a lyuk. Hány méteres egyenes csíkot tudnánk kinyomni a csőből? (A benne található szilikon folyékony, összenyomhatatlan.)

Megoldás:

A henger sugara 2,25 cm, magassága 17,6 cm. A hengerbe töltött szilikon térfogata:

$$V = 2,25^2 \cdot \pi \cdot 17,6 \approx 280 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A kinyomócső magassága: $\sqrt{10,6^2 - 3^2} \approx 10,596$ (mm), kinyomás után a kinyomócsőben

$$\text{maradó szilikon térfogata: } V_1 = \frac{10,596 \cdot \pi}{3} (0,4^2 + 0,4 \cdot 0,1 + 0,1^2) \approx 2,33 \text{ (cm}^3\text{)}, \text{ vagyis a}$$

$$\text{kinyomott csík térfogata } 280 - 2,33 = 277,67 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A kinyomott szilikoncsík sugara 1 mm, az egyenes csíkot hengerként számolva, a

$$\text{hossza: } x = \frac{277,67}{0,1^2 \cdot \pi} \approx 8838,51 \text{ mm} \approx 8,84 \text{ m}.$$

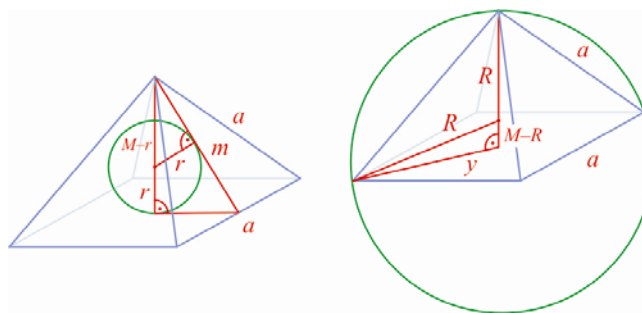
Mintapélda₆

Egy szabályos, négyzet alapú gúla oldallapjai 8 cm oldalú szabályos háromszögek. Mekkora a beírható és a köré írható gömb sugara?

Megoldás: A gömbök középpontjai a gúla magasságán találhatók. A beírt gömb esetén:

$$m = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \quad M = \sqrt{m^2 - 4^2} = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ (cm)}. \text{ A derékszögű háromszögek}$$

$$\text{hasonlósága miatt } \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{M-r}{m} \Rightarrow r = \frac{a \cdot M}{2m + a} = \frac{8 \cdot 5,66}{8\sqrt{3} + 8} \approx 2,1 \text{ (cm)}.$$




A köré írható gömb középpontja egybeesik az alaplap középpontjával, mert a négyzet átlója egyenlő a testmagasság kétszeresével, így a sugár: $R = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \approx 5,7$ (cm). Ha ezt nem vesszük észre, akkor a jelölt derékszögű háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt.

$$y = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)},$$

$$R^2 = y^2 + (M - R)^2 \Rightarrow R = \frac{y^2 + M^2}{2M} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Összetett testek

 **36.** A szomszéd szeretett volna hétvégi telkére egy jurtát, és találtunk is egy angol nyelvű honlapot az interneten, ahol rendelni lehet.

A szavak jelentése:

Diameter: átmérő

Wall Height: falmagasság

Roof Height: tetőmagasság


feet: láb (1 láb = 30,48 cm)

Forrás:

[<http://www.yurtworkshop.com/yurts/10foot>

MongolianGer.aspx]

Diameter (feet)	12
Wall Height (feet)	4
Roof Height (feet)	7'6"



Mekkora a jurta felszíne és térfogata? (Az egyszerűség kedvéért modellezzük alul-felül nyitott henger és kúp összerakásával a jurtát.)

Megjegyzés: A hüvelyk a tízes számrendszeren alapuló mértérendszer előtti időszak azon alapegységeinek egyike, amely az emberi test egyik részét, a hüvelykujj nagyságát vette mértékül. A hüvelyk a tizenkettes mértérendszerbe tartozik; egy lábnak a 12-ed része. Egy hüvelyk 12 vonalból áll, azaz 2,6 cm (tehát egy *vonat* 0,2 cm). Négy hüvelyk (azaz 10,4 cm) alkotott egy markot. A hüvelyk német neve (*Zoll*) is elterjedt: *coll*. Ezt az elnevezést főleg kézművesek, ácsok, asztalosok használták (*colos deszka*, *colos szeg* stb.). [Forrás: Magyar néprajzi lexikon]

37. Az ábra egy 9 mm átmérőjű lőszer oldalnézetét mutatja. Végezz méréseket az ábrán, és számítsd ki a lövedék felszínét és térfogatát!



38. Egy csónakakúp alakú parfümös üveget kartondobozba csomagolnak. A doboz méretei: $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$, a parfümös üveg méretei: a fedőlap átmérője 5 cm, az alaplapp átmérője 3 cm, a magassága 7 cm.



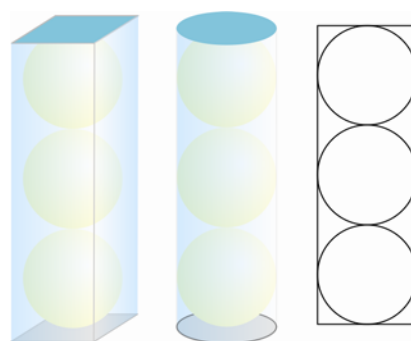
- Hány ml parfüm van az üvegben, ha az üveg térfogatának 56%-a a folyadék?
- A doboz térfogatának hány százaléka „üres”, azaz nincs kitöltve a parfümös üveggel?

39. 4 darab 9 cm átmérőjű, gömb alakú gyertyát csomagolnak kartondobozba, szorosan egymás mellé.




- A doboz térfogatának hány százalékát töltik ki a gyertyák?
- A sérülések elkerülése érdekében a gyertyák közé az alaplapp közepére egy hungarocell hengert tolnak, ami a gyertyákat érinti, és nem engedi elmozdulni. Legfeljebb mekkora legyen a henger sugara?

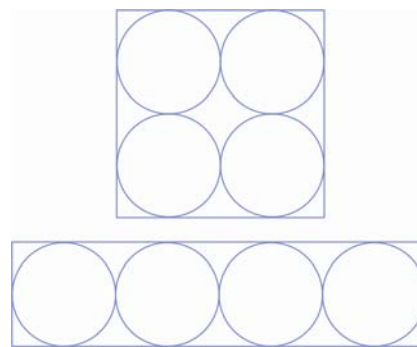
40. Egy teniszlabdagyárban 3 labdát csomagolnak kétféle csomagolásba: négyzetes oszlop, illetve henger alakú, műanyag oldalfalú dobozba. A dobozokat kartonokkal zárják le, mindkét végükön. A labdák átmérője 6,5 cm.




- Mekkora területű kartonra, illetve műanyagra van szükség az egyes dobozok elkészítéséhez?
- A dobozok térfogatának hány százaléka a három teniszlabda térfogata?
- Anyagfelhasználás és térkitöltés szempontjából melyik dobozt célszerűbb gyártani?

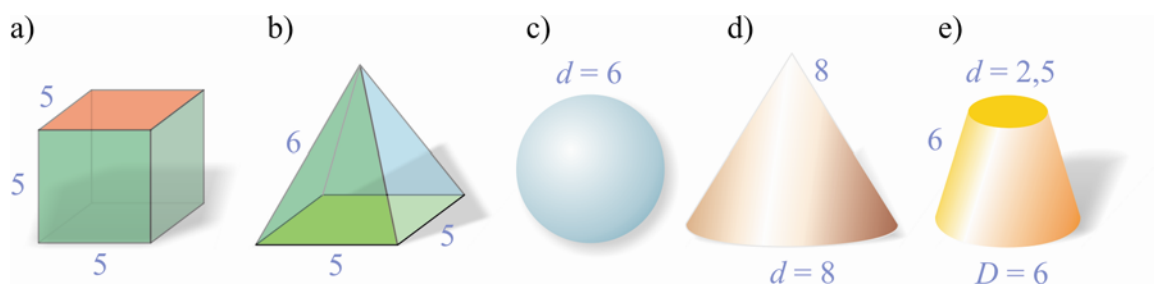
-  **41.** 4 cm átmérőjű fagolyókat négyesével kis (téglatest alakú) dobozokba csomagolunk úgy, hogy azok ne lötyögjenek a dobozokban. A két szoba jövő elrendezést felülnézetből lerajzoltuk.

A dobozokat átlátszó műanyag fóliával fedjük le, a doboz többi része kartonpapírból készül. A ragasztáshoz, hegesztéshez hozzászámoltuk a doboz méreteiből adódó anyagszükséglet 10%-át.




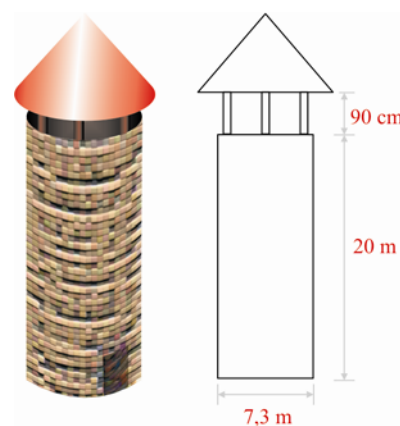
- a) Mennyi az anyagszükséglet egy-egy dobozfajtánál a két felhasznált anyagból külön-külön?
- b) A négyzet alapú dobozban a fagolyók közötti teret állagmegóvási célból tömítő anyaggal töltik ki. A doboz térfogatának hány százalékát teszi ki a tömítő anyag térfogata?

-  **42.** Egy 8 cm belső átmérőjű, 9,5 cm belső magasságú csészében 3 dl víz van. Mennyivel emelkedik meg a vízszint, ha a csészébe beletesszük az alábbi tárgyakat?



Minden távolságot cm-ben adtunk meg.

-  **43.** Egy ipari alpinista csoport azt a megbízást kapja, hogy fesse le az itt látható, hengerből és kúpból összeállított kilátó külső felületét. A tető kúp alakú, a torony szélé-
től 40–40 cm távolságra nyúlik ki. Az egész torony magassága 25,1 m. Határozd meg, hogy a tetőre és a vakolatra használt festékből hány m³-re valót kell a csapatnak beszereznie!



44. Az ábrán látható díz egy derékszögű háromszög átfogó körüli megforgatásával keletkezett. Két kúpot kaptunk, az egyik magassága 4,5 cm, a másiké 8 cm.

a) Mekkora a díz külső felszíne?

b) Mekkora a díz tömege, ha a sűrűsége $1,22 \text{ g/cm}^3$?



Beírt és köré írható testek

45. Egy 8 cm sugarú, 15 cm magasságú fakútból a lehető legnagyobb sugarú gömböt akarjuk kifaragni. A kúp anyagának hány százalékát kell eltávolítani?

46. Egy gömb köré és a gömbbe írt kocka éleinek különbsége 8 cm. Mekkora a gömb térfogata és felszíne?

47. Mekkora annak a kockának az éle, amelyet egy 16 cm alapélű, 20 cm magasságú szabályos négyoldalú gúlába írunk úgy, hogy a kocka egyik lapja a gúla alaplajján található, másik négy csúcsa pedig









a) az oldallapok magasságvonalaiban;

b) az oldaléleken?

48. Egy félgömb alakú színpadi sátrat 4 függőleges és a felső végüket összekötő 4 vízszintes, 5,6 méteres, kockát formázó fémoszlop tart. A kocka alaplajjának középpontja éppen a gömb középpontjában található. Mekkora a sátorponyva felszíne?

49. Egy szabályos, négyzet alapú gúla oldallapjai a oldalú szabályos háromszögek. Mekkora a beleírható és a köré írható gömb sugara a -val kifejezve?

Vegyes feladatok

-  **50.** Két hasonló henger felszínének aránya $4 : 25$, az egyik alapkörének sugara 15 cm -rel nagyobb a másik alapkörének sugaránál. A kisebb henger felszíne $2136,3\text{ cm}^2$. Mekkora a nagyobb henger térfogata?
-  **51.** Egy 24 cm magas egyenes körkúpot a csúcstól számítva mekkora távolságban kell az alaplappal párhuzamos síkkal elvágni, hogy a lemetezett kúpnak fele akkora legyen
a) a térfogata; b) a palástja, mint az eredeti kúpnak?
-  **52.** Csúcsára állított kúpot magasságának feléig töltünk meg vízzel. A testmagasság hány %-áig ér a víz, ha a kúpot megfordítva az alaplapjára állítjuk?
-  **53.** Ferde körkúp alapkörének területe $452,4\text{ cm}^2$, a leghosszabb alkotó 42° -os szöget zár be az alaplappal. Mekkora a legrövidebb alkotó, ha a kúp magassága 15 cm ?
-  **54.** Egy forgáskúp alapkörének sugara 10 , felszíne 224π egység. Hányszorosára növekszik a kúp térfogata, ha alkotóit 10 egységgel meghosszabbítjuk?
-  **55.** Egy csonkakúp fedőkörének sugara 5 cm -rel kisebb az alapkör sugaránál, testmagassága $19,4\text{ cm}$. Mekkora a felszíne, ha a térfogata $5617,3\text{ cm}^3$?
-  **56.** Egy csonkakúp alapkörének sugara 4 m , fedőkörének sugara 120 cm , és az alkotók az alaplappal 48° -os szöget zárnak be. Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata?
-  **57.** Egy csonkakúp alakú cserép aljának átmérője 21 cm , tetejének átmérője 30 cm és magassága 28 cm . Hány liter virágföldet vegyünk a cserépbe, ha a magasságának 85% -áig akarjuk feltölteni?

58. Mekkora annak a csonkakúpnak a felszíne és térfogata, amely az egyenletével megadott e egyenes megjelölt szakaszának x tengely körüli megforgatásával keletkezik?

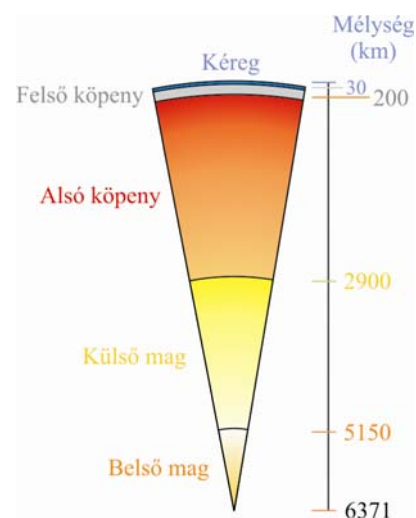
a) $e: y = -x - 3; 1 \leq x \leq 6;$ b) $e: y = -2x + 9; 1 \leq x \leq 4;$
 c) $e: 2y - x = 4; 2 \leq x \leq 10.$

59. A Föld felszínének 80%-a víz. Mit gondolsz, melyik a nagyobb: a teljesen száraz Hold felszíne, vagy a Földön a szárazföldek területének összege? A Föld sugara 6370 km, a Hold átmérője 3476 km.




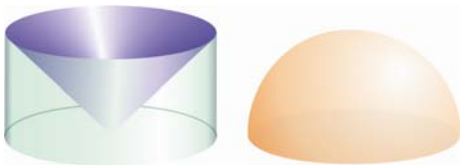





60. Egy asztali dísz 5 darab olyan gömbből áll, amelyek sugara 1 cm-rel növekszik az előzőhöz képest, és az első gömb sugara 1 cm.
 a) Mekkora az 5 gömb térfogatának összege?
 b) Becsüld meg, hogy az asztali dísz anyagából hány darab 38 mm átmérőjű pingponglabda készíthető!




61. A föld kérge és a földköpeny legfelső része összefüggő és együtt mozgó réteget alkot, ezt nevezzük a föld kőzetburkának (litoszféra). Határozd meg az ábra alapján, hogy a szilárd kőzetburok térfogata hány százaléka az egész föld térfogatának? (Tekintsük a Földet gömb alakúnak.)

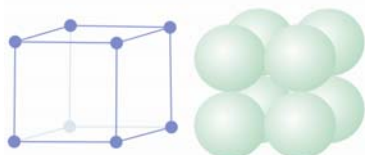


62. Egy 9 cm és 12 cm befogójú derékszögű háromszöget megforgatunk az egyik oldala körül. Állítsd nagyságrendi sorrendbe a keletkező testek felszínét és térfogatát, ha
 a) a rövidebb befogója; b) a hosszabb befogója;
 c) az átfogója mentén forgatjuk meg?

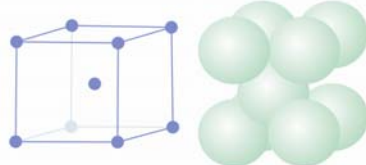
-  **63.** Egy húrtrapézt megforgatunk a szimmetriatengelye körül. A trapéz alapjai 58 mm és 20 mm, szárai 32 mm hosszúak. Mekkora a keletkező test térfogata és felszíne?
-  **64.** Egy paralelogramma két oldala 4 cm és 2 cm, a köztük levő szög 60° -os. Mekkora annak a testnek a térfogata és felszíne, amelyet a paralelogramma hosszabb oldal körüli megforgatásával kapunk?
-  **65.** Az első test úgy keletkezett, hogy egy r sugarú és r magasságú hengerből kifűrtünk egy csúcsára állított, ugyanolyan sugarú magasságú kúpot. A második test egy r sugarú félgömb. Hasonlítsd össze az alaplaptól tetszőleges x távolságban ($x < r$) a két test tengelyre merőleges metszetének területét!
- 
-  **66.** Lézergravírozással egy kockába 10 cm átmérőjű gömböt gravíroznak, majd a gömbbe egy olyan egyenes szabályos hatszög alapú gúlát, amelynek minden csúcsa a gömb felületére esik. Mekkora a gúla éle, ha a magassága az alapél kétszeresével egyenlő?
-  **67.** Mekkora sugarú gömb írható egy olyan szabályos sokszög alapú egyenes hasáb köré, amelynek magassága az alapél kétszerese? Az alapél 6 cm és az alaplappal
- a) négyzet; b) háromszög; c) hatszög; d) ötszög?
-  **68.** Mekkora sugarú gömb írható egy 12 cm élű szabályos
- a) tetraéderbe; b) tetraéder köré?
-  **69.** Egy 5 cm és egy 10 cm-es gömb kívülről érinti egymást. Határozd meg, hogy mekkora a gömbök köré írható kúp felszíne és térfogata!
-  **70.** Egy csonkakúp alaplappjai 12 cm és 4 cm átmérőjű körök, magassága 12 cm. A kisebb alaplajára állítva a testet egy olyan gömböt ejtettünk bele, ami teljesen beleszorult. Milyen messze van a gömb a felső alaplaptól?

-  **71.** A kristályokban az atomok, molekulák, ionok rácsszerkezetben helyezkednek el, amelynek legkisebb ismétlődő egységét elemi cellának nevezzük. Egyes kristályokban az elemi cella kocka alakú, ezek a köbös rácsok. Határozzuk meg a következő három köbös rács térkitöltési hatásfokát! (A térkitöltési hatásfok a cellatérfogatnak az a része, amit az egyforma gömböknek tekintett részecskék kitöltenek.)

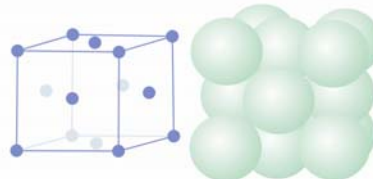
a) egyszerű köbös rács



b) tércentrált köbös rács

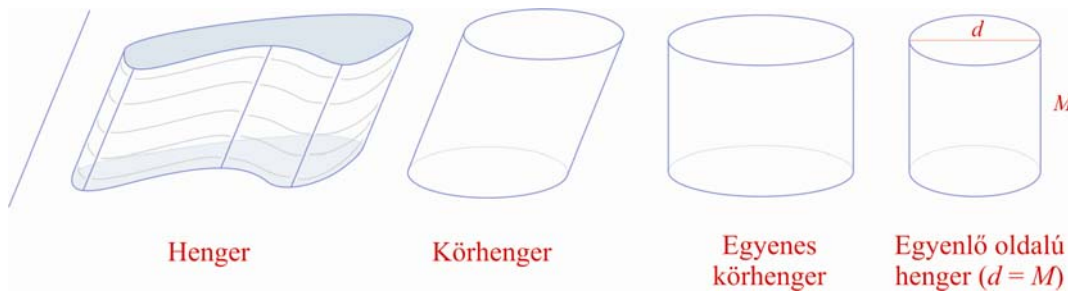


c) lapcentrált köbös rács



Kislexikon

Henger:



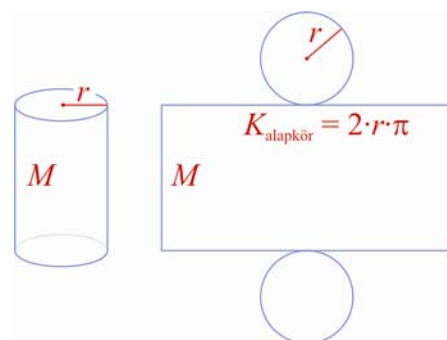
Adott az alapsíkon egy görbe vonallal határolt síkidom (alaplap) és egy egyenes, amely az alapsíkkal nem párhuzamos. Ha a görbe minden pontján keresztül párhuzamost húzunk az adott egyenessel (alkotók), **hengerfelületet** kapunk. Ezt elmetsszük egy, az alapsíkkal párhuzamos síkkal (fedőlap). Az így keletkező, az alaplap és a fedőlap közé eső térrészt nevezzük **hengernek**. Ha a görbe kör, a test neve **körhenger**. **Egyenes körhengernél** az alkotók merőlegesek az alapsíkra. A test görbe határoló felületét **palástnak** nevezzük. Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága adja a **testmagasságot**.

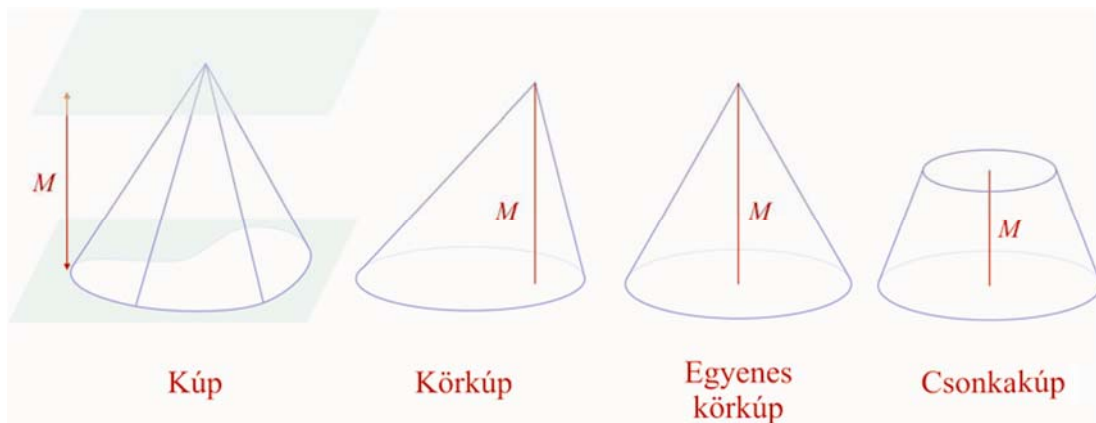
Körhenger térfogata: $V = r^2 \cdot \pi \cdot M$, ahol r az alapkör sugara, M a testmagasság.

Körhenger felszíne: $A = 2r^2\pi + 2r\pi M = 2r\pi(r + M)$, ahol r az alapkör sugara, M a testmagasság.

Az egyenes henger palástja: síkba kiterítve téglalap, felszíne:

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi M = 2r\pi(r + M).$$

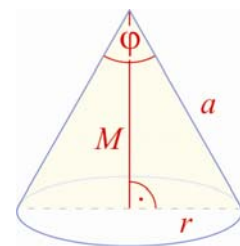


Kúp:

Adott az alapsíkon egy görbe vonallal határolt síkidom (alaplapp) és egy pont az alapsíkon kívül (csúcspont). Ha a görbe minden pontját egyenesek segítségével összekötjük az adott ponttal, kúpfelületet kapunk. A keletkező korlátos testet **kúpnak** nevezzük. Ha a zárt görbe kör, a test neve **körkúp**. **Egyenes körkúpnak** nevezzük a körkúpot, ha a pontnak az alaplap síkjára eső merőleges vetülete az alapkör középpontjába esik. A test határoló felületét nevezzük **palástnak** (egyenes körkúp síkba kiterített palástja körcikk; a palást az alaplapot nem tartalmazza), a csúcspont és a görbe pontjai által meghatározott szakaszokat pedig **alkotóknak**. Az alaplap síkjának és a csúcsnak a távolsága adja a **kúp magasságát**.

Kúp nyílásszöge:

Ha az egyenes körkúpot elmetsszük egy olyan síkkal, amely a kúp magasságának egyenesét tartalmazza (tengelymetszet), akkor egyenlőszárú háromszöget kapunk (alapja az alapkör átmérője, szárai a kúp alkotói). Másként: az egyenes körkúp tengelymetszete egyenlőszárú háromszög. A szárak által bezárt szöget (φ) a **kúp nyílásszögének** nevezzük. Az egyenes körkúp szimmetrikus bármely, a tengelyét tartalmazó síkra.



A sugár, a testmagasság és az alkotók között fennáll az $r^2 + M^2 = a^2$ összefüggés.

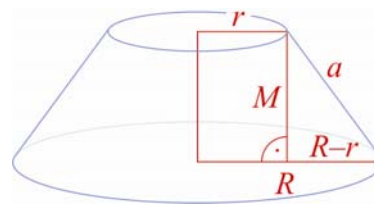
Kúp térfogata: $V = \frac{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}{3}$ összefüggéssel számíto ki, az egyenes körkúp

térfogata tehát: $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$, ahol r az alapkör sugara, M a kúp magassága.

Kúp felszíne: $A = r\pi(r + a)$, ahol r az alapkör sugara, a a kúp alkotója.

Csonkakúp:

Ha a kúpot elmetsszük egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, akkor egy kisebb kúpot és egy másik testet is kapunk, amelyet **csonkakúp**nak nevezünk. Az alaplappal és a fedőlap síkjának távolsága adja a **testmagasságot**.

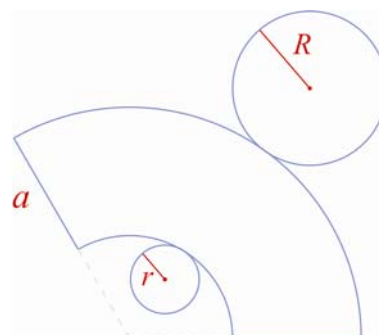
**Csonkakúp térfogata:**

Az egyenes körkútból származtatott csonkakúp térfogata: $V = \frac{M \cdot \pi}{3} (r^2 + r \cdot R + R^2)$, ahol

M a csonkakúp magassága, r a fedőkör sugara, R az alapkör sugara.

Csonkakúp felszíne: $A = \pi \cdot (r^2 + R^2 + (r + R) \cdot a)$, ahol a a csonkakúp alkotója, r a fedőkör sugara, R az alapkör sugara.

A csonkakúp palástjának felszíne: $P = (r + R)a\pi$.



Gömb: egy adott ponttól (a középponttól) egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben. Minden síkmetszete kör, a legnagyobb területű síkmetszetet **főkörnek** nevezzük.

Az r sugarú gömb térfogata és felszíne: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$, $A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

Gömbsüveg: ha a gömböt egy síkkal metsszük, akkor **gömbsüveg** keletkezik.



6. MODUL

STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉG

Készítette: Lövey Éva

I. Adatsokaságok

Mintapélda₁

Egy háziorvos feljegyezte, 150 betege 1 év alatt hányszor kereste fel a rendelőjében:

3	2	6	2	6	5	22	3	1	10	5	9	7	2	5	1	5	4	9	7	25	19	8	2	5
8	10	16	15	5	7	8	3	6	6	21	6	9	4	5	6	6	22	8	11	23	8	5	9	6
8	7	15	10	16	11	13	1	7	3	2	18	0	16	4	9	8	5	9	17	7	9	5	19	12
1	10	3	5	7	13	18	8	7	8	7	7	13	0	5	14	7	20	1	9	4	6	24	9	6
11	5	6	28	7	7	22	1	17	4	11	8	1	4	12	13	9	23	14	5	2	6	6	11	3
14	6	8	4	4	6	8	29	18	5	8	8	17	4	4	5	18	7	3	11	23	20	10	6	6

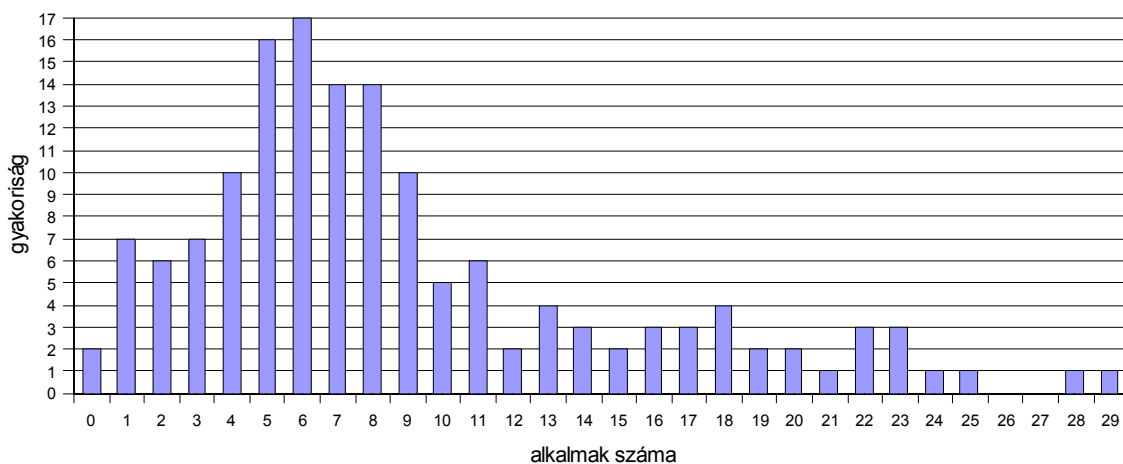
- A doktort legtöbbször, illetve legkevesebbszer felkereső betegek között hány alkalom eltérés volt?
- Van-e a feljegyzett adatok között leggyakrabban előforduló esetszám, azaz mondhatja-e a doktor: „A legtöbb betegem ... alkalommal keresett fel.”?
- Átlagosan hány alkalommal keresték fel betegei az orvost?

Megoldás:

- Az orvost legkevesebbszer felkereső beteg nem is járt ebben az évben az orvosnál, azaz 0 alkalommal kereste fel, az orvost legtöbbször felkereső beteg 29-szer járt ott. A legkisebb és legnagyobb érték közti különbség tehát $29 - 0 = 29$. Ezt az értéket az **adatsokaság terjedelmének** nevezzük.
- Azt az adatot keressük, amely a legtöbbször fordul elő az adatsokaságban, azaz az adatsokaság móduszát.
A fenti táblázat nehezen áttekinthető a leggyakrabban előforduló adat megtalálásához. Készítsük **gyakorisági táblázatot**, amely megmutatja, az egyes számok milyen gyakorisággal fordulnak elő a táblázatunkban:

alkalom	gyakoriság	alkalom	gyakoriság	alkalom	gyakoriság
0	2	10	5	20	2
1	7	11	6	21	1
2	6	12	2	22	3
3	7	13	4	23	3
4	10	14	3	24	1
5	16	15	2	25	1
6	17	16	3	26	0
7	14	17	3	27	0
8	14	18	4	28	1
9	10	19	2	29	1

Még látványosabb, ha **oszlopdiagramon** ábrázoljuk az alkalmak számának gyakoriságát:



A grafikonon és a táblázatból is láthatjuk, hogy a legtöbb beteg 6 alkalommal kereste fel az orvost, tehát **az adatsokaság módusza 6**.

c) Egy adatsokaság átlaga az adatok számtani közepe:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ilyen sok adatból úgy célszerű számtani közepet számolni, hogy a gyakorisági

táblázatot használjuk: $\bar{x} = \frac{2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 28 + 1 \cdot 29}{150} \approx 8,91$.

Mintapélda₂

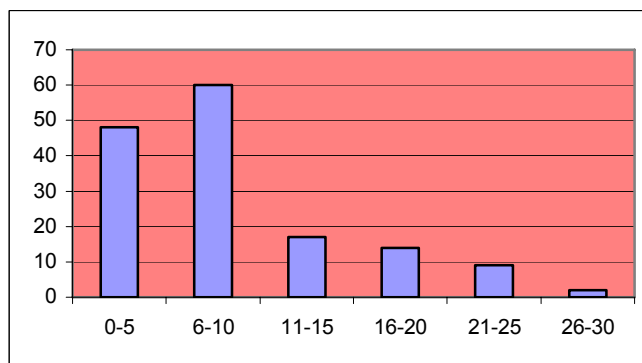
A fenntartó önkormányzat jelentést kért az előző példabeli orvostól, hogy milyen gyakorisággal látogatják a betegei.

- Soroljuk egyenlő széles osztályokba az adatokat, majd ábrázoljuk az egyes osztályok gyakoriságát!
- Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy Mari néni – aki az orvos régi betege – 25 alkalomnál többször kereste fel a doktort az év folyamán!

Megoldás:

- Ha már elkészítettük a gyakorisági táblázatot az előző feladathoz, könnyű dolgunk van. Ha mégsem, írjuk fel az osztályokat, majd mellettük húzzunk strigulákat, így aránylag gyorsan el tudjuk készíteni a gyakorisági táblázatot ilyen sok adatból is.

osztály	gyakoriság
0–5	48
6–10	60
11–15	17
16–20	14
21–25	9
26–30	2



- 150 beteg közül 2 olyan van, aki 25-nél több alkalommal látogatta. (Ez a 26–30 osztály gyakorisága.) Annak valószínűsége, hogy Mari néni közéjük tartozik:

$$P = \frac{2}{150} \approx 1,33\%.$$

Észrevehetjük, hogy a számított valószínűség megegyezik az osztály **relatív gyakoriságával**.

Mintapélda₃

Az alábbi táblázat 250 fiú testtömegét mutatja 100 gramm pontosságra kerekítve.

a) Ábrázoljuk a kumulatív (latin: összegyűjtött, felhalmozott)

gyakoriságot vonaldiagrammon!

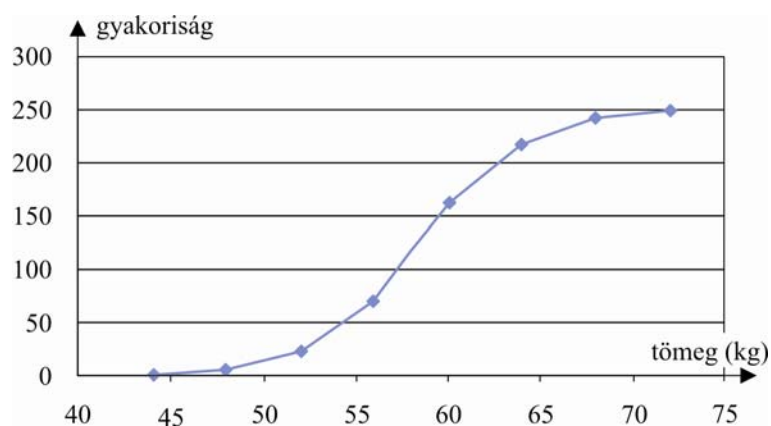
b) Számítsuk ki, mi az átlaga a 250 fiú tömegének!

Megoldás:

a) A gyakoriságok fokozatos összegzésével nyert gyakoriság a kumulatív gyakoriság. Készítsük el először azt a táblázatot, mely segítségével a grafikont meg tudjuk rajzolni!

Az egyes sorokba most azoknak az elemeknek a gyakorisága kerül, melyek nem nagyobbak, mint az előző osztályok valódi felső határa. Például az 58,0 – 59,9 osztályba akkor tartozik egy elem, ha az kisebb, mint 59,95, hiszen e fölött kerekítéssel már a következő osztályba tartozna.

Tömeg (kg)	Fiúk száma
$m < 47,95$	3
$m < 51,95$	20
$m < 55,95$	70
$m < 57,95$	115
$m < 59,95$	161
$m < 63,95$	218
$m < 67,95$	241
$m < 71,95$	250



b) Az átlag kiszámításához szükség lenne a fiúk össztömegére. Ezt viszont pontosan nem tudjuk megadni, hiszen pontosan egyetlen fiú tömegét sem ismerjük. Ilyen esetekben az osztályhatárok számtani közepével, azaz az **osztályközép**pel számolhatunk. Hogy mely osztályhatárok számtani közepét vesszük, az teljesen mindegy, hiszen az osztályhatárok (pl. 44 és 47,9) és a valódi osztályhatárok (jelen esetben 43,95 és 47,95) számtani közepe azonos:

$$43,95 \text{ és } 47,95) \text{ számtani közepe azonos: } \frac{44 + 47,9}{2} = 45,95 = \frac{43,95 + 47,95}{2}.$$

A fiúk össztömege tehát:

$$\frac{44+47,9}{2} \cdot 3 + \frac{48+51,9}{2} \cdot 17 + \frac{52+55,9}{2} \cdot 50 + \frac{56+57,9}{2} \cdot 45 + \frac{58+59,9}{2} \cdot 46 + \\ + \frac{60+63,9}{2} \cdot 57 + \frac{64+67,9}{2} \cdot 23 + \frac{68+71,9}{2} \cdot 9 = 14\,636,5 \text{ kg}.$$

Az átlagos testtömeg pedig $\frac{14\,636,5}{250} = 58,546 \text{ kg}.$

Feladatok



1. Egy parkolóőr megszámolta, hányan ültek azokban az autókban, melyek a parkolójába behajtottak reggel 8 és 10 között.

Emberek száma	1	2	3	4	5
Kocsik száma	41	33	18	6	2



- Átlagosan hányan ültek egy-egy személyautóban?
- Szemléltesd kördiagramon az egy autóban ülők számának megoszlását!
- Számítsd ki annak valószínűségét, hogy az elsőnek érkező kocsiban legalább négyen utaztak!



2. Az egyik, új lakásokat értékesítő vállalat úgy hirdette meg lakásait, hogy futni lehetett a kedvezményért. Ahány másodperccel korábban odafutottak egy adott helyről az épülő házhoz, mint a meghirdetett szintidő, annyi négyzetméter burkolatot kaptak ingyen. Mielőtt a szintidőt megállapították volna, megkértek 50 embert, hogy fussa le a távot. Úgy akarták megadni a szintidőt, hogy az emberek 50%-ának sikerélménye legyen, és legalább 1 négyzetméternyi kedvezményt kaphasson. A próbaként futók a következő eredményeket érték el másodpercekben.



61	83	62	96	66	61	92	87	69	91	82	62	80	86	97	72	78
68	88	63	85	63	73	99	66	82	61	86	63	73	65	89	95	61
72	89	92	76	75	77	75	88	87	91	84	73	67	76	82	79	

- a) Mekkora az adatsokaság terjedelme? (Azaz hány másodperc az időkülönbség a leggyorsabb és leglassúbb között?)
- b) Milyen szintidőt javasolnál a fenti próbafutás után, ha te lennél a vállalat értékesítési vezetője?



3. Angliában a Cornwall-félszigeten egy régi agyagbánya területén hatalmas félgömbök hívják fel magukra az arra járók figyelmét. Az Éden-terv üvegházai, a XXI. század botanikus kertje a brit kormány és az EU segítségével jött létre. A projekt 140 millió euróba került és a tervek szerint évente 600 ezer látogatót fogad majd. A „buborékok” körül kertek borítják az öreg felszíni bányát. Bent az üvegházakban trópusi növényekben gyönyörködhet a látogató. A kert közepén nagy táblán a következő információsor olvasható: „Ha a föld összezsugorodna egy 100 lakosú falu méretére, 57 ázsiai, 21 európai, 14 amerikai és 8 afrikai élne rajta. A százból 70 fehér és 30 nem fehér lenne. 89 lenne heteroszexuális és 11 homoszexuális. Hat tulajdonosé lenne a világ gazdaságának 59 százaléka, és mind a 6 az USA-ból származna. Nyolcvanán élnének rossz lakáskörülmények között, hetvenen nem tudnának olvasni, és ötvenen lennének alultápláltak. Egynek lenne felsőfokú képzettsége és ugyancsak egynek számítógépe.”



- a) Ábrázold sávdiaqramon a föld népességének eloszlását kontinensek szerint!
- b) Ábrázold kördiagramon az olvasni tudók, illetve az analfabéták arányát!
- c) Ábrázold kördiagramon az éhezők és a nem éhezők arányát!

II. Középértékek

Mintapélda₄

Az alábbi táblázat egy évfolyam fiainak testmagasságát mutatja egy középiskolában.

a) Készítsük el az egyes testmagasságokhoz tartozó gyakorisági táblázatot!

Valaki – a táblázat ismeretében – ki akarja találni, hogy a névsorban a legelső fiú milyen magas. Melyik értékre adja a voksát?

186	179	171	167	167	184	174	176	182	179	186	164	178	177	165
184	189	175	167	190	177	175	176	176	175	183	179	186	188	166
174	169	175	188	185	172	169	184	173	169	185	171	166	170	181
180	170	168	178	171	167	189	178	178	165	177	170	186	180	179
175	168	187	176	173	168	170	172	177	184	175	169	167	179	181
180	176	172	175	176	170	171	175	180	173	182	177	165	175	188
177	166	171	170	180	168	167	179	176	184	182	172			

Megoldás:

Készítsük el a különböző magasságértékek gyakorisági táblázatát. A legnagyobb gyakorisággal rendelkező magasságértékre érdemes szavazni.

164	165	166	167	168	169	170	171	172
1	3	3	9	4	4	6	5	4
173	174	175	176	177	178	179	180	181
3	2	8	7	6	4	6	5	2
182	183	184	185	186	187	188	189	190
3	1	4	2	3	1	3	2	1

A legnagyobb gyakoriságú magasságérték a 167 cm, erre érdemes tippelni. Ennek valószínűsége $\frac{9}{102} \approx 0,088$.

b) Ezen az évfolyamon a fiúk elhatározzák, hogy a tanév végén szerenádöt adnak, és szerenádra egyforma pólót rendelnek maguknak. A pólók méretezése a következő:

S	M	L	XL	XXL
160–168	168–176	176–184	184–192	192–

Készítsünk táblázatot, amelyből kiderül, melyik méretből hányat kell rendelni.

Megoldás:

A méretezéskor a magasságokat 8 cm szélességű osztályokba sorolják. Észrevehetjük, hogy bizonyos magasságok két osztályba is illenek. Ezeknél az értékeknél döntsünk a kényelmesebb, nagyobb méret mellett.

S	M	L	XL	XXL
160–168	168–176	176–184	184–192	192–200
16	36	34	16	0

c) A boltban kiderült, hogy csak akkor kapnak kedvezményt a nagy tételű vásárlásra, ha mind a 102 pólót azonos méretben rendelik meg. Vitatkozni kezdtek azon, hogy melyik is legyen ez az egyetlen méret.

- János azt javasolta, akkora pólót vegyenek, amelyik egy **átlagos testmagasságú** fiúra illene.
- A „középutas” Marci azt javasolta, válasszanak pólót a tornasor **középső** emberének.
- Péter azt mondta, azt a méretet rendeljék, amelyből amúgy is a **legtöbbet** rendeltek volna.
- Gábor amellet kardoskodott, hogy annak a magasságnak megfelelő méretet rendeljék, amelyiknek **eltérése** az összes fiútól **a legkisebb**, így lesz az eltérés a legkevésbé feltűnő.
- A 167 cm magas Sanyi állította, olyan pólót kell venni, ami a többségnek jó, és mivel a vele egy **magasságúak vannak a legtöbben**, ezért az S méret a nyerő.
- A colos Laci arról győzködte a többieket, hogy az **XL méretet** vegyék, hiszen míg a nagy legfeljebb egy kicsit „laza” lesz, ő bele sem fér a kisebbekbe.

Állapítsuk meg, melyik méretet kell venni János, Péter, Gábor, illetve Marci javaslatára!

Megoldás:

János: Számítsuk ki az adatsokaság átlagát, azaz számtani közepét!

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 164 + 3 \cdot 165 + 3 \cdot 166 + 9 \cdot 167 + \dots + 2 \cdot 189 + 1 \cdot 190}{102} \approx 175,41.$$

Átlag: 175,41. Ennek megfelelő méret az M, de ha ezt az értéket egészekre kerekítjük, megállapodásunk szerint már az L méretet kellene választani.

Péter: Az M osztály gyakorisága a legnagyobb (36).

Marci: ugyanezt javasolta, hiszen a „tornasorban” a **középső a magasságadatok mediánja**. Ebben az esetben nincs középső ember a tornasorban, ugyanis páros számú adatunk van. Ilyenkor **a medián a két középső adat számtani közepe**.

Nézzük, milyen adat áll az 51. és az 52. helyen: Mindkét adat a 175 cm, így az adatsokaság mediánja a 175, ennek megfelelő pólóméret az M.

Gábor: Keressük azt a számot, amelyre az eltérések abszolútértékének összege a lehető legkisebb. Tudjuk, hogy **egy adatsokaság mediánja az szám, melynek átlagos abszolút eltérése az adatoktól a lehető legkisebb**, így Gábor is azt javasolja, hogy a mediánnak megfelelő méretet vásárolják.

A vita eredményeként végül az M méretet választották.

d) Számítsuk ki a fenti adatsokaság esetén az átlagtól vett átlagos abszolút eltérést, a módusztól vett átlagos abszolút eltérést, valamint a mediántól való átlagos abszolút eltérést!

Megoldás:

164	165	166	167	168	169	170	171	172
1	3	3	9	4	4	6	5	4
173	174	175	176	177	178	179	180	181
3	2	8	7	6	4	6	5	2
182	183	184	185	186	187	188	189	190
3	1	4	2	3	1	3	2	1

Az adatsokaság átlaga $\bar{x} = 175,41$. Az átlagtól való átlagos abszolút eltérés:

$$\Delta\bar{x} = \frac{1 \cdot |164 - \bar{x}| + 3 \cdot |165 - \bar{x}| + 3 \cdot |166 - \bar{x}| + \dots + 2 \cdot |189 - \bar{x}| + 1 \cdot |190 - \bar{x}|}{102} \approx 5,56.$$

Az adatsokaság módusza $Mo = 167$. A módusztól vett átlagos abszolút eltérés:

$$\Delta\bar{x} = \frac{1 \cdot |164 - Mo| + 3 \cdot |165 - Mo| + 3 \cdot |166 - Mo| + \dots + 2 \cdot |189 - Mo| + 1 \cdot |190 - Mo|}{102} \approx 8,65$$

Az adatsokaság mediánja $Me = 175$. A mediántól vett átlagos abszolút eltérés:

$$\Delta x_{Me} = \frac{1 \cdot |164 - Me| + 3 \cdot |165 - Me| + 3 \cdot |166 - Me| + \dots + 2 \cdot |189 - Me| + 1 \cdot |190 - Me|}{102} \approx 5,55$$

Az említett közepek közül a **medián** olyan tulajdonságú, hogy **a tőle való átlagos abszolút eltérés** a lehető legkisebb. Tehát előbbi példánkra utalva, ezt a méretet választva lesz a méretbeli különbségek átlaga a legkisebb.

A **módusznak** megvan az a jó tulajdonsága, hogy erre tippelve találjuk el a legnagyobb valószínűséggel a leggyakoribb értéket, hiszen **ennek gyakorisága**, így relatív gyakorisága **a legnagyobb**.

Az **átlag** alkalmas arra, hogy megadjon egy olyan értéket, mellyel **helyettesítve az adatsokaság értékeit az összeg változatlan lesz.**

Van a középértékektől való átlagos abszolút eltérésen kívül egy másik mutató is, ami jelzi, mennyire térnek el az adatok a középértéktől. Ha az eltérések abszolút értéke helyett azok négyzetének számítjuk az átlagát, **átlagos négyzetes eltérésről** beszélünk. Ha az átlagtól vett eltérések négyzetének vesszük az átlagát, az a leggyakrabban használt **szórásnégyzet**.

Ez a legtöbb zsebszámológépen egy billentyűvel kiszámolható.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

A szórást úgy kapjuk meg, hogy négyzetgyököt vonunk a szórásnégyzetből:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Mintapélda₅

Számítsuk ki az előző feladatban szereplő adatok átlagos négyzetes eltérését a

a) módusztól; b) mediántól; c) átlagtól.

Számítsuk ki a szórást is!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 - Mo)^2 + (x_2 - Mo)^2 + \dots + (x_n - Mo)^2}{n} &= \\ &= \frac{1 \cdot (164 - 167)^2 + 3 \cdot (165 - 167)^2 + \dots + 2 \cdot (189 - 167)^2 + 1 \cdot (190 - 167)^2}{102} \approx 115,55. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 - Me)^2 + (x_2 - Me)^2 + \dots + (x_n - Me)^2}{n} &= \\ &= \frac{1 \cdot (164 - 175)^2 + 3 \cdot (165 - 175)^2 + \dots + 2 \cdot (189 - 175)^2 + 1 \cdot (190 - 175)^2}{102} \approx 44,96. \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{1 \cdot (164 - 175,5)^2 + 3 \cdot (165 - 175,5)^2 + \dots + 2 \cdot (189 - 175,5)^2 + 1 \cdot (190 - 175,5)^2}{102} \approx 44,80.$$

Látható, hogy az átlagtól számított szórásnégyzet a legkisebb.

A szórás: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 6,69$.

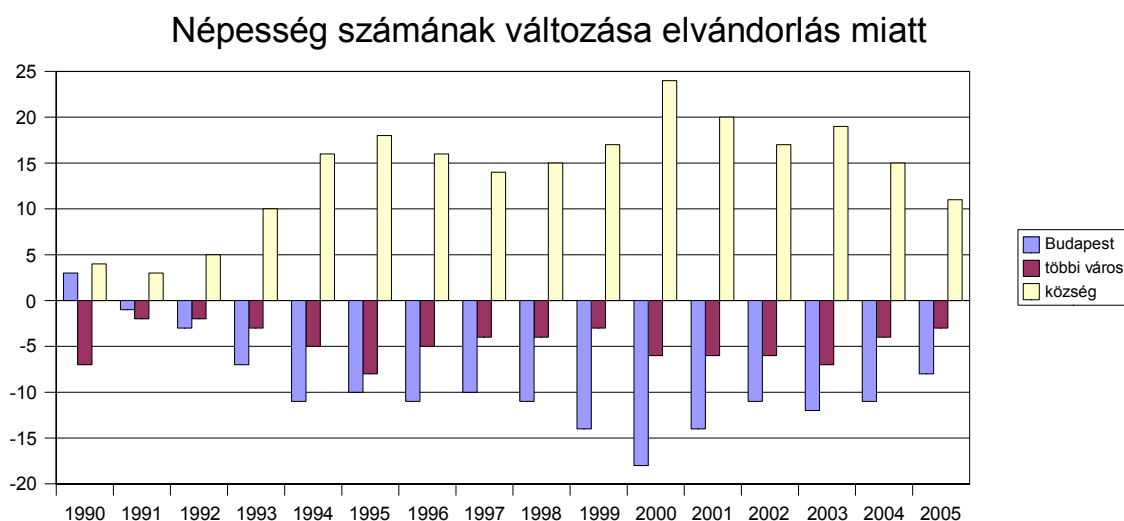
A szórás a terjedelemhez hasonló jellegű mutató. Kis szórása annak az adatsokaságnak van, ahol az értékek kevésbé térnek el az átlagtól.

Feladatok



4. Az alábbi grafikonok azt mutatják, hogy egy 16 éves időszakban (1990–2005)

- hányan változtattak lakhelyet az egyes években (az számít lakhelyváltotatásnak, ha másik településre költözik);
- hogyan változott (költözések miatt) az egyes településtípusok lélekszáma.



- a) Számítsd ki, mekkora volt a tizenhat éves időszakban az átlagos népességmozgás!
- b) Igaz-e, hogy a magyarok nem szívesen változtatnak lakhelyet? Számítsd ki a vándorlók átlagának relatív gyakoriságát. (Magyarország népességét 10 millióra kerekítheted.)
- c) Milyen következtetéseket tudsz levonni a második grafikonról? Mivel magyarázod, hogy míg például 2005-ben a más településre költözők száma 218, addig Budapest, más városok és a faluk népességének változása összesen is csak 22?
- d) Számítsd ki mindhárom településtípus esetén a változás átlagát a tizenhat évre, valamint a szórást!



5. Egy kúszónövény indáinak hosszúságát mérték, és az adatokat a következő táblázatba sorolták be (az indák hosszát mm-ben mérték):

Inda hossza	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90
Gyakoriság	7	25	63	52	36	27	9	12	1

- a) Add meg az osztályok szélességét!
- b) Számítsd ki egy inda átlagos hosszát!
- c) Készítsd el azt az oszlopdiagramot, mely az egyes osztályok gyakoriságát ábrázolja!
- d) Mi a valószínűsége, hogy egy inda hossza 31 és 70 mm közé essen?

III. Középértékek alkalmazhatósága

Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy mikor, melyik középérték nyújtja számunkra a legtöbb információt.

Mintapélda₆

Valaki a frissen szerzett szakirányú képesítésével állást keres. Több ajánlat közül is választhat, és igyekszik a vállalatoknál uralkodó bérviszonyokról információt szerezni. Értékeljük együtt, milyen adatokból milyen következtetéseket lehet levonni!

- Az A vállalatnál fizetett havi bérek terjedelme 700 000 Ft.
- A B vállalatnál a havi fizetések átlaga 270 000 Ft.
- A C vállalatnál a havi fizetések módusza 240 000 Ft.
- A D vállalatnál a havi fizetések mediánja 280 000 Ft.

Feltételezzük, hogy mind a négy vállalat profilja hasonló, és körülbelül 20 embert alkalmaznak. Legyen ez például egy tervezővállalat, ahol valószínűleg van egy vezető, több mérnök és 1-2 kisegítő alkalmazott.

Megoldás:

A havi bérek terjedelme egy álláskeresőnek nem sokat mond. Ez valószínűleg a kisegítő kézbesítő minimálbére és az igazgató csúcspozíciója közötti különbség. Mivel egy szakirányú pályakezdő valószínűleg nem az igazgatói vagy a kézbesítői állást pályázza meg, az információ semmitmondó. Lehet, hogy a másik 18 alkalmazott fizetése egységesen havi 80 000 Ft, de az is lehet, hogy a többi 18 alkalmazott mind 400 000 Ft körül keres.

A B vállalatnál az átlagból megtudhatjuk az összes kiosztott fizetést. Ha nem tudjuk, hogy pontosan hány kis fizetésű (kisegítő) alkalmazott van, és nehezen becsüljük a vezető fizetését, akkor igen nagy csalódások érhetnek minket. Nézzük meg az alábbi két becslést:

Legyen 2 fő fizetése 70 000 Ft, és a vezető fizetése 400 000 Ft, ekkor a 17 másik (egymáshoz hasonló fizetésű alkalmazottra fejenként

$$\frac{20 \cdot 270\,000 - (2 \cdot 70\,000 + 400\,000)}{17} \approx 285\,882 \text{ Ft jut.}$$

Ha azonban csak 1 alacsony fizetésű alkalmazott van, havi 80 000 Ft-os fizetéssel, és a vezető fizetése havi 800 000 Ft, akkor a másik 18 alkalmazottra fejenként

$$\frac{20 \cdot 270\,000 - (80\,000 + 800\,000)}{18} \approx 251\,111 \text{ Ft jut, ami lényeges eltérés.}$$

A C vállalatnál a leggyakoribb fizetés a 240 000 Ft. Valószínűleg ez nem azt jelenti, hogy például ketten forintra ennyit kapnak, hanem azt, hogy a leggyakoribb a 240 000 Ft körüli fizetés. Ha feltételezzük, hogy a dolgozók zömének fizetése hasonló, akkor pályázónk várható fizetése is e körül az érték körül mozog.

A D vállalatnál a medián 280 000 Ft. Talán ebben az esetben ez a legtöbbet mondó adat. Egy adatsokaság mediánja nem változik meg attól, ha a legkisebb és legnagyobb értéket másik kicsire, illetve nagyra változtatjuk, vagy akár el is hagyjuk. Úgy mondjuk, a medián nem érzékeny a szélsőséges adatokra. Valószínűleg pályázónk is e körül az érték körül várhatja fizetését.

Mintapélda₇

A cukrászoknak szóló receptkönyvben a receptek nem úgy kezdődnek, hogy vegyél 5 tojást, hanem úgy, hogy hozzávalók: tojássárgája: 0,04 kg. Ha valaki az otthoni sütéshez mégis ezt akarja használni, meg kell tudnia, hány tojást is üssön föl anélkül,



hogy minden alkalommal patikamérleggel mérné a tojássárgája tömegét. Egy különösen nagy adag rántotta elkészítése alkalmával valaki rászánta az időt, és mielőtt fölverte volna a tojásokat, megmérte 10 tojássárgájának tömegét külön-külön. A következő adatsokaságot kapta:

gramm:	21	21	19	20	21	18	18	22	19	21
--------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Értékeljük az adatsokaságot! Melyik közép jellemzi legjobban ezt a sokaságot?

Megoldás:

Ennek az adatsokaságnak is van módusza és mediánja $M_o = 21$, $M_e = 20,5$, de senki sem gondolja, hogy van jelentősége annak, hogy a megmért tojásokat sorba rendezve melyik tömege áll középen, vagy annak, hogy a 10 méréseredmény között 4-szer fordult elő a 21. Sokkal inkább jellemzi az átlag. Kiszámíthatjuk, hogy a mérés átlaga $20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$, tehát ha egy süteménybe 0,04 kg tojássárgája kell, 2 tojás sárgáját teszünk bele.

Feladatok



6. Egy éjjel-nappal nyitva tartó áruház hűtőpultjának hőmérsékletét háromóránként ellenőrizni kell, és az adatokat föl kell jegyezni egy ott függő táblára. Az elmúlt három nap alatt a következő adatokat jegyezték fel:

Leolvasás	0 h	3 h	6 h	9 h	12 h	15 h	18 h	21 h
Hőmérséklet (°C)	-22	-22	-21	-18	-19	-19	-17	-21
	-23	-22	-22	-19	-19	-18	-16	-19
	-22	-23	-21	-20	-20	-21	-19	-20

- Ábrázold közös koordináta-rendszerben a három nap mérési eredményeit! Az egyes mérési pontokat kösd össze, feltételezve, hogy két mérés között a hőmérséklet egyenletesen változik.
- Számítsd ki az első napon mért hőmérsékletek átlagát!
- Számítsd ki a három nap csúcsforgalomban mért (18 h) hőmérsékleteinek átlagát!
- A hűtő hőmérséklete nem mehet tartósan a -18°C -os érték fölé. Ha tartósan (6 órán át) ennél magasabb értéket mérnek, az árut meg kell semmisíteni. Szükséges-e most ez az intézkedés?
- A grafikon alapján olvasd le, mi a valószínűsége annak, hogy a 3. napon érkező ellenőr -20°C -nál magasabb értéket talál?



7. Egy kieséses tenisztornán minden játékról följegyezték, hogy hány „game”-ből állt:

„game”-ek száma	Gyakoriság	Osztály szélesség	Relatív gyakoriság
15–24	6		
25–34	12		
35–44			0,3
45–54	15		
55–64	3		
65–84	6		

- Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!
- Készíts kördiagramot a relatív gyakoriságokból!
- Melyik középértéket számítanád ki az adatokból ahhoz, hogy megállapítsd, mennyi ideig tart egy 20 mérkőzésből álló bajnokság?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy az elsőnek kiesett játékos több mint 65 játékot (game-et) játszott?



8. Az Egészségbiztosítási Felügyelet 2007-es honlapján található táblázatokból kiderül, hogy az egyes kórházak osztályain milyen az ágykihasználtság, illetve az átlagos ápolási idő.

Osztálynév	Kórházi esetszám	Ágykihaszná- ltság (%)	Átlagos ápolási idő (nap)
I. Belgyógyászat	406	74,9	10,8
II. Belgyógyászat	778	60,2	11,3
III. Belgyógyászat	585	82,4	10,3
Sebészet	2142	65,1	6,0
Traumatológia	2162	48,5	3,3
Szülészeti-nőgyógyászat	3373	98,0	4,2
Fül-orr-gégészeti	1204	67,1	8,1
Szemészet	2133	68,0	2,9
Ideggyógyászat	1097	77,9	7,8
Ortopédia	807	21,2	3,8
Urológia	1540	62,9	4,8
Intenzív	255	49,4	9,2
Tüdőgyógyászat	837	68,7	12,0
Sugárterápia, onkoradiológia	1919	47,4	9,6
Anyagcsere, endokrinológia	640	77,7	11,1
Gasztroenterológia	629	72,1	10,5
Érsebészet	274	49,9	6,6
Stroke	374	57,5	8,4
Immuno / nephrológia	521	55,1	10,8
Kardiológia	968	63,5	9,6

- Add meg az osztályok ágykihasználtságának mediánját, és értelmezd is ezt az adatot!
- Add meg ennek az értéknek a szórását!
- Számítsd ki, hány beteg fordult meg ebben az évben a kórházban!
- Számítsd ki, átlagosan hány napot töltöttek a kórházban!

IV. Nagy elemszámú adatsokaságok jellemzése

A gyakorlatban a statisztika sok adattal, hatalmas adatsokasággal dolgozik. Amikor ezeket a statisztikusok feldolgozzák, mi csak az értékelés eredményével találkozunk. Próbáljuk meg a lehető legtöbb információt kinyerni egy-egy táblázatból, grafikonból!

Mintapélda₈

Az OKI (Országos Közoktatási Intézet) felmérést készített a tanulók terheléséről. Ennek keretében azt kérték, írjanak a négyzetbe egy számot, attól függően, milyen osztályba járnak:

1-et, ha normál tantervűbe; 2-t, ha tagozatosba vagy emelt szintűbe; 3-at egyéb esetben.

A következő válaszok születtek:

1	2	3	nem válaszolt
1197	644	14	847

Milyen típusú ismértve kérdez rá ez a statisztika? Milyen jellegű középnek van értelme az ilyen típusú adatok esetében? Számítsuk ki, mi a valószínűsége annak, hogy olyan gyerek adatlapja kerül a kezünkbe, aki erre a kérdésre nem válaszolt! Ábrázoljuk az adatokat kördiagramon!

Megoldás:

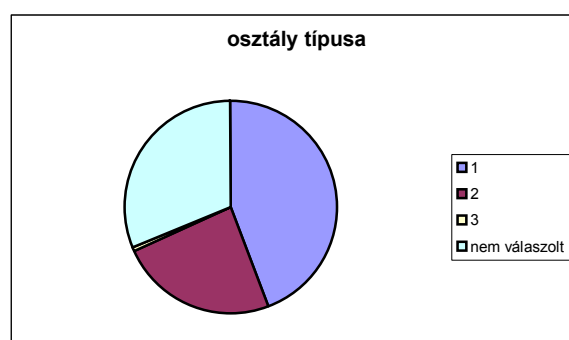
Beszélhetünk méréses és minősítéses ismérvekről. A méréses ismérvek mindig számok, de olyanok, amelyeket érdemes sorba rendezni, nagyságuk jellemzi az ismérvet. Ez az adatsokaság méréses ismérv alapján osztályozható. Az adatok hiába számok, más jellegű információt hordoznak. Ilyenkor nincs értelme átlagot számolni, a medián sem hordoz információt, de a módusz itt például elárulja, hogy a válaszadók közül a legtöbben normál tantervű osztályba járnak.

A beérkezett adatlapok száma $1197 + 644 + 14 + 847 = 2702$. Ezek közül 847-ben nem

szerepelt válasz erre a kérdésre, így $\frac{847}{2702} \approx 0,3135$ a valószínűsége annak, hogy ilyen

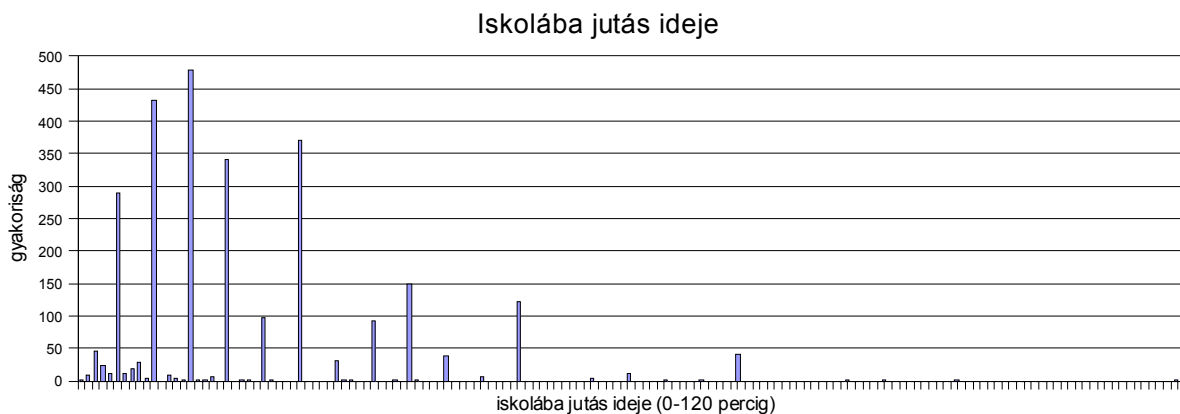
lap jut a kezünkbe.

A kördiagramon látszik, hogy azok száma, akik osztályuk típusát az egyéb kategóriába sorolták, elenyésző azokhoz képest, akik mivel nem tudtak dönteni, inkább üresen hagyták a mezőt.



Mintapélda,

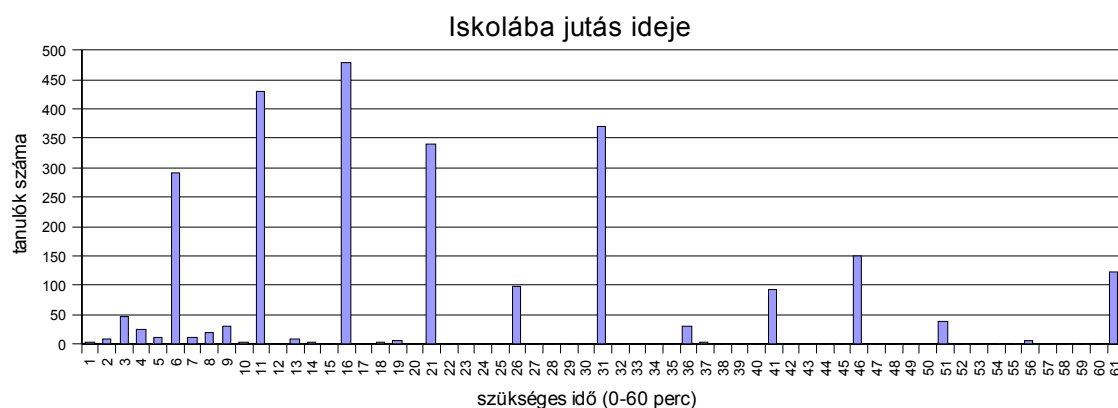
Megkérdezték a tanulókat, mennyi idejükbe telik reggelente eljutni az iskolába. A válaszok a 0 – 120 perc között voltak. Amikor ábrázolni akarták az egyes percek gyakoriságát, az alábbi grafikont kapták.



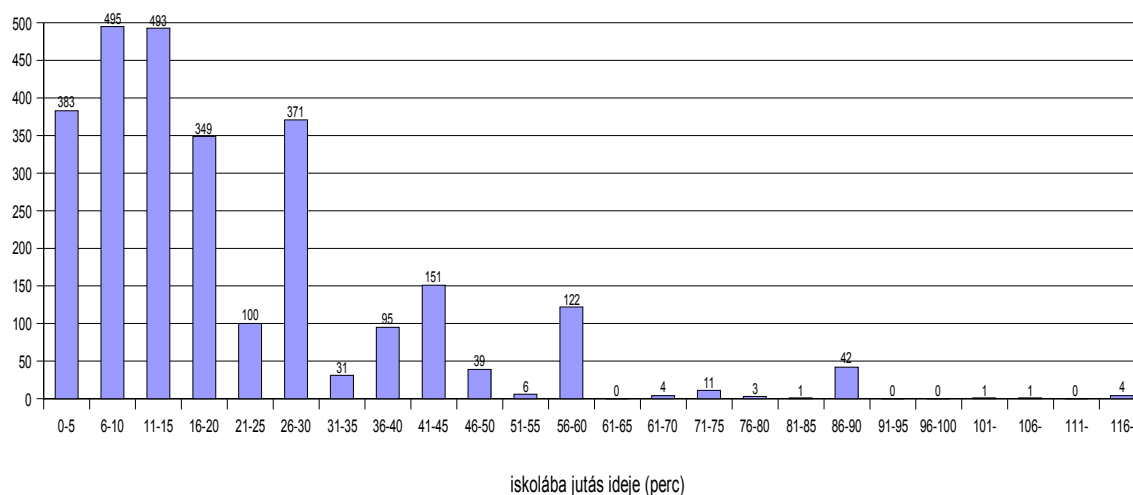
- a) Próbáljuk megfogalmazni, mi is a baj ezzel a grafikonnal, és adjunk javaslatot a grafikon kijavítására!

Megoldás:

Erről az ábráról még azt sem tudjuk leolvasni, hogy melyik volt az a válasz, amit a tanulók a leggyakrabban adtak. A vízszintes tengelyen azért nem lehet beosztás, mert a terjedelem túl nagy. Látható azonban, hogy 60 percnél többet alig néhányan töltenek utazással, tehát már az is sokat segítené, ha az ábrázolt időtartamot a felére csökkentenénk.



Így már többet le lehet olvasni az ábrából, de az információk egy részét elvesztettük. Ilyenkor szokás az adatokat osztályokba sorolni, és azok gyakorisági táblázata alapján ábrázolni.



Ennek a grafikonnak a megrajzolásához az alábbi osztályközös gyakorisági táblázatot kellett elkészíteni:

0–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40
383	495	493	349	100	371	31	95
41–45	46–50	51–55	56–60	61–65	61–70	71–75	76–80
151	39	6	122	0	4	11	3
81–85	86–90	91–95	96–100	101–105	106–110	111–115	116–120
1	42	0	0	1	1	0	4

Nagy adatsokaság esetén az osztályba sorolás áttekinthetőbbé teszi az adatokat.

- b) Számítsuk ki, mi a valószínűsége annak, hogy egy diák 1 óránál hosszabb időt tölt utazással!

Megoldás:

Az érintett osztályokba $4 + 11 + 3 + 1 + 42 + 1 + 1 + 4 = 67$ tanuló tartozik, így a keresett

valószínűség $\frac{67}{2702} \approx 0,0248$, azaz körülbelül 2,5%.

Az ilyen nagy adatsokaságok jellemzésére nemcsak a mediánt, azaz az adatsokaságot két egyenlő részre bontó adatot szokták megadni, hanem a kvartilis (latin: negyed) és percentilis (latin: percent=századrész) értékeket is.

A **kvartilis** az adatsokaság sorba rendezett elemeit négy egyenlő részre bontja. A negyedelő pontoknál szereplő értékeket szokás rendre első, második, harmadik kvartilisnek nevezni. A második kvartilis éppen felezi az adatsokaságot, így az megegyezik a mediánnal.

Ha az adatsokaság elég sok adatot tartalmaz, beszélhetünk a **percentilisekről** is. Ilyenkor a sokaság sorba rendezett tagjait 100 egyforma részre bontjuk, és a 30. percentilis (30th-ként

szokták írni az angol sorszámnev képző miatt) a 30. osztópontonál szereplő adat. Könnyű belátni, hogy ilyenkor az adatok 30%-a kisebb ennél az adatnál (vagy legalábbis nem nagyobb), 70%-a pedig nagyobb (vagy legalábbis nem kisebb).

Mintapélda₁₀

A fenti adatsokaságnál állapítsuk meg a harmadik kvartilis és a 20. percentilis értékét!


Megoldás:


2702 adatunk van. Tehát a negyedében 675,5 adat van, a háromnegyedében pedig 2026,5.

A harmadik kvartilis tehát a 2026. és a 2027. adat számtani közepe. Mindkét érték a 26–30 perces osztályba esik.

A 20. percentilis a 20. osztópont akkor, amikor az adatsokaság növekvő sorrendű tagjait 100 egyenlő részre osztottuk. Tehát az adatok 20%-ának kell ez alatt lennie, vagyis a sorba rendezett adatokból az 541. adatot keressük, és ez a 6-10 perces osztályba esik.

Feladatok

 **9.** Tudsz-e magyarázatot adni arra, hogy amikor a modul második mintapéldájában az iskolába jutás percre pontos idejének gyakoriságát ábráztuk, miért szerepeltek kiugró gyakorisági értékek periodikusan?

 **10.** Egy osztály tanulói a következő kérdőívet töltik ki:

- A: Fiú vagy lány vagy?
- B: Hány éves vagy?
- C: Hány centiméter magas vagy?
- D: Hány kg vagy?
- E: Mi a postai irányítószámod?

Állapítsd meg, a fenti kérdések alapján összegyűjtött adatsokaságokból melyek a minősítéses és melyek a méréses adatsokaságok?



11. Az egyik honlapon található az alábbi kalkulátor. A táblázat felső felét kitöltve (megadva a gyerek nemét, korát, testtömegét és magasságát) adja ki a táblázat alsó részében szereplő statisztikai mutatókat. Értelmezd az itt kapott eredményeket!

Gyermek percentilis kalkulátor	
Adja meg a következő adatokat	
A gyermek neve	fiú
A gyermek kora	12 év és 3 hónap
Testtömeg	35 kg
Testmagasság	150 cm
Eredmények	
A korhoz tartozó testmagasság percentilis	25th – 50th
A korhoz tartozó testtömeg percentilis	10th – 25th
A testmagassághoz tartozó testtömeg percentilis	25th – 50th

Kislexikon

Egy **adatsokaság terjedelmének** az adatsokaságban a legkisebb és legnagyobb érték közti különbséget nevezzük.

Módusznak az adatsokaságban legtöbbször előforduló adatot nevezzük. (A módusz gyakorisága és relatív gyakorisága a legnagyobb.)

Medián: Ha egy adatsokaság értékeit növekvő sorrendbe rendezzük, akkor a sorban középső értéket az adatsokaság mediánjának nevezzük. Ha az adatsokaságban két középső érték van (páros sok adatból áll), akkor ennek a két értéknek a számtani közepe lesz a medián. (Egy adatsokaság mediánja az szám, melynek átlagos abszolút eltérése az adatoktól a lehető legkisebb.)

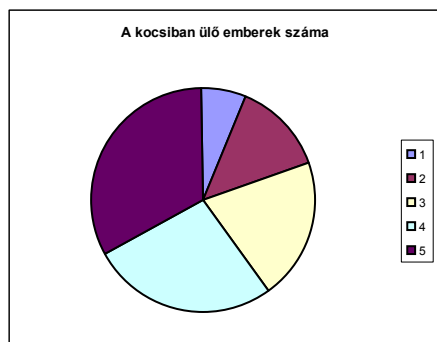
A **kvartilisek** az adatsokaság sorba rendezett elemeit négy egyenlő részre bontják. A negyedelő pontoknál szereplő értékeket szokás rendre első, második, harmadik kvartilisnek nevezni. A második kvartilis éppen felezi az adatsokaságot, így az megegyezik a mediánnal. Ha az adatsokaság elég sok adatot tartalmaz, beszélhetünk a **percentilisekről** is. Ilyenkor a sokaság sorba rendezett tagjait 100 egyforma részre bontjuk, és például a 30. percentilis (30th-ként szokták írni az angol sorszámnév képző miatt) a 30. osztópontnál szereplő adat.

Átlag: Egy adatsokaság átlaga a benne szereplő adatok számtani közepe.

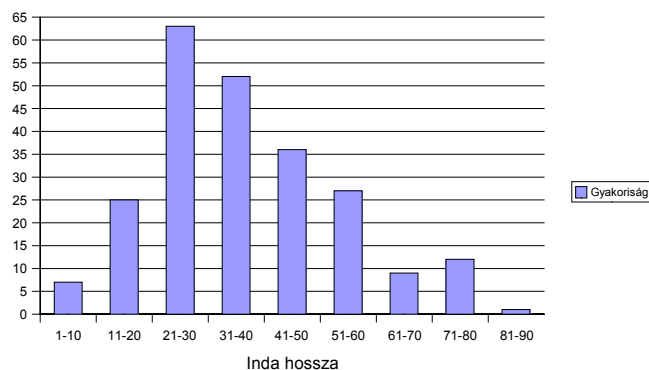
Gyakoriság: Ha megszámloljuk, hogy egy adathalmazban egy bizonyos adat hányszor szerepel, az adat gyakoriságát kapjuk meg.

Relatív gyakoriság: Ha egy adatsokaságban n adat van, és egy bizonyos adat gyakorisága k , akkor ennek az adatnak a relatív gyakorisága $\frac{k}{n}$.

DIAGRAMOK

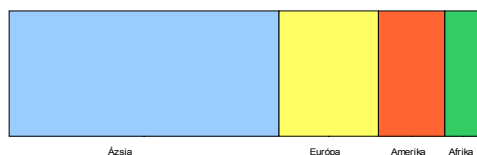


KÖRDIAGRAM



OSZLOPDIAGRAM

SÁVDIAGRAM



Az oszlopdiagram függőleges tengelyén a gyakoriságot és a relatív gyakoriságot is ábrázolhatjuk.

Egy x_i adat eltérése az \bar{x} átlagtól különbségük abszolút értéke: $|x_i - \bar{x}|$. Ha az egyes adatok eltéréseinek számtani közepét vesszük egy n elemű adatsokaságban, az **átlagtól vett abszolút eltérést** kapjuk meg:

$$\Delta\bar{x} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Szórásnégyzet: az átlagtól vett eltérések négyzetének vesszük az átlagát.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

A **szórást** úgy kapjuk meg, hogy négyzetgyököt vonunk a szórásnégyzetből:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

MELLÉKLETEK



2.1 FELADATLAP

Olvassátok el figyelmesen az alábbi tudnivalókat a diákhitellel kapcsolatban, majd válaszoljatok a feltett kérdésekre!

Mekkora összeg vehető fel?

Szabadon választhat, hogy mekkora összeget utaljunk bankszámlájára.

A 2006/2007-es tanévben az államilag támogatott képzésben részt vevő hallgatók havi

- 15 ezer,
- 21 ezer,
- 25 ezer vagy
- 30 ezer

forintot igényelhetnek.

Mikor utalják át a pénzt?

Dönthet úgy, hogy a félévre járó diákhitelt egy összegben kéri. Ilyenkor a félévre járó 5 havi ösztöndíjat a szemeszter 2. hónapjának 15-éig egy összegben folyósítjuk. Ha havonta kéri utalni az összeget, egy adott szemeszterben (félévben) a Diákhitel első folyósítási napja a második tanulmányi hónap legkésőbb 15. napja (október 15. vagy március 15.). A Diákhitel Központ a kölcsön tárgyi tanulmányi félévének első két hónapjára járó összegét az aktuális tanulmányi félév második hónapjának 15-éig, majd azt követően havonta folyamatosan az adott hónap 15-éig folyósítja.

Kamat

A kölcsönszerződés értelmében a folyósított kölcsön összege után ügyleti kamatot számítunk fel. Ez azt jelenti, hogy minden napra annyi kamatot számítunk fel, amennyi az aktuális tartozásnak az 1 napra eső kamata. A kamatszámítás az első folyósítás napjától kezdődik, a kamatot a kölcsön visszafizetéséig kell fizetnie. A kölcsön kamatát minden év december 31-én tőkésítjük.

A Diákhitel kamata változó. A kamat mértékét a kormányrendeletben rögzített szabályok szerint határozzuk meg. A 2007. január 1-től június 30-ig érvényes kamatláb 9,5%.

Az aktuális kamat minden naptári félév első napjától érvényes. A kamatot a naptári félév előtt legalább hét nappal hirdetményként közzé tesszük a Népszabadságban és a Magyar Nemzetben, a honlapunkon, valamint a felsőoktatási intézményekben.

Visszafizetés

A Diákhitel törlesztési rendszerét úgy alakították ki, hogy a hitelt felvevők anyagi lehetőségeikhez igazodva, jövedelemarányosan törleszthessenek.

A törlesztési kötelezettség kezdetének évében és az azt követő évben a kötelező törlesztő részletet a minimálbér alapján határozzuk meg. Az ebben az időszakban fizetendő összeg az előző évben október 31-én érvényes minimálbér 6 százaléka.

A törlesztés harmadik évétől kezdve a törlesztő részlet kiszámításának alapja a két évvel azelőtti jövedelem. Aki jövedelemarányosan törleszt, annak 2006-ban a 2004-es éves jövedelem 6 százaléka 1/12-ed részét kell havonta fizetni.

Mivel a törlesztő részlet nagysága minden évben változhat, a következő évben esedékes havi összegekről minden év december 15-éig hivatalos levélben értesítjük.

KÉRDÉSEK

- I. Számítsátok ki, mekkora diákhitelt vett fel az a hallgató, aki
- 10 féléven át havi 15 000 Ft-ot vett fel?
 - 10 féléven át havi 30 000 Ft-ot vett fel?
 - 4 féléven át havi 40 000 Ft-ot vett fel? (költségtérítési képzés esetén vehető fel ennyi)
 - Aki az utolsó két félévben havi 30 000 Ft-ot vett fel?

Ne felejtsetek el, hogy a diákkölcsön az év 10 hónapjában vehető igénybe!

- II. Ha évi 9,5%-os kamattal számolunk, és a kamatot a meghirdetett módon tőkésítik, mekkora tartozása lesz a következő év szeptember 1-én (a kölcsöntörlesztés kezdetekor) a d) feladatban jelzett hallgatónak?

Az alábbi táblázat segít a számolásban, de ha találsz olyan gyors módszert, amely – kis hiba árán – lényegesen meggyorsítja a számolást, nem szükséges az összes sort kitöltened.

Időszak	Aktuális tartozás	Hány nap	Kamata
okt. 15–nov. 15.	60000	31	$\frac{31}{365} \cdot 0,095 \cdot 60000 \approx 484,11$
nov. 16–dec. 15.	90000		
dec. 16–dec. 31.			
Vigyázat! Itt tőkésítik az eddigi kamatot!			
jan. 1–jan. 15.			
jan. 16–márc. 15.			
márc. 16–ápr. 15.			
ápr. 16–máj. 15.			
máj. 16–jún. 15.			
jún. 16–aug. 31.			
Tehát az aktuális kamat és a még nem tőkésített kamat összege mint fennálló tartozás:			



2.2 FELADATLAP

Olvassátok el figyelmesen az alábbi tudnivalókat a diákhitellel kapcsolatban, majd válaszoljatok a feltett kérdésekre!

Mekkora összeg vehető fel?

Szabadon választhat, hogy mekkora összeget utaljunk bankszámlájára.

A 2006/2007-es tanévben az államilag támogatott képzésben részt vevő hallgatók havi

- 15 ezer,
- 21 ezer,
- 25 ezer vagy
- 30 ezer

forintot igényelhetnek.

Mikor utalják át a pénzt?

Dönthet úgy, hogy a félévre járó diákhitelt egy összegben kéri. Ilyenkor a félévre járó 5 havi ösztöndíjat a szemeszter 2. hónapjának 15-éig egy összegben folyósítjuk. Ha havonta kéri utalni az összeget, egy adott szemeszterben (félévben) a Diákhitel első folyósítási napja a második tanulmányi hónap legkésőbb 15. napja (október 15. vagy március 15.). A Diákhitel Központ a kölcsön tárgyi tanulmányi félévének első két hónapjára járó összegét az aktuális tanulmányi félév második hónapjának 15-éig, majd azt követően havonta folyamatosan az adott hónap 15-éig folyósítja.

Kamat

A kölcsönszerződés értelmében a folyósított kölcsön összege után ügyleti kamatot számítunk fel. Ez azt jelenti, hogy minden napra annyi kamatot számítunk fel, amennyi az aktuális tartozásnak az 1 napra eső kamata. A kamatszámítás az első folyósítás napjától kezdődik, a kamatot a kölcsön visszafizetéséig kell fizetnie. A kölcsön kamatát minden év december 31-én tőkésítjük.

A Diákhitel kamata változó. A kamat mértékét a kormányrendeletben rögzített szabályok szerint határozzuk meg. A 2007. január 1-től június 30-ig érvényes kamatláb 9,5%.

Az aktuális kamat minden naptári félév első napjától érvényes. A kamatot a naptári félév előtt legálább hét nappal hirdetményként közzé tesszük a Népszabadságban és a Magyar Nemzetben, a honlapunkon, valamint a felsőoktatási intézményekben.

Visszafizetés

A Diákhitel törlesztési rendszerét úgy alakították ki, hogy a hitelt felvevők anyagi lehetőségeikhez igazodva, jövedelemarányosan törleszthessenek.

A törlesztési kötelezettség kezdetének évében és az azt követő évben a kötelező törlesztő részletet a minimálbér alapján határozzuk meg. Az ebben az időszakban fizetendő összeg az előző évben október 31-én érvényes minimálbér 6 százaléka.

A törlesztés harmadik évétől kezdve a törlesztő részlet kiszámításának alapja a két évvel azelőtti jövedelem. Aki jövedelemarányosan törleszt, annak 2006-ban a 2004-es éves jövedelem 6 százalékának 1/12-ed részét kell havonta fizetni.

Mivel a törlesztő részlet nagysága minden évben változhat, a következő évben esedékes havi összegekről minden év december 15-éig hivatalos levélben értesítjük.

KÉRDÉSEK

- I. Számítsátok ki, mekkora diákhitelt vett fel az a hallgató, aki
- 10 féléven át havi 21 000 Ft-ot vett fel?
 - 10 féléven át havi 25 000 Ft-ot vett fel?
 - 4 féléven át havi 40 000 Ft-ot vett fel? (költségtérítési képzés esetén vehető fel ennyi)
 - Aki az utolsó két félévben havi 30 000 Ft-ot vett fel?

Ne felejtsetek el, hogy a diákkölcsön az év 10 hónapjában vehető igénybe!

- II. A d) feladatban említett hallgató a nyári szünet után szeptember elsején megkezdte a törlesztést úgy, ahogy azt a munkába állás első két évében kell. Szeptember elseje előtt, amikor az első törlesztőrésztletet átutalja, tőketartozása 301 687 Ft, kamattartozása 14 638 Ft. (Ez utóbbi az a kamat, amelyet még csak december 31-én fognak tőkésíteni.) Ha évi 9,5%-os kamattal számolunk, és a kamatot a meghirdetett módon tőkésítik, mekkora tartozása marad még a következő év december 31-én? 2007-ben a minimálbér 62 500 Ft. Feltételezzük, hogy sem a diákhitel kamata, sem a minimálbér ez idő alatt nem változik.

Az alábbi táblázat segít a számolásban, de ha találsz olyan gyors módszert, amely – kis hiba árán – lényegesen meggyorsítja a számolást, nem szükséges az összes sort kitöltened.

Időszak	Aktuális tartozás	nap	Ennek kamata
1. év			
szept. 1–30.	301 687 hiszen a kamatot csak év végén tőkésítik	30	$\frac{30}{365} \cdot 0,095 \cdot 301\,687$
okt. 1–31.	$301\,687 - 3750 = 297\,937$	31	$\frac{31}{365} \cdot 0,095 \cdot 301\,687 - \frac{31}{365} \cdot 0,095 \cdot 3750$
nov. 1–30.			
dec. 1–31.			
Itt következik a tőkésítés! A kamatok összege a törlesztés kezdete óta: Az éves kamat szeptember 1 előtti része: Tehát egész éves kamatunk: Tehát tőketartozásunk:			
2. év			
jan. 1–31.			
febr. 1–28.			
márc. 1–31.			
ápr. 1–30.			
máj. 1–31.			
jún. 1–30.			
júl. 1–31.			
aug. 1–31.			
szept. 1–30.			
okt. 1–31.			
nov. 1–30.			
dec 1–31.			
Éves kamatok összege: Összes tőketartozásunk a tőkésítés után:			