

**Széchenyi István Főiskola**  
**Közúti és Vasúti Járművek Tanszék**

**Dr. Nagy Vince**

# **GÉPÉSZETI RENDSZERTECHNIKA**

*kézirat*

Győr, 2001.

## 1. A RENDSZERTECHNIKA ALAPFOGALMAI

### 1.1 A jelenségek és folyamatok leírása

A mérnök munkája során mindig a környezetétől önkényesen és szubjektív módon elkülönített jelenséget vizsgál, egy nagyobb rendszerből kiemelt kisebb egységként. Indirekt módon a *rendszer* fogalma: olyan jelenségek vagy objektumok összessége, melyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak össze. A *folyamat* a rendszeren belül lejátszódó jelenségek térbeli és/vagy időbeli sorozata.

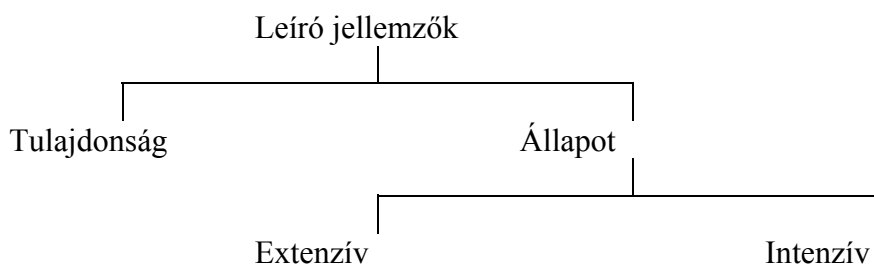
Az alapjelenségek és az összetett folyamatok leírása azokra a törvényszerűségekre épül, amelyek a jelenség, ill. a folyamat belső, lényegi viszonyait jellemzik. A *törvény* a jelenségek vagy azok egyes részei között fennálló szükségszerű, lényegi, általános és tartós viszonyt fejez ki.

A vizsgált jelenségre vonatkozó törvény vagy törvényszerűség meghatározásának kialakult módszertana van:

- a jelenséget leíró jellemzők kiválasztása
- tudományos absztrakcióval a jelenség lényegét tükröző vizsgálati modell (absztrahált modell) megalkotása
- a jelenség analízise útján a részösszefüggések feltárása
- a részjelenségek egymásra gyakorolt hatásának vizsgálata (szintézis)
- az eredmények általánosítása, a törvényszerűség megfogalmazása

A gépészeti folyamatokat leíró jellemzőket általában a tulajdonságot és az állapotot meghatározó jellemzők csoportjára osztjuk (1.1. ábra)

A *tulajdonságot* kifejező jellemzők általában egyértelműek. Ide tartoznak a különböző geometriára és alakra vonatkozó adatok, valamint az anyagjellemzők széles sora (fajhő v. fajlagos hőkapacitás, viszkozitás, villamos vezetőképesség stb.).



1.1.ábra: A leíró jellemzők csoportosítása

Az *állapotjellemzők* (v. állapothatározók) az *extenzív* és *intenzív* jellemzők csoportjára oszlanak.

Az *extenzívek* általában valamilyen kiterjedésre, méretre, mennyiségre jellemzők, vagy azokkal arányosak, és energiahordozókként szerepelnek. Ilyen a tömeg, térfogat stb., és természetesen maga az energia is. Alapvető, hogy az extenzívek teljes rendszerre vonatkozó értéke azonos a részrendszerekre vonatkozó értékek összegével. Az extenzívekre a megmaradási törvények érvényesek.

Az *intenzív* (vagy intenzitás) jellemzők valamilyen hatás erősségét fejezik ki. E hatások az intenzív jellemző különbségekkel arányosak. Maga az intenzitás jellemző a tér egy meghatározott pontjára értelmezhető. Ha egy térben az intenzitás jellemző eloszlása inhomogenitásokat mutat, azaz intenzitás jellemző különbségek vannak, e különbségek hatására extenzív áramok indulnak, mégpedig olyan irányban, hogy e különbségek megszűnjenek. A hajtóerő forrása az, hogy a rendszer egyensúly felé törekszik.

## 1.2 Rendszermodell

A rendszervizsgálat feltétele a rendszermodell megalkotása.

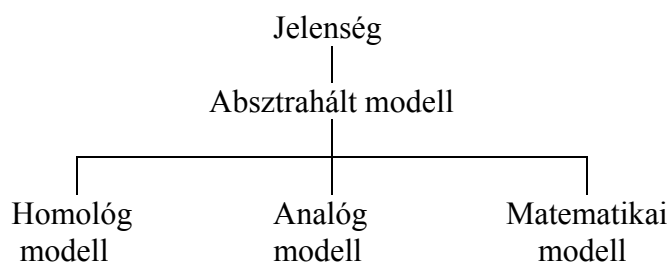
A *modell* a valóságos rendszer egyszerűsített, annak a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait kiemelő mása, mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolva, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak.

A modell a valódi rendszert csak meghatározott szempontból *helyettesíti*, egy bizonyos pontossági igény határain belül. Nagyobb hűségű leképezéshez a modellt további figyelembe vett jellemzők bevonásával *finomítani* kell, vagy más célú vizsgálatokhoz ugyanahhoz a rendszerhez újabb modellt kell rendelni.

*Modellezésnek nevezzük* a valóságos rendszer lényegi tulajdonságainak felismerését, és azok valamilyen formájú leképezését. A vizsgált jelenségnek az emberi tudatban az absztrakció eszközeivel leképezett képe az *absztrahált modell*.

Az absztrahált modell három formában képezhető le, az eredmény: *homológ*, *analóg* és *matematikai modell* vagy szerkezeti-, mechanikai-, matematikai modell (1.2. ábra).

A *homológ modell* geometriailag hasonló az eredeti rendszerhez, és ugyanolyan fizikai jelenség játszódik le benne. Gyakori elnevezés ezért a "kisminta". A homológ modellen végzett kísérletek eredményeinek az eredeti rendszerre való visszavetítése meghatározott hasonlósági kritériumok betartását követeli (hasonlóságelmélet).



1.2. ábra: Rendszermodellek

Az *analóg modell* az eredeti rendszerrel geometriai hasonlóságot általában nem mutat, a fizikai jelenség sem azonos, de a benne lejátszódó folyamatokat *azonos törvényszerűségek* határozzák meg. Az analóg modell az eredeti rendszerhez viszonyítva hasonló behatásra hasonló módon válaszol. Lehetőséget ad pl. hidraulikus jelenség villamos modellen való tanulmányozására stb.

Az absztrahált modell mérnöki gyakorlatban legelterjedtebb leképzése a *matematikai modell*. A matematikai modell a matematika szimbólumrendszerén keresztül teremt kapcsolatot a

vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői között. A matematikai modell kellően definiált kezdő- és peremfeltételekkel együtt egyben a vizsgált jelenség *algoritmusát* szolgáltatja.

Feltételezve a rendszer modelljének meglétét, felvetődik az a kérdés, hogyan viselkedik a rendszer azonos struktúra, de más rendszerjellemzők esetén. Erre a kérdésre ad választ a *szimuláció*.

### 1.3 Szimuláció

Szimulációnak nevezzük a valódi rendszer valamely célszerűen leképezett modelljén végrehajtott vizsgálatok összességét. A modellek jellegének megfelelően beszélünk *homológ és analóg szimulációról*. A matematikai modell megoldásának módja szerint *analitikus és digitális szimulációról* beszélünk.

### 1.4 A matematikai modell jellege

A rendszer viselkedését leíró matematikai összefüggés jellege, ill. meghatározásának módszere szerint különféle matematikai modelleket különböztetünk meg. Az elterjedt osztályozási formák szerinti modellek, modellpárok:

- statikus - dinamikus;
- koncentrált paraméterű - elosztott paraméterű;
- lineáris - nemlineáris;
- folytonos - nemfolytonos (diszkrét vagy mintavételes), ill.
- determinisztikus - sztochasztikus modellek lehetnek.

A modellek ezen felsorolt tulajdonságai általában nem önállóan jelentkeznek, hanem egy-egy célszerűen megalkotott modell magában hordja ezek szintézisét.

*Statikus* a modell, ha a rendszer állapota idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó egyenletekkel írható le. Jellemzésére elterjedt még a stacionárius, állandósult vagy egyensúlyi állapot kifejezés is.

A *dinamikus* modellek az időtartományban is leírják a jellemzőket, megjelenési formájuk közös vagy parciális differenciálegyenletek. A tárgyalás sokszor nem az idő-, hanem valamely célszerűen választott transzformált tartományban valósul meg.

A *koncentrált* paraméterű modellek a folyamatot, vagy az ezt előállító részfolyamatokat kiterjedés nélküli paraméter megfelelő transzformációként írják le, megjelenési formájuk algebrai vagy közös differenciálegyenlet.

Az *elosztott paraméterű* modellek megengedik a rendszeren belüli, általában folytonos paraméter-eloszlást. Megjelenési formájuk parciális differenciálegyenlet.

A *lineáris* modellekben csak az első hatvánnyal bíró változók, deriváltjaik és magasabb rendű deriváltjaik szerepelhetnek, általában állandó együtthatókkal szorozva. A szuperpozíció tétele érvényesül.

A *nemlineáris* modellek az előző megkötöttségektől mentesek. A folytonosság a jel- és időtartományban egyaránt értelmezhető.

A *folytonos* modellekben a változók egy adott tartományon belül bármilyen értéket felvehetnek, ill. minden időpillanatban van egy meghatározott értékük.

A *nemfolytonos* modelleknél a változók csak meghatározott diszkrét értékeket vehetnek fel, ill. az időtartományban csak kitüntetett időpontokhoz tartozik érték.

A *determinisztikus* modellek jellemzői, valamint maguk a változók egyértelmű függvényekkel adhatók meg térben és időben egyaránt.

A *sztochasztikus* modellek ugyanazon jellemzői és változói csak bizonyos valószínűségi összefüggésekkel definiálhatók.

## 1.5 A matematikai modell előállítása

Egy műszaki-technológiai folyamat matematikai modelljének megalkotásához alapvetően két út kínálkozik:

- Általános természettudományos ismeretanyagra támaszkodva, fizikai megfontolások alapján analitikus formájú közvetlen matematikai modell előállítása (white-box eljárás).
- Megfigyelés, ill. kísérleti identifikáció, ahol a matematikai modell megalkotásához az alapvető információkat mérések sorozatával kapjuk (black-box eljárás).

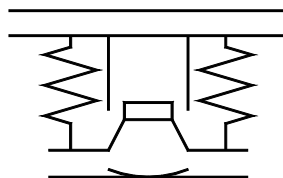
## 1.6 A rendszervizsgálat ábrázolási módjai

A rendszervizsgálatot a szemléletesség érdekében vázlatokkal követjük. Jellegzetes formájuk a szerkezeti és a hatásvázlat.

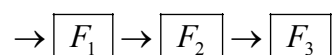
A *szerkezeti vázlat* szorosán utal a vizsgált folyamatot megvalósító reális technológiai berendezésekre, természetesen annak lényeges tulajdonságait emelve csak ki (1.3. ábra).

A *hatásvázlat* a folyamat elvi ábrázolási módja. A folyamat elemi egységeit szimbolikus formák tüntetik fel, ezeket hatásvonalak kapcsolják össze (1.4. ábra).

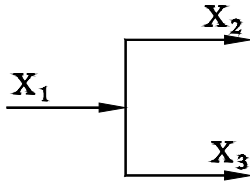
A *hatásvázlatnak* két alapvető formáját használjuk, ezek a *tömbvázlat* és a *jelfolyamábra*, vagy más néven a gráfábrázolás.



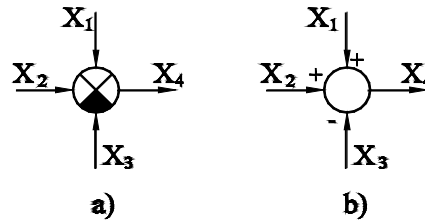
1.3. ábra: Szerkezeti vázlat



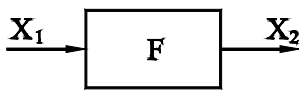
1.4. ábra: Hatásvázlat



1.5. ábra: Jelelágazás



1.6. ábra: Jelösszegezés

1.7. ábra: Jelmódosítás  
tömbvázlata1.8. ábra: Jelmódosítás  
jelfolyamábrája

A tömbvázlatokban a rendszer elemi egységeit téglalapok jelölik. Az elemi egységeket összekötő egyenes vonalak a hatást hordozó jelek haladását, a vonalak irányítása a haladás irányát tüntetik fel. A téglalapokban a tag jellemző függvényét (jelmódosítás) vagy jelleggörbét tüntetjük fel. A tömbvázlatok alapvető kapcsolódási formái a következők:

1. Elágazás (1.5. ábra):

$$x_3 = x_2 = x_1,$$

2. Összegezés (1.6. ábra):

$$x_4 = x_1 + x_2 - x_3.$$

A jelek előjeles összegezésének jelképe a negyedekre osztott kör, ahol a negatív előjellel figyelembe veendő jel negyede fekete (1.6/a ábra). Szokásos azonban az összegezés egyszerű körrel való ábrázolása is, az előjeleket az érkező jelek hatásvonalán tüntetve fel. Az ilyen ábrázolás elkerülhetetlen, ha négynél több jel összegezésére kerül sor (1.6/b ábra).

3. Jelmódosítás (1.7. ábra): a tag  $x_2$  kimenő és  $x_1$  bemenő jele közötti kapcsolatot az  $F$  függvény írja le.

A jelfolyamábrában a modellezett folyamat elemi egységének az felel meg, melynek két végpontjához a jelek tartoznak. A jelmódosítás jelfolyamábráját mutatja a 1.8. ábra.

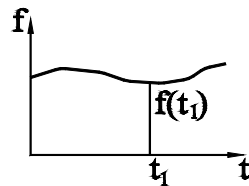
## 1.7 A jel fogalma és szerepe

A jel a konkrét fizikai folyamattól elvonatkoztatott, absztrakt fogalom, amely az információs tulajdonság hordozója.

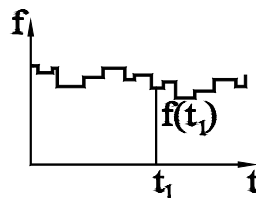
### 1. A jelek osztályozása

Értékkészletük szerint lehetnek

– *folytonosak*

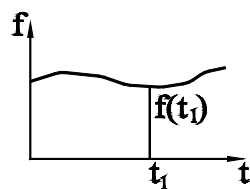


– *szakaszosak*

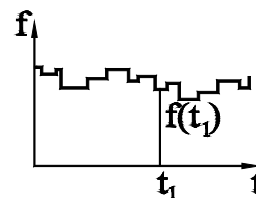


Időbeli lefolyás szerint van

– *folyamatos* jel, melynek értékkészlete az adott időtartomány bármelyik időpontjában változhat

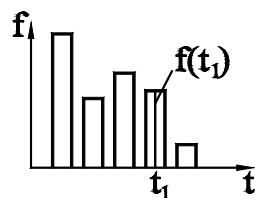


folytonos

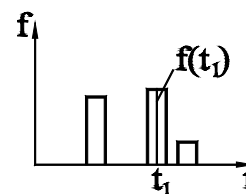


szakaszos

– *szaggatott* jel, amelyik csak meghatározott időpontokban változtatja az értékét



folytonos



szakaszos

Az információ megjelenési formája szerint

- *determinisztikus* jel, ha értéke meghatározott időfüggvénnyel egyértelműen megadható,
- *sztochasztikus* jel, ha szabálytalan lefolyású és csak valószínűségszámítási módszerekkel írható le.

## 2. Gerjesztő jelek

A lineáris rendszerek vizsgálatára kialakult két célszerűen használható függvénycsalád az

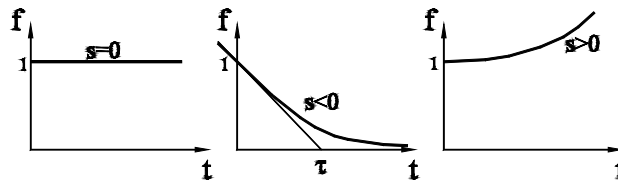
- exponenciális és a
- szinguláris függvények csoportja.

Exponenciális függvényekkel leírható gerjesztések

a függvény általános alakja:  $f(t) = e^{st}$

$s$ : lehet valós, képzetes vagy komplex szám.

a) ha  $s$  valós, akkor a gerjesztés esetei:



$$\tau = -\frac{1}{s}$$

b) ha  $s$  képzetes, akkor a gerjesztés harmonikus rezgés:

$$f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\operatorname{Re}[f(t)] = \cos \omega t$$

$$\operatorname{Im}[f(t)] = \sin \omega t$$

Tipikus szinguláris vizsgáló jelek

A rendszer állapota a *behatás előtti állandósult állapottól* és a *bemenő jeltől* függ.

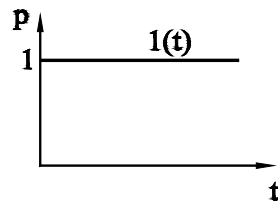
Egy egyensúlyban levő rendszerre ha bemenő jelet kapcsolunk, az kimozdul egyensúlyi állapotából, és változói a rendszer jellegének megfelelő tranziensekkel válaszolnak.

Az egyszerűség kedvéért szokás a rendszer változóinak *kezdeti értékét*, valamint az *egyensúlyi állapothoz tartó bemenő jelet* egyaránt *zérusnak* tekinteni.

A legfontosabb tipikus vizsgálójelek:

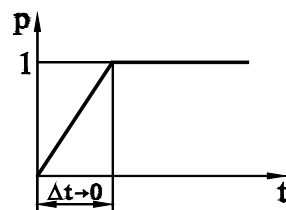
– egységugrás függvény

Jele:  $1(t)$



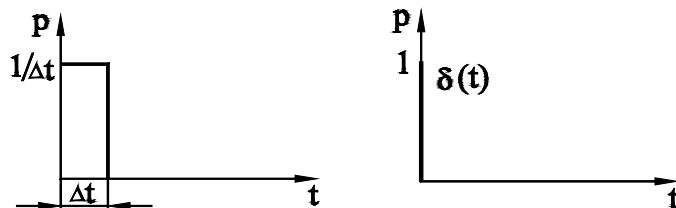
a rendszer válasza az átmeneti függvény

a gyakorlatilag előállítható jel:



– egységimpulzus függvény vagy más néven Dirac-delta

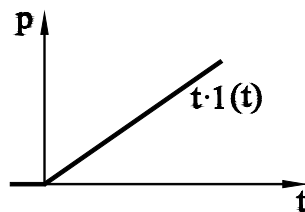
Jele:  $\delta(t)$



a rendszer válasza a súlyfüggvény.

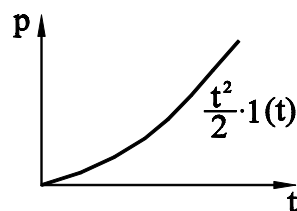
– egységnyi sebességugrás

Jele:  $t \cdot 1(t)$



– egységnyi gyorsulás

Jele:  $\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$



## 1.8. Rendszeridentifikáció

Műszaki konstrukciók, gépészeti rendszerek, objektumok dinamikai vizsgálatai elméleti rendszeranalízissel kezdődnek. A lényeges műszaki-fizikai adottságok alapján az objektumra egy helyettesítő rendszert (fizikai modell) matematikailag fogalmazzunk meg (matematikai modell), és a fizikai paraméterek számértékeit a szerkezeti rajzokból állapítjuk meg. A gépészeti rendszereknél, amelyekre vizsgálatainkat korlátozzuk, a paramétereket a merevségek ill. a rugalmasságok és a tehetetlenségek alkotják, ill. a ható csillapítások vonatkozásában feltételezésekkel kell élnünk. Ez a modellezés egyszerűsítő feltételezéseken alapul, amely bonyolult szerkezeteknél az elméleti rendszeranalízis eredményeiben bizonytalanságokra vezet. Újjonnan kifejlesztett rendszereknél és megváltoztatott rendszereknél, amelyeknél a változások a dinamikus viselkedést jelentősen befolyásolják és amelyekre vonatkozóan az átvihető, átadható tapasztalatok hiányoznak, a rendszeranalízis bizonytalanságai jelentősek lehetnek. Néhány fizikai jelenség, mint pl.: a nemlinearitások és a csillapítási hatások, bizonyos körülmények között nehezen vagy elméletileg nem is határozható meg. Ehhez járulnak még azok az esetek, amelyekre vonatkozóan az előírásoknak megfelelően működési- és biztonsági igazolásokat kell végrehajtani, anélkül, hogy összehasonlítható, már elvégzett igazolásokra lehetne visszanyúlni. Az elméleti rendszeranalízis problematikája, határai és végső soron a ráfordítási és ezzel együtt a gazdaságossági megfontolások a rendszerek kiegészítő vagy egyedüli kísérleti vizsgálatához vezetnek.

Az gépészeti rendszereknek az ún. struktúrakísérlettel történő kísérleti vizsgálata lényegében három célt szolgál:

1. az elméleti rendszeranalízis feltételezéseinek és eredményeinek az ellenőrzése,
2. elméletileg hibásan vagy egyáltalán fel nem deríthető viselkedés felfedezése,
3. meghatározott követelmények teljesítettségének igazolása.

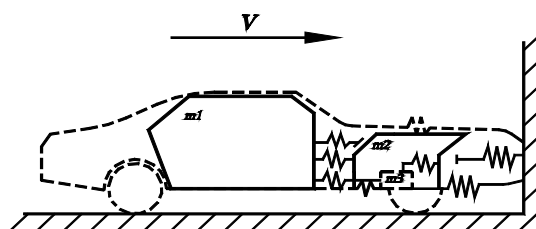
Ezek a célok legkülönbözőbb feladat megfogalmazásokat indokolnak. Így az elméleti rendszeranalízis eredményeinek a struktúrakísérletre átvihetőknek kell lenniük, miközben a rendszeranalízisből származó számítási modell egyes pontjainak a rendszerkísérlet mérési pontjaival meg kell egyezniük vagy az adatoknak megfelelően átszámíthatóknak kell lenniük. Struktúrakísérleteket általában nem valamennyi szükséges terhelési esetre, hanem csak néhányra, esetleg egyszerűsítésekkel) hajtunk végre. Legyen ez azért, mert a kísérletek műszaki okok miatt nem realizálhatók vagy egyszerűen gazdaságtalanok lennének. Ezeknek a struktúrakísérleteknek az eredményei ezután hozzájárulnak a számítási modell korrekciójához, hogy a javított, pontosabb számítási modellel a kísérlet során meg nem valósított terhelési esetet számítással is igazolni tudjuk.

A rendszeridentifikáció mint kísérleti rendszeranalízis az előzőekben vázolt feladatmegfogalmazásokat tartalmazza.

Ide vonatkozó példák:

- zaj-, rázkódtatás- és zavarforrás helyének a meghatározása a környezetvédelem keretein belül,
- szerszámgépek átviteli függvényeinek (frekvencia-jelleggörbéinek) a kísérleti meghatározása különböző gerjesztések segítségével,
- személygépkocsi ütközésvizsgálatoknál a helyettesítő modell tehetetlenségi- és merevségi adatainak a kísérleti meghatározása a rugalmas tartományban (1.9. ábra),

- offshore építmények (nyílt vízen, pl. tengeren létesített építmények) önlengését jellemző mennyiségek meghatározása,
- sínhez kötött gyorsvasutak helyettesítő rendszerének a merevségi és csillapítási adatainak a korrekciója a mért kényszerlendések és a gerjesztés alapján számoltak összehasonlításával oly módon, hogy a számított és a mért kényszerlendések között jó megegyezést érjünk el, a sínhez kötött közlekedés által a dinamikailag igénybevett felépítmény fizikai jellemzőinek a kísérleti meghatározása,
- a hullámváz és a hajógépek üzeme által létrehozott hajótest rezgések vizsgálata.



1.9. ábra: Helyettesítő modell személygépkocsi ütközésvizsgálataira

### 1.8.1. A rendszeridentifikáció besorolása és feladatkitűzése

A rendszertechnikai vizsgálatok egyik olyan módszere a rendszerazonosítás, amelyet elsősorban bonyolult és nagy terjedelmű rendszerek esetében lehet előnyösen használni. Lényege, hogy keresni kell egy olyan struktúrájú elvont rendszert, amely a vizsgált reális rendszerrel megegyező viselkedésű. Ez a megtalált, "identifikált" struktúra nem egyezik meg feltétlenül a vizsgált rendszer tényleges struktúrájával, de vele azonos működésű, így azt a vizsgálatok során helyettesítheti, vele azonosíthatjuk. Az identifikált rendszer a fekete dobozként kezelt eredetinek egy ismert felépítésű, elvont rendszerrel helyettesíthető új modellje.

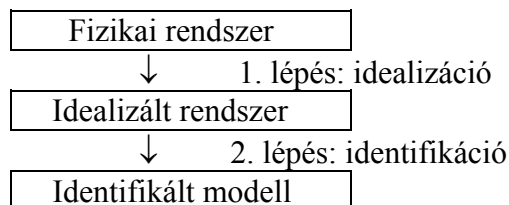
A fizikai paraméterek értékeit a szerkezetből kiindulva állapítjuk meg:

szerkezeti modell → mechanikai modell → matematikai modell

A paraméterek: tömegek, tehetetlenségek, rugóállandók, csillapítók.

A modellezés egyszerűsítő feltételeken alapul. (pl.: linearizálás gumirugó esetén)

Az identifikált modell előállításának menete:



1. lépés: a valóságos fizikai rendszer idealizálása

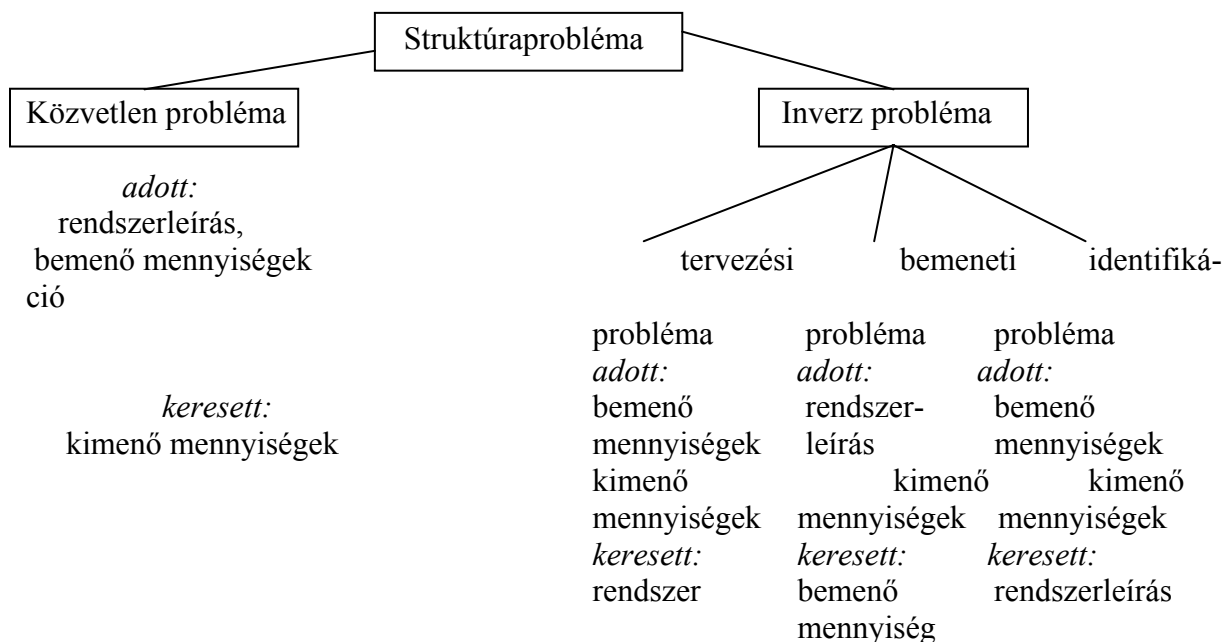
2. lépés: az idealizált fizikai rendszer matematikai modelljének meghatározása az ismert fizikai tulajdonságok figyelembevételével

A gépészeti rendszerek tárgyalását röviden a struktúraprobléma fogalmával vázoljuk. Az gépészeti rendszerek identifikációja a stuktúraproblémák nagy osztályához tartozik, amelyet a be-/kimeneti összefüggés (1.10. sz. ábra) jellemez.



1.10. ábra: A be-/kimenő összefüggés

Ha pl. egy kéményre a természetes szél hat, úgy a „kémény” rendszerre ható szélerők a bemenő mennyiségek, az eredő elmozdulások (ill. igénybevételek) a kimenő mennyiségek. A helyettesítő rendszernek a bemenő- és kimenő mennyiségekkel történő ábrázolása a rendszer rendszerelméleti illusztrálása. A struktúraprobléma felbontását az eltérő feladatkitűzéseknek megfelelően a 1.11. ábra mutatja, amivel a számunkra érdekes identifikációs problémának a struktúraprobléma alá történő besorolása felismerhető. A közvetlen probléma feladatkitűzése annak felel meg, ami szokásos módon az új fejlesztés konstrukciós fázisában lép fel. A tervprobléma kidolgozása azt jelenti, hogy a rendszert adott be- és kimenő mennyiségekre úgy kell megvalósítani, hogy az a be-/kimeneti összefüggésnek mindig jól megfeleljen. A bemenet problémája külön magyarázatokat nem igényel. Az identifikációs probléma megoldása a következő: a rendszert leíró egyenletek meghatározása a mért be- és kimenő mennyiségek alapján. Ezzel a rendszeridentifikáció feladatkitűzését a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a különböző bemenő mennyiségekre adódó kimeneti mennyiségek megfigyeléséből egy helyettesítő modellt kell meghatározni, ami bizonyos - a mindenkor feladatkitűzésből eredő - adott kritériumok szempontjából megfelel a valós rendszernek (pl. a rendszer- és a modell-válasz megegyezése meghatározott hibahatárokon belül).

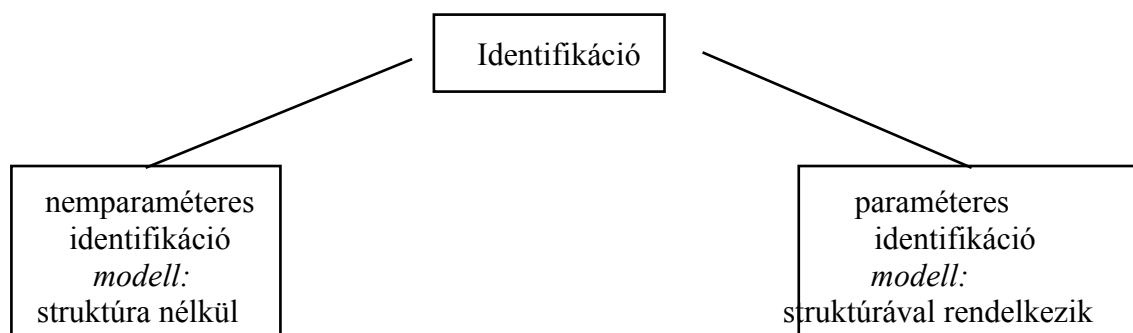


1.11. ábra: Az identifikációs probléma besorolása

Ha megkíséreljük, hogy az előzőleg felsorolt példákat a fenti feladatkitűzéssel összhangba hozzuk, úgy felismerhetjük, hogy a mindenkorival szemben különböző követelmények lépnek fel. Néha elegendőek a részmodellek, más feladatok teljes modellt igényelnek.

A modellek kvalitatív és kvantitatív jellegűek lehetnek. A kvalitatív modellek a be- és kimenő mennyiségek értékszerű hozzárendelését csak bizonyos értéktartományokon belül tartalmazzák, míg a kvantitatív modellek a be- és kimenő mennyiségek közvetlen érték szerinti hozzárendelését foglalják magukba. Csupán kvantitatív modelleket tárgyalunk. Nemparaméteres modelleket (black-box-modellek, fekete doboz modellek, struktúra nélküli modellek) és paraméteres modelleket (struktúrával rendelkező modelleket) különböztethetünk meg (1.12. ábra).

A rendszerek dinamikus viselkedésének a matematikai leírását a rendszer be- és kimenő mennyiségei között fennálló függvények szolgáltatják. A nemparaméteres modellnél a funkcionális összefüggést táblázatosan vagy grafikusan (frekvenciajelleg-görbék, átviteli függvények), a paraméteres modellnél azonban expliciten fellépő paraméterekkel analitikusan adjuk meg.



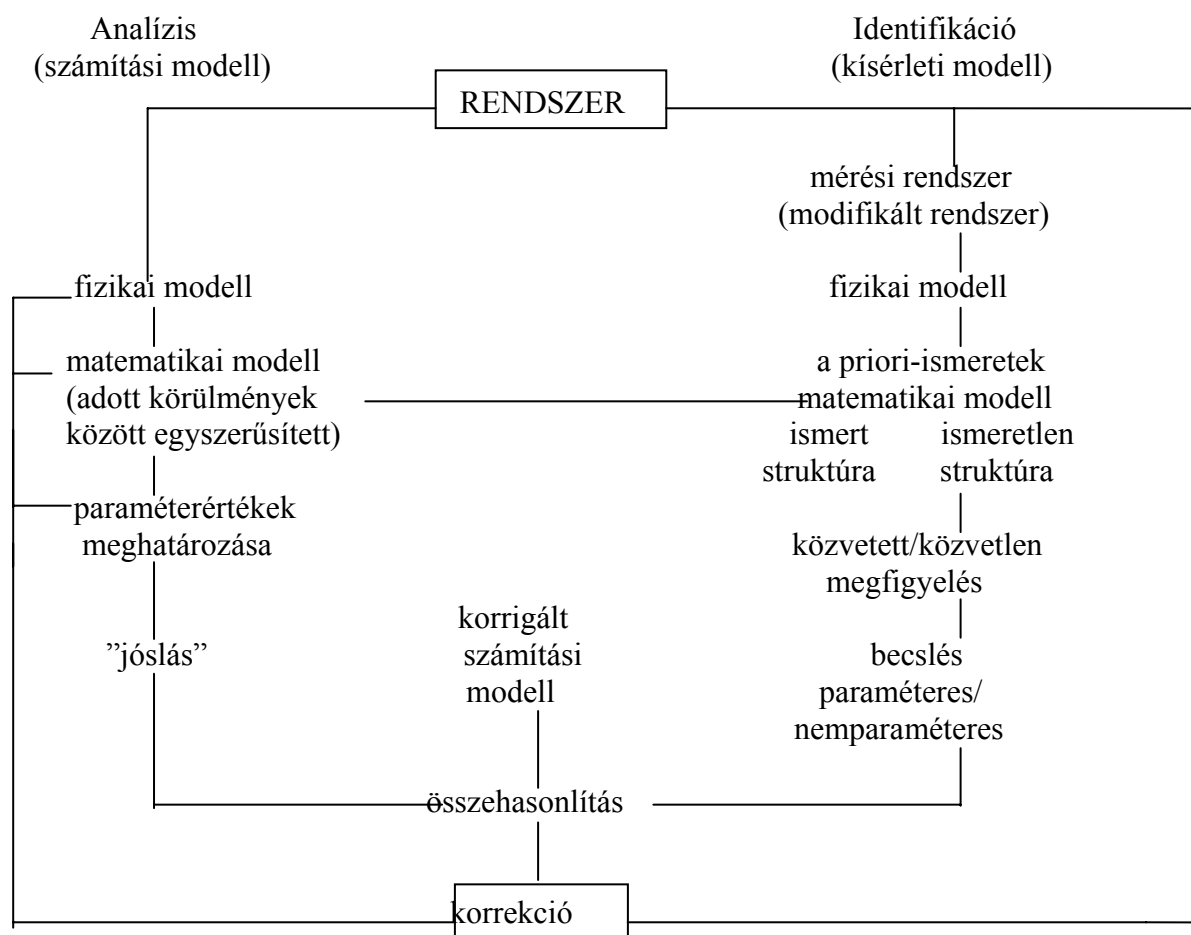
1.12. ábra: Az identifikációs probléma felosztása

### 1.8.2. Modelldefiníciók és összefüggések

Ahogy azt már említettük, a rendszeranalízis számítási modellje és a rendszeridentifikáció kísérleti modellje között kölcsönös összefüggés áll fenn, amelyet a 1.13. ábra mutat.

A rendszeranalízisen belül a meglevő valós rendszert elméleti úton a szerkezeti rajzokból kiindulva vizsgáljuk. A fizikai modell a fizikailag idealizált rendszerből áll, amelyből elhagytuk a feladatcélok szempontjából lényegtelen dolgokat. Az esetleg még tovább egyszerűsítendő fizikai modell matematikai, analitikai leírása - a matematikai megfogalmazás végrehajtás érdekében - a modell egyenleteit, az ún. matematikai modellt szolgáltatja, amelynek a paraméterértékeit (merevségek, tehetetlenségek, esetleges csillapítások) a szerkezeti rajzokból nyerjük. Ezzel adott bemenő mennyiségekre a kimenő mennyiségeket tudjuk előre megmondani.

Mindezt összefoglalóan számítási modellnek nevezzük, ami a bemenő mennyiségek osztályát és a megkívánt modellpontosságot veszi figyelembe.



1.13. ábra: A rendszeranalízis és a rendszeridentifikáció elvi eljárása

Az identifikációnál a mérő- és a gerjesztőberendezés által megváltoztatott mérési rendszerből indulunk ki. A mérő- és a gerjesztőberendezésnek az objektum dinamikai viselkedésére gyakorolt hatásait kell megvizsgálnunk és adott esetben ezt figyelembe kell vennünk. Az analízis fizikai modellje az identifikáció fizikai modelljére vonatkozó priori ismereteket tartalmaz, amelyeket adott körülmények esetén az előkísérletek alapján nyert ismeretekkel ki kell egészíteni vagy meg kell változtatni. Ebből és az analízis matematikai modelljéből származó ismeretekből (pl. szabadságfokok száma „n”) állítjuk fel a rendszerre az identifikáció matematikai modelljét, ami paraméteres vagy neparaméteres. Végül a rendszernek az adott bemenő mennyiségekre vonatkozó megfigyelése (közvetlen: a mérési eredmény és a számunkra érdekes mennyiség megegyezik egymással, indirekt: mindkét mennyiség különböző) neparaméteres vagy paraméteres identifikációra vezet.

A kísérleti és a számítási modell összehasonlítása (lásd a 1.13. ábrát) egy hiba definíciójából indul ki, amelyet a feladatcél szempontjából alkalmas, identifikált mennyiségből és a számítási modellből képezünk.

Ha az összehasonlítás adott hibakorlátok alapján nem kielégítő, úgy egy alkalmasan megválasztott célfüggvénnyel illesztést, korrekciót kell végrehajtanunk. Az illesztés általában a számítási modell korrekciójához vezet, nem ritkán a kísérleti modellt is a mérő-, a gerjesztőberendezés vagy a környezeti behatások vonatkozásában, illetve a fizikai modellt is stb. módosítani kell. Ha a számítási és a kísérleti modell matematikai modelljei megegyeznek egymással, úgy egy nem kielégítő eredményű összehasonlításnál elegendő puszt-

tán egy paraméterillesztés végrehajtása. A korrekció eredménye akkor a korrigált, javított számítási modell.

### 1.8.3. Az identifikációs mennyiségek és eljárások jellemzői

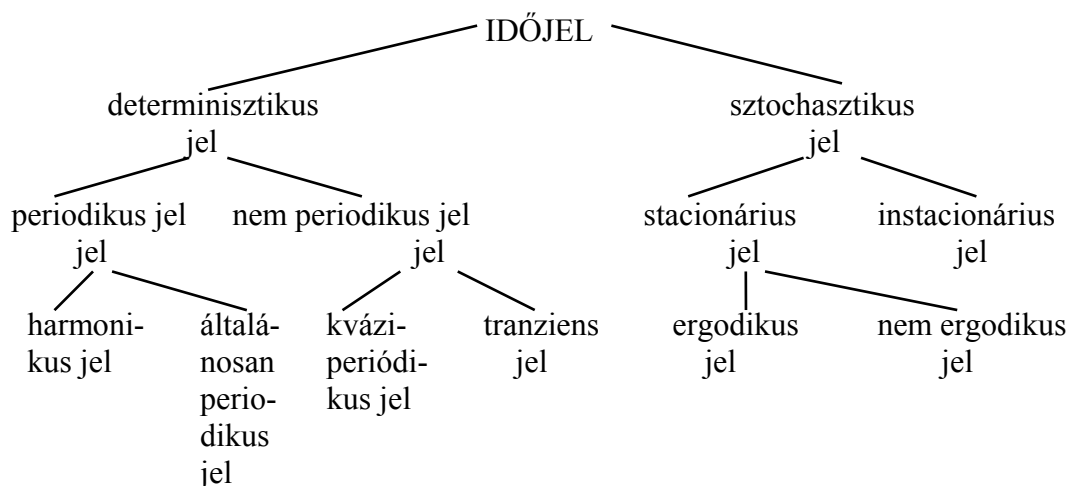
Az alkalmazott matematikai modellek megkülönböztetése a 1.12. ábra szerintinél még bővíthető. Erre vonatkozó ismertetőjegyek:

- koordináták választása (diszkrét, folytonos  $\rightarrow$  diszkrét, folytonos modell),
- a modellegyenletek operátorainak a tulajdonságai.

További ismertetőjegyeket az alkalmazott bemenő mennyiségek szolgáltatnak. Ezek:

- természetesek (üzemállapot) vagy mesterségesek (vizsgálójelek),
- determináltak (analitikusan expliciten leírhatók és ezzel előre megmondhatók), megjósolhatók és reprodukálhatók vagy sztochasztikusak (szabálytalanok) lehetnek.

A jelek tulajdonságait osztályozásuk tartalmazza. (1.14. ábra)



1.14. ábra: Jelek osztályozása

A gyakorlatban a determinisztikus vizsgálójelek közül mindenekelőtt a harmonikus és a tranziens jelek, a sztochasztikusak közül túlnyomóan a stacionáriusok érdekelnek bennünket.

Úgy a bemenő mint a kimenő mennyiségek mért jelei zavarójeleket tartalmaznak, amelyek ismét determinisztikusak vagy sztochasztikusak lehetnek, ezek korrekciót (determinisztikus zavarójelek) és alkalmas statisztikai eljárásokat (sztochasztikus zavarójelek) igényelnek. A

- bemenő mennyiségek (bemeneti hiba),
- általánosított mennyiségek (általánosított hiba)

jeleinek a hibavizsgálata (a modell és a rendszer közötti hiba, modellhiba) szerint az identifikációs eljárás alábbi modelljeit különböztethetjük meg:

- előrecsatolt („előrehaladó”) modell,

- inverz modell,
- általánosított modell.

A modellválasztás egyrészt a szóbanforgó mérési adatoktól és feladatcéloktól, másrészt attól függ, milyen egyszerűen lehet a keresett mennyiségeket meghatározni. Természetesen az adott és a keresett mennyiségek közötti lineáris összefüggésre törekszünk (együttható vonatkozásában lineáris modell, állandó együtthatójú egyenletekre vezető modell).

Az analízis eljárásai és ezzel a legtágabb értelemben az identifikációs módszerek a modell alakjától, a megengedett vizsgálójelektől, a zavarójelektől, a szükséges modellpontosságtól, a folyamat időbeli tulajdonságaitól, a meglevő lehetőségektől (felszerelés, tapasztalat, stb.) függ. A hiba minimalizálása determinisztikus approximációs eljárásokkal (pl. interpoláció, miközben gyakorta statisztikai segédeszközöket, mint pl. átlagértékképzést alkalmazunk) vagy statisztikus módszerekkel (pl. a súlyozott legkisebb hibanégyzetek módszere) történhet. Továbbá megkülönböztethetünk direkt (közvetlen) (explicit) és indirekt (közvetett) (implicit) eljárásokat. A közvetlen eljárásoknál a keresett mennyiségeket egy számítási menet során határozzuk meg, az indirekt eljárásoknál ezeket iteratív úton nyerjük. A feldolgozás digitális eljárásokra korlátozott, amelyek programozható digitális számítógépek on- vagy off-line üzemét teszik lehetővé, azaz az első esetben a mérési adatoknak a számítógépen kívüli közbenső tárolására nem kerül sor és a kísérletnek a számítógép segítségével történő vezérlése lehetséges, míg a második esetben a mérési adatok külső közbenső tárolására kerül sor.

További fontos megkülönböztetési jegy az a tér, amelyben a jeleket ábrázoljuk, amelyeken az egyes eljárások alapulnak: időtér vagy frekvenciatér aszerint, hogy idő jeleket dolgozunk-e fel, vagy az idő jeleknek a frekvenciatérbe történő transzformálását (frekvenciaanalízis) hajtjuk végre.

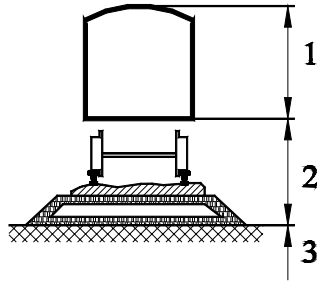
#### 1.8.4. Feltételek és gyakorlati szempontok

Az identifikáció a valós rendszer be- és kimenetén végzett mérések alapján történik. Ez a feladatcél tehát feltételezi, hogy egyedül a megfigyelés alapján lehetséges a rendszer identifikációja.

Egy rendszer akkor figyelhető meg teljesen maradéktalanul, ha a lényeges fizikai folyamatokat a mért válaszok, állapotjellemzők tartalmazzák, és akkor identifikálható, ha a nyert mérési adatok alapján sikerül a szükséges szabadságfokokhoz tartozó valamennyi mennyiséget kiszámolni.

Napjaink műszaki alkotásainak a dimenziói nem ritkán olyanok, hogy a teljes rendszer kísérleti vizsgálata lehetetlen. Ehhez még határidős megfontolások is járulnak.

A teljes rendszerre vonatkozó dinamikai vizsgálatot és a biztonsági igazolást gazdaságosan az alrendszerekre vonatkozó eredményekkel végzik el: rendszerszintézis. Az alrendszerek formájában történő dinamikai vizsgálat pragmatikus eljárására a 1.15. ábra utal egy példa alapján.



1.15. ábra: Példa a rendszer kezelésére

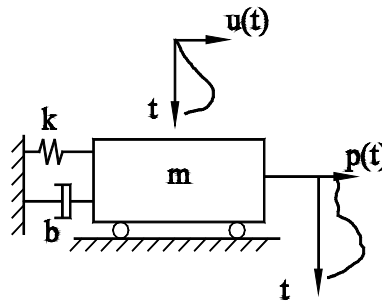
- 1 Kocsiszekrény
- 2 Kerékpár a sínen viszkoelasztikus aljazattal
- 3 Talaj

Meg kell még említenünk, hogy annak mindig van értelme, ha olyan sok priori-ismeretet alkalmazunk az identifikáció céljára, amennyivel csak rendelkezünk, mert így annál részletesebb fizikai bepillantást nyerünk a rendszer viselkedéséről. A paraméteres identifikációt kell minden esetben előnyben részesítenünk bizonyos körülmények között akkor is, ha a modell struktúrájának a megadásával fizikailag nem értelmezhető paraméterértékeket kapunk. Ez a tényállás ezután támpontot és alapot szolgáltat a rendszer módosítására. Egy eleinte nemparaméteres modell paraméteressé tételét a lengéstanban gyakran alkalmazzák. Első lépésben meghatározzuk a nemparaméteres modellt (pl. frekvenciajelleggörbéket). Ez fontos priori-ismereteket (pl. a rendszer-szabadságfokok számát, a saját frekvenciákra vonatkozó közelítő értékeket) szolgáltat a második lépéshez a paraméteres modell meghatározására, amit szükség esetén iteratív úton kell javítani (pl. a szabadságfokok száma).

## 2. DETERMINISZTIKUS JELEK ÉS FOLYAMATOK

A determinisztikus jelek analitikusan expliciten leírhatók és ezáltal reprodukálhatók is. Ha adottak a 2.1. ábrán vázolt rendszer elasztomechanikus jellemzői, azaz ezeket rögzített értékű paraméterekként fogjuk fel, úgy egy determinisztikus rendszerről beszélünk. Ha a  $p(t)$  bemenő mennyiség determinisztikus, akkor egy determinisztikus rendszer kimenő mennyisége szintén determinisztikus:

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$



2.1. ábra: Az egyszabadságfokú rendszer

A determinisztikus jel leírható valamilyen matematikai függvénnyel, melynek ismeretében bármelyik múlt vagy jövőbeli időpillanatban értéke meghatározható.

Méréstechnikai fogalmazásban: ha a determinisztikus jelet eredményező kísérletet többször megismételjük ugyanolyan körülmények között, az eredményjel időbeli lefolyása mindig ugyanolyan lesz.

Az elasztomechanikus rendszerekre történő korlátozásnak megfelelően a „determinisztikus folyamat” megjelölés a determinisztikus rendszer determinisztikus bemenőjelenél fellépő dinamikus viselkedés szinonimája. Ezzel szemben egy sztochasztikus jelet matematikailag csak indirekt módon, még hozzá statisztikai módszerek segítségével, azaz statisztikai jellemzők segítségével lehet leírni, ezzel egy időpontra sem lehet „megjósolni” és nem reprodukálható.

### 2.1. Kinematikai jellemzők

A következőkben definiáljuk az egyes determinisztikus jeleket és leírjuk különböző ábrázolásukat.

#### 2.1.1. Harmonikus jel

A harmonikus jelet az

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = x(t \pm nT), \quad n \in \mathbb{N}$$

egyenlet jellemzi.  $\omega$  ( $\text{s}^{-1}$ -ben mérve) a körfrekvencia,  $f$  (Hz-ben mérve) a frekvencia és  $T$  (s-

ban mérve a jel periódusa:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Az

$$\alpha = \omega t + \varphi = \omega(t + t_\varphi)$$

fázis  $\omega t$ -ből és a  $\varphi$  nullfázisszögből, illetve az  $\omega$  körfrekvencia és a  $t_\varphi = \frac{\varphi}{\omega}$  fáziseltolási idő szorzatából tevődik össze. Az  $(= \hat{x})$  a harmonikus jel amplitúdója. Használatos a következő terminológia:

$\varphi > 0$ : a jel a  $\varphi_R = 0$  összefüggéssel jellemzett referenciajelhez képest siet;

$\varphi < 0$ : a jel a  $\varphi_R = 0$  összefüggéssel jellemzett referenciajelhez képest késik.

Valós írásmóddal:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ &= A(\cos \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \varphi) \\ &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \\ A_1 &= A \sin \varphi, \quad B_1 = A \cos \varphi \end{aligned}$$

következik, hogy

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad \tan \varphi = \frac{A_1}{B_1}$$

A komplex írásmódú alak:

$$x(t) = \operatorname{Im} y(t)$$

$$y(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$= A e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$= B e^{j\omega t}$$

$$B = A e^{j\varphi} \quad (\text{kezdeti idővektor})$$

$$= A(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$= B_1 + j A_1$$

$$A = |B|$$

A harmonikus jelnek az időtérben történő ábrázolását a 2.2. ábra, a vektorábrának a Gauß-féle számsíkon való ábrázolását a 2.3. ábra mutatja. Emellett létezik a frekvenciatérben történő ábrázolás (2.4. ábra), ami a fázist és az  $A$  amplitudót  $\omega$  függvényében mutatja. Mivel a harmonikus lengést csak egy frekvencia tünteti ki, egy frekvenciával rendelkező diszkrét frekvenciaspektrum, ezek a diagramok mindig egy vonalból állnak.

Az  $x(t) = \text{Im } y(t)$  hozzárendelés alkalmazása nem gyakori, hanem  $x(t)$ -t komplexként helyettesítik azzal a feltételezéssel, hogy csupán az imaginárius rész (vagy a valós rész) rendelkezik fizikai tartalommal.

Az  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  elmozdulás  $v(t)$  lengési sebessége ismert módon a

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

alakban adódik, ahol az abszolút érték:

$$|v(t)| = \omega \left| x\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) \right|$$

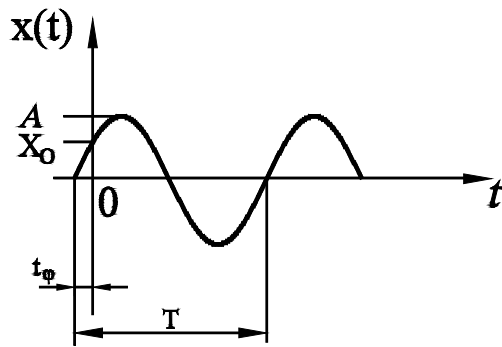
Ennek megfelelően igaz a gyorsulásra, hogy

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t).$$

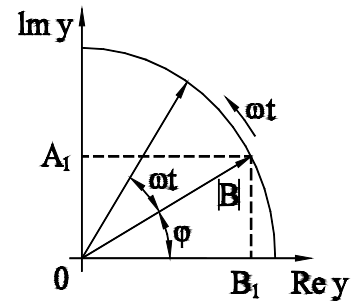
A lengéstanban szokásosak még az alábbi definíciók:

$$\left. \begin{aligned} x_m &= \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt, \\ x_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}, \quad \left. \begin{aligned} &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} x_m = \frac{1}{\sqrt{2}} x_{sp} \end{aligned} \right\}$$

$x_m$  a jel abszolút értékének a matematikai középértéke és  $x_{eff}$  az effektív értéke (root-mean-square-, rms-érték, 2.5. ábra)



2.2. ábra: Egy harmonikus jel ábrázolása az időtérben



2.3. ábra: A harmonikus jel vektoros ábrázolása

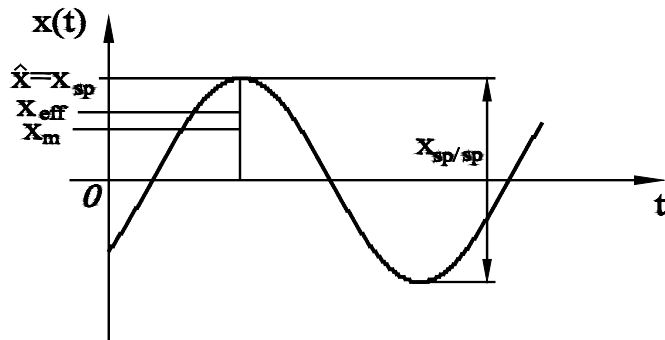


a)



b)

2.4. ábra: A harmonikus jel a) fázis- és b) amplitúdó - diagramja



2.5. ábra

Definíciók:

$$x_{eff} = F_f \cdot x_m = \frac{1}{F_s} x_{sp}$$

$F_f$  – formatényező

$F_s$  – csúcsstényező

A hangtechnikában (akusztikában) az elmozdulásokra, sebességekre és gyorsulásokra definiáltak még az ún. szintértékek:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= 20 \lg \left( \frac{x_{eff}}{x_0} \right), \\ L_v &= 20 \lg \left( \frac{v_{eff}}{v_0} \right), \\ L_a &= 20 \lg \left( \frac{a_{eff}}{a_0} \right) \end{aligned} \right\}$$

ahol a vonatkoztatási mennyiségek nagysága:

$$x_0 = 0,8 \cdot 10^{-11} \text{ m},$$

$$v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$a_0 = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$v_0$  -t rögzíti a DIN 45630, a többi vonatkoztatási mennyiség az 1000 Hz-re történő átszámításból következik. A szintértékek (dimenzió nélküli) egysége a decibel (dB). Az átszámítás pl.  $x_{eff}$  esetében az  $L_x$  elmozdulásszintből:

$$x_{eff} = x_0 \cdot 10^{\frac{L_x}{20}}$$

### 2.1.2. Periodikus jel

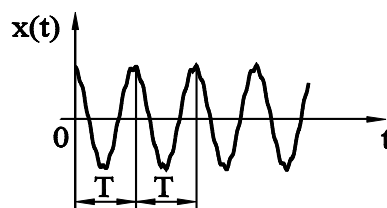
A periodikus jelek jellemzője, hogy rögzítetten adott

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

alapkörfrekvenciával rendelkeznek (2.6. ábra),

$$x(t) = x(t \pm nT), \quad n \in \mathbb{N}$$

sin- és cos függvények sorozatával ábrázolhatók: Fourier-sorával írhatók le. A valós ábrázolás az időtérben:



2.6. ábra: Példa egy periodikus időfüggvényre

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \varphi_n),$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt,$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

$$a_n = c_n \cos \varphi_n, \quad b_n = c_n \sin \varphi_n$$

A komplex ábrázolás az időtérben:

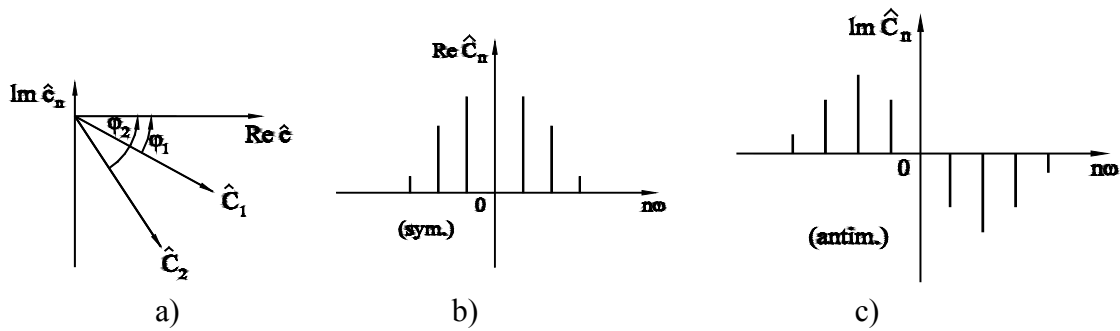
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{jn\omega t},$$

$$\hat{c}_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & n > 0 \\ a_0 & n = 1 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & n < 0 \end{cases}$$

$\hat{c}_n$  jelöli a  $\varphi_n$  nullfázisszögű  $n\omega$  részlengés komplex amplitudóját. A Fourier-sorok tárgyalását a magasabb matematikával és a numerikus matematikával foglalkozó tankönyvekben találjuk.

A frekvenciatérre vonatkozó ábrázolást (2.7. ábra) ismét az  $n$ -dik részlengés (harmonikus) vektorábrája és a diszkrét jelspektrumok jelentik. Az utóbbiak a harmonikusnak a teljes jelre vonatkozó megfelelő hányadait tükrözik vissza:

$$\hat{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt$$



2.7. ábra: Egy periodikus jel ábrázolása a frekvenciatérben

- a) vektorábra
- b) a Fourier-együtthatók valós részei
- c) a Fourier-együtthatók imaginárius részei.

### 2.1.3. Szuperponált és modulált (gyorsperiódusú) jel

Egy csillapított, illetve gerjesztett lengés leírható az

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} e^{j\omega t} = x_0 e^{(-\delta + j\omega)t}$$

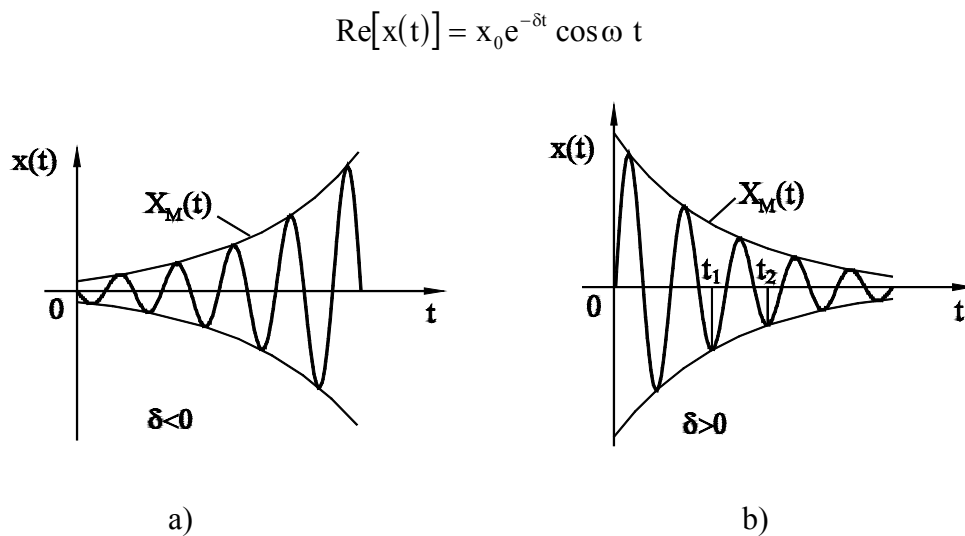
kifejezéssel, ahol  $\omega$  a lengés körfrekvenciája és  $\delta$  a csillapítási állandó (2.8. ábra). Az

$$x_T(t) = e^{j\omega t}$$

kifejezést vivőjelnek,  $x_T(t) = x_T(t + T)$ , és az

$$x_M(t) = x_0 e^{-\delta t}$$

burkolót modulációs jelnek nevezzük.



2.8. ábra: Gerjesztett (a) ill. csillapított (b) lengés

Két, egymást követő maximális kitérésre igaz:

$$\vartheta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \ln \frac{e^{-\delta_i} \cos \omega t_i}{e^{-\delta_{i+1}} \cos \omega t_{i+1}} = \ln e^{-\delta(t_{i+1}-t_i)} = \delta(t_{i+1}-t_i) = \frac{\delta}{\omega} 2\pi.$$

ahol  $\vartheta$  a lengés logaritmikus dektrementumát jelöli.

Általában két harmonikus jel összegéből az eredő (egyszerűsítve azonos fázishelyzetre) az  $x(t) = x_s(t) \cdot x_T(t)$  szorzattal fejezhető ki, ahol:  $x_T(t)$  a vivőjel.

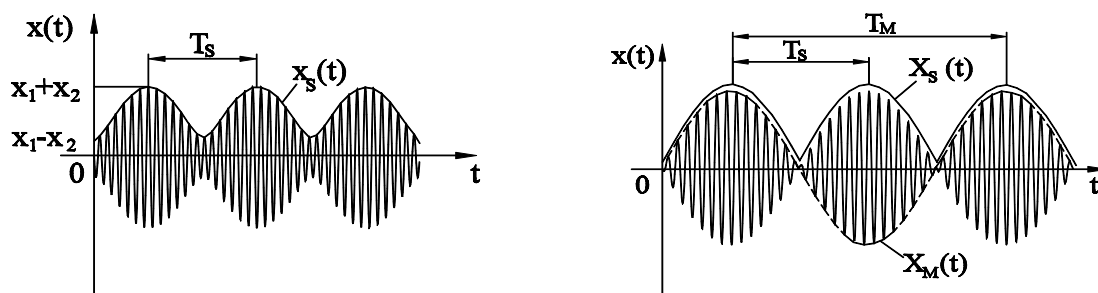
$$x(t) = x_1 \sin \omega_1 t + x_2 \sin \omega_2 t$$

$x(t)$  alakjában egy lebegéssel van dolgunk, ha az  $\omega_1 > \omega_2$  frekvenciák egymáshoz közel helyezkednek el. Az  $x_T(t)$  vivőjel az  $\omega_T = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  vivőfrekvenciával leng, periódus idő:

$T_T = \frac{2\pi}{\omega_T}$  és kezdőfázisban változó. Az  $x(t)$  lengés ezen kívül  $x_s(t)$ -vel amplitúdó-modulált.

$x_s(t)$  az  $\omega_s = \omega_1 - \omega_2$  lebegési frekvenciájú lebegés burkolója, lebegési periódus:

$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ , s  $x_1 + x_2$  és  $x_1 - x_2$  közötti értékeket vesz fel (2.9. a. ábra).



2.9. ábra: Lebegések

Itt az egyszerű lebegéssel van dolgunk, ami még csak harmonikusan amplitúdómodulált.

$x_M(t)$  az  $\omega_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\omega_s}{2}$  modulációs frekvenciájú modulációs jel, a  $T_M = \frac{2\pi}{\omega_M}$

modulációperiódus a lebegési periódus kétszerese (2.9.b.ábra).

Két egymáshoz közel eső frekvenciájú harmonikus jel összege tehát a vivőfrekvenciához képest alacsony lebegési frekvenciánál a gyakorlatban „kellemetlen”, mivel egyrészt zavaró lehet (a közérzet zavarása az alacsony frekvenciák következtében), másrészt esetleg túl nagy igénybevételekhez vezethet.

### 2.1.4. Nemperiodikus jel

Periodikus időfüggvényeket a Fourier-sor segítségével ábrázolunk. Nemperiodikus folyamatok ( $T \rightarrow \infty$ ) ezzel szemben a frekvenciatérben történő leírásukhoz az integráltranszformációk alkalmazását igénylik.

#### 2.1.4.1. Fourier-transzformáció

Elégítsen ki az  $x(t)$  nemperiodikus időfüggvény bizonyos feltételeket:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{és } x(t) \text{ korlátos variációjú.}$$

Az időfüggvény abszolút integrálhatóságának a feltétele különösen az ún. energiakorlátos időjeleknél kielégített, amelyekre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \leq K < \infty \quad \text{érvényes.}$$

Az  $x(t)$  nemperiodikus függvénynek a Fourier-transzformáltja:

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

ami az  $x(t)$  függvény folytonos amplitúdóspektruma: a körfrekvenciánkénti komplex amplitúdó és ezzel  $x(t)$  ábrázolása a frekvenciatérben. Végeredményben a valós változós  $x(t)$  függvényhez egy  $X(j\omega)$  függvényt rendelünk, amelynek változója az  $\omega$  körfrekvencia.

Az  $X(j\omega)$  komplex spektrum meghatározza az eredeti  $x(t)$  függvényt, amennyiben a transzformáció megfordítása:

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

A jel által szállított energia frekvenciatartománybeli eloszlását a Fourier-transzformációval egyszerűen számíthatjuk a Parseval-tétel (a jel által szállított teljesítmény) szerint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

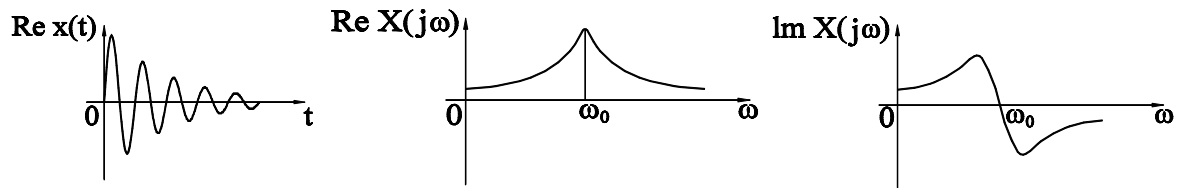
**PÉLDA:** Legyen adott egy csillapított lengés jele:

$$x(t) = x_0 e^{(-\delta + j\omega_0)t}, \quad t \geq 0. \quad \text{Határozzuk meg a lengés amplitúdóspektrumát!}$$

Ezt a Fourier-transzformált szolgáltatja (2.10. ábra):

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_0^{\infty} x_0 e^{(-\delta + j\omega_0)t} e^{-j\omega t} dt = x_0 \int_0^{\infty} e^{[-\delta + j(\omega_0 - \omega)]t} dt =$$

$$= \left[ \frac{x_0 e^{[-\delta + j(\omega_0 - \omega)]t}}{-\delta + j(\omega_0 - \omega)} \right]_0^\infty = \frac{x_0}{\delta - j(\omega_0 - \omega)} = \frac{x_0 [\delta + j(\omega_0 - \omega)]}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

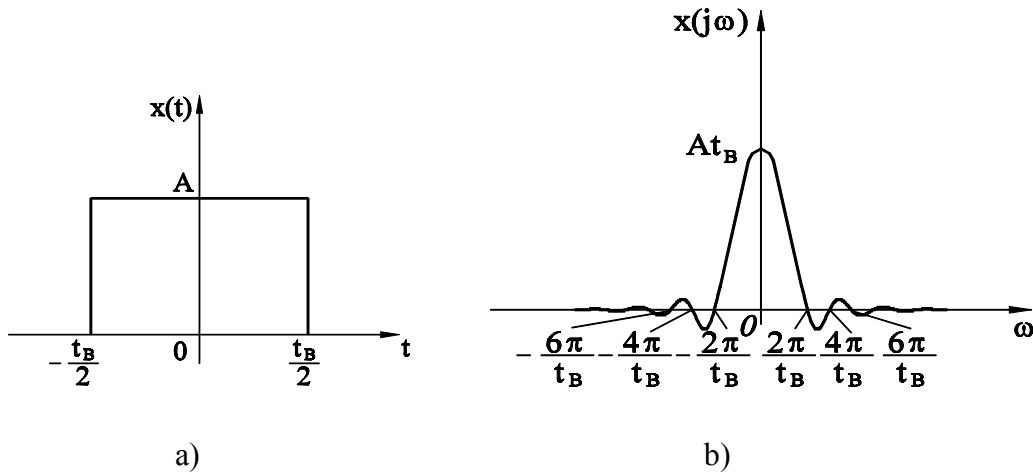


2.10. ábra: A csillapított lengés

PÉLDA: Négyzetimpulzus (2.11. ábra)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{t_B}{2} \\ A & -\frac{t_B}{2} < t < \frac{t_B}{2} \\ 0 & t > \frac{t_B}{2} \end{cases}$$

$$X(j\omega) = A \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left[ -A \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} = \frac{2A}{\omega} \sin \omega \frac{t_B}{2}$$



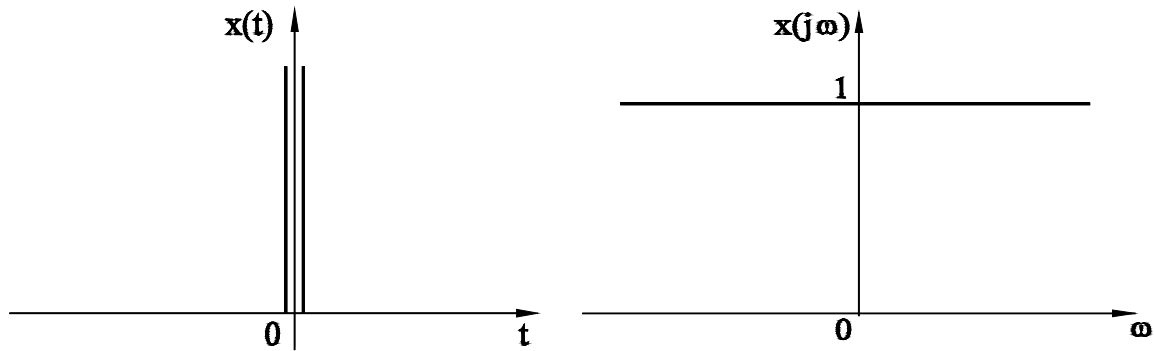
2.11. ábra: A négyzetimpulzus függvénye és Fourier-transzformáltja

PÉLDA: Egységlokés (Dirac-delta-függvény) (2.12. ábra)

$\delta(t) = 0$  ha  $t \neq 0$  és  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  (Az  $\frac{1}{\varepsilon}$  magasságú és  $\varepsilon$  szélességű négyzetimpulzus határértéke  $\varepsilon \rightarrow 0$  mellett)

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega 0} dt = 1$$

Az amplitúdóspektrum állandó: a spektrumban valamennyi frekvencia azonos amplitúdóval van jelen.

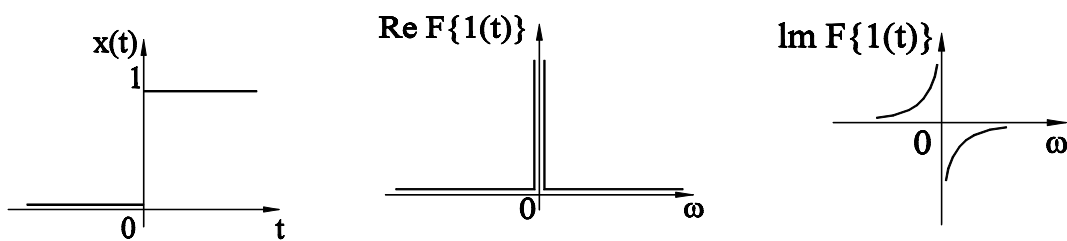


2.12. ábra:  $\delta$ -ugrás idő-függvénye és Fourier-transzformáltja

PÉLDA: Egységugrás (2.13. ábra)

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$F\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^{\infty}$$



2.13. ábra: Az egységugrás idő-függvénye és Fourier-transzformáltja

Az integrál nem létezik, mivel  $t \rightarrow \infty$  esetére a trigonometrikus függvények nem vesznek fel definiált értéket. Az abszolút integrálhatóság kritériumának konvergencia követelménye nem kielégített:

$$\int_0^{\infty} 1(t) dt \rightarrow \infty$$

A konvergenciát  $1(t)$  nek az  $e^{-at}$ ,  $a > 0$ , kifejezéssel történő szorzással kényszerítjük ki, ezután végezzük el az  $a \rightarrow 0$  határátmenetet:

$$\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

következik, hogy

$$\operatorname{Re} F\{1(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \infty & \omega = 0 \end{cases}$$

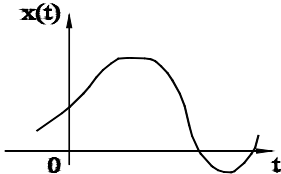
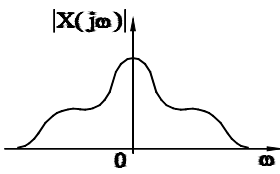
$$\operatorname{Im} F\{1(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} = -\frac{1}{\omega}$$

Jóllehet az  $1(t)$ -re vonatkozó integrálhatósági feltétel nem kielégített,  $F\{1(t)\}$  képezhető: az időfüggvény abszolút integrálhatósága a Fourier-transzformált létezése vonatkozásában elégséges, de nem szükséges feltétel.

Utalás: ha az előzőekben vizsgált jeleket vizsgálójelekként (mesterséges gerjesztésekként) interpretáljuk, úgy amplitúdóspektrumaikon keresztül lényeges támpontokat szolgáltatnak a lengési kísérletek végrehajtása vonatkozásában.

A 2.1. táblázat néhány időfüggvényt (ábrázolás az időtartományban) és a hozzá tartozó Fourier-transzformáltat (ábrázolás a frekvenciatartományban) tartalmaz.

2.1. táblázat: Néhány időfüggvény Fourier-transzformáltja

| Jelölés                | Időtér                                                                                                                              | Frekvenciater (képtár)                                                                                                                                  |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ábrázolás              |                                                    |                                                                      |
| Definíció              | $F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ <p>Fourier integrál</p> | $F\{x(t)\} = X(j\omega) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $\int_{-\infty}^{\infty}  x(t)  dt < \infty$ <p>Fourier transzformált</p> |
| Páros függvény         | $x(t) = x_g(t) = x_g(-t)$                                                                                                           | $F\{x_g(t)\} = 2 \int_0^{\infty} x_g(t) \cos \omega t dt$ <p>(valós)</p>                                                                                |
| Páratlan függvény      | $x(t) = x_u(t) = -x_u(-t)$                                                                                                          | $F\{x_u(t)\} = -j2 \int_0^{\infty} x_u(t) \sin \omega t dt$ <p>(imaginárius)</p>                                                                        |
| Összeadás              | $x_1(t) + x_2(t)$                                                                                                                   | $F\{x_1(t) + x_2(t)\} = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$                                                                                                    |
| Eltolás                | $x(t - t_0)$                                                                                                                        | $X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$                                                                                                                           |
| Differenciálás         | $\dot{x}(t)$                                                                                                                        | $j\omega X(j\omega)$ mellett<br>$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$                                                                               |
| Dirac-delta            | $\delta(t)$                                                                                                                         | 1                                                                                                                                                       |
| Exponenciális függvény | $e^{(-\delta + j\omega_0)t}$                                                                                                        | $\frac{\delta + j(\omega_0 - \omega)}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$                                                                                |

### 2.1.4.2. Laplace-transzformáció

Az egységugrás függvény Fourier-transzformáltját csak egy matematikai fogással tudjuk meghatározni, mert a jel szükséges korlátossága

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

nem teljesül. Tehát a hiányzó integrálhatóság már egyszerű függvényeknél arra a gondolatra vezet, hogy  $x(t)$  helyett az  $x(t)e^{-\alpha t}$ , ( $\alpha > 0$ ) jelet a fenti konvergenciafeltételnek megfelelően

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\alpha t}| dt < \infty$$

tekintsük, mert valamennyi számunkra érdekes függvénynél még  $e^{\beta t}$  alakú exponenciális függvényekre is  $\alpha > \beta$  mellett a jel szükséges korlátossága teljesül.

Az

$$s = \alpha + j\omega$$

rövidítéssel a Fourier-transzformációnak megfelelően definiáljuk az egyoldali Laplace-transzformációt:

$$L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s)$$

$X(s)$ -nek az időtartományba visszatranszformált alakja:

$$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(s)e^{st} ds.$$

Egy  $x(t)$  függvény  $X(j\omega)$  egyoldalú Fourier-transzformáltja és a megfelelő  $X(s)$  Laplace-transzformáltja közötti összefüggés közvetlenül a definíciókból következik, annak a feltétele mellett, hogy a határérték létezik, érvényes itt az, hogy

$$X(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} X(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} X(s).$$

A 2.2. táblázat néhány adott időfüggvényt és a hozzá tartozó Laplace-transzformáltat tartalmazza.

2.2 táblázat: Néhány időfüggvény Laplace-transzformáltja.

| Megnevezés             | Időtér $t \geq 0$                                                                                   | Képtér                                                                                     |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Definíció              | $x(t) = L^{-1}\{X(s)\} =$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(s)e^{st} ds$ | $L\{x(t)\} = X(s) =$ $= \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ $s = \alpha + j\omega, \alpha > 0$ |
| Eltolás                | $x(t - t_0)$ ha $t > t_0 \geq 0$                                                                    | $X(s)e^{-st_0}$                                                                            |
| Összeadás              | $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$                                                                             | $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$                                                                    |
| Differenciálás         | $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$                                                                             | $s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1} x(t)}{dt^{k-1}} \quad (t=0)$                |
| Integrálás             | $\int_0^t x(\tau) d\tau$                                                                            | $\frac{1}{s} X(s)$                                                                         |
| Dirac-delta            | $\delta(t)$                                                                                         | 1                                                                                          |
| Ugrás-függvény         | $1(t)$                                                                                              | $\frac{1}{s}$                                                                              |
| Identitás-függvény     | $t$                                                                                                 | $\frac{1}{s^2}$                                                                            |
| Sinus-függvény         | $\sin \omega t$                                                                                     | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$                                                            |
| Cosinus függvény       | $\cos \omega t$                                                                                     | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$                                                                 |
| Exponenciális függvény | $e^{-at}$                                                                                           | $\frac{1}{s+a}$                                                                            |
| Hatvány függvény       | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n > 0 \text{ egész}$                                                  | $\frac{1}{s^n}$                                                                            |

A Laplace-transzformáció jelentős eszköz a gyakorlati szakember kezében, mivel ez lehetővé teszi, hogy megfelelő jeleket tudjon a frekvenciatérbe transzformálni, és az időtartományban történő ábrázolással ellentétben járulékos fizikai ismeretekre tegyen szert. Az ennek során fellépő differenciálegyenletek megoldása a Laplace-transzformáció alkalmazása következtében algebrai problémává válik, és ezzel egyszerűen megoldható. Az időtérbe történő visszatranszformálás pl. a transzformációs táblázatok alkalmazásával lehetséges. Az alkalmazások megerősítik ezt a kijelentést.

## 2.2. Determinisztikus egyszabadságfokú rendszerek

Adott determinisztikus bemenő mennyiség alapján keresett a lineáris egyszabadságfokú rendszer kimenő mennyisége úgy az idő-, mind a frekvenciatérben.

Nyilvánvaló, hogy a keresett feleletet annál könnyebben tudjuk kiszámítani, minél egyszerűbbek a kiindulási értékek és minél egyszerűbb függvény írja le a gerjesztést.

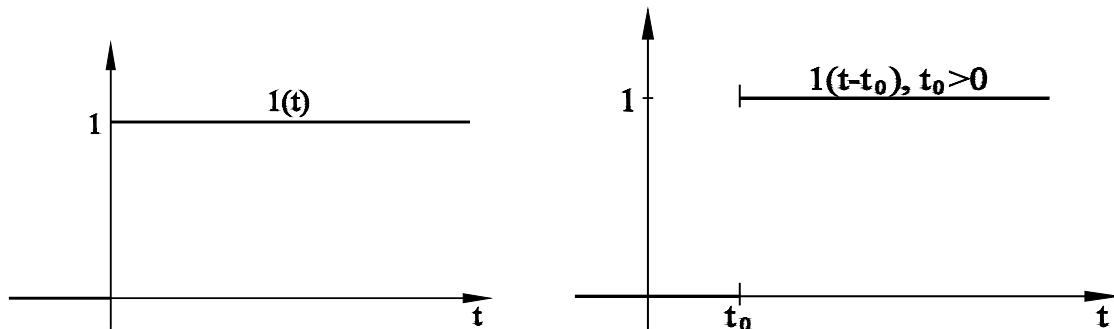
Rendszerjellemző függvényként minden olyan függvény alkalmas, amelynek ismeretében tetszőleges gerjesztés esetén - legalábbis elvben - meg tudjuk határozni a feleletet. Nem lényegtelen szempont, hogy a rendszerjellemző függvény mérésel ellenőrizhető legyen.

### 2.2.1. Átmeneti függvény

Az egyik rendszerjellemző függvényt, az átmeneti függvényt úgy kapjuk, hogy meghatározzuk a rendszer feleletét abban az esetben, ha minden kiindulási érték nulla volt és a gerjesztés a  $t = 0$  pillanattól kezdve állandó és egységnyi értékű.

Azt a függvényt, amely  $t$  negatív értékeire nulla,  $t$  pozitív értékeire pedig egységnyi, egységugrás-függvénynek, vagy röviden egységugrásnak nevezzük és  $1(t)$ -vel jelöljük (2.14. ábra):

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

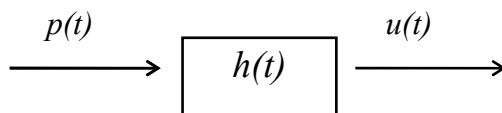


2.14. ábra Az egységugrás és a  $t_0$  értékkel eltolt egységugrás

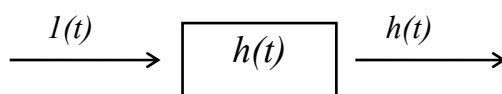
Természetesen

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

Az átmeneti függvény az eredetileg nyugalomban levő rendszer felelete az egységugrás alakú gerjesztésre. Jelölése  $h = h(t)$ .



$$u(t) = h(t), \text{ ha } p(t) = 1(t),$$



Megjegyzendő, hogy  $h(t)$  nem olyan dimenziójú, mint  $u(t)$ , hiszen  $p(t)$  általában maga is dimenziós mennyiség. Ha pl.  $p$  mennyiség dimenzióját  $[p]$  jelöli, akkor

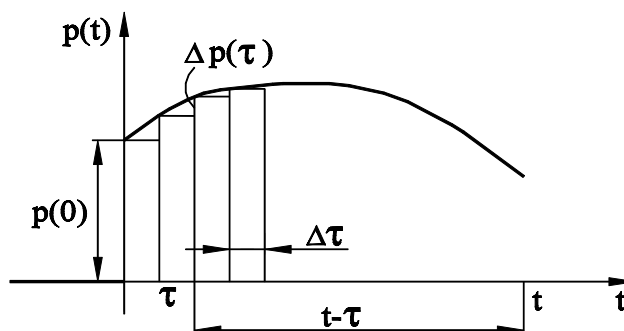
$$[h] = \frac{[u]}{[p]}$$

Az átmeneti függvény tartalmazza a tranziens megoldástagot, tehát – ha közvetve is – a sajátértékeket.

A  $h(t)$  átmeneti függvény ismeretében az  $u(t)$  felelet  $p(t)$  gerjesztés esetén meghatározható.

Az  $u(t)$  felelet meghatározása céljából az adott  $p(t)$  gerjesztést közelítsük meg egy lépcsős görbével:

$$p(t) = p(0) \cdot 1(t) + \sum_{\tau=0}^t \Delta p(\tau) \cdot 1(t - \tau)$$



A  $t = 0$  pillanatban fellépő  $p(0)$  ugrás hatására a felelet

$$p(0) \cdot h(t)$$

A  $\tau$  pillanatban fellépő  $\Delta p(\tau)$  ugrás hatására létrejövő felelet a  $t > \tau$  pillanatban, tehát  $t - \tau$  idővel később

$$\Delta p(\tau) \cdot h(t - \tau)$$

A teljes feleletet a  $t$  időpillanatban úgy kaphatjuk meg, hogy összegezzük az összetevők hatását  $\tau = 0$  pillanattól a  $\tau = t$  időpontig:

$$u(t) \cong p(0) \cdot h(t) + \sum_{\tau=0}^t \Delta p(\tau) \cdot h(t - \tau)$$

Ha  $p(t)$  folytonos és differenciálható függvény a  $t > 0$  tartományban, akkor

$$\Delta p(\tau) \cong \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=\tau} \cdot \Delta \tau$$

Behelyettesítve

$$u(t) \cong p(0) \cdot h(t) + \sum_{\tau=0}^t \frac{dp(\tau)}{d\tau} \cdot h(t - \tau) \cdot \Delta \tau$$

A közelítés annál jobb, minél kisebbnek választjuk a  $\Delta \tau$  intervallumokat. Igazolható, hogy a  $\Delta \tau \rightarrow 0$  határátmenetet elvégezve az összefüggés pontos lesz, ha az összegzést integrálással helyettesítjük

$$u(t) = p(0) \cdot h(t) + \int_0^t \frac{dp(\tau)}{d\tau} \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Ez az összefüggés Duhamel tételének egy alakja, amely azt mondja: ha ismert az átmeneti függvény, akkor a felelet tetszőleges gerjesztés esetén – legalábbis elvben – meghatározható. Mivel ez a rendszerjellemező függvény definíciója, így az átmeneti függvény rendszerjellemező függvény.

Az átmeneti függvény meg is mérhető. Legyen a gerjesztés  $t = 0$  pillanattól kezdve állandó  $p_0$  értékű, akkor a felelet

$$u(t) = h(t) \cdot p_0$$

lesz, vagyis

$$h(t) = \frac{1}{p_0} u(t), \quad \text{ha} \quad p(t) = p_0 \cdot I(t)$$

Itt egyedül az lehet a probléma, hogy nem minden rendszer viseli el tartósan az állandó gerjesztést, ennél fogva a mérés nem mindig végezhető el.

A rendszer stabilis, ha állandó gerjesztés hatására a felelet állandó értékhez tart. Így a stabilitás feltétele az átmeneti függvénnyel kifejezve:

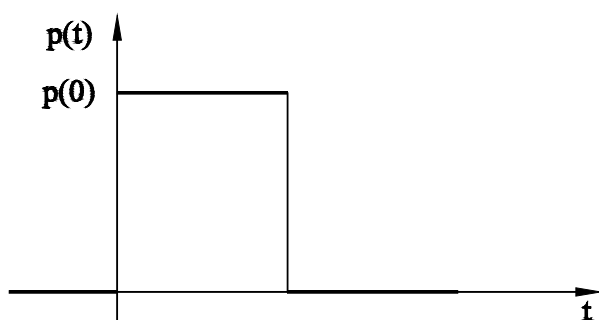
$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_{\infty} < \infty$$

Ha az átmeneti függvény korlátlanul nő, vagy nincs határértéke (pl.: periodikusan változik), akkor a rendszer labilis.

### 2.2.2. Súlyfüggvény (impulzusválasz)

Rendszerjellemző függvény. A rendszer impulzusátviteli függvénye. Mivel az átmeneti függvény kísérleti meghatározása nehézségbe ütközhet, mert a rendszer nem mindig visel el tartósan állandó gerjesztést, s elméletileg is kényelmetlen lehet az átmeneti függvénnyel dolgozni, ha az nem korlátos, ezért a gerjesztést csak véges  $\tau$  ideig kényszerítjük a rendszerre.

Egy ilyen állandó amplitúdójú impulzust jellemezhetünk az  $x_0$  amplitúdójával, a  $\tau$  hosszával és az  $I$  intenzitásával



$$I = \int_0^{\infty} p \cdot dt = p_0 \cdot \tau$$

A három adat közül csak kettő független, amennyiben

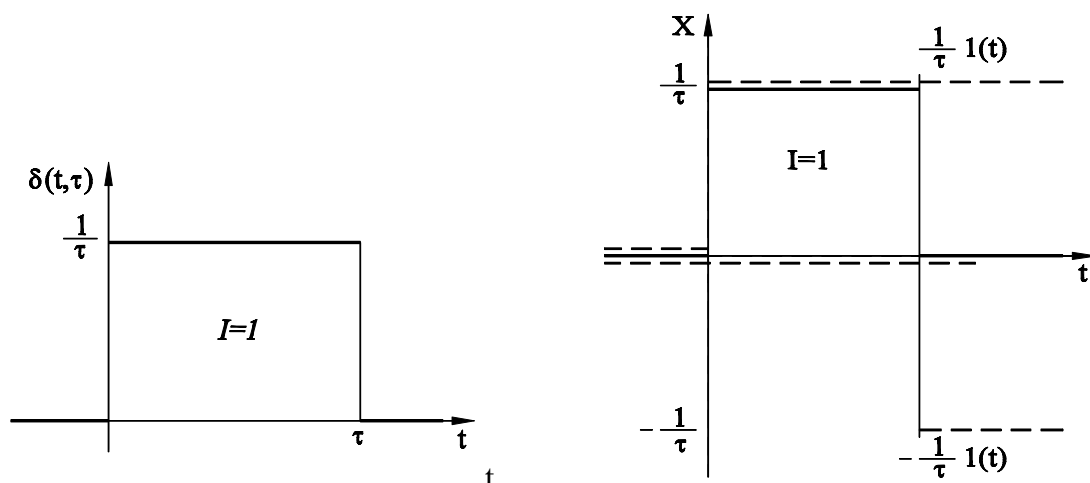
$$I = p_0 \cdot \tau$$

Ha egy ilyen állandó amplitúdójú impulzust kívánunk vizsgáló gerjesztésként alkalmazni, akkor célszerű valamilyen előírással szabványosítani. Normalizáljuk impulzusunkat úgy, hogy az egységnyi intenzitású legyen. Ennek az egységnyi intenzitású impulzusnak egyetlen jellemzője a  $\tau$  hosszúsága, hiszen amplitúdója  $\frac{1}{\tau}$ .

Fizikai szempontból az impulzusnak általában közvetlen jelentése van. Ha a gerjesztés sebesség jellegű, akkor az impulzus erőssége a kényszerített elmozdulás; ha a gerjesztés erő, akkor az impulzus erőssége a mechanikai értelemben vett impulzus; ha a gerjesztés áram, akkor az impulzus erőssége a töltés stb.

Az egységnyi intenzitású impulzus a 2.15. ábrán látható módon felbontható két ugrásfüggvény összegére

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{\tau} 1(t) - \frac{1}{\tau} 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\tau}, & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau < t \end{cases}$$



2.15. ábra

Jelöljük a  $\delta(t, \tau)$  gerjesztéshez tartozó feleletet  $g(t, \tau)$ -val. A szuperpozíció értelmében  $g(t, \tau)$  kifejezhető a  $h(t)$  átmeneti függvénnyel:

$$g(t, \tau) = \frac{1}{\tau} h(t) - \frac{1}{\tau} h(t - \tau), \quad t > 0$$

$\tau \rightarrow 0$  választással kapjuk a Dirac-impulzust:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta(t, \tau)$$

Mit jelent a gerjesztés szempontjából a  $\tau = 0$  választás? Ahogy csökken  $\tau$ , úgy növekszik amplitúdóban a  $\delta(t, \tau)$  impulzus, miközben erőssége állandóan egységnyi marad. Határesetben egy „végtelenül rövid és végtelenül nagy amplitúdójú, egységnyi erősségű impulzust” kapunk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

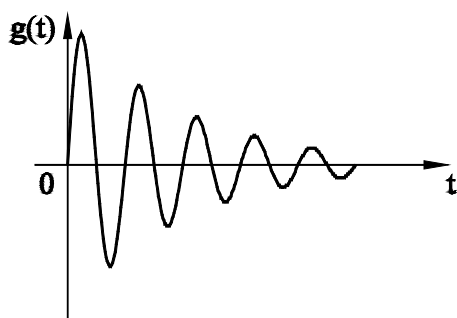
Ez azonban nem függvény és semmilyen fizikai mennyiség nem változhat ilyen törvényszerűség szerint.

Fizikailag akkor járunk el helyesen, ha a  $\delta(t)$  Dirac-impulzust csak rövid jelölésnek tekintjük. A  $\delta(t, \tau)$  egységnyi erősségű impulzus rövid jelölése, amelynek  $\tau$  hosszúsága igen kicsi, jóval kisebb a rendszer legkisebb időállandójánál is. Nyilvánvaló, hogy a  $\delta(t, \tau)$  gerjesztéshez

tartozó  $g(t, \tau)$  felelet  $t > \tau$  esetén alig függ a  $\tau$  impulzushossztól, így helyettesíthető ennek határértékével, a

$$g(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} g(t, \tau) \text{ súlyfüggvénnyel is.}$$

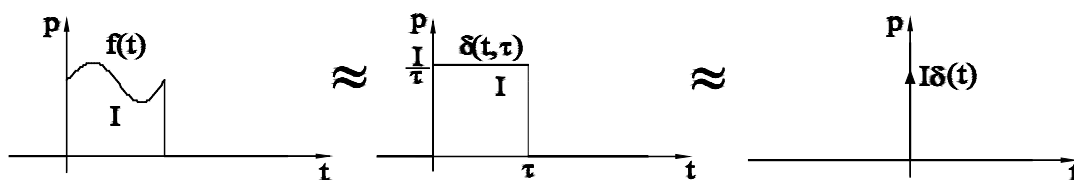
A rendszer súlyfüggvényét jelölje  $g(t)$ . Ez rendszerünk válasza egy  $\delta(t)$  egységlokésre (2.16. ábra).



2.16. ábra: Példa az impulzusátviteli függvényre

Amikor azt mondjuk, hogy „a  $\delta(t)$  Dirac-impulzushoz, mint gerjesztéshez tartozó felelet a rendszert jellemző  $g(t)$  súlyfüggvény”, akkor ezt úgy értjük, hogy a súlyfüggvényt annál pontosabban kaphatjuk meg, minél rövidebb a véges hosszúságú  $\delta(t, \tau)$  gerjesztő impulzus, vagy fordítva: a súlyfüggvényt annál pontosabban írja le a véges hosszúságú impulzushoz tartozó feleletet, minél rövidebb az impulzus, vagy minél nagyobb időkre vizsgáljuk a feleletet.

Az állandó amplitúdójú impulzus és más megfelelően rövid impulzus is megközelíthető egy vele egyező erősségű Dirac impulzussal (2.17. ábra).



Tetszőleges lefolyású rövid impulzus közelítése állandó amplitúdójú impulzussal, majd ennek közelítése Dirac-impulzussal

2.17. ábra

Legyen:

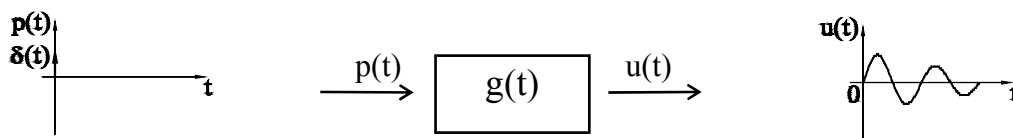
$$p(t) = [1(t) - 1(t - \tau)] \cdot f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f(t), & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

Ennek az impulzusnak a közelítő kifejezése:

$$p(t) \cong I \cdot \delta(t, \tau) \cong I \cdot \delta(t), \text{ ahol } I = \int_0^{\tau} p(t) dt$$

### Egyszabadságfokú rendszer

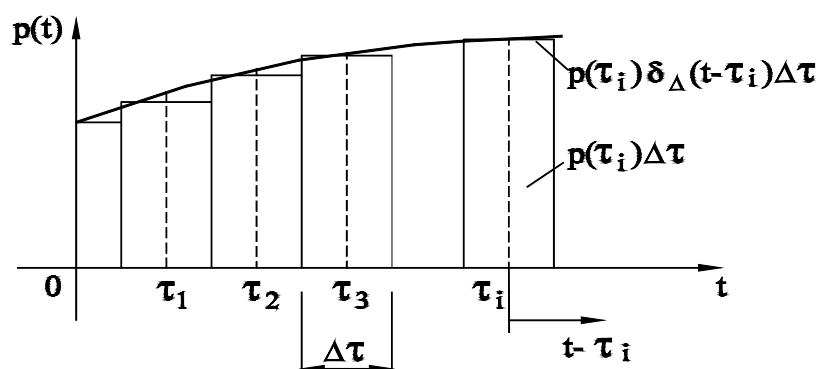
Adott bemenő mennyiség alapján keresett a kimenő mennyiség. A súlyfüggvény az eredetileg nyugalomban levő rendszer felelete az egységnyi erősségű impulzus alakú gerjesztésre, jelölése  $g(t)$ , vagyis (2.18. ábra):



$$u(t) = g(t), \text{ ha } p(t) = \delta(t)$$

2.18. ábra: a  $g(t)$  súlyfüggvénnyel, a  $p(t)$  be és az  $u(t)$  kimenő mennyiséggel kifejezett be- és kimeneti összefüggés.

Fejezzük ki a tetszőleges  $p(t)$  gerjesztéshez tartozó  $u(t)$  feleletet a súlyfüggvény segítségével. Adott  $p(t)$  bemeneti függvény egy lépcsős görbével közelíthető (2.19. ábra).



2.19. ábra: A bemeneti függvény négyszögimpulzusokkal történő approximációja

Bontsuk fel a  $p(t)$  függvényt rövid impulzusokra. A  $\tau_i$  időpillanatban kezdődő  $\Delta\tau$  hosszúságú  $p(\tau_i) \cdot \Delta\tau$  nagyságú impulzus kifejezése:

$$p(\tau_i) \cdot \Delta\tau \cdot \delta_{\Delta}(t - \tau_i)$$

A  $p(t)$  függvény közelítő kifejezése:

$$p(t) \cong \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(\tau_i) \cdot \Delta\tau \cdot \delta_{\Delta}(t - \tau_i)$$

Ha a beosztást finomítjuk ( $\Delta\tau \rightarrow 0$ ) és az összegzést integrálással helyettesítjük, akkor

$$p(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

A  $\Delta\tau$  hosszúságú  $p(\tau_i) \cdot \Delta\tau$  nagyságú gerjesztéshez tartozó válasz közelítőleg

$$\Delta u_i = p(\tau_i) \cdot \Delta\tau \cdot g(t - \tau_i)$$

A  $p(t)$  gerjesztéshez tartozó válasz közelítőleg

$$u(t) \cong \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(\tau_i) \cdot \Delta\tau \cdot g(t - \tau_i)$$

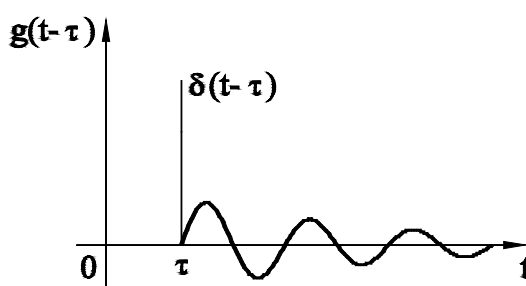
A  $\delta(t - \tau)$  gerjesztéshez  $g(t - \tau)$  felelet tartozik (2.20. ábra), így a felelet kifejezése tetszőleges  $p(t)$  gerjesztés esetén

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Tehát a  $p(t)$  bemenő- és az  $u(t)$  kimenő mennyiség közötti hozzárendelést a  $t < \tau$  időpontban nyugalomban levő rendszer esetén a Duhamel integrál adja.

Vezessük be a  $\tau' = t - \tau$  új változót, s akkor a következő alakot kapjuk:

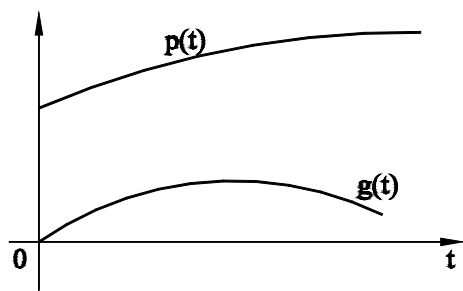
$$u(t) = \int_0^t p(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$



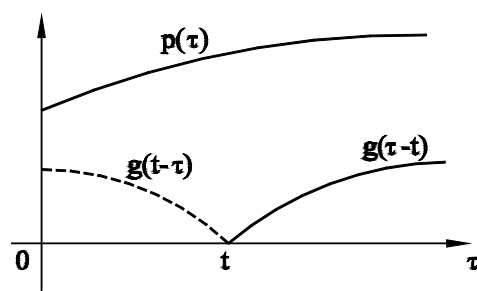
2.20. ábra: Egy  $\delta(t - \tau)$  egységimpulzusra adott válasz (impulzusátviteli függvény)

A Duhamel-integrállal tehát kiszámíthatjuk egy rendszernek a tetszőleges  $p(t)$  gerjesztő-függvényre adott válaszát.

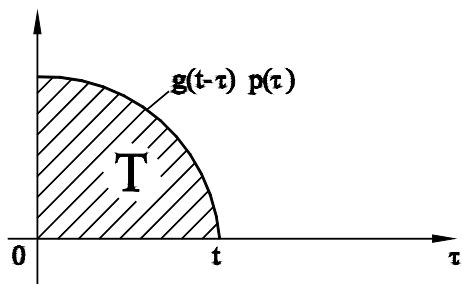
A 2.21. ábra két egyoldali függvény konvolúciójának a grafikus szerkesztésére utal. Az utalt szerkesztést minden  $t$ -re el kell végezni. Az ábrán a konvolúció megjelölés is érthetővé válik.



1.)



2.)



$$T = \int_0^t g(t-\tau)p(\tau)d\tau$$

3.)

2.21. ábra: A  $p(t)$  és  $g(t)$  egyoldalú függvény konvolúciója*Stabilitás*

A rendszer stabilitása igen könnyen megítélhető a súlyfüggvény ismeretében. Mivel a Dirac-impulzussal gerjesztett rendszer a  $t > 0$  tartományban magára hagyott rendszert jelent, így stabilis rendszer súlyfüggvényének nullához kell tartania. A stabilitás feltétele tehát:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Ez azonban a stabilitásnak csak a szükséges, de nem elegendő feltétele, mert a súlyfüggvénynek elég gyorsan kell nullához tartania. A stabilitás elegendő feltétele, ha  $g(t)$  abszolút integrálható:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

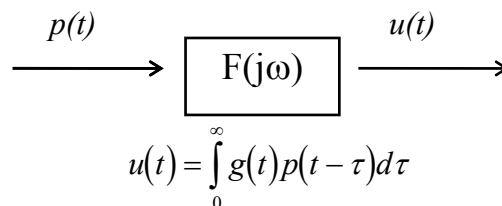
*2.2.3. Frekvenciajelleggörbe*

Rendszerjellemző függvény:

$$F(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{F\{u(t)\}}{F\{p(t)\}}, \quad P(j\omega) \neq 0.$$

Az összefüggés szerint a frekvenciajelleggörbét harmonikus gerjesztésnél nemcsak a frekvenciatérbeni ki- és bemenő mennyiség viszonyából, hanem egy tetszőleges determinisztikus gerjesztés megfelelő Fourier-transzformáltjából is meg lehet határozni.

*PÉLDA:* A  $p(t) = \delta(t)$  vizsgálójelre a rendszer válasza:  
 $u(t) = g(t)$ .



A frekvenciatérre igaz, hogy

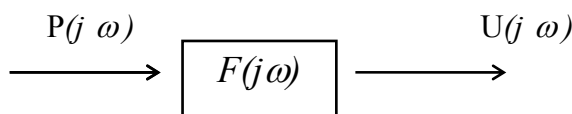
$$F(j\omega) = \frac{F\{g(t)\}}{1} = F\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

A frekvenciajelleggörbe a súlyfüggvény Fourier-transzformáltja!

A konvolúciós szorzatnak megfelelő analóg írásmóddal

$$U(j\omega) = F(j\omega) P(j\omega)$$

(2.22. ábra). Ezzel megtaláltuk az időtérnek megfelelő ábrázolást a frekvenciatérre vonatkozóan.



2.22. ábra: A frekvenciatérre vonatkozó be- kimeneti összefüggés

#### 2.2.4 Az átviteli függvény

Rendszerjellemző függvény.

Az idővariáns lineáris egyszabadságfokú rendszerre az átviteli függvény definíciója:

$$H(s) = F(s) = \frac{U(s)}{P(s)} = \frac{L\{u(t)\}}{L\{p(t)\}}, \quad P(s) \neq 0.$$

A frekvenciajelleggörbe és az átviteli függvény közötti összefüggés ezzel adott

$$F(j\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} H(s).$$

A  $H(s)$  átviteli függvény a  $g(t)$  súlyfüggvény Laplace- transzformáltja.

$$H(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

Ha  $H(s)$  ismert és a  $p(t)$  gerjesztés adott, akkor:

$$P(s) = L\{p(t)\}$$

majd

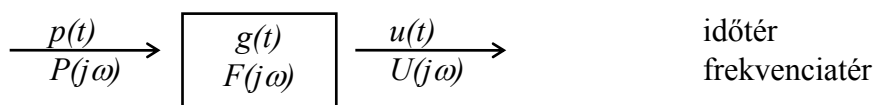
$$U(s) = H(s) \cdot P(s) \text{ számítható,}$$

s így a felelet

$$u(t) = L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\{H(s) \cdot P(s)\}$$

#### 2.2.5 Rendszerösszefoglalás

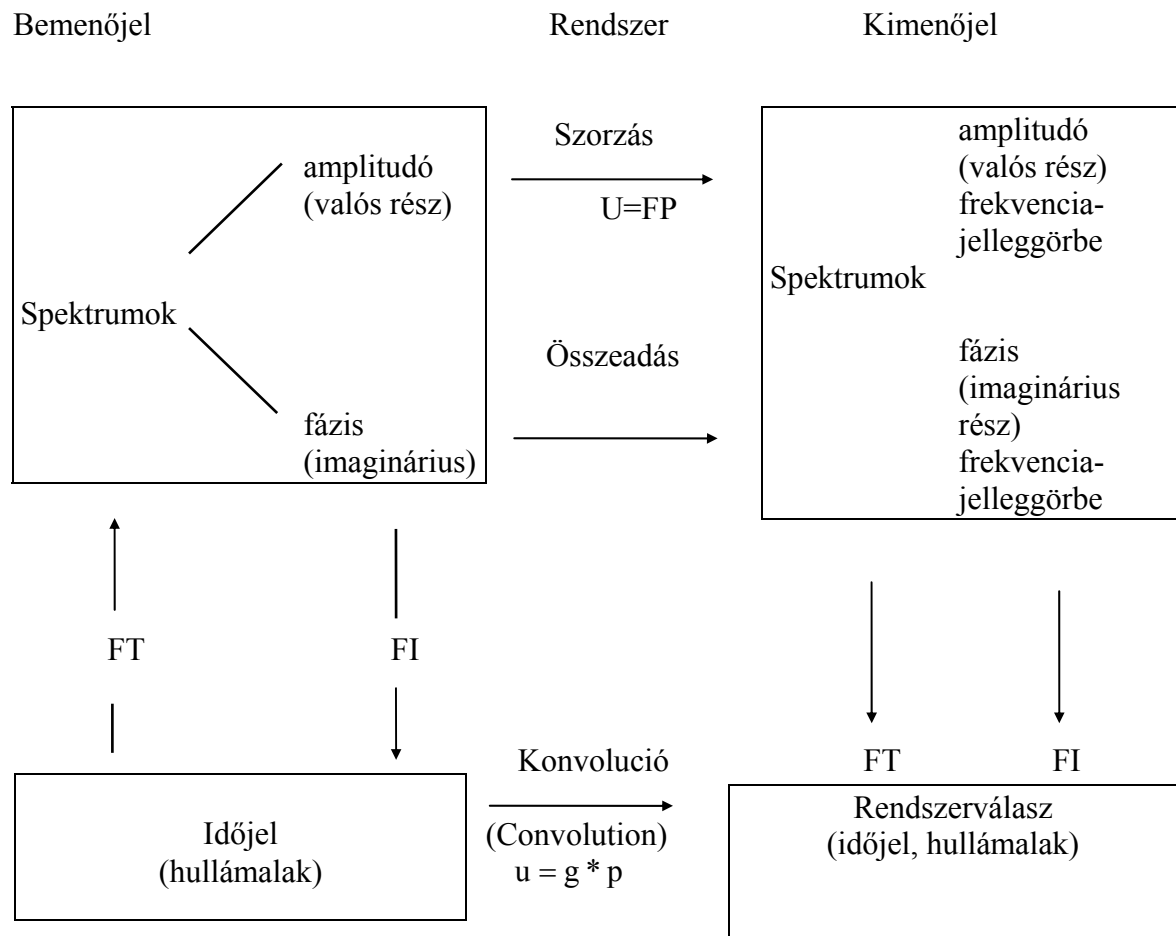
Rendszertechnikailag a 2.2. szakasz eredményeit a 2.23-2.25. ábrákon bemutatottaknak megfelelően rendelhetjük egymáshoz.



2.23. ábra: Be- (kimenő) összefüggés



2.24. ábra: Az idő- és a frekvenciatérre vonatkozó anógia matematikai összefüggései



2.25. ábra Áttekintési séma

## 2.3. Determinisztikus többszabadságfokú rendszerek

### 2.3.1. Súlyfüggvények mátrixa

A be-/kimenő összefüggésként az  $l$ -dik bemenetre jutó  $p_l$  gerjesztésnek a  $k$ -dik kimeneten jelentkező válasza az

$$u_{kl}(t) = \int_{t_0}^t g_{kl}(t, \tau) p_l(\tau) d\tau \quad k, l = 1(1)n$$

alakban írható, amennyiben a többszabadságfokú rendszer  $t < t_0$  esetére nyugalomban van ( $p_l(t) \equiv 0$ , ha  $t < t_0$ ). A  $k$ -ik helyen a  $p_l$  erő,  $l = 1(1)n$ , következtében fellépő elmozdulások a szuperpozícióból következnek:

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^n \int_{t_0}^t g_{kl}(t, \tau) p_l(\tau) d\tau \quad k, l = 1(1)n$$

A többszabadságfokú rendszerre a Duhamel-integrál a

$$G(t, \tau) = (g_{kl}) = \begin{pmatrix} g_{11}(t, \tau), \dots, g_{1n}(t, \tau) \\ \dots\dots\dots \\ g_{n1}(t, \tau), \dots, g_{nn}(t, \tau) \end{pmatrix}$$

rövidítéssel mátrixos alakban a következőképpen írható:

$$u(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) p(\tau) d\tau, \quad \begin{matrix} u^T = (u_1, \dots, u_n) \\ p^T = (p_1, \dots, p_n) \end{matrix}$$

### 2.3.2. Frekvenciajelleggörbe mátrix

Legyen  $u(t)$  az  $n$  szabadságfokú és zérus kezdeti feltételekkel rendelkező időinvariáns lineáris többszabadságfokú rendszer elmozdulásainak az  $m$ -dimenzionális vektora,  $p(t)$  pedig legyen a külső erők  $v$ -dimenzionális vektora. A  $k$  pontban a  $p_l(t)$ ,  $l = 1(1)v$ , erők hatására fellépő erő az időtérben az

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^v \int_{t_0}^t g_{kl}(t - \tau) p_l(\tau) d\tau \quad k = 1(1)m,$$

alakban, míg a frekvenciatérben Fourier-transzformációjával adott:

$$F\{u_k(t)\} = \sum_{l=1}^v F\left\{\int_{t_0}^t g_{kl}(t - \tau) p_l(\tau) d\tau\right\}$$

Legyen  $F_{kl}(j\omega)$  az elmozdulás a frekvenciaterben a  $k$ -dik pontban, amelyik a frekvenciaterben az  $l$ -dik pontban ható egységnyi erő hatására jön létre.

Az egyes  $F_{kl}(j\omega)$  frekvencia-jelleggörbék az

$$F(j\omega) = (F_{kl}(j\omega)), \quad k = 1(1)m, l = 1(1)v,$$

frekvenciajelleggörbe-mátrixban foglaljuk össze.

Az egyenletek mátrixos írásmódja:

$$U(j\omega) = F(j\omega)P(j\omega)$$

A többszabadságfokú rendszerre vonatkozó rendszerelméleti összefoglalás teljesen megfelel az egyszabadságfokú rendszerre vonatkozóknak.

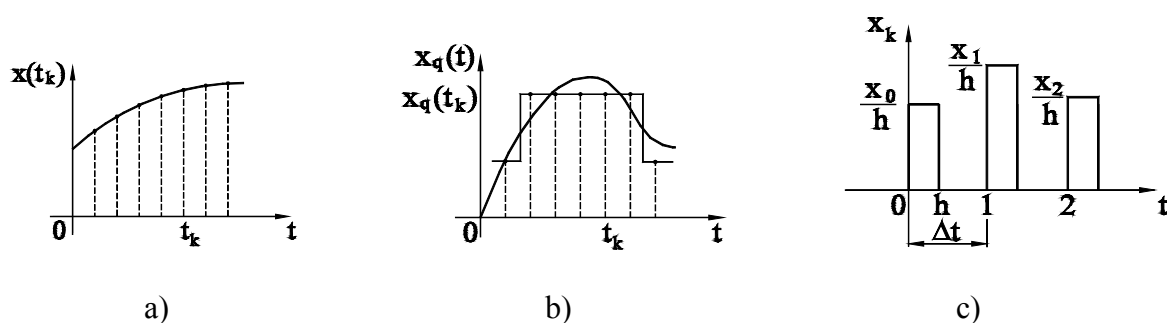
## 2.4. Diszkrét jelek és folyamatok

### 2.4.1. Időfolytonos jelek diszkrétizálása

A műszaki gyakorlatban általában időfolytonos jelekkel van dolgunk. A fennálló problémák mindegyike azonban diszkrétizálást igényel. A diszkrétizálás ezen szükségessége egyrészt már pl. az elektronikus számítógépi berendezésekben a diszkrét időpontokban történő mintavétel következtében történő előírányzott digitális tárolásban, másrészt az alkalmazáshoz előírányzott numerikus kiértékelési eljárásokban rejlik.

Egy időben diszkrét jel alatt, ami időre vonatkoztatva diszkrét lefutású, a  $t_k$  változójú függvényt értjük (a függvény értelmezési tartománya egy diszkrét halmazból áll). A folyamat leírása lényegében differenciálegyenletekkel történik.

Egy időben diszkrét jel  $t_k$  időpontjai között a jel értéke ismert (2.26.a. ábra, változó vagy állandó) vagy definiálatlan lehet.



2.26. ábra

### 2.4.2. A z-transzformáció

Ha a diszkrét Laplace-transzformációba

$$X^L(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skh}$$

behelyettesítjük a

$$z = e^{hs}$$

helyettesítést, úgy következik az

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

ún. infinit z-transzformáció, melynek a visszatranszformációja

$$x_k = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz,$$

### 2.4.3 A diszkrét Fourier-transzformáció

A finit Fourier-transzformáció egy  $T$ -vel időben korlátozott  $x_T(t)$  jel Fourier-transzformációja,

$$X(j\omega, T) = X_T(j\omega) = \int_0^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ha most a diszkretizált jelre térünk át, úgy a négyszögszabály azt szolgáltatja, hogy

$$X_T(j\omega) = h \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-j\omega kh} + r_x$$

ahol  $r_x$  a numerikus integrálás hibája. A  $\frac{2\pi}{T}$  alaphfrekvencia egészszámú többszöröseivel egyenlő diszkrét frekvenciákra, tehát

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, n = 0(1)2N-1$$

esetében az

$$F_n = \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-jnk\frac{\pi}{N}} = \frac{1}{h} X_T(j\omega_n)$$

kifejezést vonatkoztatott (még hozzá  $h$ -ra) diszkrét Fourier-transzformáltnak nevezzük.

#### 2.4.4. A fast-Fourier-transzformáció (A gyors-Fourier-transzformáció)

$N$ -et a diszkrét Fourier-transzformációra  $N = 2^m$ -re választjuk.

$$F_{n+N} = Y_n + e^{-j(n+N)\frac{\pi}{N}} Z_n = Y_n - e^{-jn\frac{\pi}{N}} Z_n.$$

A diszkrét Fourier-transzformálnak  $2N$  számú jelértékből történő kiszámítása  $(2N)^2$  számú lényeges számítási operációt igényli, az  $Y_n$  és  $Z_n$  spektrumok kiszámítása egyenként  $N$  számú értékből csak  $2N$  számú lényeges számítási operációt. Ehhez még  $N$  számú számítási operáció szükséges az  $F_n$  sorozatnak az  $Y_n, Z_n$  sorozatból történő összeállításához.

$N = 2^m$  választása következtében az  $y_L, z_L$  sorozat külön-külön ismét két sorozatra bontható fel, stb., mindaddig, amíg egy sorozat már csak egy értékből áll, ami transzformálva ismét magát az értéket adja. A számítási ráfordítás nagysága ezzel (bizonyítás nélkül)  $2(2N) \cdot \log_2(2N)$  számú szorzás. A  $2N=2^{10}$  példára vonatkozóan a gyors-Fourier-transzformáció már csak 20480 lényeges számítási operációt igényel, azaz a gyors Fourier-transzformáció számítási igénye a diszkrét Fourier-transzformációénak kb. 1/50-e.

A Fourier-transzformáció numerikus kezelésére szolgáló különböző algoritmusok kimutatták a feldolgozási sebességre gyakorolt jelentős hatást. Hasonló problémák lépnek fel a konvolúciónál is. Ha a diszkrét konvolúciót ciklikus műveletekkel ábrázoljuk és a gyors Fourier-transzformáció sémáját alkalmazzuk, úgy azt gyors konvolúciónak nevezzük.

## 2.5. A Fourier-, a Laplace- és a z-transzformáció áttekintése

Az itt alkalmazott integráltranszformációk bevezetésénél gyakorolt pragmatikus, heurisztikus eljárás nyitott kérdéseket hagyott, amelyek közül néhányat a rendszeres összeállításnál meg kell válaszolni. Kiemelkedő szerepük miatt csupán az egyoldali transzformációkat vizsgáljuk, amelyeket olyan (ún. kauzális) rendszerekre alkalmazunk, amelyeknek az időfüggvényei negatív időértékekre zérus függvényértékeket vesznek fel.

A 2.3. táblázat a Fourier-, a Laplace és a z-transzformáció definícióit tartalmazza.

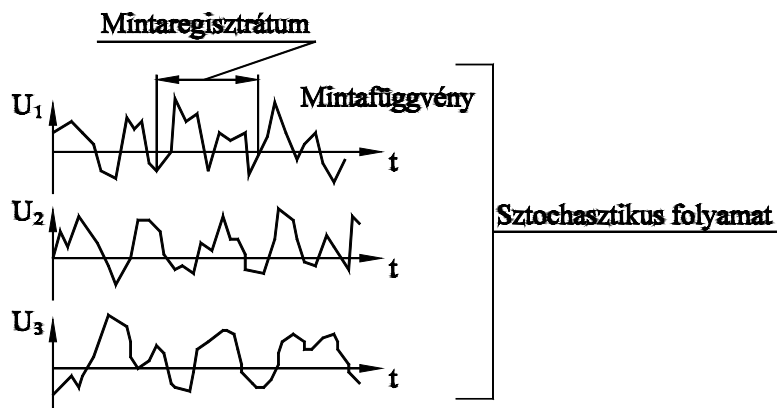
| Fourier-transzformáció                                                             | Laplace-transzformáció                                                          | z-transzformáció                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt =$                            | $X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$                                        | $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t_k) z^{-k}$        |
| $= X(f) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$                                  | $s = \alpha + j\omega \quad \alpha > 0$                                         | $z = e^{s\Delta t}$                               |
| $\int_0^{\infty}  x(t)  dt < \infty$                                               | $\int_0^{\infty}  x(t) e^{-\alpha t}  dt < \infty$                              | $ z  = e^{\alpha \Delta t}$                       |
| $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$ | $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} X(s) e^{st} ds$ | $x(t_k) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz$ |
| $= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$                                  |                                                                                 |                                                   |
| $t < 0: x(t) = 0$                                                                  | $t < 0: x(t) = 0$                                                               | $k < 0: x(t_k) = 0$                               |

2.3. táblázat: Az integráltranszformációk és inverzeik definíciói.

### 3. SZTOCHASZTIKUS JELEK ÉS FOLYAMATOK

#### 3.1. A sztochasztikus jelek és folyamatok jellemzése

A lineáris rendszerek jellemzésének eddig tárgyalt módszerei azon alapulnak, hogy megvizsgáljuk a rendszer feleletét valamilyen gerjesztés hatására. A gerjesztés időfüggvényét ismertnek tekintjük, így explicite meghatározható a felelet időfüggvénye is. A determinisztikus mozgások közös jellemzője, hogy időfüggvényük explicit matematikai összefüggéssel megadható, és kísérleti vizsgálatuknál adott körülmények között a mérési eredmények a hibahatáron belül azonos eredménnyel ismételhetők. A járművek és gépek üzemében sokszor más jellegű, rendszertelenebbnek tűnő mozgásokkal is találkozunk (3.1. ábra).



3.1. ábra

A szerkezetek dinamikai tulajdonságainak helyes kialakításához, szilárdsági méretezéséhez és élettartam vizsgálatukhoz az ún. sztochasztikus lengésekkel is kell foglalkoznunk.

Azokat a fizikai folyamatokat, amelyek időbeni lefolyása nem írható le definiált formában sztochasztikus, azaz véletlenszerű folyamatoknak nevezzük. Az ilyen folyamatok kísérleteit megismételve nem kapunk azonos lefolyást. A kísérlet egy lehetséges lefolyását ábrázoló jelet mintafüggvénynek nevezzük. A mintafüggvényből kivágott véges időtartam szakaszt minta regisztrátumnak nevezzük. Az összes lehetséges mintafüggvény adja a sztochasztikus folyamatot.

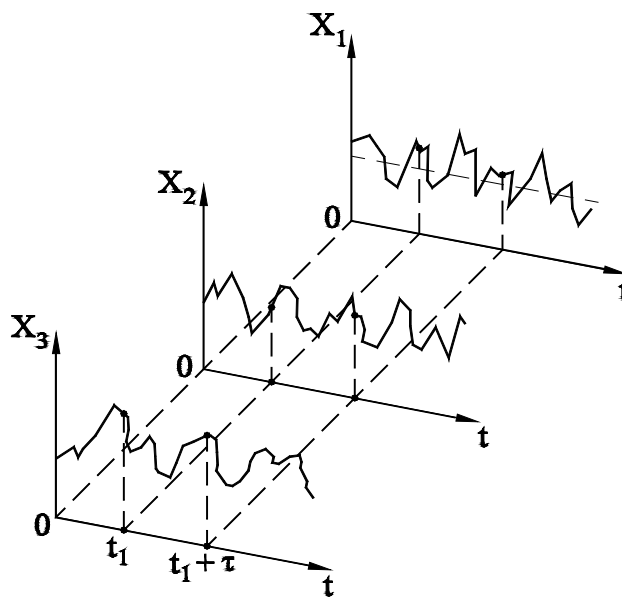
A matematikában sztochasztikus folyamatnak nevezzük, ha egy  $x$  változónak a  $t$  független változó minden értékére különböző  $x(t)$  lehetséges értékei vannak, vagyis: ha  $x$  a  $t$  függvénye, de  $t$  értéke  $x$  értékét egyértelműen nem határozza meg. Aszerint, hogy  $t$  értékkészlete folyamatos vagy diszkrét, folyamatos, illetve diszkrét sztochasztikus folyamatról beszélünk. A mechanikai sztochasztikus lengések mindig folytonosak. A  $t$  független változó lehet az idő, de lehet térbeli koordináta is. A sztochasztikus folyamat matematikai szimbóluma:  $\{x(t)\}$

### Sztochasztikus lengés:

- a mozgás időbeli lefolyása explicit matematikai kifejezéssel nem írható le, a rendszer adatainak és kezdeti állapotának ismeretében a gyakorlatban elfogadható hibahatáron belüli pontossággal nem számítható,
- kísérleti vizsgálatnál a kísérlet a mérési hibahatáron belül azonos eredménnyel nem ismételhető.

Sztochasztikus mozgásoknál tehát az eddig megismert elméleti és mérés kiértékelési módszerek változtatás nélkül nem alkalmazhatók. A tapasztalat szerint azonban a sztochasztikus mozgások egy részénél bizonyos szabályosságot mégis fel lehet tételezni, ami reményt ad arra, hogy alkalmas módszerekkel a mozgásnak a szerkezet méretezéséhez és minősítéséhez szükséges jellemzőit meg lehet állapítani. Így például a 3.1. ábra szerint úgy tűnik, hogy a rezgés középértéke és az abból mért kitérések statisztikai átlaga időben állandó lehet. A mozgás látszólagos szabálytalansága ugyanis nem amiatt van, mert előidéző oka (pl. az útegyenetlenségek) és a mozgás (pl. a kerék függőleges mozgása) között nincsen meghatározó összefüggés, hanem mert a mozgást előidéző külső hatások (útegyenetlenségek) nagyon bonyolultak. Elméletileg ugyan a keréknyom bármelyik véges hosszúságú szakaszára lehetne Fourier-sorba fejtéssel leíró függvényt készíteni, de ennek nem volna gyakorlati értelme. Ugyanis teljesen lehetetlen akár csak kétszer is pontosan ugyanazon a keréknyomon pontosan ugyanúgy végigmenni.

A sztochasztikus folyamatok vizsgálatánál a függvények egész sorozatának adataira van szükség (3.2. ábra).



3.2. ábra

A sztochasztikus folyamatot elméletileg az  $x_k(t)$   $k=1,2,3,\dots,j(j \rightarrow \infty)$  függvények összessége alkotja. A valóságban előforduló eseteket ezen végtelen függvénysorozat realizációinak, a sorozatból vett mintáknak kell tekinteni.

A sztochasztikus mozgás egy vagy több mintájának  $x(t)$  időfüggvénye – bármilyen pontos regisztrátum vagy matematikai kifejezés formájában – a mozgás jellemzőinek leírását csak

burkolt formában tartalmazhatja. A méretezéshez vagy a minősítéshez nem egy adott  $x_k(t)$  időfüggvény  $t + t_i$  időpontban felvett értéke, hanem egészen más jellemzők szükségesek. Meghatározásukra a rendelkezésre álló minták háromféle vizsgálatát használjuk:

- a minták statisztikai elemzése,
- a minták  $t = t_1$  és  $t = t_1 + \tau$  időben felvett értékei közötti korreláció vizsgálata a  $t$  időkézés függvényében,
- frekvencia vizsgálat.

A sztochasztikus folyamat teljes leírását csak a háromféle feldolgozás eredményének össze-sítése adja meg.

A sztochasztikus folyamat valamely véges szakaszát ábrázoló jel a sztochasztikus jel, amelynek képe egy minden rendszerességet nélkülöző függvény-vonal, pl.: 3.1. ábra. Amikor mechanikai rendszereket vizsgálunk, nevezetesen amikor azt tanulmányozzuk, hogy valamely rendszer hogyan viselkedik külső kényszerek hatására, akkor feltétlenül szükségünk van mind a bemenő, mind a kimenő jelek valamilyen fokú ismeretére. A jeleket - a fizikai-lag realizált jeleket - mindig meg lehet adni tetszőlegesen nagy pontossággal, amikor va-lamely  $x$  sztochasztikus mennyiség az idő függvényében változik, tehát

$$x = x(t), \quad -\infty < t < \infty$$

Egy-egy konkrét megfigyelés során az  $x_1, x_2, x_3, \dots$  jeleket (regisztrátumokat) észleljük, ame-lyek az  $x(t)$  sztochasztikus függvény különböző realizációi.

### 3.2. Statisztikai alapok

A statisztika alapját a valószínűségelmélet képezi. Az alapfogalmakat az alábbiakban foglal-juk össze.

#### 3.2.1 Valószínűségi változó és jellemzői

Az  $E$  eseménytérhez tartozó valószínűségi elemi események  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ )  $\in E$  matemati-kai kezelése egy változóhoz való hozzárendelést kíván meg:

$$x(e_i) = f(e_i) = x_i$$

Az  $x_i$  valószínűségi változót röviden  $x$  reprezentánsa ábrázolja, vagy pontosabban:

$$\{x(e_i)\} = \{x\} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

Az  $u$  valós paraméterrel

$$-\infty < u < \infty \quad \text{és}$$

$$\{x(e)\} < u, \quad e \in E$$

egyenlettel magyaráztunk egy eseményt, aminek a valószínűségét – az  $x < u$  esemény fellé-pésére vonatkozóan – a paraméter valós értékére a

$$P_x(u) = W\{x(e) < u\} \quad -\infty < u < \infty$$

kifejezés definiálja, amely megadja annak valószínűségét, hogy az  $x(e)$  valószínűségi változó egy megadott  $u$  értéknél kisebb.

$W$  az  $x < u$  reláció fellépésének a valószínűsége, amit a

$$P(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

interpretáció alapján tisztázunk:

$N$  kísérlet során  $x < u$   $n$  alkalommal került megfigyelésre.

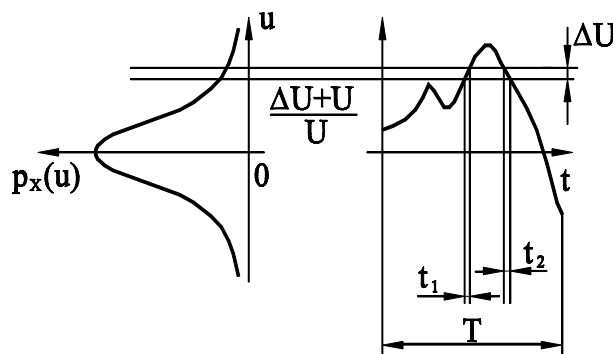
$P_x(u)$  az  $x$  **valószínűségi változó eloszlásfüggvénye**.

Annak feltétele mellett, hogy a  $P_x(u)$  eloszlásfüggvény differenciálható, kapjuk az **eloszlás sűrűségfüggvényt** (valószínűség sűrűség):

$$p_x(u) = \frac{dP_x(u)}{du} = P'_x(u)$$

*PÉLDA:*

Egy adott  $x(t)$  szabálytalan jel  $p_x(u)$  eloszlás sűrűségfüggvényének a meghatározása a 3.3. ábra szerint történik ( $0 \leq t \leq T$ ).



3.3. ábra

### Sztochasztikus jel eloszlás sűrűségfüggvényének meghatározása

A  $[0, T]$  intervallumból származó  $\Delta t_i$  részintervallumhosszak összességében azt adják meg, hogy  $u \leq x < u + \Delta u$  milyen gyakran lép fel. Annak valószínűsége, hogy fellép  $u \leq x < u + \Delta u$

$$W\{u \leq x < u + \Delta u\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}{T}$$

A valószínűségi sűrűség:

$$p_x(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{P_x(u + \Delta u) - P_x(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{W\{u \leq x < u + \Delta u\}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}{T} \right]$$

A 3.3. ábra bal oldala a  $p_x(u)$  eloszlássűrűséget mint  $\Delta u \rightarrow 0$ -ra vonatkoztatott valószínűséget (relatív gyakoriságot) ábrázolja.

A  $p_x(u)$  eloszlássűrűségű  $f(x)$  függvény várható értékét az

$$E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p_x(u) du$$

funkcionál definiálja. A definíció alapján megadhatjuk a várható érték képzésére vonatkozó számítási szabályokat, amely többek között egy lineáris operációt (műveletet) jelent. Különös jelentőségűek a várható értékek  $f(x) = x^n$  mellett, az eloszlás sűrűségfüggvény ún.  $n$ -edik momentumai:

$$E\{x^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n p_x(u) du$$

Az elsőrendű momentum a lineáris középérték:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} u p_x(u) du = \bar{x}$$

amely a súlyvonalat szolgáltatja.

A másodrendű momentum  $n = 2$ , a négyzetes középérték:

$$E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p_x(u) du$$

A statisztikában még a lineáris középértékre vonatkoztatott momentumok játszanak fontos szerepet. Eszerint

$$E\{x - \bar{x}\} = 0$$

és

$$E\{(x - \bar{x})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \bar{x})^2 p_x(u) du = \sigma_x^2 = \text{var}(x)$$

a legalacsonyabb momentum, ami az  $x$  változónak a középértéktől való átlagos eltéréséről nyújt felvilágosítást:  $x$  varianciája.

PÉLDA:

Az  $E\left\{(x - \bar{x})^2\right\}$  variancia közvetlenül visszavezethető a négyzetes középértékre:

$$\sigma_x^2 = E\left\{(x - \bar{x})^2\right\} = E\left\{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2\right\}$$

Az  $E$ -operáció egy lineáris művelet:

$$E\left\{(x - \bar{x})^2\right\} = E\{x^2\} - 2\bar{x}E\{x\} + \bar{x}^2 = E\{x^2\} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$$

A varianciából vont pozitív négyzetgyök  $\sigma_x$  neve: standardeltérés (szórás).  $\sigma_x$ -nek és  $x$ -nek a dimenziója megegyezik és ezért „mérési” hibával identifikálják. A variancia tehát a valószínűségi sűrűségnek a középérték körüli „szélességről” mond valamit. Ekkor még hiányzik egy mérték, ami megadja az eloszlásban a középértéktől való esetleges egyenetlen kitéréseket.

Ez szolgáltatja a **harmadik momentumot**, az ún. ferdeséget, amelynek definíciója dimenzió nélküli:

$$\gamma = \frac{E(x - \bar{x})^3}{\sigma_x^3}$$

### 3.2.2. Több valószínűségi változó

Vektoros  $x$  valószínűségi változóval akkor van dolgunk, ha az  $x(e_i) = f(e_i) = x_i$  leképezés (hozzárendelés) vektoros alakot vesz fel:

$$x(e_i) = f(e_i) = [x_1(e_i), \dots, x_n(e_i)]^T$$

Ekkor az  $E$  eseménytér helyett az  $E^*$  eseménymezőről beszélünk.

Azt a valószínűséget, amivel  $x_i < u_i$   $[i = 1(1)n]$  teljesül, miközben  $u_i$  egy valós szám,  **$n$ -dimenziós eloszlásfüggvénynek vagy együttes-eloszlásfüggvénynek nevezzük:**

$$P_x(u) = P_{x_1, \dots, x_n}(u_1, \dots, u_n) = W\{x_i < u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Az együttes eloszlásfüggvény eloszlás sűrűségfüggvényének a definíciója  $n = 1$ -nek megfelelően

$$p_x(u) = \frac{\partial^n P_x(u)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

### 3.2.3. Gauss eloszlások

A meglévő eloszlások közül a Gauss (normál eloszlás) bír a gyakorlatban megkülönböztetett jelentőséggel. Az eloszlás egydimenziós sűrűségfüggvénye:

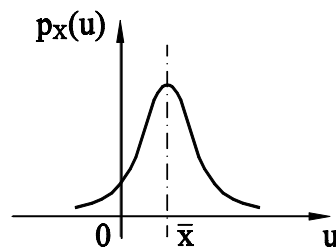
$$p_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(u - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

ahol

$$\bar{x} = E\{x\}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(x - \bar{x})^2\}$$

Sűrűségfüggvénye: 3.4. ábra



Gauss-féle haranggörbe  
3.4. ábra

A görbe inflexió pontjait a  $\bar{x} \pm \sigma_x$  helyeken találjuk. Néhány esetben az az érdekes számunkra, hogy  $x$  mekkora valószínűséggel esik egy, a középpértékhez viszonyítva  $\sigma_x$  többszörösével jellemzett tartományon belül, ill. azon kívül. A sűrűségfüggvény integrálása az adott határokat megadja:

$$\begin{array}{ll} W\{|x - \bar{x}| < \sigma_x\} = 68,3\%, & W\{|x - \bar{x}| > \sigma_x\} = 31,7\% \\ W\{|x - \bar{x}| < 2\sigma_x\} = 95,4\% & W\{|x - \bar{x}| > 2\sigma_x\} = 4,6\% \\ W\{|x - \bar{x}| < 3\sigma_x\} = 99,7\% & W\{|x - \bar{x}| > 3\sigma_x\} = 0,3\% \end{array}$$

Az ún. standardizált normáloszlást a 0 középpérték és az 1 értékű variancia jellemzi. A

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

helyettesítéssel (centrálás és normálás)

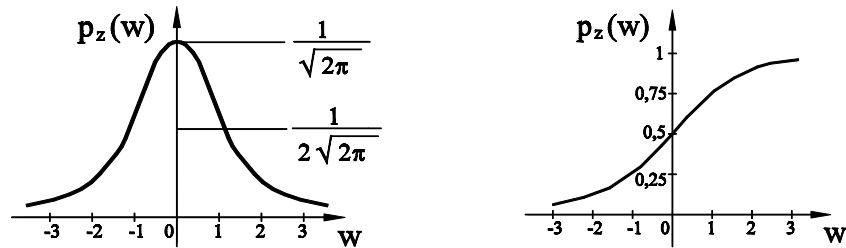
$$p_z(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}, \quad \bar{z} = 0, \quad \sigma_z^2 = 1$$

alakban kapjuk.

Az eloszlásfüggvény

$$p_z(w) = \int_{-\infty}^w p_z(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

A 3.5. ábra standardizált normáeloszlás eloszlássűrűségét és eloszlásfüggvényét mutatja.



3.5. ábra

Több változó Gauss-eloszlását (többdimenziós Gauss-eloszlás) a

$$p_x(u) = k \exp \left[ -\frac{1}{2} (u - a)^T A (u - a) \right]$$

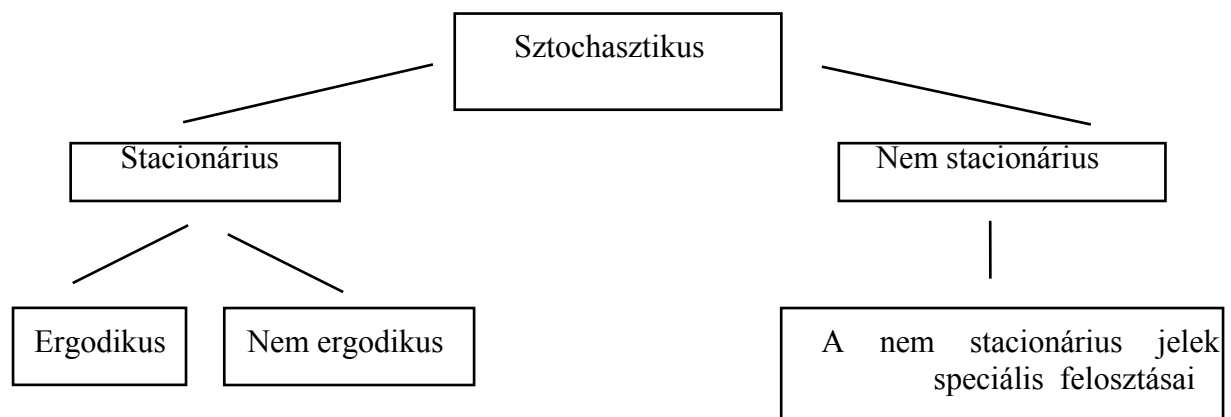
kifejezéssel definiáljuk.

**a** - a középértékek vektora

**A** - egy  $n$ -ed rangú pozitív definit szimmetrikus mátrix

### 3.3 Sztochasztikus folyamatok

A sztochasztikus folyamatok az alábbiak szerint csoportosíthatók:



Ha a vizsgált  $x_i$  véletlenszerű mennyiségek egy valós paramétertől függenek  $x_i = x_i(t)$ , akkor a valószínűségi változóknak a paraméter szerint rendezett halmazát sztochasztikus (véletlen) folyamatnak nevezzük. A gyakorlatban a  $t$  általában az idő-paraméter. Véletlenszerű sorozatról akkor beszélünk, ha a valószínűségi változót csak  $t_j$  diszkrét értékeire definiáljuk. Az eloszlás és eloszlássűrűség-függvények:

$$P_x(u, t_j) = W \{x(e, t_j) < u\}, \quad -\infty < u < \infty \text{ és } p_x(u, t_j).$$

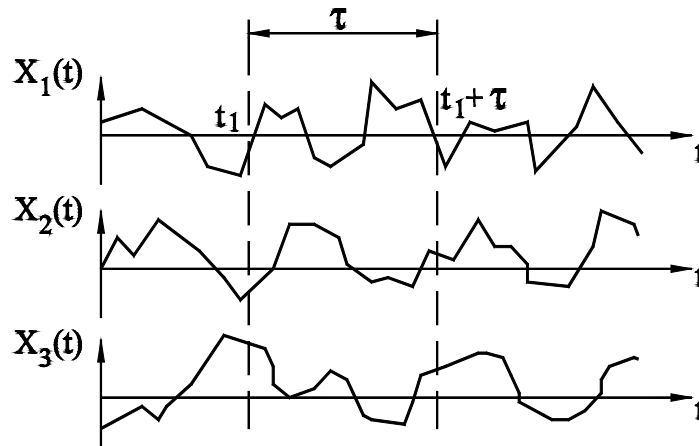
A  $t$  a  $-\infty$  és a  $+\infty$  között elhelyezkedő értékeket vehet fel. Abból indulunk ki, hogy a folyamat végtelen sok számú  $x_i(t)$  valószínűségi változót tartalmaz (véletlenszerű mennyiségek alapösszessége), amelyeket időfüggvényként interpretálunk. Azt képzeljük, hogy az  $x_i(t)$  végtelen sokasága pl: azonos forrás által létrehozott, vagy az időbeli folyamat (kísérlet) végtelen számú ismétlésével jött létre, miközben feltételezzük, hogy a folyamat a múltban a  $t = -\infty$  időpontban kezdődött. Az egyes  $x_i(t)$  függvényeket a múlttól kezdődően egészen a jelenig a ténylegesen felvett értékeik írják le (ebben az értelemben ezek a függvények az érintett időintervallumban tehát determinisztikusak), miközben a jövőbeni lefutásukról csak statisztikai kijelentések tehetők.  $x_i(t)$  ekkor a folyamatnak az ún. mintafüggvénye vagy realizációja.

Ha a  $h_i(t)$  repülési magasságoknak az időbeli eloszlását kell adott repülési korlátozások (megszorítások) mellett a Hannover-München között közlekedő repülőgépekre vonatkozóan megvizsgálni, úgy az először azt jelenti, hogy az erre a folyamatra vonatkozó mintafüggvények alapösszességét kell előállítanunk. Az érintett repülőgépek magassági kijelzéseit a starttól a leszállásig regisztrálni kell, még hozzá elméletileg végtelen számú repülésre vonatkozóan.

### 3.3.1. Stacionárius sztochasztikus folyamatok

A sztochasztikus folyamatok általában különböző  $t_i \neq t_j = t_i + \tau$  paraméterértékekre (ahol  $\tau \neq 0$ ) különböző statisztikai tulajdonságokkal is rendelkeznek, pl:  $P_x(u, t_i) \neq P_x(u, t_i + \tau)$ . Ezáltal az eloszlásfüggvények, az eloszlássűrűség függvények és az ezekből levezethető statisztikai mennyiségek az idő függvényei:  $\{x(t)\}$  egy nemstacionárius sztochasztikus folyamat.

Valamilyen véletlen folyamat elvileg leírható a mintafüggvényei együttesére kiszámolt momentumokkal és kapcsolt momentumokkal. Ez azt jelenti, hogy ezekből az összes statisztikai jellemző meghatározható, de az időfüggvények természetesen nem. Tekintsük az alábbi ábra mintafüggvényeit.



Ezekből a mintafüggvényekből álló véletlen folyamat középértéke valamilyen  $t_l$  időpontban a következő módon számolható ki:

$$E\{x(t_l)\} = \mu_x(t_l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_l)$$

**A másik fontos jellemző függvénye a sztochasztikus folyamatnak az autokorreláció függvénye.** Ez a következőképpen határozható meg. Az  $x_1(t), x_2(t) \dots x_i(t)$  mintafüggvényeknek nemcsak  $t_1$  időpontban mérhető értékeit, hanem a  $\tau$  idővel eltoló értékeit is vegyük figyelembe.

$$E\{x(t_1) \cdot x(t_1 + \tau)\} = R_x(t_1, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \cdot x_i(t_1 + \tau)$$

Ez azt jelenti, hogy bárhol veszek is fel egy „keresztmetszetet” a mintafüggvényekből, annak sem a középértéke, sem pedig az autokorreláció függvénye nem változik.

Ha a középérték és az autokorreláció függvény értéke  $t_1$ -től független, tehát

$$\mu_x(t_1) = \mu_x \quad \text{és}$$

$$R_x(t_1, \tau) = R_x(\tau),$$

akkor az  $\{x(t)\}$  sztochasztikus folyamatot **gyengén stacionáriusnak** nevezzük. Ha az  $\{x(t)\}$  sztochasztikus folyamat összes momentuma és kapcsolt momentuma  $t_1$ -től független, a folyamatot **erősen stacionáriusnak** nevezzük. A folyamatok stacionaritására a mindenkori folyamat fizikai tulajdonságai adnak választ.

Egy villanymozdony állandó sebességgel egyenes pályán halad. A sínek nem rendelkeznek determinisztikus helyeztetéssel, a kerekek kiegyensúlyozatlan tömegektől mentesek és futófelületeik hibátlanok. Tekintsük a sínegyenetlenségek következtében a kerékfelfekvési pontokban a kereknek a véletlenszerűen fellépő vertikális gyorsulásait. A fizikai okozó (kiváltó) mennyiségek itt időtől függetlenek és egy stacionárius folyamat feltételezése megalapozottnak tűnik.

Az  $x(t)$  sztochasztikus függvényt akkor tekinthetjük statisztikusan adottnak, ha ismert valamennyi  $t_1$  időponthoz tartozó összes eloszlás-, illetve sűrűségfüggvénye. Ez viszont olyan nagy mennyiségű információt jelentene, amivel a gyakorlat számára már semmit sem lehetne kezdeni. Ezért van nagy jelentősége a stacionaritás feltételének.

Stacionáriusnak nevezzük az olyan sztochasztikus függvényt, amelynek valószínűségi jellemzői, tehát eloszlás- és sűrűség-függvényei a  $t_1$  időponttól függetlenek. Az egyváltozós eloszlásfüggvény  $t_1$  időponttól független, a kétváltozós eloszlásfüggvény pedig csak a  $\tau$  időkülönbségtől ( $\tau = t_2 - t_1$ ) függ.

Pl: az útprofilnak sztochasztikus folyamatként való felfogásában a szemlélet alapján is látható, hogy a stacionaritás feltétele teljesül.

A stacionárius sztochasztikus folyamatok tehát már egyetlen  $t$  időponthoz tartozó eloszlásfüggvényekkel, illetve sűrűség-függvényekkel egyértelműen jellemezhetők. Gyakorlati szempontból megelégedhetünk néhány egyszerűbb jellemző adattal, amelyek ugyan nem határozzák meg egyértelműen az adott sztochasztikus folyamatot, de felvilágosítást nyújtanak annak lényegesebb adatairól. Ilyen egyszerűbb jellemzők az  $x(t)$ -nek, mint valószínűségi változónak a különböző momentumai:

- az elsőrendű momentum (az ún. összesség középérték)
- a másodrendű momentum (az ún. korrelációs függvény, amely az  $x(t)$  valószínűségi változónak a  $t$  és  $t + \tau$  időpontban felvehető értékei szorzatának összeség középértéke).

### *Nemstacionáris sztochasztikus folyamatok*

Ide tartoznak mindazon sztochasztikus folyamatok, melyek a fenti feltételeket nem elégítik ki. Az ilyen folyamatoknak végtelenül sokféle változata képzelhető el, ezért osztályozásuk kilátástalan. Általában a természettudományos alkalmazás szempontjából lényeges fajtáikra dolgoznak ki jellemzési és vizsgálati módszereket.

### *3.3.2. Ergodikus sztochasztikus folyamatok*

A sztochasztikus jelekre és folyamatokra vonatkozó eddigi definíciók azt nem veszik figyelembe, hogy a gyakorlatban egy sztochasztikus folyamat alapösszessége sem áll rendelkezésünkre – mindig csak egyes jelekkel van dolgunk – nemhogy az eloszlás- ill. a sűrűségfüggvény ismert lenne. A stacionárius sztochasztikus folyamatok jellemzésére alkalmas korreláció függvény gyakorlati alkalmazása még komoly nehézségekbe ütközik azért, hogy a vizsgált sztochasztikus jel igen nagy számú realizációjának megfigyelésével határozható meg. A sztochasztikus folyamatok leírása tehát további egyszerűsítést kíván, amit az ergodicitási hipotézis tesz lehetővé. Ez azt jelenti, hogy a végtelen számú realizáció valamely adott  $t$  időponthoz tartozó értékeinek összesség középértéke, tehát az elsőrendű momentum megegyezik egyetlen tetszőleges  $x_i(t)$  realizáció végtelen hosszúságú szakaszára kapható idő középértékével.

Az előző pontban a középértéket és az autokorreláció függvényt egy meghatározott  $t_1$  időpontban felvett mintafüggvények összességére vonatkozóan határoztuk meg. Ha a folyamatról feltételezzük, hogy stacionárius, akkor egyetlen minta regisztrátuma alapján is képezhető a középérték és az autokorreláció függvény, mégpedig az időátlagok segítségével.

Az  $x(t)$  sztochasztikus folyamat  $i$ -edik regisztrátumának a középértéke:

$$\bar{x}(t) = \mu_x(i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt$$

az autokorreláció függvény pedig:

$$R_x(i, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) dt$$

Ha az ilyen módon, és az összességre képzett középértékek azonosak, akkor a sztochasztikus folyamat **ergodikus**. Vagyis, ha

$$\mu_x(i) = \mu_x(t_1) = \mu_x \quad \text{és}$$

$$R_x(i, \tau) = R_x(t_1, \tau) = R_x(\tau) \quad \text{akkor}$$

$\{x(t)\}$  gyengén ergodikus sztochasztikus folyamat.

A gyakorlatban sokszor a lineáris középértékek és a korreláció függvények vizsgálatára szorítkoznak: egy gyengén stacionárius sztochasztikus folyamatot akkor nevezünk ergodikusnak, ha

$$\text{Összesség középérték} = \text{Idő középérték}$$

$$E\{x(t)\} = \overline{x(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot p_x(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) dt$$

és

$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = R_{xx}(\tau)$$

ahol

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(\tau) &= E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\} = E\{x(t_1) \cdot x(t_1 + \tau)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t_1) u_2(t_1 + \tau) p_{x(t_1)x(t_2)}(u_1, u_2, \tau) du_1, du_2 \end{aligned}$$

és

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = R_{xx}(\tau)$$

teljesülésének valószínűsége egy, s amelynek a vizsgálatát egyetlen mintából elvégezhetjük.

A négyzetes középértékben vett ergodicitásról akkor beszélünk, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 p_x(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

$$E\{x^2(t)\} = \overline{x^2(t)}$$

Egy stacionárius véletlenszerű folyamatot akkor nevezünk szigorúan ergodikusnak, ha minden egyes mintafüggvény  $x_i(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  valamennyi momentumára

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^n p_x(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^n(t) dt$$

$$E\{x^n(t)\} = \overline{x^n(t)}$$

teljesülésének valószínűsége egy.

Kérdés azonban, hogy lehet-e az egyetlen  $k$ -adik realizációból számolt értéket a teljes, korlátlan számú mintát magában foglaló folyamatra jellemzőnek tekinteni. Vagyis, ha járművünkkel névlegesen ugyanazon az úton, ugyanolyan körülmények között, de más nyomon fogunk végigmenni, statisztikai értelemben ugyanazon középértéket stb. fogjuk-e kapni?

Sajnos eddig nem sikerült általánosságban bizonyítani, hogy egy adott mérőszám (pl. középérték, szórás, stb.) szempontjából stacionárius sztochasztikus folyamat ugyanazon mérőszámra szükségképpen ergodikus is. A gyakorlati szempontból legfontosabb alapvető jellemzőkre ismert néhány ellenőrzési kritérium; egyébként pedig indokoltnak látszó esetekben feltételezzük az ergodicitást. Az eddigi gyakorlati tapasztalatok alapján ez megengedhetőnek látszik.

### 3.4. A sztochasztikus folyamat statisztikai jellemzői

A következőkben összefoglaljuk a sztochasztikus folyamat statisztikai jellemzőit, különös tekintettel a digitális feldolgozásra.

Összesség középérték  
Idő középérték  
Négyzetes középérték  
Effektív érték  
Szórásnégyzet  
Szórás  
Valószínűség eloszlásfüggvény  
Valószínűség sűrűségfüggvény

#### *Összesség középérték*

Vegyünk a sztochasztikus folyamatból  $j$  darab mintát és olvassuk le a  $t = t_1$  időpontban a függvényértékeket (3.2. ábra). Határozzuk meg a leolvasások számtani középértékét. Ha a  $j$  mintasorozat darabszámát minden határon túl növeljük, akkor a folyamat  $t_1$  időpontban mérhető (digitális feldolgozású képlettel)

$$\bar{x}(t_1) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j x_k(t_1)$$

úgynevezett összesség középértéket kapjuk.

A sztochasztikus folyamatok vizsgálatát nagyon megkönnyíti, ha statisztikai jellemzőik időben nem változnak, azaz ha a folyamat stacionárius. Ennek egyik feltétele, hogy a fenti képlet szerint számított összesség középérték – a gyakorlatban megengedhető hibahatáron belül – a  $t_1$  időponttól független állandó, azaz bármely  $t_1 + \tau$  időpontban ugyanaz legyen. Stacionárius folyamatra az egyváltozós sűrűségfüggvénnyel:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x_k \cdot p(x_k, t_1) dx$$

Több realizációnak egy adott  $t_1$  időpontban vett  $x$  értékei összegének átlaga.

#### *Idő középérték*

Az összesség középérték és más hasonló összesség statisztikai jellemzők számításánál a gyakorlatban komoly, sokszor megoldhatatlan probléma elegendő számú minta biztosítása. Párhuzamos mérések ritkán van lehetőség. Sokkal könnyebb egy vagy két esetben elegendő hosszú ideig mérési adatokat szerezni.

Így a  $k$ -adik minta

$$\bar{x}_k(t_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x_k(t) dt$$

idő középérték meghatározása rendszerint nem ütközik akadályba. A középérték stacionaritásának feltétele nyilván az  $\bar{x}_k$  értékének  $t_1$ -től független állandósága lesz.

Általános alakban:

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Ergodikus folyamatra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_k p(x_k, t_1) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt$$

Minél hosszabb  $T$  intervallumra végezzük el a középérték képzését, annál kevésbé függ az eredmény  $T$  nagyságától, ill. annál kevésbé tér el valódi értékétől.

Az idő középérték képlete digitális feldolgozásnál:

$$\bar{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

A gyakorlatban  $m$  értékét 2 hatványára (pl. 512, 2048) célszerű választani.

### Négyzetes középérték

Az idő középértékkel analóg módon számítjuk ki, csak nem magukból a mérési adatokból, hanem azok négyzetéből. Ebből következik az a fontos dolog, hogy a négyzetes középérték mindig pozitív, szemben az idő középértékkel, amely az adatok számértékétől függően negatív is lehet.

Képlete idő szerinti átlagolásnál

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (\text{analóg forma})$$

illetve

$$\overline{x^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^2 \quad (\text{digitális forma})$$

A négyzetes középérték a jel **teljesítményével** arányos mennyiség. A különböző mennyiségek négyzete általában szoros kapcsolatban áll az elveszett (hővé váló) teljesítménnyel. Ha például valamely sebességgel arányos csillapítási tényezőjű lengéscsillapítóra  $x(t)$  időfüggvény szerint változó relatív sebességet kényszerítünk, akkor az időegységenként hővé alakuló munka – tehát teljesítmény –  $N = c x^2(t)$  alakú függvény lesz. A súrlódó tagon disszipált teljesítmény  $f_v = r v^2 = \frac{f^2}{r}$ , a villamos ellenálláson hővé alakuló teljesítmény

$$u \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}.$$

A jel négyzetének középértéke tehát az átlagos teljesítménnyel arányos, és így a jel egyik legfontosabb jellemzője.

Megjegyezzük, hogy a jelek négyzetes középértékét tudatos pongyolasággal „teljesítménynek” nevezik, noha mértékegysége természetesen a mindenkor adott jel mértékegységétől függően egészen más is lehet.

### *Effektív érték*

A villamosságтанból átvett és általánosított fogalomként effektív értéknek nevezzük a négyzetes középérték pozitív négyzetgyökét:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{x^2} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

illetve

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^2}$$

### *Szórásnégyzet*

Mint minden statisztikai eloszlásnál, itt is nagy jelentősége van annak az információnak, amely megmutatja, hogy a ténylegesen előfordult értékek milyen szorosan vagy lazán tömörülnek az idő középérték körül. Gyakran kényelmesebb olyan függvényt vizsgálni, amelynek középértéke nulla. Az általános  $x(t)$  függvényt visszavezethetjük nulla középértékű függvényre, ha az eredeti  $x(t)$  jel helyett az  $[x(t) - \bar{x}]$  jelet vizsgáljuk, amelynek középértéke szemmel láthatóan nulla. A vizsgált jelenség fizikai tartalmát is sokszor még jobban szemlélteti, ha a jelet az időben változó lengő összetevő és az állandó középérték eredőjének tekintjük. Ennek az objektív kifejezésére szolgál a szórásnégyzet, vagy a folyamat varianciája, amely a folyamat intenzitására jellemző mennyiség:

$$\sigma_{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt$$

illetve

$$\sigma_{x^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [x_i - \bar{x}]^2$$

A szórásnégyzet mértékegysége az adatok mértékegységének négyzete, illetve – ami ugyanaz – a négyzetes középérték mértékegységével azonos.

A fenti összefüggések elvben csak végtelen sok adat, a gyakorlatban sok, pl. száznál több adat esetén érvényesek.

Kevés adat esetén az ún. **empirikus szórásnégyzet** fogalmát használják, amely annyiban tér el, hogy a nevezőben  $m$  helyett  $m - 1$  szerepel.

A szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke a szórás:

$$\sigma_x = + \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt}$$

illetve

$$\sigma_x = + \sqrt{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [x_i - \bar{x}]^2}$$

A szórás mértékegysége az adatok mértékegységével azonos.

A variancia

$$E\{(x - \bar{x})^2\} = \overline{x^2}(t) - \bar{x}^2(t)$$

megfelel a szórásnégyzetnek.

A szórásnégyzet, az idő középérték és a négyzetes középérték közötti összefüggésnek nagy gyakorlati jelentősége van. Végeredményben azt kapjuk, hogy a szórásnégyzet a négyzetes középérték és az idő középérték négyzetének különbsége.

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2}(t) - \bar{x}^2(t)$$

### 3.5. Korreláció függvények

#### 3.5.1. Egyszerű időbeli átlagértékek

Ergodikus folyamat feltételezése mellett a lineáris és a négyzetes középértéket (idő középértéket)

$$\overline{x^n}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^n(t) dt = E\{x^n(t)\}$$

$$x_i(t), -\infty < t < \infty \text{ mintafüggvény}$$

szerint definiáltuk. Ezek az alapösszesség megfelelő mennyiségeihez konvergálnak,

$$\bar{x} = E\{x(t)\} \quad \sigma_{\bar{x}} = 0$$

$$\overline{x^2} = E\{x^2(t)\} \quad \sigma_{\overline{x^2}} = 0$$

Az ergodicitás magában foglalja a folyamat stacionaritását, azaz az idő középértékek függetlenek a lineáris időtranszformációtól:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t \pm t_1), \quad \overline{x^2}(t) = \overline{x^2}(t \pm t_1),$$

Az időbeli átlagértékek állandók, ezért a sztochasztikus folyamat belső összefüggéséről semminemű felvilágosítást sem szolgáltatnak.

#### 3.5.2. Autokorreláció függvény

Ahhoz, hogy bepillantást nyerjünk egy sztochasztikus folyamat belső összefüggéseibe, szükségünk van a különböző időkhöz a jelek hozzárendelésére. Ez a hozzárendelés stacionárius folyamatoknál adott az autokorreláció függvénnyel:

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(\tau) &= E\{x(t_1) \cdot x(t_2)\} = E\{x(t_1) \cdot x(t_1 + \tau)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t_1) u_2(t_1 + \tau) p_{x(t_1)x(t_2)}(u_1, u_2, \tau) du_1 du_2 \end{aligned}$$

A sztochasztikus folyamat fontos jellemzőiről tájékozódhatunk, ha vizsgáljuk, hogy a sztochasztikus jel két különböző időpontban vagy helyen felvett értéke milyen mértékben függ egymástól. A korreláció függvény az  $x(t)$  valószínűségi változónak a  $t$  és  $t + \tau$  időpontban felvehető értékei szorzatának időbeli középértéke. Stacionárius folyamatra ez a függvény is független a  $t$  időponttól, csupán a  $\tau$  időeltolás függvény. A középérték és a korrelációs függvény önmagában is elegendő információt tartalmaz abban az esetben, ha a sztochasztikus folyamat eloszlásfüggvényei normális eloszlást mutatnak. A járműrugózás területén előfor-

duló jelekre – a kísérletek szerint – jó közelítésként alkalmazható a normális eloszlás feltételezése.

Az autokorreláció függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

Az autokorreláció függvény valós, páros függvény, amely maximumát  $\tau = 0$ -nál éri el

$$\phi_{xx}(-\tau) = \phi_{xx}(\tau)$$

$$\phi_{xx}(0) \geq \phi_{xx}(\tau)$$

A  $\tau \rightarrow \infty$  határátmenetnél a sztochasztikus függvény autokorreláció függvénye a középérték négyzetéhez (ill. zérushoz) tart:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_{xx}(\tau) = \bar{x}^2 = [E\{x(t)\}]^2$$

Az autokorreláció függvény fizikai tartalma különösen a  $\tau = 0$  helyen látható jól. Ebben az esetben a jel négyzetes középértékét adja, ill. ha csak a dinamikus összetevőt vizsgáljuk, akkor a függvény szórásnégyzetével egyenlő:

$$\phi_{xx}(0) = \overline{x^2} = E\{x^2(t)\} \geq 0 \quad (\text{általában})$$

$$\phi_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad (\text{ha } \bar{x} = 0)$$

Az autokorreláció függvény definíciója nemcsak sztochasztikus jelekre korlátozott, determinisztikus és kvázisztochasztikus (determinisztikus hányadot, pl. periodikusokat tartalmaznak) folyamatokra is alkalmazhatjuk.

Az autokorreláció függvény magában hordozza a középértékre és a varianciára vonatkozó információt is.

A fentiek alapján megadhatjuk a normális eloszlásfüggvényekkel jellemezhető jelekre a stacionaritás korreláció elméleti definícióját:

Egy sztochasztikus folyamat akkor stacionárius, ha középértéke állandó, korreláció függvénye korlátos és csak a  $t$  idő-eltolás függvénye, a vizsgálat  $\tau$  időpontjától független.

Egy stacionárius folyamat individuális autokorreláció függvénye egy  $x_k(t)$  mintafüggvény szorzatközépértéke:

$$R_{xx}(k, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt = \overline{x_k(t) x_k(t + \tau)}$$

nagysága függ a  $k$  indextől. Ergodikus folyamatokra:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(k, \tau), \quad \text{ahol } W = 1$$

Tehát egyetlen jel vizsgálata (3.6. ábra) az autokorreláció függvénnyel:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

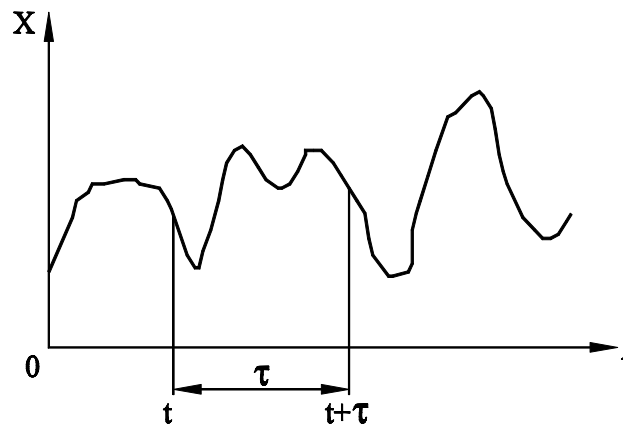
illetve digitális feldolgozásnál

$$R_{xx}(kh) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \cdot x_{i+k}$$

A becslési egyenlet:

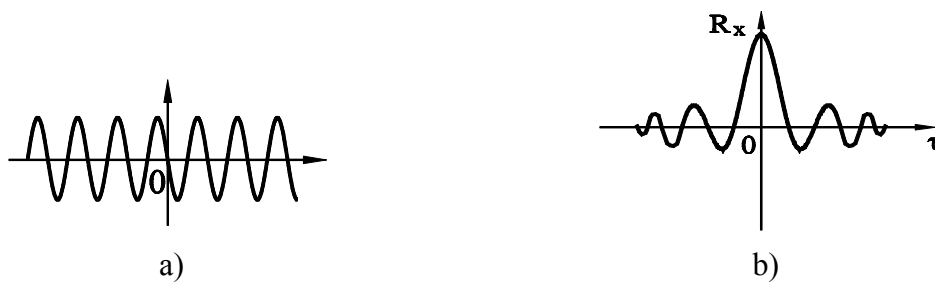
$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad \text{ahol } 0 \leq \tau \leq T$$

A becslés ergodikus folyamatokra torzítatlan.



3.6. ábra

Mintavételezésnél csak diszkrét pontokban tudjuk az autokorrelációs függvényt számítani. A 3.7/a ábra egy szinusz, a 3.7/b ábra egy sztochasztikus függvény autokorreláció függvényét mutatja.

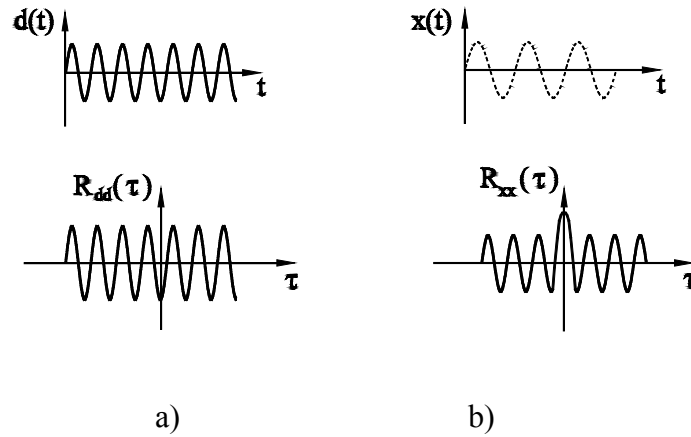


3.7. ábra

Kevert függvénynél a különbség kisebb, de minden esetben biztosan kimutatható.

Az autokorreláció függvény nem teszi lehetővé, hogy az  $x(t)$  jelre tudjunk következtetni.

A 3.8. ábra példaként egy szinuszhullám és egy zajjal terhelt szinuszhullám autokorrelációs függvényét mutatja. Az autokorreláció függvény gyakorlati haszna abban van, hogy a periodikus hányadokat a sztochasztikusoktól fel tudjuk ismerni.



3.8. ábra

Az autokovariancia függvény a véletlen folyamat saját középértékétől vett eltérésének autokorreláció függvénye.

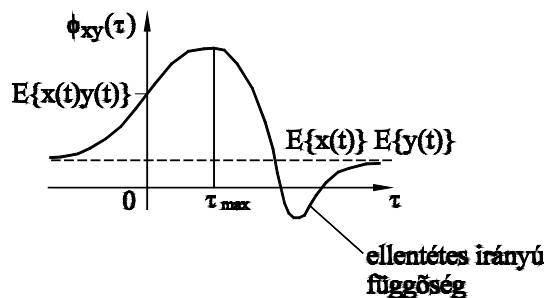
### 3.5.3 Keresztkorreláció függvény

A műszaki alkalmazásokban nemcsak  $x(t)$  és  $x(t+t)$  korrelációja, hanem két eltérő  $x(t)$  és  $y(t)$  jel között fennálló statisztikai rokonság is érdekes számunkra. Ezek két mérőhely jelei vagy egy rendszer be és kimenetén mért jelek lehetnek. Két stacionárius folyamat jeleinek a kölcsönös rokonságának, kapcsolatának a megfelelő mértéke a keresztkorreláció függvény:

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) &= E\{x(t_1) \cdot y(t_2)\} = E\{x(t_1) \cdot y(t_1 + \tau)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 v_2 p_{x(t_1)y(t_2)}(u_1, v_2, \tau) du_1 dv_2\end{aligned}$$

A keresztkorreláció függvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$ : se nem páros, se nem páratlan függvény  $\phi_{xy}(0) = E\{x(t)y(t)\}$ :  $\phi_{xy}(0)$  a legkisebb vegyes momentum. A legnagyobb statisztikai rokonság  $\tau_{\max} \neq 0$  esetén létezik. (3.9. ábra)

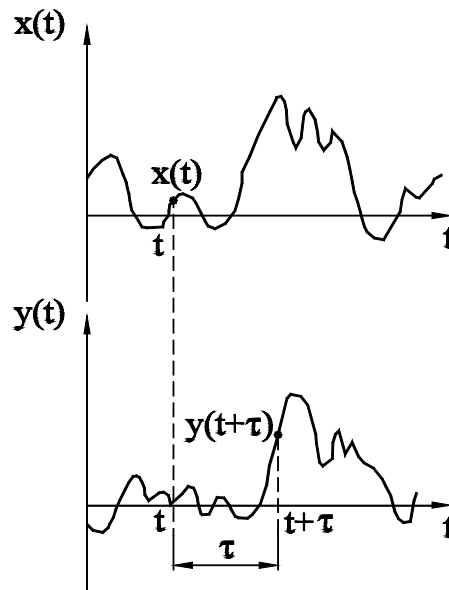


A keresztkorreláció függvény elvi lefutása  
3.9. ábra

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi_{xy}(\tau) = E\{x\}E\{y\}$ :  $\tau \rightarrow \infty$  esetén a jelek korrelálatlanok.

A 3.9. ábra a keresztkorreláció függvény elvi lefutását mutatja. Itt is, mint az autokorreláció függvényénél, nem lehet az  $x(t)$  és  $y(t)$  jelek időbeli lefutására következtetni. Mégis a keresztkorreláció függvény ellentétben az autokorreláció függvényével periodikus jelhányadokra még fázisra vonatkozó információt is tartalmaz.

Sokszor szükséges két függvény egymáshoz viszonyított ún. keresztkorrelációjának vizsgálata (3.10. ábra).



3.10. ábra

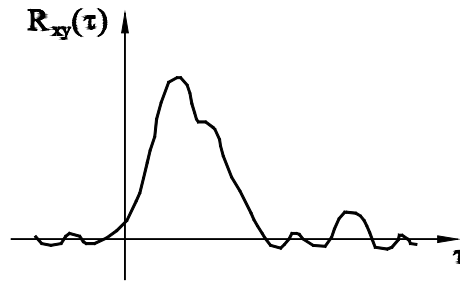
Például egy gépjármű bal és jobb keréknyoma, vagy az egyik keréknyom és a szerkezet egy pontjában keletkező feszültség közötti korrelációt vizsgálhatjuk. A keresztkorreláció függvény definíciója ergodikus folyamatokra:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt = \overline{x(t) \cdot y(t + \tau)}$$

illetve digitális feldolgozásnál

$$R_{xy}(kh) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_{i+k}$$

A keresztkorreláció függvény nem szimmetrikus, a maximum helye sincsen rögzítve (3.11. ábra)



3.11. ábra

Ha  $R_{xy} = 0$ , akkor a két függvény között nincsen korreláció.

Keresztkorrelációval meghatározható a lengések áthaladásának, terjedésének időszükséglete. Kimutatható egyes jelek terjedésének útja, elvégezhető zajjal kevert jelek kimutatása és kiszűrése.

### 3.6. Spektrál sűrűségfüggvény

A sztochasztikus jelek és folyamatok eddigi definíciói az időtartományra vonatkoztak. Determinisztikus jeleknél és folyamatoknál a frekvencia tartományba való transzformáció egyrészt egyszerűbb kifejezéseket eredményezett, másrészt kiegészítő információkat jelentett. Célszerű ezért a megfelelő értékeket a frekvencia tartományban definiálni.

#### 3.6.1 A Wiener-Khintchine-transzformáció

A korreláció függvények a folyamat energiájára és teljesítményére vonatkozó kijelentést tesznek lehetővé. Azért, hogy a frekvenciatérre vonatkoztatott teljesítményre kapjunk összefüggést, képezzük a korreláció függvények Fourier-transzformáltjait (ezen összefüggések a Wiener-Khintchine-transzformációk):

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

A korreláció függvények transzformáltjai léteznek, amennyiben léteznek a korreláció függvények. Ez azt jelenti, hogy stacionárius folyamattal van dolgunk, ha teljesül

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{xx}(\tau)|, |\phi_{xy}(\tau)| d\tau < \infty$$

$S_{xx}(\omega)$  a stacionárius folyamat auto- vagy hatásos spektrál-sűrűsége és  $S_{xy}(\omega)$  az  $\{x(t)\}$ ,  $\{y(t)\}$  stacionárius folyamat keresztspektrál-sűrűsége.

A determinisztikus jelek Fourier-transzformációjánál használt  $j\omega$  argumentum jelöléssel ellentétben a spektrálsűrűségnél az argumentum jelölési módja  $\omega$ -ra változik.

Az inverz transzformáció a Fourier-integrállal a korrelációs függvényeket szolgáltatja.

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Egy elasztomechanikus rendszer  $T$  mennyiségére vonatkoztatott energiái, ill. teljesítményei adott feltételek mellett az elmozdulásokra és azok időbeni deriváltjaira négyzetes alakban szerepelnek, tehát arányosak az  $u^2(t)$  és az  $\dot{u}(t)$  mennyiségekkel. Ennek következtében pl.

egy ergodikus folyamatra  $\overline{u^2}$  a folyamat átlagos teljesítményére vonatkozó mérték. A spektrál sűrűségfüggvény alatti terület a sztochasztikus jel átlagos négyzetes értékével egyenlő. Egy  $\{u(t)\}$  stacionárius folyamatra:

$$\overline{u^2} = E\{u^2(t)\} = \phi_{uu}(0)$$

A keresztszorozatra  $E\{u(t)W(t)\} = \phi_{uw}(0)$  következik, mint az átlagteljesítményre vonatkozó mérték.

A korrelációs függvények szerint igaz, hogy

$$\phi_{uu}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(f) df \text{ illetve } \phi_{uw}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uw}(f) df$$

Az  $S_{uu}(f)$ , illetve az  $S_{uw}(f)$  kifejezésekre vonatkozó integrálok az átlagteljesítményre vonatkozó mértékek. Így az  $S_{uu}(f)$  és  $S_{uw}(f)$  mennyiségeket spektrálsűrűségeknek, teljesítménysűrűségeknek (teljesítményspektrum), azaz a frekvenciánkénti teljesítményeknek nevezzük. A spektrálsűrűségeknek azonban általában nem kell frekvenciára vonatkozó teljesítménydimenzióval rendelkezni.

### 3.6.2 A hatásos spektrálsűrűség

Mivel az autokorreláció függvény páros függvény, a hatásos spektrálsűrűséget az autokorreláció függvény egyoldali cosinus transzformációjából kapjuk (valós alakú Wiener-Khintchine-transzformáció):

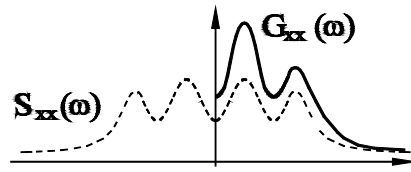
$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \phi_{xx}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

A hatásos spektrálsűrűségből sem tudunk az eredeti jel időbeli lefutására következtetni.

Ha az autokorreláció függvényre a kétoldali Fourier-transzformáció helyett az egyoldali alkalmazzuk, akkor az egyoldali hatásos spektrálsűrűséget kapjuk:

$$G_{xx}(\omega) = 2S_{xx}(\omega), \text{ ha } 0 \leq \omega < \infty, \text{ egyébként } 0.$$

$S_{xx}(\omega)$  és  $G_{xx}(\omega)$  alakulására a 3.12. ábra utal.



3.12. ábra

A becslési egyenlet:

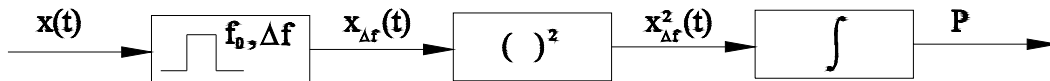
$$\hat{S}_{xx}(\omega) = F\{\hat{\phi}_{xx}(\tau)\}$$

Ergodikus folyamatokra:

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

A stacionárius sztochasztikus folyamat vizsgálatának teljességéhez frekvencia vizsgálat is tartozik, sőt fontosságban talán első helyre sorolandó. Periodikus determinisztikus jelek frekvencia vizsgálatát Fourier-transzformációval végezzük, így egyes diszkrét amplitudó nagyságokat kapunk az  $f$  frekvencia vagy az  $\omega$  körfrekvencia függvényében. A determinisztikus átmenetek Fourier-spektruma folytonos amplitudó spektrum. Sztochasztikus folyamatokról amplitudó spektrum nem készíthető, a frekvencia vizsgálatot más módon kell elvégezni.

Vizsgáljuk meg a sztochasztikus jelet egy  $f$  és a  $f + \Delta f$  közötti frekvenciasávban egyenletesen áteresztő, azonkívül éles határral vágó sávszűrővel (3.13. ábra).



3.13. ábra

A vizsgálatnál – pl. megfelelően bekötött wattmérővel – mérjük az  $x^2(t, f, \Delta f)$  értéket. Képezzük ebből a

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt$$

négyzetes középértéket, ami a vizsgált frekvenciasávra eső teljesítmény mérőszámának tekinthető.

Végezzük el ezt a mérést a teljes frekvenciatartományban és csökkentsük minden határon túl a sávszélességet, akkor a vizsgált sztochasztikus jel

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\overline{x^2}(\Delta f)}{\Delta f} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f) dt \right]$$

(egyoldalas) spektrál sűrűségfüggvényét kapjuk. Ez a spektrum folytonos, általában egy vagy több maximum után a nagy frekvenciáknál csökkenő jelleggel. A végtelenül keskeny ( $\Delta f \rightarrow 0$ ) szűrőn végtelen ideig átengedett jel energiáját is jelenti.

Térbeli (pl: útprofil) vizsgálatoknál a  $f$  frekvencia helyett a hosszúság dimenziójú  $n$  lengésszámot használjuk. Dimenziója  $m^{-1}$ , az egységnyi úthosszra eső hullámok számát adja.

Meghatározható a spektrál sűrűségfüggvény az autokorreláció függvény Fourier-transzformációjával is. Ha létezik a vizsgált jel  $R_{xx}(\tau)$  autokorreláció függvénye és abszolút értékének integrálja véges, a spektrum meghatározását az alábbi képlettel végezhetjük:

$$S_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

A spektrum  $f_1$  és  $f_2$  közötti frekvenciasávjába eső teljesítmény

$$P_{12} = \int_{f_1}^{f_2} S_{xx}(f) df$$

A spektrál sűrűségfüggvény meghatározásának harmadik, digitális formáját is tárgyaljuk. Az egyes szerzők által direkt módszernek is nevezett eljárás a  $\sigma_x^2$  szórásképlethez és az  $R_{xx}(kh)$  autokorreláció képlethez hasonlóan  $m$  darab egyenletes  $h$  közökben végzett mintavételezésből indul ki. Ha a mintákat gyakorlati okokból  $i = 0$ -tól  $m-1$ -ig sorszámozzuk, akkor a spektrál sűrűségfüggvény értéke a  $f = \frac{k}{mh}$  frekvenciánál:

$$G_{xx}\left(\frac{k}{mh}\right) = \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} x_i^2 e^{-j2\pi ik/m} \right]^2$$

$k = 1$  a teljes  $T = mh$  mintavételezési időtartamnak megfelelő alapfrekvenciát adja.

$k = 2, 3 \dots$  behelyettesítéssel a spektrum az alapfrekvencia 2-szeres, 3-szoros frekvenciájának megfelelő diszkrét pontjai adódnak.

A Nyquist határfrekvencia figyelembevételével, annak pl. feléig menve, az értékelést  $k = m/h$ -ig folytathatjuk.

A legmodernebb digitális regisztrátum értékelő és vezérlő berendezések jelentős része ezt a módszert használja. A számítási idő csökkentésére a Fourier együtthatókat az ún. gyors-Fourier transzformációval (FFT) számítják.

A spektrál sűrűségfüggvényt frekvencia vizsgálatra és átviteli problémáknál használják.

### 3.6.3 Kereszt spektrálsűrűség

A kereszt spektrálsűrűség definíciójából

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

a keresztkorreláció függvény tulajdonságainak figyelembevételével kapjuk az

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yx}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

tulajdonságot.

A becslési egyenlet ergodikus folyamatokra:

$$\hat{S}_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

### 3.6.4 Koherencia függvény

A gyakorlatban a keresztspektrál sűrűségfüggvényen - mint komplex értékű függvény - kívül gyakran alkalmazzák a valós értékű koherencia függvényt

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)}, \quad G_{xx}(\omega), G_{yy}(\omega) > 0,$$

hogy két folyamatnak a frekvenciatérre vonatkozó statisztikai függőségére kapjunk normált mértéket.

Mivel

$$|G_{xy}(\omega)|^2 \leq G_{xx}(\omega)G_{yy}(\omega)$$

ezért

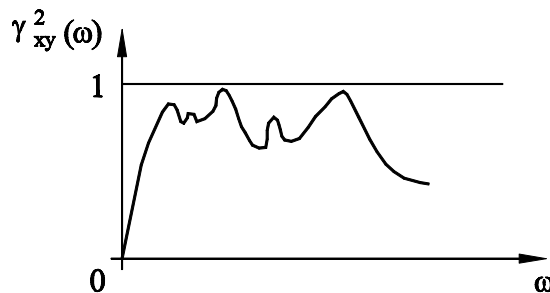
$$0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$$

Ha  $\gamma_{xy}^2(\omega) = 0$ , akkor inkoherens  $x(t)$  és  $y(t)$  jelekről, ill. inkoherens  $\{x(t)\}$ ,  $\{y(t)\}$  folyamatokról beszélünk.

Ha  $\{x(t)\}$  és  $\{y(t)\}$  korrelálatlan és legalább a két folyamat egyike középérték mentes, akkor a teljes intervallumban  $\gamma_{xy}^2(\omega) = 0$ .

A  $\gamma_{xy}^2(\omega) = 1$  az  $x(t)$  és  $y(t)$  közötti teljes koherenciát jelenti.

A koherencia függvény lefutása (3.14. ábra):



3.14. ábra

### 3.7 Egyszabadságfokú rendszerrel történő átvitel

Sztochasztikus folyamatok lineáris időinvariáns egyszabadságfokú rendszerekkel történő átvitelének meghatározása a determinisztikus egyszabadságfokú rendszereknél bemutatottakból indul ki.

#### 3.7.1 Ábrázolás az időtérben (időtartományban)

Ergodikusság folyamatra a keresztkorreláció függvény:

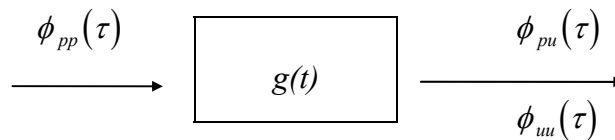
$$R_{pu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') R_{pp}(\tau - t') dt'$$

Stacionárius folyamatra a keresztkorreláció függvény:

$$\phi_{pu}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \phi_{pp}(\tau - t') dt' = g(\tau) * \phi_{pp}(\tau)$$

olyan stacionárius sztochasztikus folyamatra vonatkozó konvolúciós tétel (Wiener-Hopf'sche integrálegyenlet), amely egy lineáris időinvariáns rendszeren keresztül határozza meg a kapcsolatot.

A be- és kimenet viszony a sztochasztikus folyamatra (3.15. ábra):



3.15. ábra

#### 3.7.2 Ábrázolás a frekvenciatérben

Lineáris stacionárius sztochasztikus folyamatokra a

$$\phi_{pu}(\tau) = g(\tau) * \phi_{pp}(\tau)$$

konvolúciós tétel a Wiener-Khintchine transzformációval

$$S_{pu}(\tau) = F\{\phi_{pu}(\tau)\} = F\{g(\tau) * \phi_{pp}(\tau)\}$$

és az időbeli konvolúció Fourier-transzformációjával az egyes Fourier-transzformáltak szorzata  $F\{g(t)\} = F(j\omega)$  mellett közvetlenül az

$$S_{pu}(\omega) = F(j\omega) S_{pp}(\omega)$$

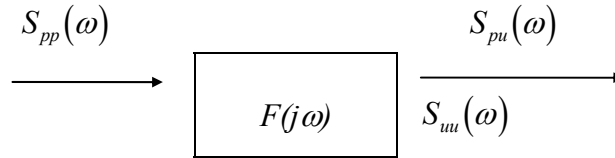
rendszer egyenletre vezet (kereszt-spektrál sűrűségfüggvény).

A hatásos spektrálsűrűségek közötti összefüggés:

$$S_{pu}(\omega) = F(j\omega)S_{pp}(\omega)$$

$$S_{uu}(\omega) = |F(j\omega)|^2 S_{pp}(\omega)$$

A statisztikus dinamika alaptétele, amely megadja a spektrálsűrűségekre vonatkozó be- és kimenet közötti összefüggést a frekvenciatérben (3.16. ábra) stacionárius sztochasztikus jeleknél.



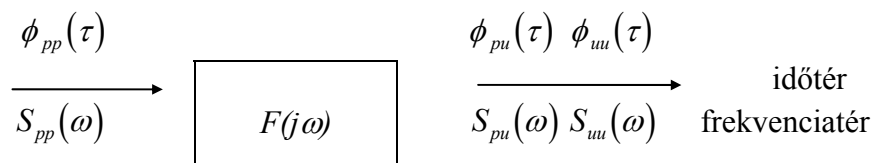
3.16. ábra

Az  $F(j\omega)$  frekvenciajelleggörbét kifejezhetjük a spektrálsűrűségekkel, tehát:

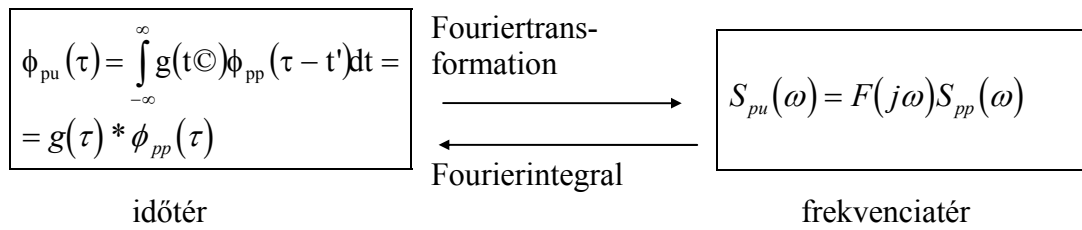
$$\left. \begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{S_{pu}(\omega)}{S_{pp}(\omega)}, |F(j\omega)| = \sqrt{\frac{S_{uu}(\omega)}{S_{pp}(\omega)}} \\ \tan\phi(\omega) &= \frac{\operatorname{Im} F(j\omega)}{\operatorname{Re} F(j\omega)} = \frac{\operatorname{Im} S_{pu}(\omega)}{\operatorname{Re} S_{pu}(\omega)}, \\ \cos\phi(\omega) &= \frac{\operatorname{Re} F(j\omega)}{|F(j\omega)|} = \frac{\operatorname{Re} S_{pu}(\omega)}{\sqrt{S_{pp}(\omega)S_{uu}(\omega)}}. \end{aligned} \right\}$$

### 3.7.3 Rendszerösszefoglalás

A determinisztikus és a sztochasztikus összefüggések között teljes analógia áll fenn a 3.17-3.19. és a 2.23-2.25. ábrák összehasonlításának megfelelően.



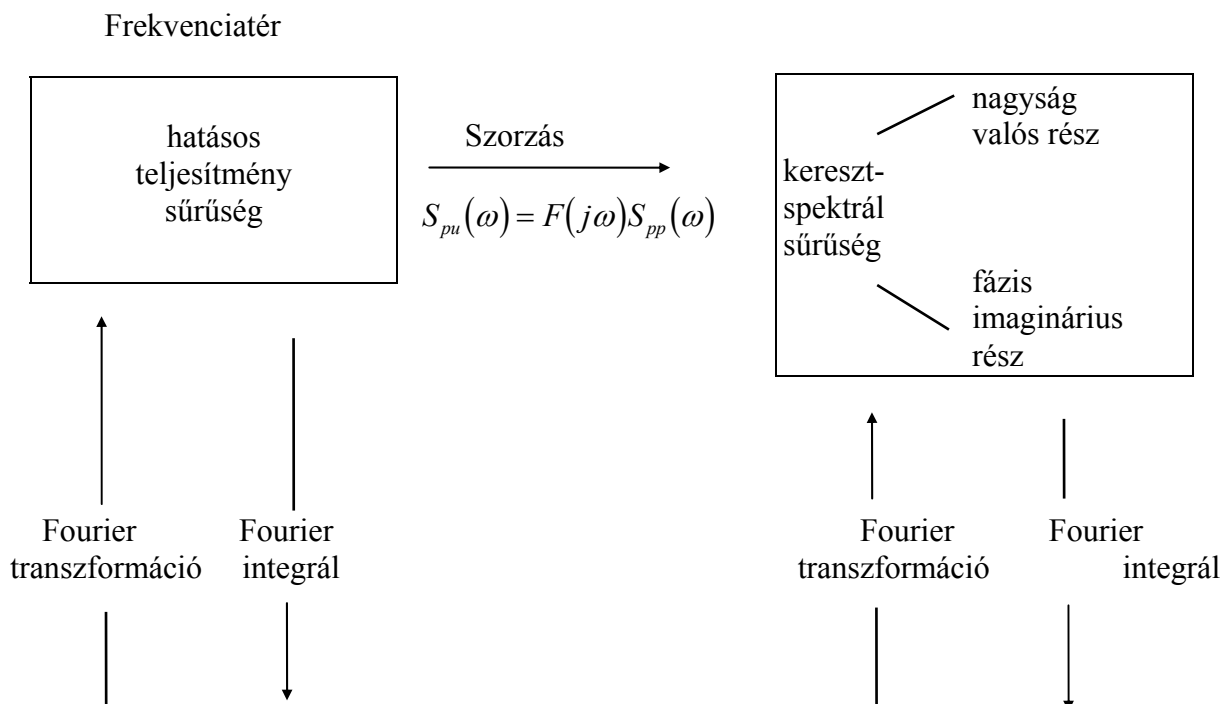
3.17. ábra



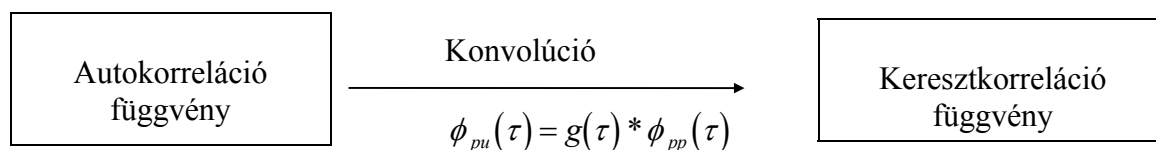
3.18. ábra

A determinisztikus bemenőjeleken alapuló indentifikációs eljárásokat (pl: egy egy-szabadságfokú rendszer súlyfüggvényének, frekvenciajelleggörbéjének, a csillapításnak a meghatározása) formálisan a sztochasztikus stacionárius jelekkel rendelkező rendszerekre is átvihetjük, ha használjuk azok korreláció függvényeit, illetve spektrál sűrűségfüggvényeit.

A 2.25. ábrán a bemenő spektrumokat komplex mennyiségként adtuk meg, míg a 3.19. ábrán a hatásos spektrál sűrűségfüggvény valós mennyiségként szerepel a frekvenciatérre vonatkozó bemenőjelnél. Ez a különbség az egy-szabadságfokú rendszernél csupán látszóla-gos, mert ez tetszőleges valós koordináta-rendszeren nyugszik: determinisztikus jelekre a rendszeregyenletek szorzása  $F^* \{p(t)\}$ -vel a frekvenciatérben valós jobboldalt szolgáltat.



Időtér

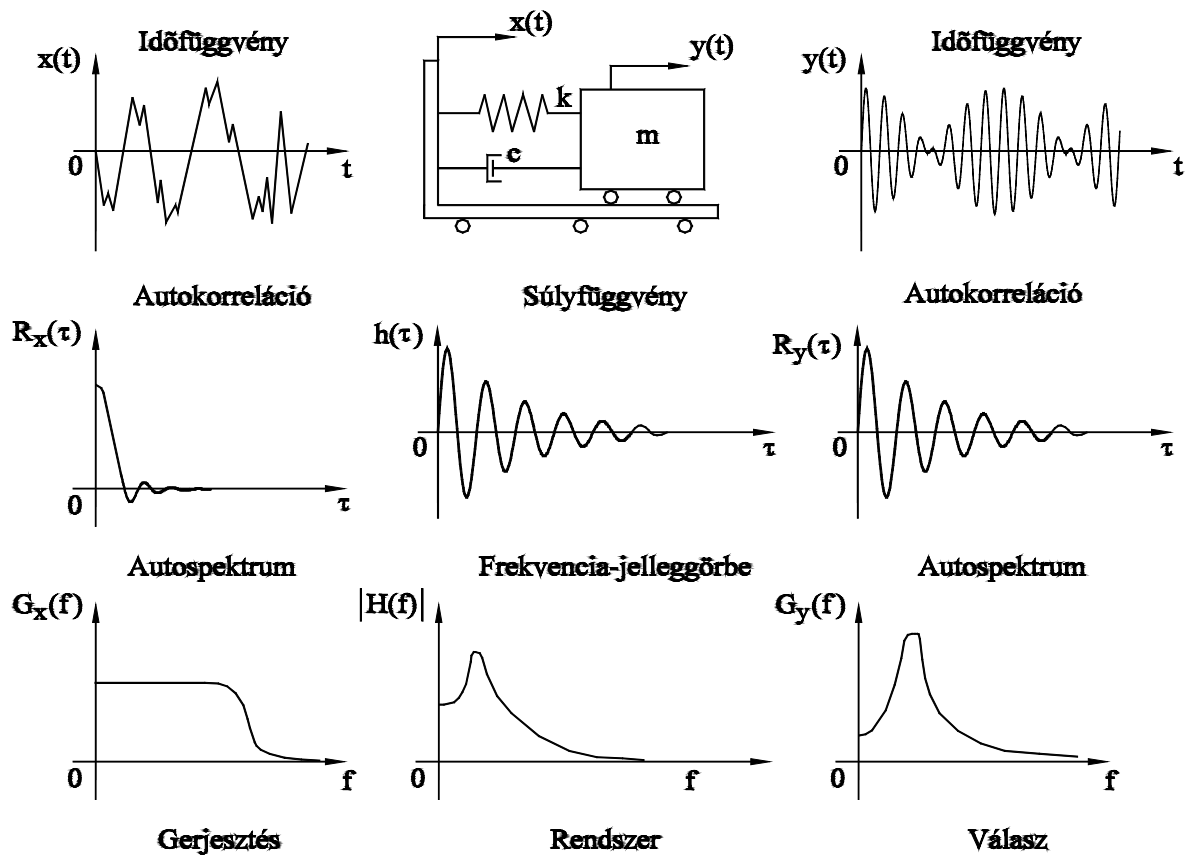


3.19. ábra

Adott rendszer esetén számítással az átviteli függvény (ill. az átviteli karakterisztika) határozható meg legkönnyebben. Az időfüggvényeket a Laplace-transzformáltak alapján célszerű számolni. A mérés szempontjából a frekvencia jelleggörbe a legkényelmesebb. Az átviteli függvény közvetlenül egyáltalán nem mérhető.

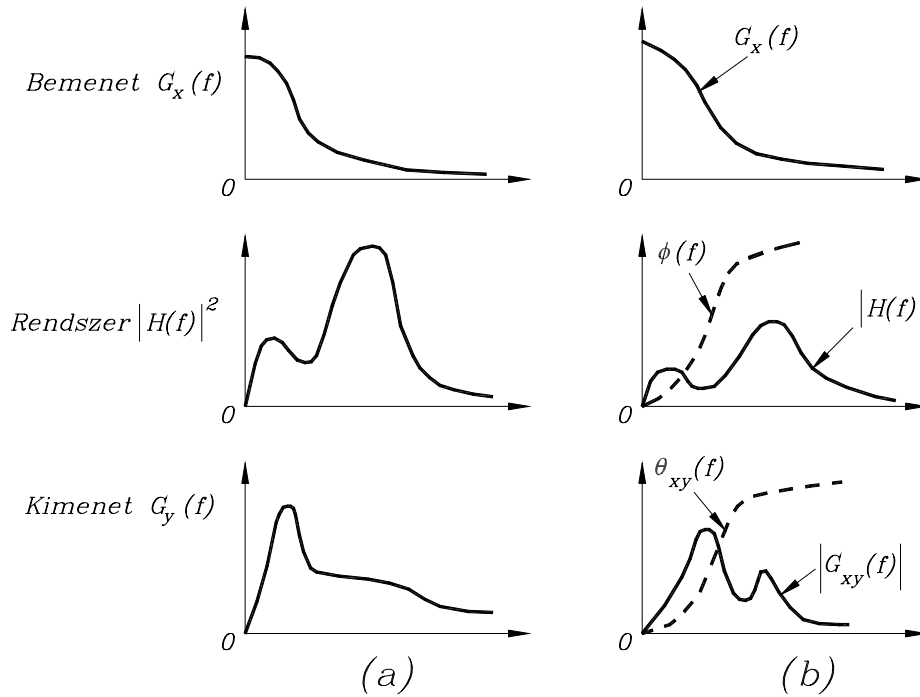
A rendszerjellemző függvények közül felhasználás szempontjából az átviteli függvény a legcélszerűbb. Ebből határozható meg legkönnyebben a többi rendszerjellemző függvény, sőt a tetszőleges gerjesztéshez tartozó felelet is.

Példa 1.:



3.20. ábra

Példa 2.:



3.21. ábra

### 3.8 Többszabadságfokú rendszerek

#### 3.8.1 Ábrázolás az időtérben

Az  $n$  számú be és kimenettel rendelkező rendszer keresztkorrelációs mátrixa stacionárius sztochasztikus gerjesztésre az alábbi formában adódik:

$$\phi_{pu}(\tau) = E\{p(t)u^T(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{p(t)p^T(t+\tau-t')\}G^T(t')dt'$$

Az összefüggés a két  $\{u(t)\}$ ,  $\{p(t)\}$  sztochasztikus stacionárius vektor folyamat keresztkorrelációja, amelyek egy lineáris időinvariáns többszabadságfokú rendszeren keresztül állnak kapcsolatban.

#### 3.8.2 Ábrázolás a frekvenciatérben

A konvolúció szorzat Fourier-transzformációja a spektrálsűrűségek definíciójának megfelelően, mint a korreláció függvények Fourier-transzformáltja átmegy az

$$S_{pu}(\omega) = S_{pp}(\omega)F^T(j\omega)$$

szorzatba, ahol a frekvencia-jellegzőmátrix definíciója megfelel a determinisztikus rendszernél tapasztaltakkal.

### 3.9. Determinisztikus és sztochasztikus jelek keveréke

Azt vizsgáljuk meg, hogy a sztochasztikus jeleket leíró függvények segítségével hogyan lehet egy periodikus és egy sztochasztikus jel keverékében megkülönböztetni a két összetevőt.

Miután nem általában kívánjuk vizsgálni a problémát, inkább a lehetőséget kívánjuk szemléltetni, a részletes matematikai vizsgálat helyett egy példát mutatunk be. A példa négy különféle jel valószínűség-sűrűségfüggvényét, autokorreláció függvényét és spektrál sűrűségfüggvényét mutatja be.

A négy jel:

- Színuszos jel. A példában véletlen fázisú színuszos jelet vizsgálunk: ezáltal ergodikus sztochasztikus jelként kezelhető.
- Szélessávú, sávkorlátozott fehér zaj, normális eloszlású.
- Sávkorlátozott, keskenysávú,  $f$  középtű  $Df$  szélességű fehér zaj, normális eloszlású (a második jel szűrt változata.)
- Szélessávú, sávkorlátozott fehér zaj és színuszos jel keveréke.

A négy jel háromféle leírása a 3.1. táblázatban szemlélhető. Az egyes leírásokhoz a következő magyarázat fűzhető: A valószínűség-sűrűségfüggvényből a színuszjel felismerhető. A széles és keskenysávú zaj között nem tehető különbség. A sávkorlátozott fehér zajban felismerhető a színusz jel, ha a zaj teljesítménye kisebb, mint a jelé. Az időfüggvényből is megtehető azonban ugyanez.

Mindezek miatt a jelek felismerésére a valószínűség-sűrűségfüggvény nem nagyon alkalmas.

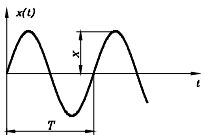
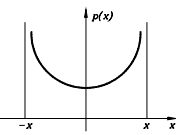
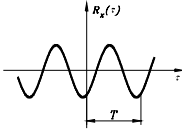
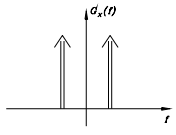
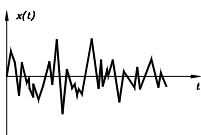
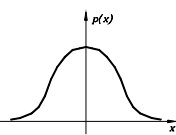
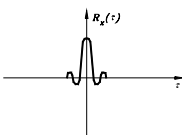
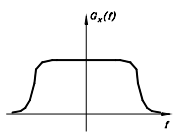
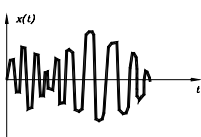
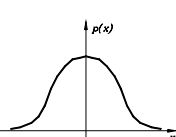
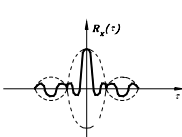
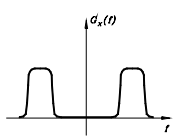
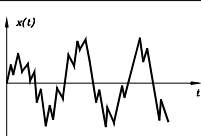
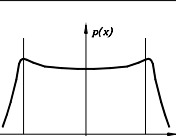
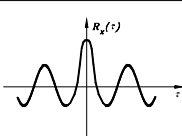
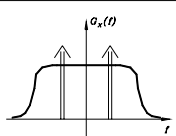
A színuszos jel autokorreláció függvénye koszinusz függvény: a fázisinformáció nyilvánvalóan elvész. A szélessávú zaj korrelációs függvénye egy viszonylag keskeny  $\sin c$  függvény. Ha a zaj és a jel függetlenek, akkor a két jel keverékének korrelogramja két korrelogram összeg. Ha tehát elég hosszú  $t$  „időt” várunk, a periodikus jelet igen nagy zaj esetén is felismerhetjük.

A sávkorlátozott fehér zaj korrelogramja egy majdnem periodikus jel és egy hiperbolikusan csillapodó jel szorzata. A majdnem periodikus jel „gyors” változása  $f$  frekvenciájú, „lassú” burkolója pedig  $\Delta f$  frekvenciájú. Az ábrát szemlélve megállapíthatjuk, hogy ezt a korrelogramot könnyű az előzővel összetéveszteni.

A színuszos jel spektrál sűrűségfüggvénye két Dirac-delta az  $f_1$  és  $-f_1$  helyen. A szélessávú fehér zaj  $2B$  szélességű spektrumának magassága állandó. Területe  $\sigma_x^2$ .

A két jel összegének spektruma a két spektrum összege. A Dirac-delta igen feltűnő, ezért a spektrumon a két jel jól elkülöníthető. A keskenysávú zaj spektruma csak viszonylagosan különbözik a szélessávú zajétól. A spektrumok alapján úgy tűnik, hogy a 3. és 4. jelfajta nehezen keverhető össze. A gyakorlati megvalósításoknál látni, hogy ez azért előfordulhat.

## 3.1. táblázat

| Név                      | $x(t)$                                                                            | $p(x)$                                                                            | $R_x(\tau)$                                                                        | $G_x(f)$                                                                            |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Színusz                  |  |  |  |  |
| Szélessávú zaj           |  |  |  |  |
| Keskenysávú zaj          |  |  |  |  |
| Szélessávú zaj + színusz |  |  |  |  |

#### 4. A DINAMIKAI RENDSZEREK MODELLEZÉSE

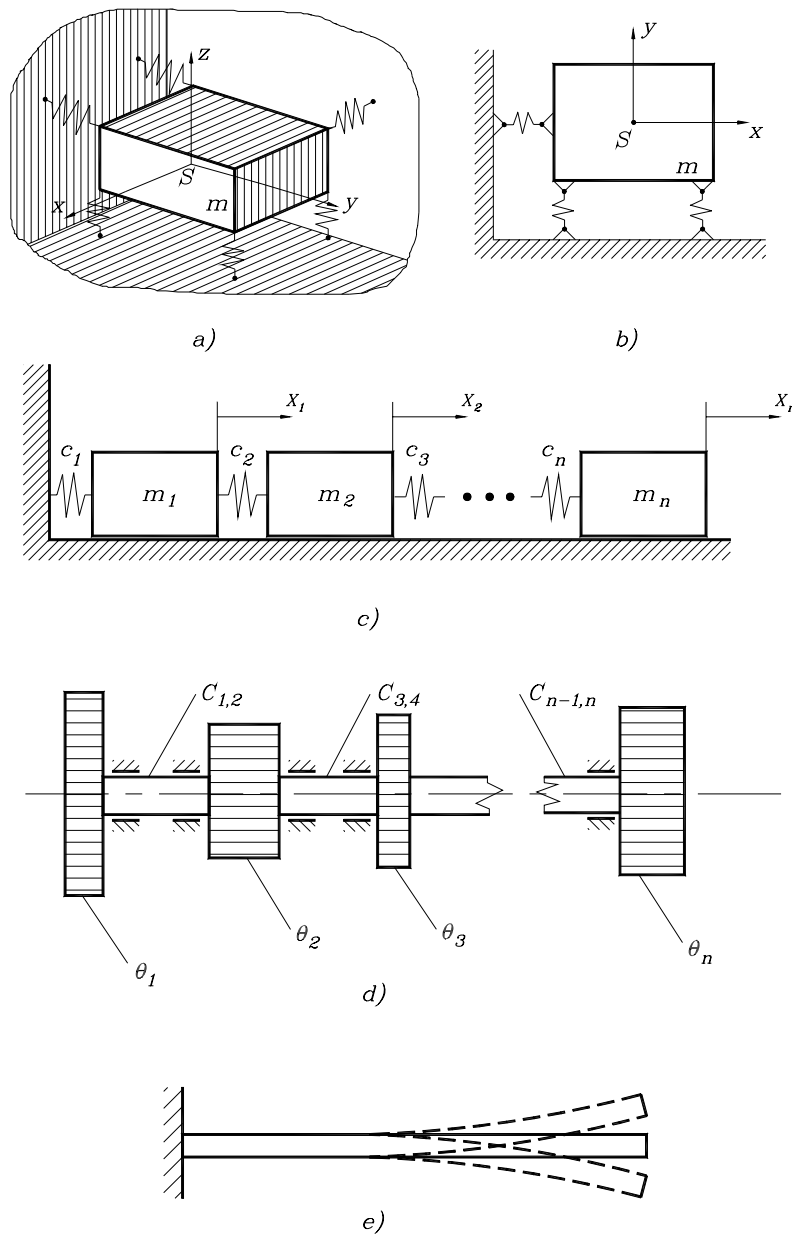
Minden gép és szerkezet tömegeket és rugalmas elemeket tartalmaz. A mozgó tömegeknek mozgási energiájuk van, míg a rugalmas elemekben potenciális energia halmozható fel. Ha a rendszer mozgási energiája helyzeti energiává alakulhat, majd ez ismét mozgási energiává alakul, akkor a rendszer lengő mozgást végez. Az energiaátalakulások ütemét a rendszer önlengésszáma, illetve gerjesztett lengés esetén a gerjesztőhatás frekvenciája szabja meg. A lengőmozgás erősségét a csillapító hatások csökkentik, míg a gerjesztőhatások által végzett munka pótolja a csillapítások által elvont energiát, sőt növelheti a rendszer energiatartalmát, tehát a gerjesztett lengések erőssége növekedhet.

Adott gép vagy szerkezet dinamikai vizsgálata esetén első teendő a helyettesítő modell felrajzolása. Ez rendszerint koncentrált tömegekből és hozzájuk csatlakozó rugókból áll. A rugókkal párhuzamosan csillapítás is kapcsolható. A rendszer modelljére a gerjesztőhatásokat is rárajzoljuk.

Minél egyszerűbb egy modell, annál könnyebb a dinamikai számítás, ezért a modell megalkotásakor idealizáló feltételezéseket, elhanyagolásokat engedünk meg (csak a lényeges tömegeket vesszük figyelembe, a rugók tömegét elhanyagoljuk, a csillapítást lineárisnak tekintjük, stb.). Az egyszerűsítő feltételezések és az elhanyagolások következtében a számítások eredménye eltér a valóságtól. A gép vagy szerkezet helyettesítő modelljének jó megválasztására nem szabad sajnálni az időt. Igyekeznünk kell a valóság minél jobb megközelítésére, ugyanakkor állandóan az egyszerűségekre kell törekednünk. E két ellentétes szempont arányának helyes megválasztásával olyan modell nyerhető, amelynek dinamikai számítása a gyakorlat számára viszonylag gyorsan, kielégítő pontosságú eredményeket szolgáltat. A dinamikai modell megválasztása attól is függ, hogy milyen módon végezzük számításainkat. A hagyományos módszerekkel csak egyszerű rendszerek követhetők, míg számítógépekkel a valóságot jobban megközelítő bonyolultabb modellek is vizsgálhatók.

Valamely alkatrész elhanyagolhatóságának mérlegeléskor célszerű a benne felhalmozható mozgási vagy helyzeti energia kiszámítása. Ha ez az energia egy nagyságrenddel kisebb, mint a többi alkatrészek energiája, akkor vagy a tömeg elhanyagolásával, vagy a rugalmas elem merevnek tekintésével a sajátfrekvenciák meghatározásakor csak néhány százalék hibát követünk el.

A modell felépítését megelőzően célszerű meghatározni a vizsgálandó frekvenciatartomány határait. Ezek ismeretében rendszerint egyszerűbb modell készíthető (a tartományon kívül eső sajátfrekvenciákkal általában nem kell törődni). A 4.1. ábrán néhány lengőrendszer vázlata látható. Az a) és b) ábra egytömegű modellt szemléltet, míg a c) és d) ábrán vázolt rendszer több tömegű. Az e) ábrán látható rúd hajlító lengéseket végezhet. Itt a rendszer rugalmas része nem választható külön a tömegtől. Mindkettő megoszlása folyamatos, tehát azt is mondhatnánk, hogy a rúd végtelen számú tömegből áll.



4.1. ábra. A dinamikai rendszereket szabadságfokuk szerint célszerű osztályozni

#### 4.1. A dinamikai rendszerek osztályozása

A rendszerek csoportosítása lehetséges a tömegek száma szerint. Sokkal helyesebb azonban a dinamikai rendszert egy másik fontos jellemző, a szabadságfok szerint osztályozni. A szabadságfok megmutatja, hogy a tömeg (tömegek) mozgását hány egymástól független koordinátával adhatjuk meg. Például a 4.1/a ábrán vázolt rendszer szabadságfoka 6 (a tömeg  $S$  súlypontja  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányban mozoghat és a test e tengelyek körül el is fordulhat). Ha ugyanez a test csak síkmozgást végezhet (b) ábra), a szabadságfok 3. A c) ábrán bemutatott  $n$  tömegű soros lengőrendszer szabadságfoka  $n$ . A d) ábrán megadott  $n$  tömegű torziós lengőrendszer szigorúan véve szintén  $n$  szabadságfokú. Ha e rendszer szabad, vagyis a forgástengelyre a perdület állandó, akkor lengéstani szempontból  $n - 1$  a szabadságfok. Az e) ábrán vázolt, haj-

lító lengéseket végző rúd tömegeloszlása folyamatos. Az ilyen rendszer szabadságfoka végtelen. Más példa a végtelen szabadságfokú kontínuumlengésekre: lemezek, tárcsák, héjak stb. lengése.

A lengéstani számítás általában annál bonyolultabb, minél nagyobb a rendszer szabadságfoka. Kivétel az olyan kontínuumlengés, amikor a feladat differenciálegyenlete zárt alakban megoldható.

A rendszereket nemcsak a szabadságfok szerint osztályozhatjuk. Megkülönböztetünk lineáris és nemlineáris lengőrendszereket aszerint, hogy a mozgást leíró differenciálegyenlet milyen. Nemlineáris esetben a megoldás bonyolultabb, ezért sokszor a gyakorlatban a nemlineáris rendszer modelljét átalakítjuk lineárisrá.

A valóságos lengőrendszerek mindig csillapítottak. Ha a csillapítás kicsi (például a rendszer rugalmas eleme acélrugó), vagy távol vagyunk a rezonanciától, akkor a csillapításmentes modell is jól megközelíti a valóságos viszonyokat és a számítás egyszerűbb. Ha a rendszerre külső periodikus erő hat, gerjesztett lengésről beszélünk, ennek hiányában a rendszer szabad mozgást végez.

#### 4.2. A modell elemei

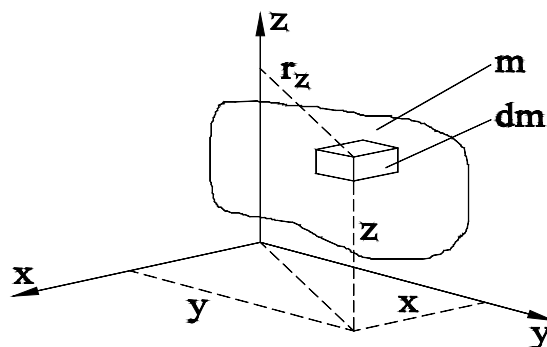
A dinamikai rendszerek modelljei energiatároló (tömeg, rugó) és energiaemésztő (csillapító) elemeket tartalmaznak. Ezeket a modell vázlatán szimbolikusan adjuk meg, majd rendszerint külön listán közöljük a jellemzők mérőszámát és mértékegységét. Tervezéskor az egyes elemek paramétereit, a felvett geometriai méretek és táblázatokból vett anyagjellemzők alapján számítjuk. Kész szerkezetek vizsgálata esetén pontosabb eredményt kaphatunk, ha az elemek jellemzőit méréssel, kísérleti vizsgálattal határozzuk meg. A következőkben az egyes elemek jellemzőinek meghatározásával foglalkozunk.

##### A tömeg

Ha egy test valamennyi pontja egybevágó pályán mozog, a test haladó mozgást végez. E mozgás egyetlen pont (tömegközéppont) mozgásával jellemezhető. A test egész tömegét gondolatban ide koncentrálnak (tömegpont).

##### A tehetetlenségi nyomaték

A forgó mozgást végző testek legfontosabb kinetikai jellemzője a tehetetlenségi nyomaték. Számításainkban legtöbbször valamely tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték szerepel.



4.2. ábra. Az  $m$  tömegű test tehetetlenségi nyomatékát a koordinátatengelyekre számítjuk.

A 4.2. ábrán vázolt  $m$  tömegű test tehetetlenségi nyomatéka a  $z$  koordinátatengelyre definíciószerűen:

$$\Theta_z = \int_{(m)} r_z^2 dm$$

Itt  $r$  a  $dm$  tömegelem távolsága a  $z$  tengelytől. Az integrálást a test egész  $m$  tömegére ki kell terjeszteni.  $\Theta_x$  és  $\Theta_y$  is hasonló módon számítható.

Gépek (főleg villamos gépek) forgórészeinek tehetetlenségi nyomatéka helyett gyakran az ún. lendítő nyomatékot adják meg, melynek jele  $(GD^2)$ . Ebben a kifejezésben  $G$  nem a test súlyát és  $D$  nem az átmérőjét jelenti. A zárójelbe foglalt kifejezésnek csak együttesen van értelme. A forgórész tehetetlenségi nyomatékát a következő összefüggéssel kapjuk:

$$\Theta = \frac{(GD^2)}{4g}$$

#### *A rendszer rugalmas elemei*

Dinamikai rendszerekben a helyzeti energia tárolója többnyire valamely rugalmas elem. Általában feltételezhetjük, hogy a rugók anyaga homogén és a Hooke-törvény szerint végzi alakváltozását.

Ha egy rugalmas elem  $f$  alakváltozása az elemre ható  $F$  erővel arányos, azaz

$$f = cF,$$

akkor a  $c$  arányossági tényezőt rugóállandónak nevezzük. Ennek szokásos mértékegysége m/N. A külföldi szakirodalom általában a  $c$  reciprok értékét nevezi rugóállandónak. A félreértések elkerülése érdekében az

$$s = \frac{1}{c} = \frac{F}{f}$$

mennyiséget rugómerevségnek nevezzük. Mértékegysége: N/m. Rendszerint számítástechnikai okok döntenek el azt, hogy egy adott feladat megoldásakor rugóállandót vagy rugómerevséget használunk.

A torziós lengőrendszerek csavarásra igénybevett, rugalmas elemeit a rájuk ható  $M$  nyomaték  $\phi$  szöggel elcsavarja:

$$\phi = c_0 M$$

Itt  $c_0$  a torziós rugóállandó (használatos mértékegysége: rad/Nm). A torziós rugóállandó reciproka a torziós rugómerevség:

$$s_0 = \frac{1}{c_0} = \frac{M}{\varphi}$$

### *A csillapító hatások*

A dinamikai rendszerek tömegei általában valamilyen közegben (többnyire levegőben) végzik mozgásukat. A közegellenállás fékezi a mozgást. A rendszer rugalmas elemeinek anyaga sem tekinthető mindig ideálisnak. Alakváltozás közben az anyag belső súrlódása (hiszterézis) miatt szintén energiavesztés lép fel. A mozgó szerkezetben levő súrlódások is munkát fogyasztanak. Pontosabban fogalmazva: az említett hatások a mechanikai energiát hőenergiává alakítják át, ami a mozgás szempontjából veszteségnek tekintendő. E jelenségeket közös néven csillapító hatásoknak nevezzük. Nyugodtan állítható, hogy a csillapító hatások helyes követése a dinamika legnehezebb problémája. Ez okozza számításainkban a legtöbb bizonytalanságot.

A mozgást fékező csillapító erő (vagy nyomaték) sok tényezőtől függ. Ezek között fő szerepe van a mozgás sebességének.

Számítástechnikai okokból a sebesség első hatványával arányos csillapítás az ideális. A gyakorlati feladatok túlnyomó többségében lineáris differenciálegyenlet (vagy egyenletrendszer) írja le a mozgást. Egyes szerkezetekbe (pl. lengésmérő műszerek, belsőégésű motorral hajtott gépek) szándékosan beépítünk csillapítókat. Ilyenkor arra törekszünk, hogy a csillapító erő minél jobban megközelítse az

$$F_{cs} = -kv$$

törvényszerűséget. Itt  $v$  a mozgás sebessége,  $k$  pedig a csillapítás tényezője, amelynek mértékegysége: Ns/m. Torziós lengéseket végző rendszerek esetében csillapító nyomatékról beszélünk, amely ideális esetben a mozgás  $\omega$  szögsebességével arányos:

$$M_{cs} = -k_0\omega$$

A  $k_0$  mértékegysége: Nm.

### *A gerjesztő hatások*

A műszaki gyakorlatban minden mozgás külső vagy belső erőhatás következménye. Ezek többnyire az időben változó folyamatok, amelyek a mozgást leíró differenciálegyenletekben „zavarótag”-ként jelentkeznek. Ha a dinamikai rendszer valamelyik tömegére erő (vagy nyomaték) hat, erőgerjesztésről beszélünk, ha viszont valamelyik rugalmas elem egyik végét az időtől függően mozgatjuk, útgerjesztésről van szó. Az ilyen hatás az idő tetszőleges függvénye lehet. Következménye a transziens lengés. Az adott időközökben ismétlődő periodikus gerjesztés hatására, a transziens folyamat lecsillapodása után általában periodikus lesz a mozgás. A műszaki gyakorlat ezt az állandósult mozgást nevezi gerjesztett lengésnek. A gerjesztés csak akkor hatásos, ha munkát képes végezni. A vektorával megadott  $F$  erő munkája a

$$W = F \cdot r = Fr \cos \varphi$$

skaláris szorzattal fejezhető ki. Itt  $r$  az erő támadáspontjának elmozdulásvektora,  $\varphi$  pedig a két vektor egymással bezárt szöge. Ha az  $Fr \cos \varphi$  szorzat bármelyik tényezője zérus, az erő nem végez munkát. Nincs hatásos gerjesztés például akkor, ha az erő a rendszer nyugalomban levő ( $r = 0$ .) csomópontját terheli, vagy az elmozdulás irányára merőleges ( $\varphi = 90^\circ$ ). Lineáris rendszerek esetében érvényes a szuperpozíció elve. Ilyenkor a periodikus gerjesztő hatást Fourier-sorba fejtjük, és az ennek harmonikus összetevőivel számított részeredményeket megfelelően összegezve kapjuk a rendszer gerjesztett lengését. Ha a periódusidőt  $T$ -vel jelöljük, akkor a tetszőlegesen változó, de periodikus  $F(t)$  függvényre az

$$F(t) = F(t + T) = F(t + 2T) = \dots$$

feltételnek teljesülnie kell. Ennek Fourier-sora általános alakban, az alapharmonikus körfrekvenciáját  $\omega$ -vel jelölve:

$$F(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t)$$

Itt  $F_0$  a gerjesztő hatás állandó összetevője:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  és  $k$  a harmonikus rendszáma. (Szokásos a felharmonikus elnevezés is. Az első felharmonikusra  $k = 2$ , a másodikra  $k = 3$ , stb.)  $F_k$ -val jelölve a  $k$ -adik Fourier-komponens amplitúdóját és  $\varphi_k$ -val ennek fázisszögét:

$$F(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

E megadásban:

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \text{ és } \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}$$

Az analitikus formában felírt periodikus  $F(t)$  függvény állandó összetevője az

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

összefüggéssel számítható, míg a  $k$ -adik harmonikus együtthatói a következő integrálok segítségével határozhatók meg:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos k\omega t dt$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin k\omega t dt$$

Egy adott függvény Fourier-együtthatóinak a meghatározását a függvény harmonikus analízisének nevezzük. A méréssel felvett diagramok vagy a szerkesztéssel kapott görbék (pl. a belsőégésű motorok periodikusan változó kerületi erői) általában nem fejezhetők ki analitikus

formában. Ilyenkor a harmonikus elemzést grafikusán, numerikus módszerekkel (táblázatos vagy gépi számítással), illetve erre a célra készített műszerekkel (harmonikus analizátorokkal) készíthetjük el.

#### 4.3. A modell vizsgálatának módszerei

A tényleges vizsgálat csak akkor kezdődhet meg, amikor a vizsgálandó gép vagy szerkezet modellje már világosan előttünk áll, és előkészítő munkánk során meghatároztuk a modell elemeinek dinamikai jellemzőit (tömeg, rugóállandók, csillapítás, gerjesztés).

Az ismert jellemzőkkel bíró modellt **dinamikai rendszernek** nevezzük. További feladatunk a rendszer jellemzőinek meghatározása (sajátfrekvenciák, a gerjesztett lengés amplitúdója stb.). Itt újból nehéz feladat előtt áll a szakember: el kell döntenie, hogy a rendszert milyen módszerrel fogja vizsgálni.

Egy-egy feladat rendszerint többféle módon is megoldható. Mindegyik módszernek vannak előnyei és hátrányai, tehát nagy körültekintés, mondhatnánk: rutin kell hozzá, hogy az adott esetben a legjobbat válasszuk. A módszer kijelölésekor mérlegelnünk kell lehetőségeinket (hagyományos módon számolunk, vagy gépi számítást végeztetünk), egyéni hajlamunkat (sokan szeretik a szerkesztő munkát, mások az analitikus megoldásokat kedvelik), az eredmények megkívánt pontosságát, stb.

#### A rendszer kinematikai és dinamikai jellemzői

A dinamikai rendszer tömegei különféle mozgásokat végeznek. A mozgás lehet egyszerű és összetett. A legegyszerűbb mozgás az egyenesvonalú haladó mozgás és az álló tengely körüli forgás. Valamely kiválasztott pont (rendszerint a súlypont) **pillanatnyi helyzetét**, a választott módszernek megfelelően skaláris koordinátákkal, helyvektorral vagy komplex mennyiségek képzetes részével adhatjuk meg.

Véges szabadságfokú rendszerek esetében a szabadságfoknak megfelelő számú helyzetjellemzőt kell felvennünk. Megadhatjuk a tömeg súlypontjának elmozdulását, valamely merev test szögelfordulását, a rendszerben levő rugó megnyúlását, két tömeg elmozdulását egymáshoz képest, stb. Ezeket a **Lagrange**-egyenletek alkalmazásakor közös néven **generalizált koordinátáknak** nevezzük és  $q$ -val jelöljük.

A koordináták kezdőpontja bárhol felvehető, de célszerű, ha ezeket az egyensúlyi középhelyzettől mérjük. Ez legtöbb lengőrendszerénél megtehető. Mozgás közben a koordináták nagysága az időtől függően változik. A dinamikai feladatok megoldásának közvetlen célja többnyire a függvénykapcsolat meghatározása.

**Például** az egyszabadságfokú lineáris lengőrendszer mozgása – ha nincs csillapítás – az

$$y = A \sin(\alpha t + \varphi)$$

függvénnyel leírható **harmonikus lengőmozgás**. Itt  $A$  a lengés útamplitúdója, amely a kezdeti feltételektől (az indítás módjától) függ. A rövidség kedvéért az „út” szócskát rendszerint elhagyjuk, és csak amplitúdót mondunk. Amikor viszont más periodikusan változó mennyiség amplitúdójáról van szó, ezt meg kell nevezni (erő-, sebesség-, gyorsulásamplitúdó, stb.).

Ha a  $t = 0$  pillanatban a kitérés  $y = y_0$  és a mozgás sebessége  $v_0$ , akkor könnyen igazolható, hogy

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\alpha}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0 \alpha}{v_0}$$

$\varphi$  a nullfázisszög, amelyet a gyakorlat egyszerűen fázisszögnek nevez. A felírásban  $a$  a saját-lengés vetítő szögsebessége, amelyre a körfrekvencia elnevezés is szokásos. Mértékegysége rad/s. Ezt egyszerűen 1/s-nek írjuk. A lengés frekvenciája, vagyis a másodpercenként végzett lengések száma:

$$\nu = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Ezt hertzben (jele: Hz) adjuk meg. Reciproka a **lengésidő**:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\alpha}$$

Sokszor célszerű a percenkénti lengésszám kiszámítása:

$$n = \frac{60}{T} = 60\nu = \frac{60}{2\pi} \alpha \sim 9,55 \alpha$$

Az egyszabadságfokú lineáris rendszer sajátlengése az a szögsebességgel forgó vektorral is jellemezhető (4.3/a. ábra).

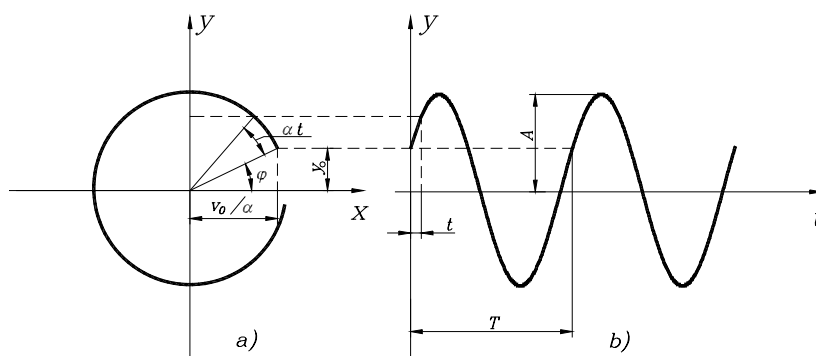
Ennek az  $y$  tengelyre eső vetülete a kitérés (4.3/b. ábra).

Ha az  $x$  tengelyt valós, az  $y$ -t pedig képzetes tengelynek tekintjük, akkor az  $\alpha$  szögsebességgel forgó vektor végpontjának helye a

$$z = x + iy$$

komplex mennyiséggel is megadható ( $i = +\sqrt{-1}$ ). Más alakban:

$$z = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$$



4.3.ábra. A harmonikus lengőmozgás kinematikai jellemzői forgó vektorral is szemléltethetők.

Itt  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  a komplex vektor hossza (abszolút értéke), és az  $x$  tengellyel bezárt  $\psi$  szög a vektor argumentuma. Esetünkben :

$$\psi = \alpha t + \varphi$$

Ezzel

$$z = \operatorname{Re}^{i(\alpha t + \varphi)} = \operatorname{Re}^{i\varphi} e^{i\alpha t},$$

vagy

$$z = R \cos(\alpha t + \varphi) + iR \sin(\alpha t + \varphi).$$

Megállapodás szerint a lengő mozgás a komplex vektor képzetes része:

$$y = \operatorname{Im}(z) = R \sin(\alpha t + \varphi)$$

vagyis  $R$  az  $A$  amplitúdóval egyenlő.

Az egyszabadságfokú nemlineáris rendszerek sajátlengése csillapításmentes esetben periodikus, tehát Fourier-sorral adható meg:

$$y = \sum_{k=1}^n [A_k \sin(\alpha_k t + \varphi_k)].$$

Itt  $\alpha$  az alaplengés körfrekvenciája,  $A_k$  az összetevő harmonikus lengések amplitúdója,  $\varphi_k$  pedig a fázisszögük.

Ha az  $n$  szabadságfokú rendszer valamely tömege csak egyenesvonalú mozgást végezhet, akkor az ezt leíró függvény, általános indítást feltételezve, csillapításmentes esetben:

$$y = \sum_{k=1}^n [A_k \sin(\alpha_k t + \varphi_k)]$$

Itt  $\alpha_k$  a rendszer egyik sajátlengésének vetítő szögsebessége,  $A_k$  és  $\varphi_k$  pedig az indítástól függő állandók. E mozgás általában nem periodikus, csak akkor, ha az  $\alpha_k$  körfrekvenciák aránya racionális szám. Ilyenkor a  $T$  periódusidő az egyes lengésszövevek  $T_k = \frac{2\pi}{\alpha_k}$  lengésidejének legkisebb közös többszöröse.

Speciális esetként a **lebegést** említjük, amikor a két összetevő körfrekvenciájának nagysága csak kevésbé tér el egymástól ( $\alpha_1 \sim \alpha_2$ ). Ha még azt is feltételezzük, hogy a két összetevő amplitúdója egyenlő (az  $A_1 = A_2 = A$  feltétel az „egyszerű lebegést” jelenti) és nullfázisszögük zérus, akkor:

$$y = A(\sin \alpha_1 t + \sin \alpha_2 t).$$

Trigonometriai átalakítással:

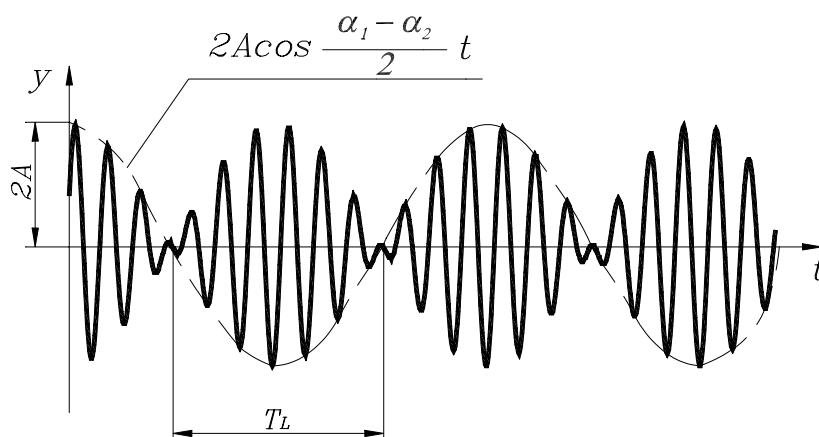
$$y = 2A \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} t \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} t$$

Eszerint az egyszerű lebegés olyan mozgásnak tekinthető, amelynek körfrekvenciája  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  és amplitúdója a

$$2A \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} t$$

törvényszerűség szerint periodikusan változik (4.4. ábra). A lebegési idő, vagyis két minimum távolsága:

$$T_L = \frac{2\pi}{\alpha_1 - \alpha_2}$$



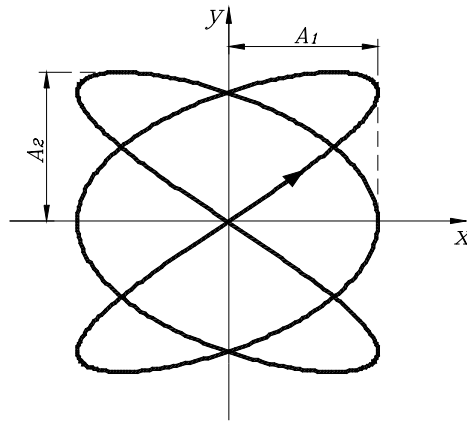
4.4. ábra. Ha a két harmonikus összetevő körfrekvenciája csak kevésbé tér el egymástól, lebegés jön létre.

Két egymástól független, de egymásra merőleges irányú harmonikus lengőmozgás eredője síkgörbe, amelynek paraméteres egyenlete:

$$x = A_1 \sin(\alpha_1 t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \sin(\alpha_2 t + \varphi_2)$$

Ha az  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  körfrekvenciák aránya racionális szám, akkor zárt görbét kapunk (Lissajous-görbe). A 4.5. ábra esetében például  $\alpha_1 : \alpha_2 = 3 : 2$  és  $\varphi_1 = \varphi_2$ .



4.5. ábra. Az egymásra merőleges irányú harmonikus lengések eredője Lissajous-görbe

Amikor  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ :

$$\frac{x}{A_1} = \sin \alpha t \cos \varphi_1 + \cos \alpha t \sin \varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin \alpha t \cos \varphi_2 + \cos \alpha t \sin \varphi_2$$

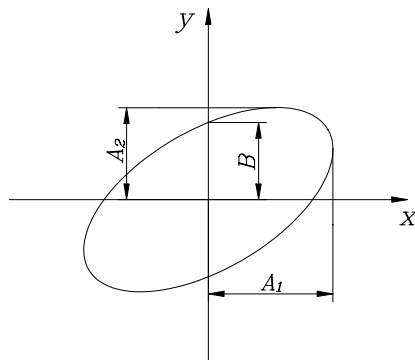
Az itt nem részletezett átalakítások után a  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon$  jelölést bevezetve:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon$$

$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  és  $\frac{3\pi}{2}$  esetén a megoldás a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű ellipszis (a tengelyek hossza  $A_1$  és  $A_2$ ), ha pedig  $\varepsilon = 0$  vagy  $\pi$ , akkor a pont a koordinátarendszer kezdő-pontján átmenő ferde egyenesen mozog. Általános esetben a két egymásra merőleges harmo-

nikus lengőmozgás eredője ferde tengelyű ellipszis (4.6. ábra). Az  $y$  tengelyen adódó  $B$  metszék hosszának lemérésével az  $\varepsilon$  fázisszög nagysága könnyen meghatározható, ugyanis

$$\sin \varepsilon = \frac{B}{A_2}.$$



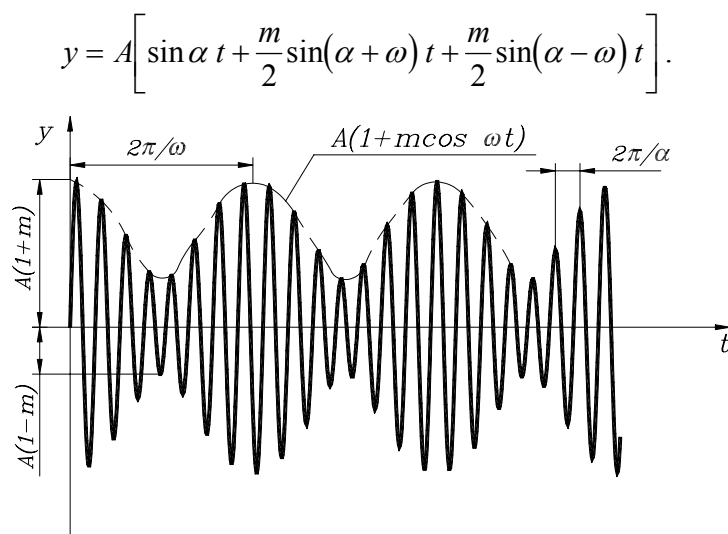
4.6. ábra. Egyező körfrekvenciájú, egymásra merőleges lengések eredő mozgása ellipszis.

Az ábra alapján a két lengés fázisszögének különbsége könnyen meghatározható. E módszert a gyakorlat a gerjesztett lengések fázisszögének meghatározására alkalmazza.

A híradástechnika széles körűen használja a modulált lengéseket. Ilyen összetett lengés a gépészeti gyakorlatban is előfordul, főleg a mérés technikában. Egyik fajtája az amplitúdó moduláció (AM), amikor a lengés amplitúdója az idő függvényében változik. Ha a **vívőfrekvencia** nagysága  $\frac{\alpha}{2\pi}$  és a **moduláló jel frekvenciája**  $\frac{\omega}{2\pi}$ , akkor az amplitúdó modulált lengés:

$$y = A(1 + m \cos \omega t) \sin \alpha t$$

Ezt szemlélteti a 4.7. ábra.  $m$  a **moduláció foka**, amit százalékban szoktak megadni. Az itt nem részletezett trigonometriai átalakításokkal:



4.7. ábra. Amplitúdó-modulált lengés.

**Frekvenciamoduláció (FM)** esetében az állandó  $A$  amplitúdójú lengés vetítő szögsebessége az idő függvényében változik. Ha a moduláló jel körfrekvenciája  $\omega$ , akkor a vetítő szögsebesség pillanatnyi értéke:

$$\alpha^* = \alpha + q \cos \omega t.$$

Itt  $\frac{q}{2\pi}$  a **frekvencia löket**, amelynek az  $\frac{\alpha}{2\pi}$  frekvenciához viszonyított értéke a **moduláció foka**. Ezt százalékban szokták megadni. Az FM lengést leíró függvény:

$$y = A \sin \left[ \alpha t + \frac{q}{\omega} \sin \omega t \right].$$

A szögletes zárójelben álló argumentum  $\alpha^*$  integrálásával adódott.  $\frac{q}{\omega}$  a modulációs index.

A frekvencia-modulált lengést a 4.8. ábra szemlélteti.

A mozgást leíró függvények független változója az idő. Differenciálással a mozgás sebességét kapjuk:

$$v = \frac{dy}{dt} = \dot{y},$$

a második derivált pedig a **gyorsulás**:

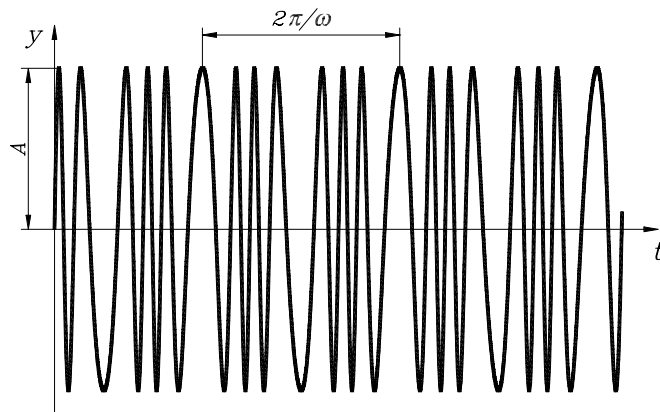
$$v = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y},$$

A harmonikus lengőmozgás esetében:

$$v = \dot{y} = A\alpha \cos(\alpha t + \varphi) \text{ és}$$

$$v = \ddot{y} = -A\alpha^2 \sin(\alpha t + \varphi)$$

Itt az  $A\alpha$  szorzat a **sebesség amplitúdó** (a mozgás legnagyobb sebessége) és az  $A\alpha^2$  a gyorsulás amplitúdó (a maximális gyorsulás nagysága). Ha a harmonikus lengőmozgás négy kinematikai jellemzője ( $\alpha$ ,  $A$ ,  $A\alpha$  és  $A\alpha^2$ ) közül kettőt ismerünk, a többi meghatározható.



4.8. ábra. Frekvencia-modulált lengés.

#### 4.4. Modellalkotás

A modell a dinamikai rendszer leírásának, megértésének az eszköze, az ismeretek kifejezője. A modell segítségével:

- megragadjuk a valóság egy részét, kiemeljük annak bizonyos aspektusait,
- a valóságos jelenség lényegét változatlanul meghagyva, a jelenséget leegyszerűsítjük, amivel lehetővé tesszük a jelenség kvantitatív tárgyalását,
- rögzítjük és kifejezzük a valóságos jelenségekre vonatkozó ismereteinket.

Ugyanannak a fizikai objektumnak meglehetősen sok, eltérő képet mutató modellje lehet. Attól függően, hogy milyen célból alkották meg őket, a valóság melyik oldalát ragadják meg velük, más lesz az egyes modellek bonyolultsági foka, és más a megvalósítási módjuk.

(Pl. a valóságos repülő és a különböző aspektusait kifejező modelljei a következők lehetnek: játékreplő, szélcsatornás modell, repülésszimulátor, az erőviszonyokat leíró differenciálegyenlet-rendszer, ill. számítógépes programja, dokumentációs rajzok, stb.)

A modellalkotás és annak végterméke – a modell, erősen célorientált – nagymértékben magán viseli a vizsgálati célkitűzés jegyeit.

A tudományos modellalkotás (elsősorban az egzakt és a mérnöki tudományokra kell itt gondolni) nagyobb mértékben objektív, támaszkodik a fizikai, biológiai, gazdasági törvények ismeretére, általában matematikailag jól kezelhető formában adja meg a modellt, eszköze a különböző elméletek felállításának és a megtervezett kísérletek és megfigyelések révén azok igazolásának, illetve megcáfolásának.

Röviden összefoglalva: a modell a vizsgált jelenségekre vonatkozó ismereteink formális kifejezése, a modellezés a modellalkotás folyamata.

A modell legfontosabb jellemzője a jósága. Egy modell, tekintettel a célok és modellek sokféleségére, nyilvánvalóan akkor jó, ha eleget tesz a modellező igényeinek, Így például a differenciálegyenletet megoldó számítógépprogram és a repülő szélcsatornában használt makettje ugyanolyan jó modell lehet, hiszen a modell jóságát a kitűzött cél megvalósításának szintje határozza meg. Tudományos modelleknél a cél a valóság minél élethűbb ábrázolása, a modellt összevetik kísérletek útján a forrásául szolgáló valóságos jelenséggel és a megfigyelésekből következtetnek az épített modellek használhatóságára. Maga a modellalkotás egyik legfontosabb módszertani eleme a: kutatás-tervezés-elemzés fogalmakkal kapcsolatos tevékenységeknek.

Ilyenkor modellezés révén:

- megbízhatóbb ismeretanyagot szerzünk valamilyen fizikai jelenségről,
- verifikáljuk az elméleti eredményeket,
- szintetizálunk fizikai célrendszereket (pl. szabályozó),
- megvalósítjuk különböző jelenségek előrejelzését,
- optimaljuk a különböző jelenségek lefolyását.

### A modellek típusai

A következőkben áttekintést adunk a modellek különböző típusairól és jellemzőiről. Szó volt arról, hogy egy jelenség modellje eltérő formákban valósulhat meg, azaz eltérő a modell megadásánál használt formalizmus, elsősorban attól függően, hogy milyenek a modellező által kitűzött célok és mik az általa lényegesnek vélt, illetve megválasztott rendszerjellemzők.

Általában három fő modelcsoportot különböztetünk meg (a tipikus modellformákat egy lengéscsillapító erősen egyszerűsített modelljével illusztráljuk):

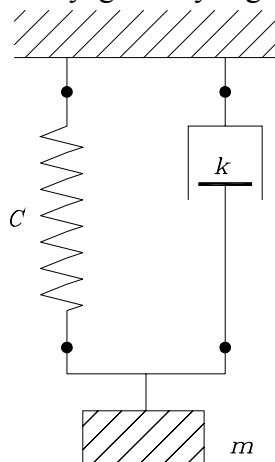
- *funkcionális*, koncepcionális modell: a vizsgált rendszer részeit a rendszerben betöltött idealizált funkciójuk alapján definiáljuk (pl. funkcionális blokkvázlat, folyamatábra), (4.9. ábra),
- *fizikai modell*: a vizsgált jelenséget rögzített tulajdonságú fizikai objektumokkal írjuk le analógiák, illetve hasonlósági törvények alapján (analóg számítógép modellek, gumi-membrán modellek, kicsinyített áramlási modellek, áramkörü modellek), (4.10. ábra),
- *matematikai modell*: a modellezendő rendszer fizikai változói közötti kapcsolatokat egy bizonyos matematikai struktúrába képezzük le (algebrai-, differenciál-, integrálegyenletek, logikai függvények, stb.), a lengéscsillapító esetében:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

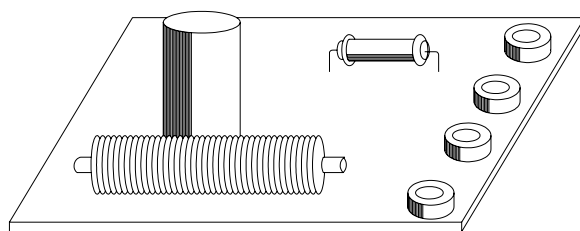
$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Az, hogy az adott esetben milyen modellel elégszünk meg, sok szempont, lehetőség, korlátozás eredője. Ezek közül alapvető fontosságú az, hogy:

- mik a konkrét modellezési cél szempontjából lényeges, és mik az elhanyagolható aspektusok,
- milyenek az alkalmazható modellezési eljárások,
- milyen a rendelkezésre álló ismeretanyag mennyisége és minősége.



4.9. ábra. A lengéscsillapító funkcionális modellje  
 $C$  rugóállandó,  $k$  csillapítási tényező,  $m$  tömeg



4.10. ábra. A lengéscsillapító fizikai modellje.

A vizsgált jelenségre vonatkozó és a matematikai modell által képviselt ismeretanyagot a következő fő kategóriákba lehet sorolni:

- törvények,
- struktúra,
- paraméterek,
- állapotok.

### *Törvények*

A törvények természetesen az alapvető fizikai törvények, melyek a matematikai modellnél meghatározzák az egyenletek általános alakját. A vizsgált jelenség körülhatárolásánál, a különféle kölcsönhatások elhanyagolásánál arra törekszünk, hogy a jelenséget lehetőleg minél szűkebb fizikai területen tárgyaljuk. A tárgyalás alapja a megválasztott területhez tartozó, az anyagra és energiára vonatkozó megmaradási és folytonossági törvények és a belőlük levezetett alaptörvények (Kirchhoff-, Newton-, Fourier-, Maxwell-, Navier-, Stokes-féle törvények, stb.) alkalmazása. Ennek során, az egyensúlyi egyenletek felírása és a peremfeltételek rögzítése útján jutunk el a jelenség matematikai modelljéhez.

### *Struktúra*

A struktúra a jelenség belső tagozódására és részeinek kapcsolatára utal. A jelenség analízisének azt nemcsak a környezetétől különítjük el, hanem ha lehetséges, hasonló módon megpróbáljuk különválasztani az egyes elemeit és rögzíteni azok kölcsönhatását. Ez különösen hasznos formális és számítógépes módszerek használatánál.

A részelemek egymással való kapcsolata rögzíti a jelenségen belül az anyag és energia terjedési útjait, az elemek típusa pedig az anyag és energia, a jelenségen belül lezajló átalakulását.

A strukturális ismeret meghatározza a matematikai modellekben szereplő egyenletek számát (kölcsönhatások) és típusát (elemek).

### *Paraméterek*

A matematikai modell paraméterei nem mások, mint az egyes egyenletekben szereplő együtt-hatók konkrét értékei. Az együtt-hatók kapcsolatban állnak az egyes elemekre jellemző fizikai mennyiségekkel, a határ és a kezdeti feltételekkel. A paraméterértékek meghatározása a modellalkotás legfontosabb gyakorlati, a jelenség megfigyeléséhez kötött tevékenysége, mivel a

konkrét értékek általában ismeretlenek, viszont azokkal teljes a matematikai modell megadása (struktúra+paraméterek).

### *Állapot*

Az állapot olyan változó, amely a jelenséget érő külső hatásokkal együttesen írja le teljesen a jelenség lefolyását. Állapotváltozóként általában a jelenség elemeinek viselkedésére jellemző fizikai mennyiségek pillanatértékei értelmezhetők.

A felsorolt jellemzők, a struktúra, a paraméter és az állapot a lengéscsillapító esetében például a következőképpen értelmezhetők:

Struktúra: a jelenség három elemre osztható, azok egymástól függetlenül befolyásolják a jelenség lefolyását, a leíró egyenlet háromtagú, lineáris, additív.

Paraméterek: a modell egyes elemeire, a csillapításra, rugalmasságra, tehetetlenségre jellemző mennyiségek konkrét értékei.

Állapotok: az egyes elemekre jellemző mennyiségek (elmozdulás, sebesség) pillanatértékei.

### *A modellezés alapfogalmai*

A mindenkori modellalkotás háttérében a törvények, struktúrák, paraméterek körülhatárolásánál alapvető szerepet játszik néhány egyetemes jellegű modellalkotási elv.

Ezek az elvek:

- szeparáció,
- szelekció és
- gazdaságosság.

#### *Szeparáció*

A fizikai világ egyes objektumai, jelenségei kisebb-nagyobb mértékben kölcsönhatásban állnak egymással, befolyásolják egymás viselkedését. Egy modellezési feladat megfogalmazása azt kívánja meg tőlünk, hogy képesek legyünk a külső világ egy részét (ezt nevezzük a modellezendő rendszernek vagy jelenségnek) a többitől elkülöníteni. Az elkülönítéssel együttjáró fogalmak a rendszerhatár, amin keresztül a rendszer a környező világhoz kapcsolódik, és a rendszer elemei, részrendszerei, amelyek a rendszeren belül kölcsönhatásban állnak egymással.

#### *Szelekció*

A vizsgált jelenségen belül, valamint a jelenség és annak környezete között számos kölcsönhatástípus értelmezhető. Az adott vizsgálat célja azonban a jelenségnek bizonyos rögzített kölcsönhatás szempontjából történő elemzése, ami együtt jár azzal, hogy a modellezés során a megvalósítandó cél szempontjából szelektálni kell a kölcsönhatások között.

A szeparáció és a szelekció elvéből kifolyólag a modell mindig egyszerűsített, tehát bizonyos értelemben hibás képe a valóságnak. A szeparáció és a szelekció ennek ellenére elkerülhetetlen munkafeltétel, ami nélkül bármilyen modellalkotás elképzelhetetlen lenne.

## Gazdaságosság

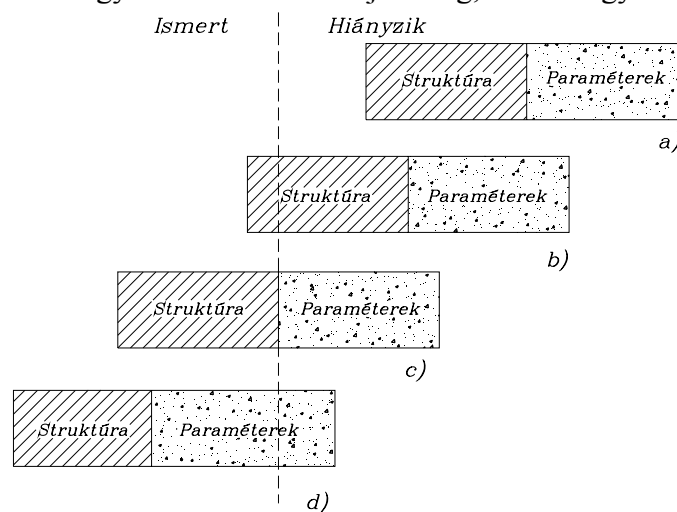
A gazdaságosság elve azt fejezi ki, hogy a modellnek, a vizsgálat célkitűzésének megfelelő lehetőségek közül, a lehető legegyszerűbbnek kell lennie. A modell egyszerűsége a struktúra egyszerűségében és ezzel együtt a paraméterek és állapotváltozók számának minimalitásában jelentkezik.

Térjünk most át a modellezéssel kapcsolatos információk fajtáira és mennyiségére.

A modell származtatásához szükséges információk két forrása lehet:

- *a priori ismeret*: a modellezendő jelenségre vonatkozó, a vizsgálat megkezdésekor rendelkezésre álló ismeretek összessége,
- *a posteriori ismeret*: a modellezési eljárás befejezésével rendelkezésünkre álló ismeret, ami a jelenség megfigyelése során nyert információkkal több az a priori ismeretnél.

A hiányzó információk négy esetét különböztetjük meg, mint ahogy az a 4.11. ábrán látható.



4.11. ábra: A hiányzó a priori ismeretek.

Az ábrán vázolt négy eset között éles a különbség. Míg az utolsó két esetben a modellosztály egyetlenegy modelltypusból áll (a struktúra ismert), aminek legfeljebb a paraméterértékei nem rögzítettek teljesen, az első két esetben maga a struktúra is változó, és így rögzítendő tényező. A c) és d) ábrák eseteiben a paraméterek értékeit kell meghatározni, azaz elvégezni a paraméterbecslés, paraméter identifikáció feladatát. Ez mint problémakör viszonylag kidolgozott és egységesített. A struktúra kiválasztására hasonló szintű módszerek még nincsenek, itt jelentős szerepe van a mérnöki intuíciónak és a próbálgatásnak.

## A modellezés módszerei

Mielőtt felvázolnánk a modellalkotás lépéseit, röviden foglalkozunk a modellalkotási módszerek két extrém esetével, a kizárólag a priori ismereteket felhasználó ún. deduktív módszerrel és a kizárólag kísérleti adatokra építő ún. induktív módszerrel.

### Deduktív modellalkotás

A deduktív modellezésnél általános érvényű törvényszerűségekből kiindulva egy konkrét, ismert jelenség leírására törekszünk. Az e célból végzett elméleti analízis során meghatároz-

zuk a vizsgált rendszer határait, felbontjuk azt különálló elemekre és rögzítjük a folytonossági törvényeket, határfeltételeket és a részrendszerek közötti kölcsönhatásokat. A nyert ún. a priori ismeretanyag formális alakja valamilyen struktúra és a hozzátartozó paraméterek. Abban az esetben, ha mind a fizikai törvények, mind a strukturális és paraméterekkel kifejezett ismeretek rendelkezésre állnak, ill. teljes egészében specifikáltak, a kapott matematikai modell egyértelműen leírja a vizsgált jelenséget (a szelekció és szeparáció által behozott bizonytalanságok korlátain belül). Mivel a jelenség belső felépítése ismert vagy hozzáférhető, a rendszer „átlátszó” a modellező számára, így ezt az esetet a „fehér doboz” névvel illetik.

### *Induktív modellalkotás*

A kísérletek során végzett megfigyelések információt tartalmaznak a jelenség és annak környezete között érvényesülő kölcsönhatásokról, azaz a rendszer bemenő- és kimenőjeleiről. A kísérleti analízis során a jelenség olyan leírására – modelljére – törekszünk, mely utánózni képes annak lefolyását, reprodukálni a rendszer kimenőjeleit. Tiszta induktív esetben nem rendelkezünk semmilyen, a rendszer belsejére vonatkozó, strukturális ismerettel, szemünkben a rendszer „átláthatatlan” ún. „fekete doboz”. A jelenség lefolyását több, különböző struktúrájú modell képes utánózni, így az induktív modellezési módszer nem egyértelmű, legalábbis elvben végtelen sok lehetséges modellt eredményezhet.

A kísérleti adatok megszerzésének módja lehet: passzív és aktív.

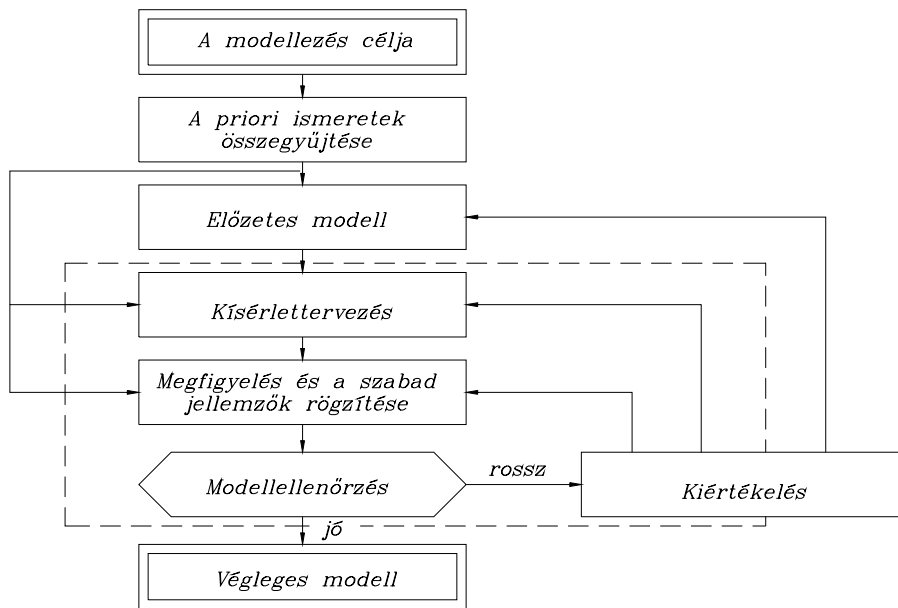
*Passzív kísérletnél* a modellezendő jelenséget ún. normális működési körülmények között figyeljük meg. A modellező ebben az esetben nem képes, vagy nem kíván rákényszeríteni a rendszerre általa specifikált bemenőjeleket. Olyan megfigyeléseket kell elfogadnia, melyek a rendszerből és a környezetéből származnak, tőle pedig függetlenek.

*Aktív kísérletnél* a modellezendő jelenséget ún. tesztlelek segítségével befolyásoljuk és ilyen körülmények között figyeljük meg. A modellező tehát közvetlenül bekapcsolódik a rendszer és környezete közötti kölcsönhatásba, részben vagy teljesen befolyásolja a rendszer bemenőjeleit, a kísérlet során meghatározott tulajdonságú ún. tesztleleket alkalmaz bemenőjelekként és megfigyeli a rendszer adta kimeneti válaszjeleket.

A tiszta deduktív, illetve a tiszta induktív módszer idealizálás, határesetei a gyakorlatban megvalósított modellezési folyamatnak. Az alkalmazott modellek valahol a kettő között foglalnak helyet, azoknak különböző arányú keverékei.

### *A modellalkotás lépései*

A modellezés, mint a vizsgált jelenségre vonatkozó ismeretek megszerzésének és formális kifejezésének folyamata összetett, láncolt folyamat. A modellek egymásra épülnek, egymásból merítik a létrehozásukhoz szükséges információk egy részét. Egy konkrét modellbe zárt ismeretanyag a priori ismeret forrásaként szolgálhat egy másik modellalkotási probléma számára. Ennek megfelelően a modellezés folyamatának ábrázolása csak erős egyszerűsítésekkel lehetséges. Célja elsősorban néhány tipikus mozzanat bemutatása és semmi esetre sem egy általános modellezési metodika felvázolása. A modellalkotás ilyen egyszerűsített sémája a 4.12. ábrán látható.



4.12. ábra A modellezés lépései

A folyamat a modellezés céljának rögzítésével kezdődik, ami meghatározza a modell típusát és szempontokat nyújt a modell szükséges pontosságának rögzítéséhez.

A következő lépés a modell felépítéséhez használható a priori ismeretek összegyűjtése, ami magában foglalja a jelenség vizsgálatánál alkalmazható törvényeket és kiegészítő ismereteket, továbbá a jelenségre vonatkozó strukturális és parametrikus információkat. Az a priori ismeretek birtokában végezhető el a modellalkotás deduktív szakasza, aminek eredménye az előzetes modell létrehozása. Az előzetes modell, az a priori ismeretek mennyiségétől függően több szabadságfokkal rendelkezhet. A modellnek ezen ismeretlen jellemzői specifikálják a feladatot a modellezés induktív szakasza számára, ami a jelenség empirikus vizsgálatára épül.

Az előzetes modell és az a priori ismeretek felhasználásával történik meg a modellen végzett megfigyelések tervének kialakítása, a kísérlettervezés. Passzív kísérletnél a kísérlettervezés a megfigyelendő jellemzők kiválasztását és a megfigyelés időpontjának, időtartamának rögzítését jelenti. Aktív kísérletnél ez bővül a gerjesztési pontok kiválasztásával és a tesztjelek jellemzőinek rögzítésével.

A kísérlettervezés elvégzése után következő lépés a jelenség megfigyelése és a nyert adatok, valamint az a priori ismeretek alapján az előzetes modell szabad jellemzőinek rögzítése.

Az így létrehozott modellt ellenőrizni kell, azaz meg kell vizsgálni a modell és a jelenség közötti hasonlóságot valamilyen működési jellemző és hasonlósági kritérium alapján. Amennyiben az ellenőrzés azt eredményezi, hogy a modell megfelel a modellezés céljának, akkor a modellezési folyamat lezárult és megkaptuk a végleges modellt. A végleges modell, mint már említettük, általában nem egyértelmű. Durván azt mondhatjuk, hogy minél kevesebb az a priori ismeret, annál több a modellezés célját kielégítő végleges modell. Az ellenőrzés másik lehetséges kimenetele, hogy a modell nem kielégítő. A körülmények kiértékelése többféle beavatkozást eredményezhet. A legegyszerűbb esetben csak a kísérletet kell tovább folytatni és az újabb megfigyelések által nyújtott többletinformációval kell javítani a modell pontosságát. Ha ez nem vezet eredményre, akkor eggyel korábbi szinten kell beavatkozni, azaz módosítani kell a kísérlet körülményeit, tehát a megfigyelési pontok elhelyezését, az esetleges tesztjeleket. Végso esetben az is előfordulhat, hogy az előzetes modell specifikálásánál tett hipoté-

zisek bizonyulnak helytelennek, ekkor az előzetes modellen kell lényegesebb strukturális vagy parametrikus módosítást végrehajtani.

A modellalkotás tehát több lépésből álló, iteratív jellegű folyamat, aminek eredményeként megkapjuk a vizsgált jelenség valamilyen formalizmussal kifejezett leírását, a jelenség modelljét.

## 5. A MOZGÁSEGYENLET FELÍRÁSÁNAK MÓDSZEREI

### 5.1 A mozgásegyenletek felírásának szintetikus módszere

A véges szabadságfokú rendszerek mozgását differenciálegyenlet vagy differenciálegyenlet-rendszer írja le. Ezeket mozgásegyenleteknek nevezzük. Felírásuk legelterjedtebb módja szerint a rendszer egyes tömegeire ható valódi erőkön (rugóerő, csillapító- és gerjesztő erő) kívül figyelembe vesszük a tehetetlenségi erőket is, majd az így kapott erőrendszert statikai egyensúlyi egyenletekkel vizsgáljuk. A D’Alambert-elv szerint az  $m$  tömegpontra ható képzeletbeli inerciaerő annak a gyorsulásával ellentétes értelmű, és nagysága  $-ma$ . Torziós rezgések esetében a forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomaték és a forgás szöggyorsulásának szorzataként nyomatékot kapunk.

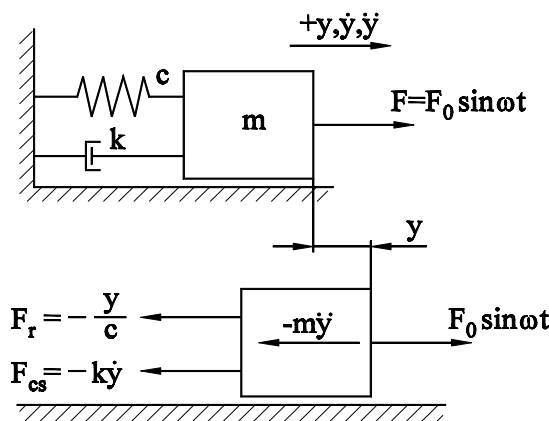
A módszert azért nevezzük szintetikusnak, mert tömegenként építjük fel, szintetizáljuk a mozgásegyenleteket. Egyszerű esetekben e módszer gyors és szemléletes, de bonyolultabb esetekben könnyen követünk el előjel hibát és egyes tagokat is kifelejthetünk a mozgásegyenletből. Az analitikus módszer megfelelő alkalmazásakor ez nem fordulhat elő.

Egyszerű példaként itt részletesen fel fogjuk írni az egyszabadságfokú csillapított rendszer (5.1. ábra) gerjesztett lengésének mozgásegyenletét. Az  $y$  irányban kitérített tömegre az  $F_r = -\frac{y}{c}$  visszatérítő rugóerő és a pozitív sebességgel ellentétes értelmű  $F_{cs} = -k\dot{y}$  csillapító erő hat. A harmadik valódi erő az  $F$  gerjesztés. Ezekhez hozzá kell adnunk a  $-m\ddot{y}$  képzeletbeli tehetetlenségi erőt. A jobb felé mutató erőket pozitívnak véve a vízszintes erők egyensúlya:

$$-m\ddot{y} - k\dot{y} - \frac{y}{c} + F_0 \sin \omega t = 0.$$

Rendezés után

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = F_0 \sin \omega t$$



5.1. ábra: Az egyszabadságfokú rendszer gerjesztett lengése

## 5.2. A mozgásegyenletek felírásának analitikus módszere (Lagrange-egyenletek)

Az 5.1 pontban a vizsgált rendszert részeire bontottuk, majd ezekre a részekre külön-külön alkalmaztuk a mechanika alapegyenleteit. Az így felírt összefüggéseket összefogva a rendszer mozgásegyenleteit „szintetikusán” kaptuk meg. A következőkben tárgyalandó „analitikus” módszer a rendszert egészében vizsgálja, és az energiák megfelelő differenciálásával jut a mozgásegyenletekhez.

Ezt az általánosan használható „klasszikus” módszert az elmúlt időkben alig alkalmazták a műszaki gyakorlatban, ugyanis a múltban általában nem a mozgásegyenletek felírása, hanem azok matematikai megoldása (integrálása) jelentette a problémát. Más megfogalmazásban: a hagyományos eszközökkel nehézség nélkül megoldható mozgásegyenletek általában elemi úton is könnyen felírhatók.

Jelenlegi gyakorlatunkban a digitális számítógépek átsegítenek bennünket a matematikai nehézségeken, tehát minden olyan rendszer mozgása, amelyre a mozgásegyenleteket sikerült felírni, elvileg ismertnek tekinthető. Így a Lagrange-egyenletek alkalmazása nagyon is időse-rű.

Itt nem kívánunk a módszer szigorú bizonyításával foglalkozni, hanem csak a gyakorlati alkalmazás megértéséhez szükséges rövid levezetést közöljük.

Az  $n$  szabadságfokú mechanikai rendszer tömegei haladó és forgó mozgásokat végezhetnek. A rendszer pillanatnyi helyzetének egyértelmű megadására  $n$  egymástól független és csak az időtől függő paramétert kell felvenni. Ezeket  $q_1, q_2, \dots, q_n$ -nel jelöljük és általános koordinátának nevezzük. Szokásos a generalizált koordináta elnevezés is. A rendszer helyzetét jellemző paramétereket teljesen szabadon választhatjuk meg. Ez lehet elmozdulás, szögelfordulás, két test relatív elmozdulása stb. Lengéstani feladatoknál célszerű, ha ezeket az egyensúlyi középhelyzettől mérjük és a ténylegesen érzékelhető elmozdulásokat jelentik.

Nem tévesztendő össze az általános koordináta a rendszer egyes tömegeinek helyzetét megadó geometriai koordinátával (bár megegyezhet vele). A rendszer tömegei egymással kényszerkapcsolatban lehetnek (pl. forgattyús mechanizmus), így egy-egy tömeg súlypontjának helyzetét  $x$ ,  $y$  és  $z$  hely koordináta függvény adja meg. Itt csupán egyetlen korlátozó kikötést teszünk: a geometriai koordináták nem függhetnek az általános koordináták idő szerint vett deriváltjától. Eszerint például az  $i$ -edik tömeg súlypontjának  $x$  irányú koordinátája:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Ha a tömeg haladó és forgó mozgást végez, és a súlypontján átmenő  $x_i$ ,  $y_i$  és  $z_i$  tengely tehetetlenségi fő tengely, akkor mozgási energiája:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{1}{2} (\Theta_1 \dot{q}_x^2 + \Theta_2 \dot{q}_y^2 + \Theta_3 \dot{q}_z^2).$$

$m_i$  a tömeg nagyságát jelenti,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$  és  $\Theta_3$  pedig a három tehetetlenségi főnyomaték. (A rövidség kedvéért a tömeg  $i$  indexét nem írtuk ki.) A  $k$  tömegből álló vizsgált rendszer minden egyes tömegére hasonló összefüggést írhatunk fel. Ezeket összegezve megkapjuk a

rendszer mozgási energiájának pillanatnyi értékét. Ez általános esetben a generalizált koordinátáktól és azok deriváltjától függ:

$$E = \sum_{i=1}^k E_i = E(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n).$$

A mechanikai rendszerek rugalmas elemeket is tartalmaznak. Ezekben helyzeti energia halmozható fel, amely lineáris rugó esetében a rugó hosszváltozásának négyzetével arányos. A rendszer helyzeti energiája akkor is növekszik, ha egyes tömegeket a nehézségi erő vagy más potenciális erő ellenében elmozdítunk. Mivel az említett elmozdulások mind az általános koordináták függvényei, a rendszer potenciális energiájának pillanatnyi értéke:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

A rendszer egyes tömegeire külső erők és nyomatékok hatnak. Ezek közül a reakciók nem végeznek munkát, mert támadáspontjuk nem mozdul el. Viszont a külső aktív erőhatások (nevezük ezeket gerjesztésnek) munkát végeznek, amit az erő és az irányába eső elmozdulás szorzataként kapunk. (Nyomaték munkájának számításakor ezt a szögelfordulással kell szorozni.) Valamennyi gerjesztő erőhatás munkájának a  $t = 0$  időponttól számított összegét  $L$ -lel jelöljük.

A rendszerbe beépített csillapítók, valamint az alkatrészek közt levő súrlódások energiát vonnak el a rendszerből. A  $t = 0$  pillanattól számított negatív munkát  $W$ -vel jelöljük.

Tételezzük fel azt, hogy a  $t = 0$  pillanatban a rendszer tömegeinek mozgási energiája  $E_0$ , a helyzeti energiák összege pedig  $U_0$ . Ebből a csillapítások által felemésztett  $W$  energia levonódik, míg a gerjesztések  $L$  munkája növeli a rendszer energiatartalmát. Így egy tetszőleges  $t$  időpontban az energia-mérleg:

$$E + U = E_0 + U_0 - W + L$$

Ha e kifejezés minden tagját az idő szerint differenciáljuk, akkor rendezés után figyelembe véve azt, hogy az  $E_0$  és  $U_0$  állandók deriváltja zérus:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dU}{dt} + \frac{dW}{dt} = \frac{dL}{dt}.$$

Az így kapott összefüggés minden tagja teljesítmény dimenziójú. Vizsgáljuk meg ezeket egyenként, utoljára hagyva az első tag vizsgálatát.

A rendszer potenciális energiája az általános koordináták függvénye, vagyis:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Mivel az általános koordináták az idő függvényében változnak, a közvetett differenciálás szabályait kell alkalmaznunk:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i \right).$$

A  $\frac{dW}{dt}$  az energia disszipálódásának sebessége. Ez a negatív teljesítmény kifejezhető az egyes általános koordinátákra vonatkozó (és most  $P_i$ -vel jelölt) csillapító erőhatások és a koordináta sebességek szorzatainak összegeként:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n (P_i \dot{q}_i)$$

Ha a vizsgált rendszer csak lineáris csillapítókat tartalmaz (a csillapító erő a mozgás sebességével arányos), akkor a  $P_i$  erőhatás felírható a generalizált koordináták sebességének lineáris függvényeként:

$$P_i = \sum_{k=1}^n (k_{ik} \dot{q}_k)$$

Itt a  $k_{ik}$  állandó a csillapítás-mátrix  $i$ -edik sorának  $k$ -adik eleme  $k_{ik} = k_{ki}$ . A  $P_i$  kifejezését beírva:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (k_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k).$$

Célszerűségi okokból vezessük be a

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (k_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k)$$

kvadratikusan definiált disszipáció függvényét. Ezt differenciálva könnyen igazolható az, hogy:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n (k_{ik} \dot{q}_k) = P_i.$$

Végeredményként:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right).$$

Mint említettük, ez csak akkor érvényes, ha a rendszerben kizárólag lineáris csillapítók vannak. A vizsgált kifejezésünk jobb oldalán álló tag a gerjesztő erőhatások pillanatnyi teljesítményét jelenti. Ez az általános koordinátákra vonatkozó  $Q_i$  általános, vagy generalizált erőkomponensek és a megfelelő koordináta sebességek szorzatának összegeként is kifejezhető. Így:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n (Q_i \dot{q}_i)$$

A rendszer mozgási energiája az általános koordináták és a koordináta sebességek függvénye:

$$E = E(q_1, q_2 \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)$$

A mozgási energia kifejezését tüzetesebben megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy az mindig a  $\dot{q}_i$  változók homogén másodfokú függvénye. Az ilyen függvények az

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

alakban is felírhatók. Kettővel szorozva, majd az idő szerint deriválva:

$$2 \frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Ha az eredeti alakban felírt függvényt differenciáljuk az idő szerint, akkor a közvetett differenciálás szabályai szerint:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

Vonjuk ki ezt az előzőből:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)$$

Az eredmények jobb áttekinthetősége érdekében itt még egyszer leírjuk a többit is:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i \right),$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right),$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n (Q_i \dot{q}_i).$$

Megfigyelhető, hogy a  $\dot{q}_i$  valamennyi kifejezésben tényezőként szerepel. Ha az  $i$ -edik általános koordináta kivételével a többi gondolatban rögzítjük (vagyis ha  $j \neq i$ , akkor  $\dot{q}_j = 0$ ), akkor a kiinduló egyenletünkbe behelyettesítve:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = Q_i \dot{q}_i$$

Feltételezésünk szerint  $\dot{q}_i \neq 0$ , tehát vele végig oszthatunk. Így megkapjuk a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet általános alakját:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vagy másképpen gerjesztés és csillapítás nélkül:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad \text{ahol } L = E - U$$

(Lagrange függvény)

Mivel  $i$  az  $n$  határig tetszőleges lehet, az  $n$  szabadságfokú mechanikai rendszer mozgását összesen  $n$  darab másodfajú Lagrange-egyenletből álló egyenletrendszer írja le.

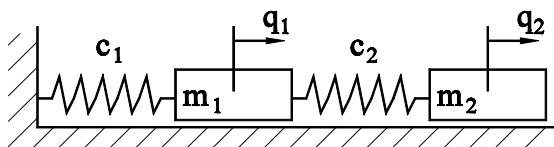
További magyarázat helyett példákon mutatjuk be a módszer alkalmazását. A feladatok megoldása közben a következő sorrend célszerű:

1. Az általános koordináták megválasztása.
2. A rendszer mozgási energiájának felírása.
3. A helyzeti energia kifejezésének meghatározása.
4. A disszipáció-függvény levezetése.
5. A Lagrange-egyenletben előírt differenciálások elvégzése.
6. A generalizált erőkomponensek meghatározása.
7. Behelyettesítés a Lagrange-egyenletbe.

#### PÉLDÁK:

Első példaként az 5.2. ábrán vázolt kéttömegű lengőrendszer esetében általános koordinátának a tömegek elmozdulását választjuk. Így a rendszer mozgási energiája:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2.$$



5.2. ábra: Egyszerű példa a Lagrange-egyenlet alkalmazására

A rugókban felhalmozott helyzeti energia:

$$U = \frac{q_1^2}{2c_1} + \frac{(q_2 - q_1)^2}{2c_2}$$

Csillapítás nincs, tehát  $D = 0$ . A Lagrange-egyenletben előírt differenciálhányadosok:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \ddot{q}_1, \quad \frac{\partial E}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \ddot{q}_2, \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{q_1}{c_1} + \frac{q_2 - q_1}{c_2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{q_2 - q_1}{c_2}.$$

Mivel gerjesztés nincs, a behelyettesítéssel felírt mozgásegyenletek jobb oldalán zérus áll:

$$m_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{c_1} - \frac{q_2 - q_1}{c_2} = 0$$

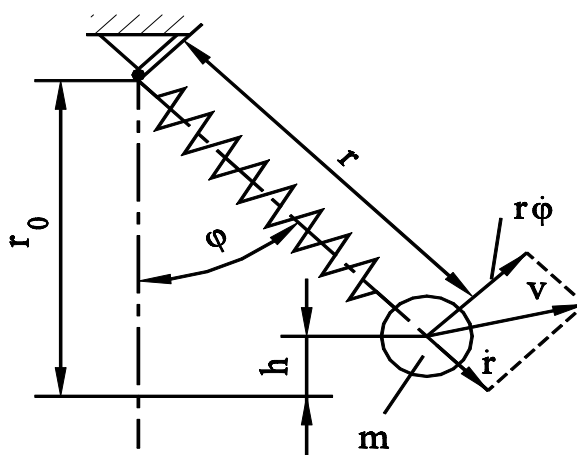
$$m_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2 - q_1}{c_2} = 0$$

E két mozgásegyenlet egyezik a rendszerre elemi módon is felírható mozgásegyenletekkel.

Második példaként írjuk fel az 5.3. ábrán vázolt inga (síkmozgás esetén kétszabadságfokú rendszer) mozgásegyenleteit. Általános koordinátának az inga forgáspontjától mért távolságot ( $q_1 \equiv r$ ) és a függőlegessel bezárt szöget ( $q_2 \equiv \varphi$ ) választjuk és figyelembe vesszük, hogy a rugó hossza terheletlenül  $r_0$ .

Az  $m$  tömeg mozgási energiájának számításakor az eredő sebesség a sugárirányú  $\dot{r}$  s az arra merőleges  $r\dot{\varphi}$  komponensből tevődik össze:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2]$$



5.3. ábra: A rugós inga mozgásegyenleteit a Lagrange-egyenlet segítségével vezetjük le

A helyzeti energia egy része a rugóban van felhalmozva, a másik része pedig a nehézségi erő ellenében végzett  $mgh$  munkával egyenlő:

$$U = \frac{(r-r_0)^2}{2c} + mg(r_0 - r \cos \varphi).$$

Az előírt differenciálásokat elvégezve:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{\partial E}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r};$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{r-r_0}{c} - mg \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgr \sin \varphi.$$

Példánkban nincs külső gerjesztés ( $Q_1 = 0$ ), ezért a mozgásegyenletek jobb oldalára zérust kell írunk. Ha viszont az  $U$  kifejezéséből elhagytuk volna az  $mg(r_0 - r \cos \varphi)$  tagot, akkor az  $mg$  súlyerő sugárirányú összetevőjét és nyomatékát generalizált erőkomponensként kellene szerepeltetni.

Behelyettesítés után az említett tagokat az egyenletek jobb oldalára áthozva:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{r-r_0}{c} = mg \cos \varphi,$$

$$mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{\varphi} = -mgr \sin \varphi.$$

A sugárirányú mozgást leíró első differenciálegyenlet tagjait elemezve megállapítható, hogy:

|                     |                                                 |
|---------------------|-------------------------------------------------|
| $m\ddot{r}$         | a tehetetlenségi erő;                           |
| $mr\dot{\varphi}^2$ | a centrifugális erő;                            |
| $\frac{r-r_0}{c}$   | a rugó visszatérítő ereje;                      |
| $mg \cos \varphi$   | a tömegre ható súlyerő sugárirányú összetevője. |

A második egyenlet a felfüggesztés pontja körüli forgást írja le, így minden tagja nyomaték dimenziójú. Elemezve:

|                           |                                   |
|---------------------------|-----------------------------------|
| $mr^2\ddot{\varphi}$      | a tehetetlenségi erő nyomatéka;   |
| $2mr\dot{r}\dot{\varphi}$ | a Coriolis-erő nyomatéka;         |
| $mgr \sin\varphi$         | a súlyerő visszatérítő nyomatéka. |

### 5.3. A mátrix-számítás alkalmazása

A többszabadságfokú rendszerek dinamikai számítása nem könnyű feladat. A mátrix fogalmának és jelölésének felhasználásával az ilyen feladatok megoldása jól áttekinthetővé válik, mert a rendszer mozgását az egyszabadságfokú lengőrendszerekre levezetett összefüggésekhez hasonló formájú mátrix-egyenletek írják le.

A mátrix-számítás előnyei akkor mutatkoznak meg leginkább, amikor az adott többszabadságfokú rendszerre vonatkozó numerikus számításokat számítógéppel végeztetjük el. A nagyteljesítményű számítógépek program könyvtárában szinte minden mátrix-művelet szubrutin formájában rendelkezésre áll, ami a programozó munkáját nagyon megkönnyíti.

Itt nem foglalkozhatunk részletesen a mátrix-algebra módszereivel, hanem csak az alapfogalmak és a felhasznált egyszerű mátrix-műveletek bemutatására szorítkozunk. Ezt is csupán a jelölések magyarázatának kedvéért tesszük.

A mátrix állandó vagy változó mennyiségek négyzetes sémába rendezett halmaza. A következőn szedett álló nagy betűvel jelölt mátrix általános esetben  $n$  sort és  $m$  oszlopot tartalmaz. A mátrix elemeinek a helyüket megadó sor és oszlop sorszámának megfelelően kettős indexet adunk. Minden elem skalár mennyiség, amely komplex szám is lehet. A mátrix elemeit többnyire ugyanolyan kis betűvel jelöljük, mint a mátrix jele. Tehát a tetszőleges  $A$  mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Az egyetlen oszlopból álló oszlopmátrix egy  $n$  méretű vektort jelent, ezért célszerűbb az oszlopvektor elnevezés. Ezt vastagon nyomtatott kis betű jelöli és elemei mellé egyetlen index elegendő:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Az egyetlen sorból álló sormátrix a megfelelő oszlopvektor transzponáltja. Ezt általában sorvektornak nevezzük és a transzponálás tényét \*-gal fejezzük ki.

$$a^* = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Bármely mátrix transzponáltját megkapjuk, ha a sorokat és az oszlopokat egymással felcseréljük. Így az  $n$  sort és  $m$  oszlopot tartalmazó  $A$  mátrix transzponáltja  $m$  sorból és  $n$  oszlopból áll:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Az oszlop- és sormátrixoktól eltekintve gyakorlatunkban szinte kizárólag kvadratus mátrixok fordulnak elő. Ezeknek ugyanannyi sora van, mint ahány oszlopa. A diagonálmátrix olyan kvadratus mátrix, amely csak bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott főátlóban tartalmaz zérustól különböző elemeket:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Az egységmátrix olyan diagonálmátrix, ahol a főátlóban álló elemek mind 1-gyel egyenlők. Ezt  $E$ -vel szokás jelölni:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Szimmetrikus mátrixnak nevezzük az olyan kvadratus mátrixot, amelynek elemei a főátlóra nézve szimmetrikusan egyenlők, vagyis:  $a_{ij} = a_{ji}$ . A szimmetrikus mátrix természetesen azonos transzponáltjával:

$$A = A^*.$$

A soros lengőrendszerek vizsgálatakor a szimmetrikus kontinuens mátrix is előfordul. Ez csak a főátlóban és a vele párhuzamos két ferde sorban tartalmaz zérustól különböző elemeket. Általános alakja:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

A zérus mátrix minden eleme zérus.

Két mátrix akkor egyenlő, ha ugyanannyi sort és oszlopot tartalmaznak, és a megfelelő helyeken álló elemeik egyenlők. Az összeadás és a kivonás csak ugyanannyi sort és oszlopot tartalmazó mátrixokra van értelmezve. Elvégzésekor a megfelelő helyen álló elemeket összevonjuk:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1m} \pm b_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2m} \pm b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \cdots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix}$$

Mátrixot egy skalárral úgy szorzunk, hogy a mátrix mindegyik elemét megszorozzuk az adott skálár szorzóval. Ez az összeadás definíciójából következik. Egyszerű szimbolikus jelöléssel:

$$cA = [ca_{ij}]$$

Egy sor- és egy oszlopvektor szorzata ebben a sorrendben felírva egyenlő a két ( $n$  méretű) vektor skaláris szorzatával. Az eredmény egy szám, amely a megfelelő elemek szorzatösszegevel egyenlő:

$$a^* \cdot b = [a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Könnyen belátható, hogy  $a^* \cdot b = b^* \cdot a$ .

Az  $a \cdot b^*$  formában felírt diadikus szorzat négyzetes mátrix. Itt nem foglalkozunk vele, úgyszintén nem említjük a két mátrix összeszorzásával kapcsolatos összefüggéseket sem. Kivétel az  $n$ -ed rendű kvadratikusan mátrix és az  $n$  méretű oszlopmátrix (oszlopvektor) szorzata, amely az alkalmazások során előfordul. Az említett szorzás eredménye egy oszlopvektor, amelynek képzési szabályát a  $y = Ax$  alakban felírt mátrix-egyenleten mutatjuk be. Részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ez a következő lineáris egyenletrendszerrel egyenértékű:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

Ha az  $y$  vektort (vagyis összes komponensét) ismerjük, akkor az  $x_1, \dots, x_n$  ismeretleneket tartalmazó egyenletrendszer formális megoldása:

$$x = A^{-1}y.$$

Itt  $A^{-1}$  az  $A$  mátrix reciprok mátrixa. Ennek képzési módja a lineáris egyenletrendszerek gyökeinek meghatározására alkalmazható Cramer-szabály alapján vezethető le:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|}$$

A nevezőben a négyzetes mátrix elemeiből alkotott determináns szerepel, míg a számláló az adjungált mátrix. Ezt megkapjuk, ha a mátrix minden eleméhez kiszámítjuk annak előjeles aldeterminánsát, majd az így nyert mátrixot transzponáljuk. Az  $i$ -edik sor  $k$ -adik elemének aldeterminánsát úgy számítjuk, hogy a  $i$ -edik sort és  $k$ -adik oszlopot töröljük, majd a megmaradt rész determinánsát  $(-1)^{i+k}$ -val szorozzuk.

Nyilvánvaló, hogy az  $A^{-1}$ -gyel jelölt reciprok mátrix csak akkor létezik, ha az  $A$  mátrix determinánsa nem zérus.

A töbtényezős mátrix szorzatok közül gyakorlatunkban nagy szerepet játszik az

$$x^*Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k$$

formában felírható kvadratikusság alak és az

$$x^*Ay = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k$$

bilinéáris alak. Mindkettő két vektor skaláris szorzatát jelenti, tehát az eredmény egy skaláris mennyiség.

Az előző pont bevezetése szerint az  $n$  szabadságfokú rendszer pillanatnyi helyzetének egyértelmű megadására  $n$  darab egymástól független és csak az időtől függő generalizált koordinátát kell felvenni. Ezeket  $q_1, q_2, \dots, q_n$ -nel jelöljük, és összességük a  $q$  elmozdulás vektorral adható meg:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Ez az idő szerint differenciálható. Így a generalizált sebességet, illetve második deriváltként a gyorsulást kapjuk:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}.$$

A generalizált koordináták kezdőpontját célszerű úgy felvenni, hogy a rugalmas elemekből álló vizsgált rendszer terheletlen egyensúlyi helyzetében mindegyikük zérus legyen. Ha e rendszert a generalizált koordináták irányában ható  $f_1, f_2, \dots, f_n$  állandó erőkomponensekből álló  $f$  erővel megterheljük, akkor a terheléssel arányos alakváltozatokat feltételezve az új egyensúlyi helyzetet megadó koordináták:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{f}$$

Itt  $\mathbf{C}$  a vizsgált rendszerre vonatkozó rugóállandó-mátrix. Ennek a főátlóban álló elemei egyszerű rugóállandóként számíthatók (elmozdulás az irányában működő egységnyi erő hatására). A vegyes indexű  $c_{ik}$  elem pedig az  $i$ -edik koordináta irányában mért elmozdulást jelenti a  $k$  koordináta irányában működtetett egységnyi erő hatására. A Maxwell-féle felcserélhetőségi elv következtében  $c_{ik} = c_{ki}$ , tehát a rugóállandó-mátrix szimmetrikus, vagyis megegyezik transzponáltjával:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^*.$$

A feladat megfordításával - az  $\mathbf{S}$  rugómerevség-mátrix fogalmát bevezetve:

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{S} \mathbf{q}$$

Mivel a reciprok összefüggés kölcsönös:  $\mathbf{S}^T = \mathbf{C}$ . Könnyen belátható, hogy az  $\mathbf{S}$  mátrix is szimmetrikus. Ha az  $\mathbf{S}$  mátrix determinánsa zérus, akkor a mátrix szinguláris és a reciproka nem létezik. Ez szabad rendszerek esetén fordul elő, amikor az egész rendszer a ráható állandó erő hatására merev testként gyorsulva mozog.

A rendszerre ható külső erő munkája az elmozdulás vektor és az erő vektor skaláris szorzata. Rugalmas alakváltozás esetében az elmozdulás az erővel arányos, és így a rendszerben felhalmozott helyzeti energia számításakor a skaláris szorzat felét kell venni:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^* \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^* \mathbf{S} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik} q_i q_k.$$

Az  $\mathbf{S}$  mátrix elemei e kvadratikus alak alapján határozhatók meg. Hasonlóan kvadratikus alakban írható fel a rendszer mozgási energiájának pillanatnyi értéke is. Bevezetve az  $\mathbf{M}$  tömeg-mátrix fogalmát:

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^* M \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Az  $M$  mátrix elemei célszerűen a felírt összefüggés alapján határozhatók meg.

A  $K$  csillapítás-mátrix bevezetésével a rendszer csillapítására jellemző disszipáció-függvény is kvadratikus alakban adható meg.

$$D = \frac{1}{2} \dot{q}^* K \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Bizonyítás nélkül is belátható, hogy az általános formában felírt kvadratikus alak az  $x$  vektor szerint deriválható. Ha az  $A$  négyzetes mátrix elemei állandók:

$$\frac{d}{dx} (x^* A x) = 2 A x.$$

Ezt felhasználva a vizsgált  $n$  szabadságfokú lineáris rendszerre vonatkozó Lagrange-egyenletek egyetlen egyenletté vonhatók össze

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = f$$

Az egyenlet jobb oldalán  $f$  a generalizált erők vektorát jelenti (ezt a jelölések egyértelműsége miatt sem  $q$ -val, sem  $Q$ -val nem jelölhettük).

A felírt Lagrange-egyenlet az 5.2. pontban levezetett alakkal ellentétben nem tartalmazza a

$$-\frac{\partial E}{\partial q}$$

tagot. Lineáris rendszerek esetében a mozgási energia nem függ  $q$ -tól, tehát e tag értéke zérus. A kvadratikus alakok differenciálását elvégezve:

$$\frac{d}{dt} (M \dot{q}) + K \dot{q} + S q = f$$

vagy még egyszerűbben, mivel  $M$  állandó:

$$M \ddot{q} + K \dot{q} + S q = f.$$

Ez az  $n$  szabadságfokú lineáris rendszer mozgását leíró másodrendű inhomogén mátrix differenciálegyenlet. Formailag ez teljesen megegyezik az egyszabadságfokú lineáris lengőrendszer jól ismert mozgásegyenletével:

$$m \ddot{y} + k \dot{y} + s y = F(t)$$

Itt  $s = 1/c$  rugó merevsége.

Legegyszerűbb esetként az  $n$  szabadságfokú csillapítatlan lengőrendszer sajátlengését vizsgáljuk. Ennek mátrix differenciálegyenlete homogén:

$$M\ddot{q} + Sq = 0.$$

A megoldást a következő alakban keressük:

$$q = \text{Im } a(e^{i\alpha t})$$

Itt „Im” a megoldásként feltételezett komplex vektor komponenseinek képzetes részére utal:  $i = +\sqrt{-1}$  és  $\alpha$  a keresett sajátlengés körfrekvenciája.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

az ismeretlen amplitúdók vektora. Differenciálással:

$$\ddot{q} = -\alpha^2 q$$

Behelyettesítve, a  $q$  kiemelése után:

$$(S - \alpha^2 M)q = 0.$$

A feltételezett megoldást véve, mivel  $e^{i\alpha t} \neq 0$ :

$$(S - \alpha^2 M)a = 0.$$

Ez  $n$  egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert jelent. A triviális megoldás ( $a = 0$ ) esetében a rendszer nyugalomban van, míg ettől eltérő megoldást akkor kapunk, ha az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott determináns zérus:

$$\det(S - \alpha^2 M) = 0.$$

Az  $S - \alpha^2 M$  egyetlen mátrixnak is tekinthető, amelynek az  $i$ -edik sorban álló  $k$ -adik eleme:

$$s_{ik} - \alpha^2 m_{ik}.$$

A bemutatott algebrai feladat a mátrix sajátérték problémája. A determináns kifejtése után  $\alpha^2$ -re  $n$ -ed fokú algebrai egyenletet kapunk. Ennek  $n$  valós gyöke egy-egy sajátérték. Ha a rugómerevség-mátrix ( $S$ ) szinguláris, vagyis determinánsa zérus, akkor az egyik sajátérték zérusra adódik. A sajátértékek pozitív négyzetgyöke a sajátfrekvencia ( $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ ).

Minden egyes sajátértékhez egy-egy sajátvektor tartozik  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Az  $i$ -edik sajátvektor komponenseinek meghatározásakor az

$$(S - \alpha^2 M)a_i = 0$$

mátrix-egyenletet kell megoldani. Az ismeretlen sajátvektor egyik elemének értéke tetszőlegesen felvehető. A gyakorlatban az első elemet szokás egységre választani  $(a_{1i} = 1)$ . A lineáris egyenletrendszer megoldva a többi elem értéke is meghatározható. Az  $\alpha_i$ -hez tartozó sajátvektor:

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

## 6. A MOZGÁSEGYENLET MEGOLDÁSA

### 6.1. Analitikus megoldás

Az 5.1. pontban egyszabadságfokú csillapított rendszerre felírt másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása két részből tevődik össze.

Először megkeressük az

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = 0$$

homogén differenciálegyenlet  $y_H$  általános megoldását, majd hozzáadjuk az inhomogén differenciálegyenlet  $y_P$  partikuláris megoldását. A homogén differenciálegyenletet  $m$ -mel végigszorozva és bevezetve az

$$\alpha^2 = \frac{1}{mc} \quad \text{és} \quad D = \frac{k}{2m\alpha}$$

jelöléseket:

$$\ddot{y} + 2D\alpha\dot{y} + \alpha^2 y = 0$$

Keressük a megoldást a következő alakban:

$$y_H = Ae^{\lambda t}.$$

Behelyettesítés után,  $y_H$ -val egyszerűsítve a karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2 = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1}.$$

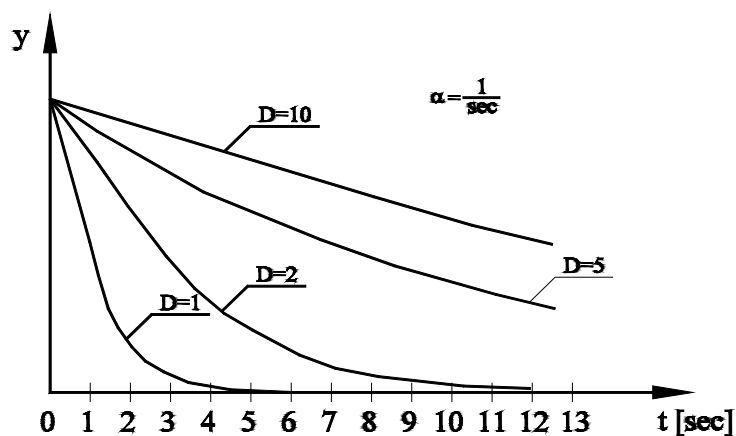
a) Ha  $D > 1$ , vagyis a csillapítás a kritikus értéknél nagyobb, mindkét gyök valós, így a homogén egyenlet megoldása:

$$y_H = e^{-D\alpha t} \left( A_1 e^{\alpha\sqrt{D^2-1}t} + A_2 e^{-\alpha\sqrt{D^2-1}t} \right)$$

Az  $A_1$  és  $A_2$  integrálási állandó értéke a kezdeti feltételektől függ. Ha például a  $t = 0$  pillanatban  $y = A$  és  $\dot{y} = D\alpha A$ , akkor az itt nem közölt részletszámítások elvégzése után:

$$y_H = Ae^{-D\alpha t} \operatorname{ch}(\alpha\sqrt{D^2-1} \cdot t)$$

Az ennek megfelelő mozgás nem nevezhető lengésnek. Képe a 6.1. ábrán látható. Az ábra a  $D = 1$  esetet is szemlélteti.



6.1. ábra: A kritikusnál nagyobb csillapítás esetében a mozgás már nem nevezhető lengésnek

b) A gyakorlatban a csillapítás rendszerint kisebb a kritikus értéknél ( $D < 1$ ). Ilyenkor a karakterisztikus egyenlet megoldása komplex gyökpár:

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm i\alpha\sqrt{1-D^2}$$

Az előbb felvett kezdeti feltételekkel, mivel  $\cosh ix = \cos x$ :

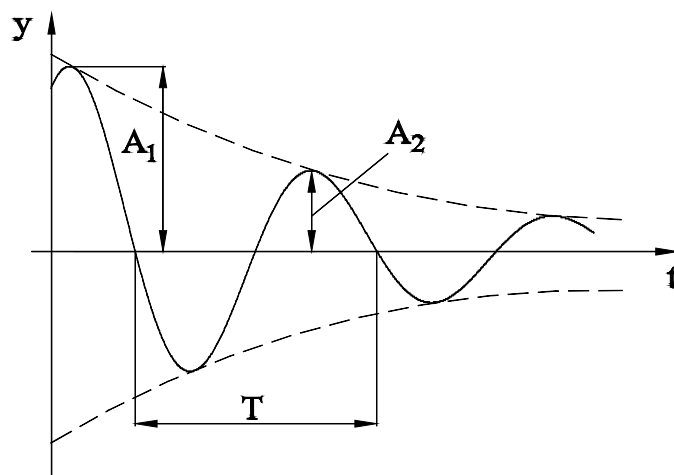
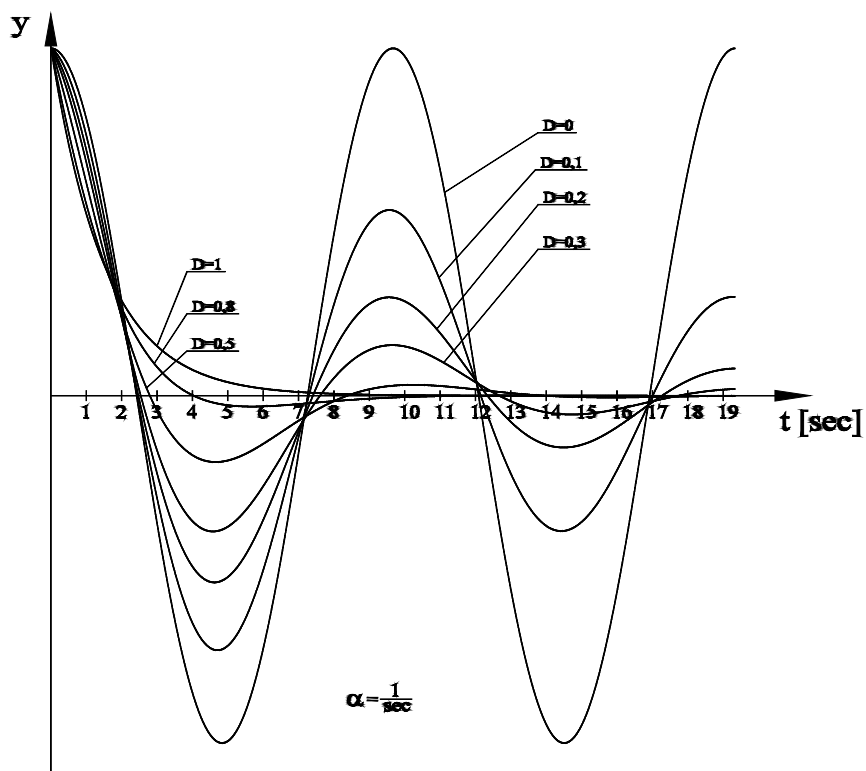
$$y_H = Ae^{-D\alpha t} \cos(\alpha\sqrt{1-D^2} \cdot t).$$

Ez a csillapodó lengés függvénye (6.2. ábra).

$y$  maximumai egyenlő időközönként lépnek fel és ezek az intervallumok megegyeznek a  $T$  periódussal. Ebből következik, hogy két egymást követő maximum aránya

$$\Delta = \frac{e^{-\frac{k}{2m}t}}{e^{-\frac{k}{2m}(t+T)}} = e^{\frac{k}{2m}T}$$

lesz. A  $\ln \Delta = \frac{k}{2m}T$  mennyiséget logaritmikus dekrementumnak nevezzük.



Oscilláló jellegű csillapított mozgás

6.2. ábra: Csillapított lengés

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az

$$y_p = K \sin(\omega t - \varphi)$$

alakban keressük. Behelyettesítés és az itt nem közölt részletszámítások elvégzése után a gerjesztett lengés *amplitúdója* (a  $\lambda = \frac{\omega}{\alpha}$  jelöléssel):

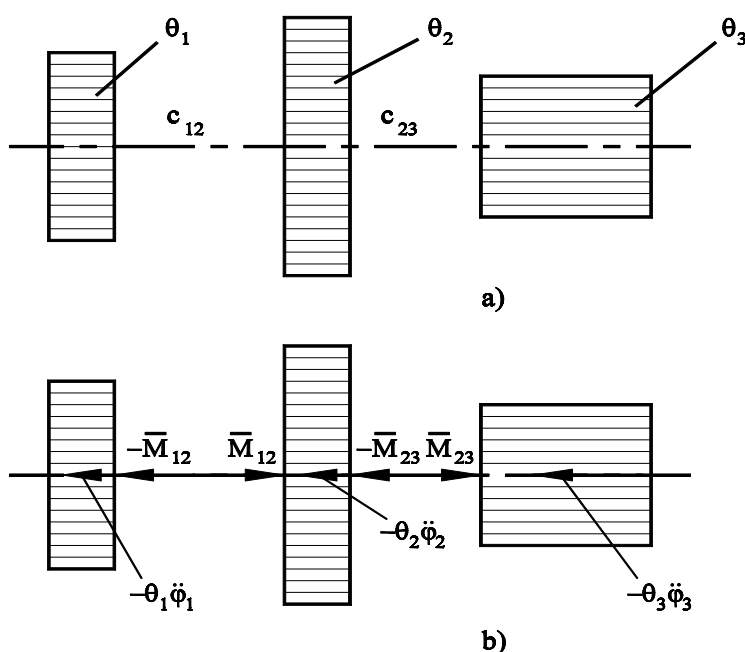
$$K = \frac{F_0 c}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4D^2 \lambda^2}}$$

A fázisszög:

$$\varphi = \arctg \frac{2D\lambda}{1 - \lambda^2}$$

A homogén egyenlet megoldása csillapított lengés (ill.  $D \geq 1$  esetén „kúszás”), amely elegendő idő eltelte után zérushoz tart. A gyakorlatban az állandósult állapotban is megmaradó partikuláris megoldást vizsgáljuk és ezt nevezzük gerjesztett lengésnek. Nem foglalkozunk vele részletesebben, mert csupán a módszer bemutatása volt a célunk.

Harmadik példaként írjuk fel a 6.3. ábrán vázolt háromtömegű torziós lengő-rendszer mozgásegyenleteit. A tömegek forgástengelyére számított tehetetlenségi nyomatékát  $\Theta$ -val,



6.3. ábra: Torziós rendszerek vizsgálatakor a nyomatékok egyensúlyát írjuk fel

a köztük levő tengelyszakaszok torziós rugóállandóját pedig  $c_{12}$ , illetve  $c_{23}$ -mal jelöljük. A tömegek tetszőleges kezdőhelyzettől mért elfordulásának szöge:  $\varphi_1, \varphi_2$  és  $\varphi_3$ . Az első tömegre ható  $M_{12}$  nyomaték a  $c_{12}$  rugó  $\varphi_1 - \varphi_2$  elcsavarodásával arányos és vele ellentétes (6.3.b. ábra). A második tömeg az  $M_{12}$  és  $-M_{23}$  nyomatékok hatására végzi mozgását, míg a harmadik tömeg  $\ddot{\phi}_3$  szöggyorsulása a  $c_{23}$  torziós rugó  $\varphi_2 - \varphi_3$  elcsavarodásával arányos. Az  $M_{12}$ , illetve az  $M_{23}$  nyomaték az egyes tömegekre nézve külső nyomaték. Ha ezekhez hozzáadjuk a  $-\Theta \ddot{\phi}$  nyomatékokat, akkor az egyes tömegek forgástengelyére nyomatéki egyensúlyi egyenleteket írhatunk fel:

$$\Theta_1 \ddot{\phi}_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c_{12}} = 0$$

$$\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c_{12}} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{c_{23}} = 0$$

$$\Theta_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{c_{23}} = 0$$

Ha a 6.3. ábrán vázolt rendszerben csillapítás is lett volna, akkor a felírt mozgásegyenletekben elsőrendű ( $\dot{\varphi}$ -tal szorzott) tagok is szerepelnének. Gerjesztett lengések esetén a mozgásegyenletek jobb oldalára az egyes tömegekre ható gerjesztő nyomatókat kellene írni. Mivel mindhárom mozgásegyenletünk jobb oldalán zérus áll, a felírt másodrendű, lineáris differenciálegyenlet-rendszer homogén. Az ilyen szimultán egyenletrendszerek megoldása a sajátlengés, amelyet a gyakorlat a tiszta harmonikus mozgásnak megfelelő

$$\varphi_1 = A_1 \sin \alpha t$$

$$\varphi_2 = A_2 \sin \alpha t \text{ és}$$

$$\varphi_3 = A_3 \sin \alpha t$$

alakban keres. (Szokásos a  $\varphi_i = A_i e^{\lambda t}$  helyettesítés is. Ilyenkor a megoldásban  $\lambda$ -ra komplex számot kapunk, amely csillapításmentes esetben tiszta képzetes. A  $\lambda = i\alpha$  helyettesítéssel a megoldás az előbb feltételezett alakra hozható.) Behelyettesítés után mindhárom egyenlet  $\sin \alpha t$ -vel osztható.

Rendezve:

$$A_1 \left( \Theta_1 \alpha^2 - \frac{1}{c_{12}} \right) + A_2 \frac{1}{c_{12}} = 0$$

$$A_1 \frac{1}{c_{12}} + A_2 \left( \Theta_2 \alpha^2 - \frac{1}{c_{12}} - \frac{1}{c_{23}} \right) + A_3 \frac{1}{c_{23}} = 0$$

$$A_2 \frac{1}{c_{23}} + A_3 \left( \Theta_3 \alpha^2 - \frac{1}{c_{23}} \right) = 0$$

Ennek a homogén lineáris algebrai egyenletrendszernek triviális megoldása ( $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ) azt jelenti, hogy a lengőrendszer nyugalomban van. Az egyenletrendszernek csak akkor lesznek a triviálisától különböző megoldásai, ha az együtthatóiból alkotott determináns, az ún. karakterisztikus determináns zérussal egyenlő:

$$\begin{bmatrix} \left( \Theta_1 \alpha^2 - \frac{1}{c_{12}} \right) & \frac{1}{c_{12}} & 0 \\ \frac{1}{c_{12}} & \left( \Theta_2 \alpha^2 - \frac{1}{c_{12}} - \frac{1}{c_{23}} \right) & \frac{1}{c_{23}} \\ 0 & \frac{1}{c_{23}} & \left( \Theta_3 \alpha^2 - \frac{1}{c_{23}} \right) \end{bmatrix} = 0$$

A determinánst kifejtve a karakterisztikus egyenletet kapjuk.

Esetünkben, rendezés után:

$$\alpha^2 \{ \alpha^4 \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 c_{12} c_{23} - \alpha^2 [\Theta_1 \Theta_2 c_{12} + \Theta_1 \Theta_3 (c_{12} + c_{23}) + \Theta_2 \Theta_3 c_{23}] + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \} = 0$$

Az  $\alpha^2 = 0$  gyök az állandó szögsebességű forgást jelenti, míg a másik két gyök a két saját-lengés vetítő szögsebességének négyzetét adja, ami a gyakorlati esetekben mindig pozitív valós.

Legyen például  $\Theta_1 = \Theta_0$ ,  $\Theta_2 = 3\Theta_0$  és  $\Theta_3 = 2\Theta_0$ , valamint  $c_{12} = 2c_0$  és  $c_{23} = c_0$ , akkor az

$\alpha_0^2 = \frac{1}{\Theta_0 c_0}$  egyszerűsítő jelöléssel a saját-lengések karakterisztikus egyenlete:

$$2 \left( \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \right)^2 - 3 \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} + 1 = 0$$

Ennek gyökei:

$$\alpha_1^2 = \frac{3 + \sqrt{9-8}}{4} \alpha_0^2 = \alpha_0^2 \text{ és}$$

$$\alpha_2^2 = \frac{3 - \sqrt{9-8}}{4} \alpha_0^2 = \frac{1}{2} \alpha_0^2$$

Így a rendszer két sajátlengésének vetítő szögsebessége:

$$\alpha_1 = \alpha_0 \text{ és } \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_0$$

Az egyes sajátfrekvenciákhoz tartozó lengéskép megrajzolásához az első tömeg  $A_1$  kitérését rendszerint egységnyire választjuk (torziós lengések esetében  $A_1 = 1$  rad). Így az algebrai egyenletrendszerünk első egyenletét felhasználva a második tömeg lengésének amplitúdója:

$$A_2 = A_1 (1 - \Theta_1 c_{12} \alpha^2).$$

Ha ezt a harmadik egyenletünkbe helyettesítjük, akkor:

$$A_3 = A_1 \frac{1 - \Theta_1 c_{12} \alpha^2}{1 - \Theta_3 c_{23} \alpha^2}.$$

Figyelembe véve a példához felvett adatokat, az  $\alpha_1 = \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\Theta_0 c_0}}$  gyök behelyettesítésekor:

$$A_{21} = 1 - \frac{\Theta_0 2c_0}{\Theta_0 c_0} = -1 \text{ és}$$

$$A_{31} = \frac{1 - \frac{\Theta_0 2c_0}{\Theta_0 c_0}}{1 - \frac{2\Theta_0 c_0}{\Theta_0 c_0}} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Az  $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_0$  megoldást véve

$$A_{22} = 1 - \frac{\Theta_0 2c_0}{2\Theta_0 c_0} = 0.$$

vagyis az  $\alpha_2$  körfrekvenciájú sajátlengés esetében a középső tömeg nem végez mozgást (ez természetesen csak a felvett speciális adatok esetén igaz). Most hiába helyettesítünk be az  $A_3$ -ra felírt összefüggésbe, értelmetlen eredményt kapunk.

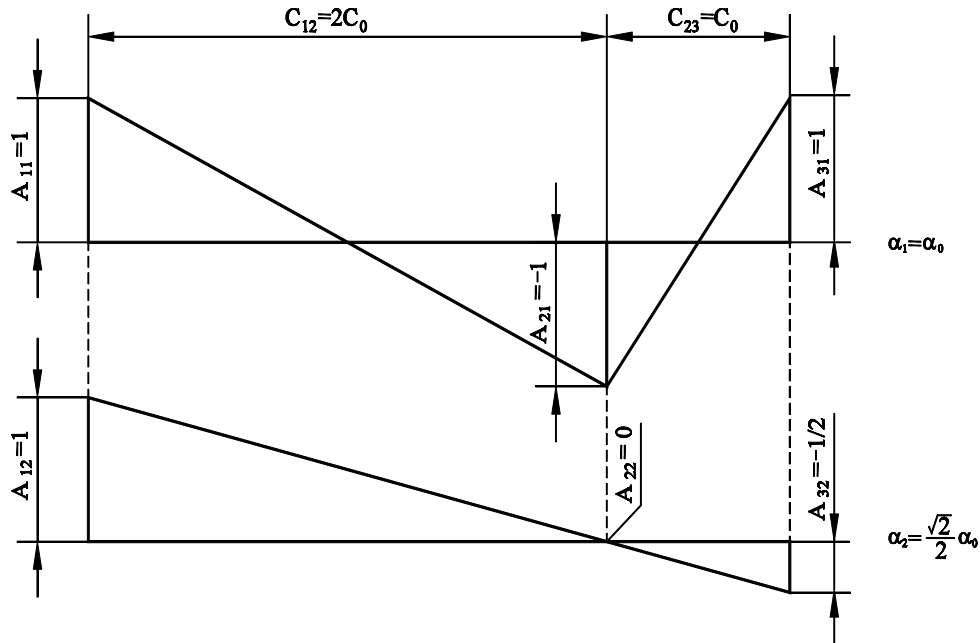
Ilyenkor a harmadik tömeg kitérésének számítására a három egyenlet összeadásával kapott

$$(A_1 \Theta_1 + A_2 \Theta_2 + A_3 \Theta_3) \alpha^2 = 0$$

összefüggést használjuk fel. Ez a perdület állandóságát fejezi ki, mivel nincs külső nyomaték,  $A_{12} = 1$  és  $A_{22} = 0$  behelyettesítésével:

$$A_{32} = -\frac{\Theta_1}{\Theta_3} = -\frac{1}{2}.$$

A számítással kapott eredmények alapján a 6.4. ábrán megrajzoltuk a példában szereplő lengőrendszer két lengésképet. Ilyenkor a rugóállandókat méretarányosan kell felmérni.



6.4. ábra: A 6.3. ábrán vázolt torziós lengőrendszer két lengésképe

Az  $\alpha_1$  körfrekvenciájú sajátlengés esetében mindkét rugón találunk egy-egy csomópontot, ha viszont az  $\alpha_2$ -nek megfelelő rezgéskép szerint indítjuk a lengőrendszert, akkor a csomópont a középső tömeg helyén van.

A lengéskép határoló vonalnak iránytangense alapján következtethetünk az egyes rugók igénybevételére, ugyanis a rugókat terhelő nyomtérkép:

$$M_{12} = \frac{A_1 - A_2}{c_{12}} \quad \text{és} \quad M_{23} = \frac{A_2 - A_3}{c_{23}}$$

Megemlítjük, hogy általános indítás esetében az  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  körfrekvenciájú sajátlengés szuperponálódik, és ezekhez még egy  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$  nullfázisszöveget is fel kell venni az indítás módjának figyelembevételére. Így a tömegek szögelfordulását leíró függvények:

$$\varphi_1 = A_{11} \sin(\alpha_1 t + \varepsilon_1) + A_{12} \sin(\alpha_2 t + \varepsilon_2)$$

$$\varphi_2 = A_{21} \sin(\alpha_1 t + \varepsilon_1) + A_{22} \sin(\alpha_2 t + \varepsilon_2)$$

$$\varphi_3 = A_{31} \sin(\alpha_1 t + \varepsilon_1) + A_{32} \sin(\alpha_2 t + \varepsilon_2)$$

Ha az állandó szögsebességű forgás esetét ki akarjuk rekeszteni, akkor induláskor a

$$\Theta_1 \dot{\varphi}_1 + \Theta_2 \dot{\varphi}_2 + \Theta_3 \dot{\varphi}_3 = 0$$

feltételnek is teljesülnie kell.

## 6.2. Megoldás a fázis-síkon

A következőkben bemutatandó módszer főleg az egyszabadságfokú, nemlineáris rendszerek esetében használható sikerrel. A gerjesztés és a rendszer paraméterei tetszőlegesen változhatnak. Az itt tárgyalandó eljárás a fizikai tartalmat helyezi előtérbe. A dinamikai problémák más megvilágításba helyezésével a jelenségek szemléletes bemutatása a cél.

A módszer bevezetéseként tételezzük fel, hogy a 6.5. ábrán vázolt egyszabadságfokú lengőrendszer rugózása tetszőleges, vagyis a rugalmas visszatérítő erő az általános alakban megadott  $F_r = R(x)$  függvény szerint változik. Ha az  $m$  tömeget  $v_0$  kezdősebességgel mozgásnak indítjuk, akkor annak mozgását

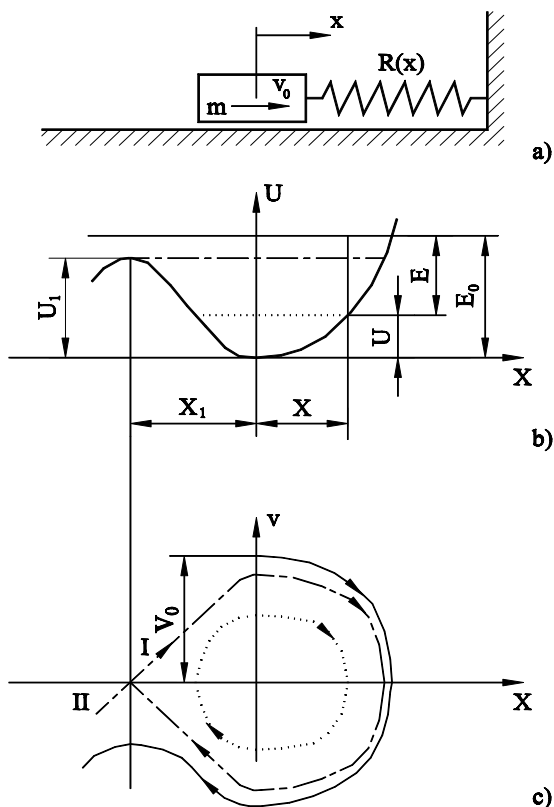
$$m\ddot{x} + R(x) = 0$$

másodrendű homogén differenciálegyenlet írja le. Szorozzuk be ennek minden tagját  $\dot{x}$ -tal, akkor az első tag átalakítása után:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + R(x) \dot{x} = 0.$$

Ha e kifejezést az idő szerint integráljuk, és figyelembe vesszük, hogy  $\dot{x} dt = dx$ , akkor:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x R(x)dx = \text{állandó}.$$



6.5. ábra: A  $v-x$  síkon megrajzolt fázisportréről a vizsgált lengőrendszer számos tulajdonsága leolvasható

Itt az első tag az  $m$  tömeg mozgási energiáját jelenti, míg a második tag a rugóban felhalmozott helyzeti energia, amelynek nagysága az  $x$  elmozdulástól függ, és konkrétan megadott  $R(x)$  esetében integrálással meghatározható. Ezt  $U$ -val jelölve, a 6.5/b ábrán vázolt görbe szemlélteti. A kifejezés jobb oldalának állandója a rendszer energiáját jelenti a  $t = 0$  pillanatban.

Esetünkben ez

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Előző egyenletünkől a mozgás pillanatnyi sebessége:

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U)}.$$

ahol

$$U = \int_0^x R(x)dx.$$

A felírt összefüggések értelmében a  $v$  sebesség az  $x$ -től függ, tehát az  $x - v$  koordináta-rendszerben, vagyis a fázis-síkon görbével ábrázolható. A 6.5/c ábrába berajzolt vonalat fázis-görbének nevezzük:

A fázisgörbe három fontos tulajdonsága:

- Amikor  $v$  pozitív,  $x$  növekszik, vagyis az  $x$  tengely fölött csak balról jobbra, alatta pedig jobbról balra mennek a görbék.
- $v = 0$  esetén  $x$ -nek szélső értéke van, vagyis a fázisgörbék függőlegesen metszik az  $x$  tengelyt. Kivételt képeznek a szinguláris esetek.
- Ha nincs csillapítás, vagy gerjesztés, akkor a rendszer összenergiája nem változik. Ilyenkor az  $E_0$  és egy adott  $x$ -hez tartozó  $U$  helyzeti energia különbsége a tömeg mozgási energiáját jelenti. Ez oda- és visszamenetkor ugyanakkora, tehát az  $x$  tengely a fázisgörbe szimmetriatengelye.

A 6.5/b ábrán az  $U=U(x)$  görbét úgy adtuk meg, hogy annak a negatív  $x_1$  helyen szélső értéke legyen (ilyen a gyakorlatban is előfordulhat). Mivel esetünkben  $E_0$  nagyobb, mint az  $U_1$  szélső érték, a tömeg nem tér vissza egyensúlyi helyzetébe, hanem az  $x_1$  helyzet elérése után a koordináta-rendszer kezdőpontjától távolodó sebessége növekedni fog.

A határesetre ( $E_0 = U_1$ ) vonatkozó fázisgörbét a 6.5/c ábrán eredményvonal szemlélteti. A  $-x_1$  helyen megálló tömeg egyensúlya labilis, tehát a mozgás két irányban is folytatódhat az „I” vagy „II” görbe szakasznak megfelelően. Az ilyen szinguláris pontot nyeregpontnak nevezzük. Itt a fázisgörbe nem merőleges az  $x$  tengelyre.

A fázis-sík módszer csillapításos esetben is használható. Különösen akkor előnyös, amikor Coulomb-féle súrlódás fékezi a mozgást. Ha a lineáris rugózású rendszer  $m$  tömegét  $A_1$  értékkel kitérítjük, akkor a rugóban felhalmozott helyzeti energia:

$$U_0 = \frac{A_1^2}{2c}$$

A rendszer energiáját a súrlódással elvont munka csökkenti. A súrlódó erő a mozgás sebességével ellentétes értelmű ( $F_{cs} = -S \operatorname{sgn} v$ ). Az  $x$  helyzet eléréséig felemésztett munka:

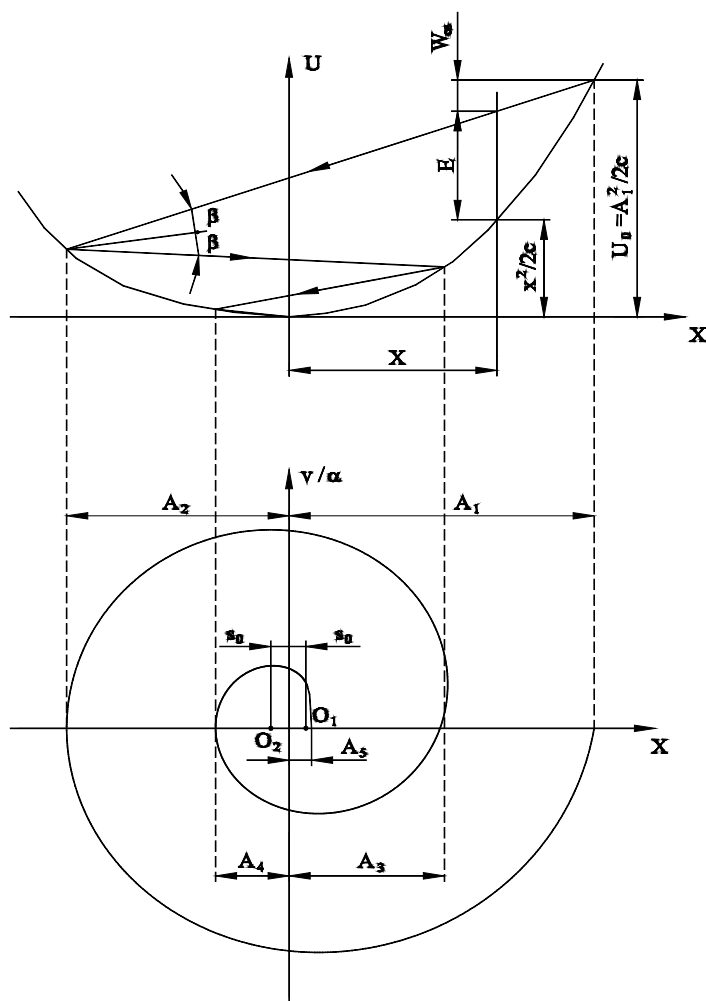
$$W_{cs} = \int_{A_1}^x F_{cs} dx = -S \int_{A_1}^x dx = S(A_1 - x).$$

A 6.6/a ábra szerint a tömeg mozgási energiája az  $x$  helyen:

$$E = U_0 - S(A_1 - x) - \frac{x^2}{2c} = m \frac{v^2}{2}.$$

Szorozzunk végig  $2c$ -vel, majd rendezzük egyenletünket, és vezessük be az  $\alpha^2 = \frac{1}{mc}$  jelölést:

$$\frac{v^2}{\alpha^2} + x^2 - 2Scx = A_1^2 - 2ScA_1$$



6.6. ábra: Coulomb-féle súrlódás esetében a fázis-görbe félkörívekből áll

Ha a kifejezés mindkét oldalához  $S^2 c^2$ -et hozzáadunk, akkor a kéttagú kifejezések teljes négyzetét véve:

$$\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 + (x - Sc)^2 = (A_1 - Sc)^2$$

A módosított fázis-síkon, vagyis az olyan koordináta-rendszerben, amelynek egyik tengelye  $\frac{v}{\alpha}$ , a másik  $x$ , ez egy körív egyenlete. A kör középpontja  $Sc$  távolságra van az  $x$  tengelytől (6.6/b ábra). Az  $A$  kitérés elérésekor a tömeg egy pillanatra megáll, majd visszafelé kezd mozogni. Mivel a súrlódó erő előjele megváltozott, ezért a második körív középpontja az  $x$  tengelytől balra  $Sc$  távolságban van. Így a súrlódásos lengés fázisgörbéje az  $O_1$  és  $O_2$  középpontokból felváltva rajzolt félkörívekből áll. Jól megfigyelhető az egymást követő kitérések  $(A_1, A_2, \dots)$  csökkenése. Az  $A_5$  kitérés elérése után a mozgás befejeződik, mert  $A_5 < Sc$ .

A  $\pm Sc$  szakaszon belül a súrlódó erő nagyobb, mint a rugóerő, tehát a rugó nem képes a tömeget álló helyzetéből elmozdítani.

### 6.3. Megoldás komplex változók segítségével

Ha az egyszabadságfokú, csillapítatlan, lineáris lengőrendszer mozgásának differenciálegyenletét

$$\ddot{z} + \alpha^2 z = 0$$

alakban írjuk fel, és a megoldást

$$z = Ke^{\lambda t}$$

alakban keressük, akkor behelyettesítés után:

$$\lambda^2 Ke^{\lambda t} + \alpha^2 Ke^{\lambda t} = 0.$$

Így  $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$  karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda = \pm i\alpha$$

Itt  $i = +\sqrt{-1}$  a képzetes egység. A  $z$  komplex megoldás többféle alakban is felírható:

$$z = Ke^{i\alpha t} = K(\cos \alpha t + i \sin \alpha t) = x + iy$$

$K$  a kezdeti feltételektől függő komplex amplitúdót jelenti.

Az általánosan elfogadott megállapodás szerint a mozgás kitérése a  $z$  komplex vektor képzetes része:

$$y = \text{Im}(z) = K \sin \alpha t.$$

Ugyanez érvényes a mozgás sebességére is:

$$v = \text{Im}(\dot{z}) = K\alpha \cos \alpha t = \alpha \text{Re}(z) = \alpha x.$$

Nézzük például a csillapított lengő mozgást. A

$$\ddot{z} + 2D\alpha\dot{z} + \alpha^2 z = 0$$

differenciálegyenlet komplex megoldását most is

$$z = Ke^{\lambda t}$$

alakban keressük. A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2 = 0.$$

Ennek gyökei  $D < 1$  esetében, a  $\gamma = \alpha\sqrt{1 - D^2}$  helyettesítéssel:

$$\lambda_1 = -D\alpha + i\gamma$$

és

$$\lambda_2 = -D\alpha - i\gamma.$$

A komplex vektor pozitív forgásának megfelelő megoldást véve:

$$z = K e^{-\alpha D t} e^{i\gamma t}.$$

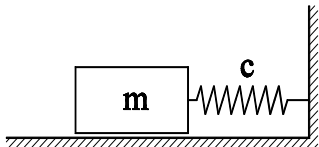
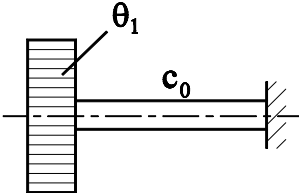
Differenciálással:

$$\dot{z} = K(-D\alpha + i\gamma) e^{-D\alpha t} e^{i\gamma t}.$$

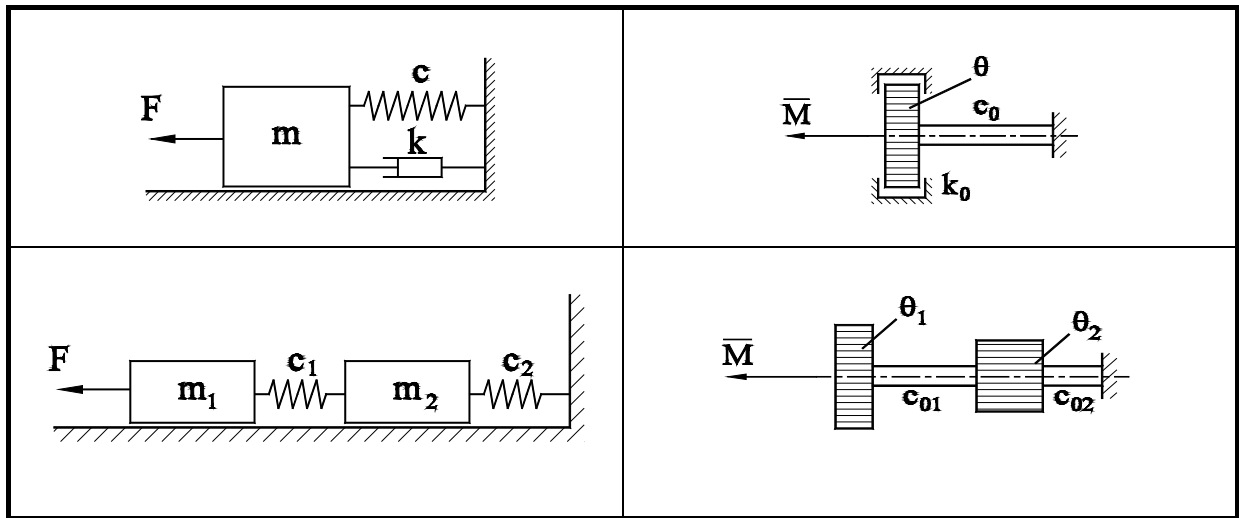
Mivel  $\gamma = \alpha\sqrt{1-D^2}$  :

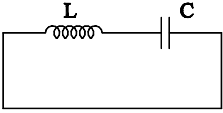
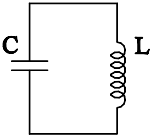
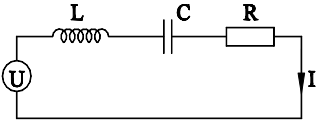
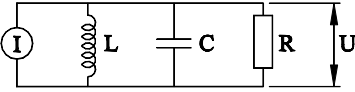
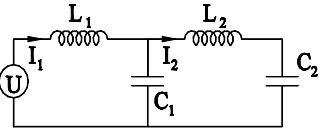
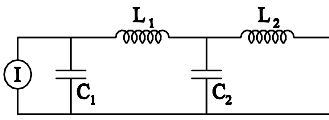
$$\frac{\dot{z}}{\alpha} = (-D + i\sqrt{1-D^2}) \cdot z.$$

A mechanikai lengőrendszerek villamos megfelelőjét mutatja a 6.1. táblázat

| Mechanikai rendszer                                                                |                                |                                                                                     |                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| egyenestvonalú lengés                                                              |                                | forgó lengés                                                                        |                                        |
| elmozdulás                                                                         | $y$                            | szögelfordulás                                                                      | $\varphi$                              |
| sebesség                                                                           | $v = \dot{y}$                  | szögsebesség                                                                        | $\omega = \dot{\varphi}$               |
| erő                                                                                | $F$                            | nyomaték                                                                            | $M$                                    |
| tömeg                                                                              | $m$                            | tehetetlenségi nyomaték                                                             | $\Theta$                               |
| rugóállandó                                                                        | $c$                            | torziós rugóállandó                                                                 | $c_0$                                  |
| a csillapítás tényezője                                                            | $k$                            | a torziós csillapítás tényezője                                                     | $k_0$                                  |
| mozgási energia                                                                    | $\frac{mv^2}{2}$               | mozgási energia                                                                     | $\frac{\Theta \omega^2}{2}$            |
| helyzeti energia                                                                   | $\frac{y^2}{2c}$               | helyzeti energia                                                                    | $\frac{\varphi^2}{2c_0}$               |
| mozgásmennyiség                                                                    | $mv$                           | perdület                                                                            | $\Theta \omega$                        |
|  | $\alpha = \frac{1}{\sqrt{mc}}$ |  | $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Theta c_0}}$ |

## Példák



| Villamos megfelelő                                                                  |                              |                                                                                      |                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| a "klasszikus" analógia szerint                                                     |                              | a Hahn-Feirestone-féle analógia szerint                                              |                                |
| villamos töltés                                                                     | $Q$                          | mágneses fluxus                                                                      | $\Phi$                         |
| áramerősség                                                                         | $I = \dot{Q}$                | feszültség                                                                           | $U = \dot{\Phi}$               |
| feszültség                                                                          | $U$                          | áramerősség                                                                          | $I$                            |
| öninduktivitás                                                                      | $L$                          | kapacitás                                                                            | $C$                            |
| kapacitás                                                                           | $C$                          | öninduktivitás                                                                       | $L$                            |
| ohmos ellenállás                                                                    | $R$                          | villamos vezetőképesség                                                              | $G = \frac{1}{R}$              |
| a mágneses tér energiája                                                            | $\frac{LI^2}{2}$             | az elektrosztatikus tér energiája                                                    | $\frac{CU^2}{2}$               |
| az elektrosztatikus tér energiája                                                   | $\frac{Q^2}{2C}$             | a mágneses tér energiája                                                             | $\frac{\Phi^2}{2L}$            |
| mágneses fluxus                                                                     | $\Phi = LI$                  | villamos töltés                                                                      | $Q = CU$                       |
|    | $\Phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ |   | $\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ |
|  |                              |  |                                |
|  |                              |  |                                |

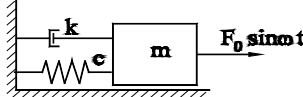
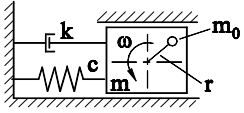
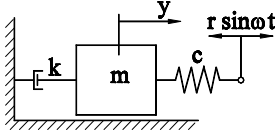
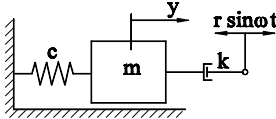
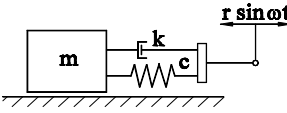
#### 6.4 Típus rendszerek és a feladatok visszavezetése

A gyakorlatban legtöbbször olyan gerjesztett rezgést kell vizsgálnunk, amelyben a gerjesztő hatás periodikus és a rendszer lineáris karakterisztikájú elemekkel közelíthető meg. Az ilyen egyszabadságfokú rendszerek öt alaptípusba sorolhatók, illetve a példákban közölt módon átalakíthatók ezek valamelyikére. A rezonancia környezetében még a többszabadságfokú rendszerek is az egyszabadságfokú rendszerhez hasonlóan viselkednek, tehát a következőkben közlendő számítási képletek és diagramok megfelelő óvatossággal ezekre is alkalmazhatók. Az öt alaptípus párhuzamos tárgyalása azért is előnyös, mert a diagramokban közölt eredmények összevetésével olyan szemléletet nyerhetünk, amelynek alapján előre következtetni tudunk egy adott rendszer lengéstanai viselkedésére.

A 6.2. táblázatban összefoglalóan megadjuk az öt alaptípus modelljének vázlatát és mozgásegyenletét. A könnyebb megnevezhetőség érdekében az egyes típusokat önkényesen A-E betűkkel jelöltük.

## 6.2. táblázat

Az egyszabadságfokú lineáris rendszer gerjesztett lengésének alaptípusai

| Jel | A modell vázlata                                                                    | A rendszer mozgásegyenlete                                                                  | A gerjesztés módja                                                                                                                          |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A   |   | $m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = F_0 \sin \omega t$                                    | állandó erővel<br>$\alpha^2 = \frac{1}{mc}; \lambda = \frac{\omega}{\alpha};$<br>$D = \frac{k}{2m\alpha}$                                   |
| B   |  | $m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = m_0 r \omega^2 \sin \omega t$                         | tömeg-erővel<br>$\alpha^2 = \frac{1}{mc}; \lambda = \frac{\omega}{\alpha};$<br>$D = \frac{k}{2m\alpha}$                                     |
| C   |  | $m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = \frac{r}{c} \sin \omega t$                            | útgerjesztés rugóval<br>$\alpha^2 = \frac{1}{mc}; \lambda = \frac{\omega}{\alpha};$<br>$D = \frac{k}{2m\alpha}$                             |
| D   |  | $m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = k r \omega \cos \omega t$                             | útgerjesztés csillapítóval<br>$\alpha^2 = \frac{1}{mc}; \lambda = \frac{\omega}{\alpha};$<br>$D = \frac{k}{2m\alpha}$                       |
| E   |  | $m\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{y}{c} = k r \omega \cos \omega t + \frac{r}{c} \sin \omega t$ | útgerjesztés párhuzamos rugóval és csillapítóval<br>$\alpha^2 = \frac{1}{mc}; \lambda = \frac{\omega}{\alpha};$<br>$D = \frac{k}{2m\alpha}$ |

## 7. A MOZGÁSEGYENLET MEGOLDÁSÁNAK NUMERIKUS MÓDSZEREI

Numerikus számítások esetén mindig véges tizedes törtekkel, tehát racionális számokkal dolgozunk. Ilyenkor nincs szükségünk olyan fogalmak ismeretére mint „valós szám, kontínuum, folytonosság, határérték”. Ezeket a digitális elektronikus számítógép nem „ismeri”. Ha olyan matematikai feladatot akarunk számítógépen megoldani, amelyekben ezek a fogalmak fellépnek, akkor először el kell végeznünk a feladat ún. diszkretizálását. A legegyszerűbb példa erre a differenciálhányados helyettesítése a differenciahányadossal. A diszkretizálással a feladatot egyúttal algebraizáljuk is, hiszen csak véges sok kezdeti adatból kiindulva kell számolnunk.

A differenciálegyenletek és a matematikai analízis feladatainak numerikus elmélete főleg azal foglalkozik, hogy hogyan kell elvégezni a diszkretizálást.

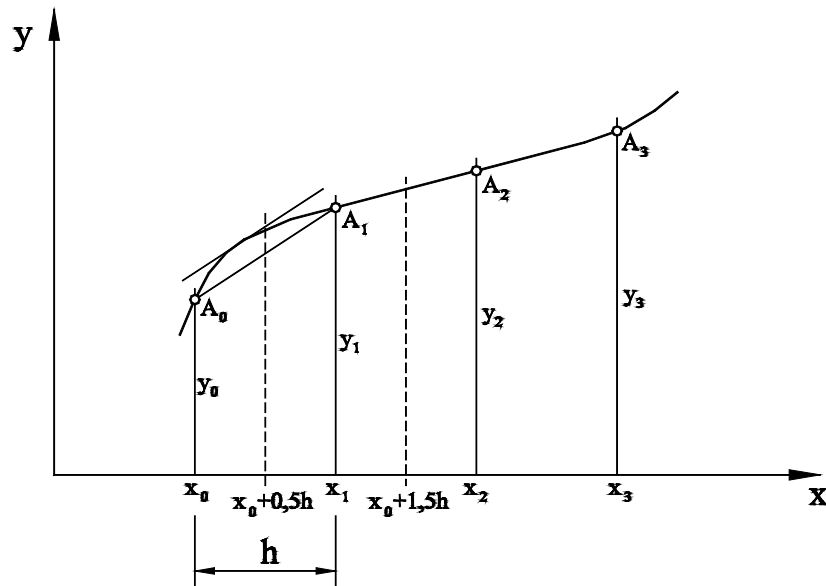
Az eljárás során hibák lépnek fel. Ez az eredeti folytonos feladat és diszkrét megfelelője közötti eltérésből ered. Ezeket a hibákat igen sokat tanulmányozták, az elektronikus számítógépek segítségével elég finom diszkretizálással, többnyire elhanyagolhatóan kicsinnyé tehetők. Tapasztalat szerint nagyobb baj az, ami ezután a számítógépben következik be. Az igen nagy sebességgel végrehajtott nagy mennyiségű művelet során mindenféle előre nem látott numerikus instabilitás, a kerekítési hibák és tizedesjegy-vesztések halmozódása léphet fel, röviden a numerikus hibák. Igazi Szküllá és Kharübdisz: minél finomabb a diszkretizálás, annál több műveletet végez a gép, és ráadásul még azt is szeretnénk, hogy a végeredmény pontosabb legyen mint a durva diszkretizáláskor. A számítógépek fejlődésével a numerikus hibák jelentősége a diszkretizációs hibákéhoz viszonyítva mind nagyobb lesz.

### 7.1. Numerikus differenciálás

Az  $x, y$  koordináta-rendszerben tekintsük az  $x_0, x_1, \dots, x_n$  abszcisszákat (az úgynevezett alappontokat) és a hozzájuk rendelt  $y_0, y_1, \dots, y_n$  ordinátaértékeket. Az alappontok legyenek páronként különbözők, és indexezzük őket növekvő sorrendben:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Az  $(x_0, x_n)$  nyitott intervallumot alapintervallumnak nevezzük. Az  $A_i(x_i, y_i)$  pontokat ugyancsak szokás alappontoknak nevezni. A 7.1. ábrán  $n = 3$ ,  $x_0, x_1, x_2, x_3$  alappontokat ekvidisztáns módon vettük fel, azaz két-két szomszédos alappont távolsága ugyanaz a  $h$  állandó, az ún. **lépésköz**.



7.1. ábra. Interpoláció, differenciálás

A továbbiakban nemcsak az ekvidisztáns esettel foglalkozunk. Keressük azt a  $P_n(x)$  (legfeljebb)  $n$ -edfokú polinomot, amelynek függvénygörbéje átmegy az  $n + 1$  számú  $A_i$  alapponton.

$P_n(x)$ -et tehát úgy kell meghatároznunk, hogy

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= y_0, \\ P_n(x_1) &= y_1, \dots, \\ P_n(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad (1)$$

teljesüljön.

Írjuk fel  $P_n(x)$  -et egyenlőre határozatlan együtthatókkal

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Az (1) feltételek szerint

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_i + a_n = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Ez egy, az  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ismeretlenekre vonatkozó,  $n + 1$  egyenletből álló lineáris egyenletrendszer.

Vizsgáljuk az

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_i + a_n = 0,$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Ez annak az esetnek felel meg, amikor az előírt ordinátaértékek mindegyike 0. Az (1) egyenletek ebben a speciális esetben

$$P_n(x_0) = 0, \quad P_n(x_1) = 0, \dots, \quad P_n(x_n) = 0$$

azaz a  $P_n(x)$  polinomnak  $n + 1$  gyöke van:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Egy  $n$ -edfokú polinomnak legfeljebb  $n$  gyöke lehet, hacsak nem azonosan 0. Minthogy az itteni  $P_n(x)$  polinomnak  $n + 1$  különböző gyöke van, ezért valamennyi  $a_i$  együtthatója 0. A homogén lineáris egyenletrendszernek így csak triviális megoldása van. A lineáris algebra alaptétele szerint a (2) inhomogén egyenletrendszer megoldható és az  $a_0, a_1, \dots, a_n$  megoldás egyértelműen meghatározott. A megoldásból adódó  $P_n(x)$  polinomot az adott alappontokhoz tartozó **interpolációs polinomnak** nevezzük. Érvényes tehát a következő tétel:  $n + 1$  alapponthoz pontosan egy (legfeljebb)  $n$ -edfokú interpolációs polinom tartozik.

### *A lineáris algebra alaptétele:*

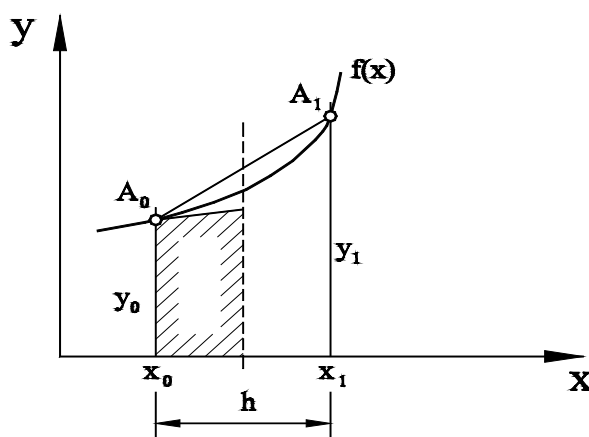
Tekintsünk egy  $n$  egyenletből álló  $n$ -ismeretlenes lineáris egyenletrendszert. Ha az ehhez tartozó homogén egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, akkor az adott egyenletrendszer megoldható és a megoldás egyértelműen meghatározott.

## 7.2. Numerikus integrálás

**A trapézsabály.** Legyenek egy  $f(x)$  függvény értékei az  $x_0, x_1$  alappontokban  $y_0$  és  $y_1$  (7.2. ábra). Meg akarjuk határozni az  $f(x)$  függvény alapintervallumra vonatkozó

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

integráljának valamely közelítő értékét, az alappontbeli függvényértékek felhasználásával. Az integrál értéke megegyezik az  $x$ -tengely, az alappontokon átmenő függőleges egyenesek és az  $f(x)$  függvény görbéje által határolt tartomány területével. Ezt a területet például úgy közelíthetjük, hogy a függvénygörbét az  $A_0A_1$  húrral helyettesítjük, így egy trapézhoz jutunk (7.2. ábra).



7.2. ábra. Trapézsabály

Ennek területe  $T = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$ , ahonnan az

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \sim T = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \quad (3)$$

közelítő formulát kapjuk. A diszkretizációs hiba becsléséhez húzzuk meg az  $A_0$  és az  $A_1$  pontbeli érintőket, és vezessük be az

$$y_0' = f'(x_0), \quad y_1' = f'(x_1)$$

jelöléseket. A bal oldali érintő  $y_0 + \frac{h}{2}y_0'$  magasságban metszi a trapéz középvonalát, így a bal oldali bevonalkázott trapéz területe

$$\frac{h}{4} \left[ y_0 + \left( y_0 + \frac{h}{2}y_0' \right) \right] = \frac{h}{2}y_0 + \frac{h^2}{8}y_0'$$

A jobb oldali érintő által hasonlóan meghatározott trapéz területe

$$\frac{h}{2}y_1 - \frac{h^2}{8}y_1'$$

A két kis trapéz  $T^*$  területösszege az eredeti integrál egy másik lehetséges közelítése:

$$T^* = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{8}(y_0' - y_1') = T - \frac{h^2}{8}(y_1' - y_0') \quad (4)$$

**Megjegyzések a numerikus integrálással kapcsolatban.** Határozzuk meg az  $x_0, x_1, x_2$  alap-pontok felhasználásával a 7.3. ábrán látható függvény integrálját az  $(x_0, x_2)$  intervallumon. Az intervallum hossza  $l = x_2 - x_0$ .

A trapézközelítések

$$T_1 = \frac{l}{2}(y_0 + y_2), \quad T_2 = \frac{l}{4}(y_0 + 2y_1 + y_2).$$

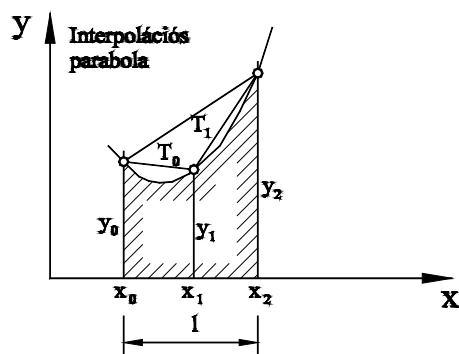
így a Simpson-közelítéssel

$$S_1 = \frac{l}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

A kapott

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \sim \frac{l}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (5)$$

közelítő formulát **Simpson-szabálynak** nevezzük.



7.3. ábra. A Simpson-formula,  $S_1$  a bevonalkázott terület

### 7.3. Elsőrendű differenciálegyenletek

Most bemutatunk egy példát közönséges differenciálegyenlet diszkretizálására lineáris differenciálegyenlet esetében.

Keressük azt az  $y(x)$  függvényt, amely kielégíti az

$$y' = -xy \quad (6)$$

differenciálegyenletet (ahol  $y'$  az  $y(x)$  függvény  $x$  szerinti differenciálhányadosát jelöli), és az

$$y(x_0) = y_0 \quad (7)$$

kezdeti feltételt; itt  $x_0$  és  $y_0$  adott számok. Meg kell tehát határoznunk a további  $x$  értékekhez tartozó  $y(x)$  függvényértékeket. Szemeljünk ki egy  $x_0$ -hoz elég közeleső  $x_1$  pontot. A  $h = x_1 - x_0$  mennyiséget első lépésköznék nevezzük /7.2. ábra/.

A (6) differenciálegyenlet mindkét oldalát integráljuk  $x_0$ -tól  $x_1$ -ig:

$$\int_{x_0}^{x_1} y' dx = - \int_{x_0}^{x_1} xy dx.$$

A bal oldali integrál éppen  $y(x_1) - y(x_0)$ , innen

$$y(x_1) = y(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} xy dx. \quad (8)$$

Más a helyzet a másik integrállal. Az  $y(x)$  függvényt nem ismerjük, így az integrált csak közelítőleg számíthatjuk ki, például a (3) trapézszabály segítségével. Az integrandus az  $xy(x)$  függvény. A trapézszabály szerint

$$\int_{x_0}^{x_1} xy dx \sim \frac{h}{2} [x_0 y(x_0) + x_1 y(x_1)]$$

így (8) alapján:

$$y(x_1) \sim y(x_0) - \frac{h}{2} [x_0 y(x_0) + x_1 y(x_1)]$$

A kezdeti feltételből  $y(x_0)$  ismert, ezért itt az egyetlen ismeretlen az  $y(x_1)$  függvényérték. Helyettesítsük a közelítő egyenlőség jelét egyenlőségjellel, figyelembe véve, hogy így az  $y(x_1)$  függvényértéknek csak egy közelítését kapjuk, amelyet  $y_1$ -gyel jelölünk.

$$y_1 = y_0 - \frac{h}{2} (x_0 y_0 + x_1 y_1) \quad (9)$$

Az  $y(x_1)$  függvényérték  $y_1$  közelítését így az  $y(x)$ -re **vonatkozó lineáris differenciálegyenlet** diszkrétizálásával keletkező **egyismeretlenes lineáris egyenletből** határozhatjuk meg.

A megoldás:

$$y_1 = \frac{2 - hx_0}{2 + hx_1} y_0 \quad (10)$$

Az  $y_1$  közelítés természetesen annál pontosabb, minél kisebb a  $h$  lépésköz.

A következő lépésben  $y_1$  lesz a kezdeti érték és  $x_1$  szerepét egy új  $x_2$  hely veszi át. Legyen az  $x_2 - x_1$  lépésköz ismét  $h$ , így  $y(x_2)$  közelítő értéke:

$$y_2 = \frac{2 - hx_1}{2 + hx_2} y_1$$

Mint ahogy már  $y_1$  is pontatlan volt, így  $y_2$  várhatóan még rosszabbul közelíti  $y(x_2)$ -t. Az eljárás során egyre erősebben jelentkezik a diszkrétizációs hiba. Ez az oka annak, hogy a gyakorlatban többnyire nem állandó lépésközt alkalmaznak, hanem például csökkentik a lépésközt azokon az intervallumokon, ahol  $y(x)$  erősen változik.

Az eljárást folytatva az

$$y_{n+1} = \frac{2 - hx_n}{2 + hx_{n+1}} y_n \quad (11)$$

**rekurzív formulához** jutunk, amelynek segítségével elkészíthetjük az  $y(x)$  függvény  $h$  lépésközi táblázatát.

Példa.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 0,1 \quad (12)$$

$$y_1 = \frac{2}{2 + 0,01} = 0,995 \quad y_2 = \frac{2 - 0,01}{2 + 0,02} 0,995 = 0,980$$

|     |   |       |       |       |       |       |
|-----|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| x = | 0 | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   |
| y = | 1 | 0,995 | 0,980 | 0,956 | 0,923 | 0,882 |

A differenciálegyenlet pontos megoldása:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ellenőrizhető, hogy a kapott függvényértékek három jegyre pontosak.

Differenciálegyenletek közelítő megoldásakor a fő nehézséget a **lépésköz megfelelő választása**, illetve az eljárás alatti változtatása jelenti. Kicsiny  $h$  esetében a diszkretizációs hiba kicsi, de a sok lépés miatt a numerikus hibák halmozódnak.

### 7.3.1. Elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletek

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja

$$y' = f(x, y) \quad (13)$$

ahol  $f(x, y)$  adott kétváltozós függvény. Ehhez járul még valamely  $x_0$  helyen az

$$y(x_0) = y_0 \quad (14)$$

kezdeti feltétel – ugyancsak adott  $x_0$  és  $y_0$  -lal. Válasszuk meg a  $h$  lépésközt, tekintsük az  $x_1 = x_0 + h$  helyet és integráljuk a differenciálegyenletet az  $(x_0, x_1)$  intervallumon.

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx,$$

A trapézszabályt alkalmazva innen  $y(x_1)$   $y_1$  közelítő értékére az

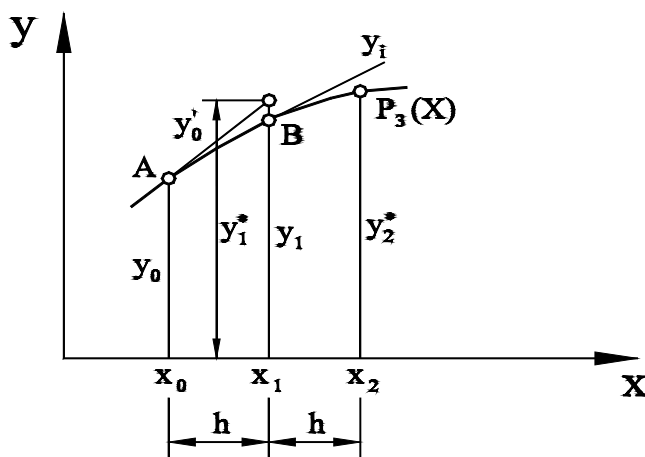
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)] \quad (15)$$

egyenletet kapjuk, ahol az ismeretlen  $y_1$  a jobb oldalon is fellép, mint az  $f$  függvény egyik változója.

Ha (13) **nemlineáris differenciálegyenlet**, azaz  $f$ , mint  $y$  függvénye nemlineáris, akkor az  $y_1$ -re vonatkozó, diszkretizálással nyert (15) egyenlet sem lineáris. Az egyenletet legkényelmesebben iterációval oldhatjuk meg.  $y_1$  valamilyen közelítését behelyettesítjük (15) jobb oldalába, így a bal oldalon jobb közelítést kapunk, s. í. t.

Egy első közelítést például a következő módon állíthatunk elő. A kezdeti feltételből tudjuk, hogy a keresett  $y(x)$  függvény értéke az  $x_0$  helyen  $y_0$ . A differenciálegyenletből következik, hogy az  $y(x)$  függvény első differenciálhányadosa az  $x_0$  helyen:

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$



7.4. ábra. A Heun és a Runge-Kutta módszerek.

A 7.4. ábrán feltüntetjük a keresett függvény képét és  $e$  görbe  $x_0$ -beli érintőjét.

Ha a görbét az  $(x_0, x_1)$  intervallumon ezzel az érintővel helyettesítjük, azaz **linearizálunk**, akkor  $y_1$

$$y_1^* = y_0 + hf'_0 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (16)$$

közelítést kapjuk. Ezt az összefüggést **prediktornak** is nevezik, minthogy a kiinduló közelítést adja meg. Helyettesítsük  $y_1^*$ -ot (15) jobb oldalába, így a jobb

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)] \quad (17)$$

közelítést kapjuk és ezzel be is fejezzük az iterációt. /A kapott értéket tulajdonképpen ismét a jobb oldalba kellene helyettesíteni. s.í.t. A (17) összefüggést **korrektornak** nevezik, hiszen az  $y_1^*$  közelítést korrigálja.

Ha megelégszünk magával az  $y_1^*$  kiinduló közelítéssel, akkor Euler módszeréről beszélünk, ha viszont korrekciót is alkalmazunk, akkor Heun módszeréhez jutunk. Az eljárás diszkretizációs hibája két részből tevődik össze: az egyik az integrál trapézszabállyal való közelítéséből, másik az iteráció megszakításából adódik. Bevezetve az

$$f_0 = f(x_0, y_0), \quad f_1^* = f(x_1, y_1^*) \quad (18)$$

jelöléseket, a következő pontban összefoglaljuk az eddigieket.

**7.3.2. Heun-módszer** az  $y' = f(x, y)$  differenciálegyenlet megoldására az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltétel mellett. Először megválasztjuk a  $h$  lépésközt, majd  $x_1 = x_0 + h$ -val kiszámítjuk az

$$y_1^* = y_0 + hf_0 \quad \text{prediktort és az} \quad (19)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1^*) \quad \text{korrektort.}$$

A következő lépésben az eljárást az  $x_1, y_1$  kezdeti értékekből kiindulva ismételjük meg.

Példa. A (13) differenciálegyenlet esetében

$$f(x, y) = -xy$$

A (12) kezdeti feltétel és lépésköz mellett

$$f_0 = 0 \quad y_1^* = 1 \quad f_1^* = -0,1 \quad y_1 = 1 + 0,05(-0,1) = 0,995 \quad (20)$$

ami megegyezik a (12) táblázatban található értékkel.

Heun módszere durva, de egyszerű és nagyon stabil eljárás differenciálegyenletek közelítő megoldására.

### 7.3.3. Runge - Kutta-módszerek.

Kézenfekvő az a feltételezés, hogy eljárásaink pontosabbá válnak, ha a trapézsabály helyett valamelyik pontosabb módszert – például a Simpson-szabályt alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy az  $y_0 = y(x_0)$  kezdeti értéken kívül már a  $h$  hosszúságú  $(x_0, x_1)$  intervallum másik végpontjához tartozó  $y_1 = y(x_1)$  függvényérték is ismert (7.4. ábra). Vegyünk fel még egy  $h$  hosszúságú intervallumot – ennek jobb oldali végpontja legyen  $x_2$  – és integráljuk a (13) differenciálegyenletet a  $2h$  hosszúságú  $(x_0, x_2)$  intervallumon:

$$y(x_2) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_2} f(x, y) dx$$

Az  $f(x, y)$  integrandus  $y$  változója helyébe itt természetesen a keresett  $y(x)$  függvényt kell helyettesítenünk. Az integrandus az  $x_0, x_1, x_2$  helyeken rendre az

$$f(x_0 y_0), f(x_1 y_1), f(x_2 y_2)$$

értékeket veszi fel.

Az alapintervallum hossza  $l = 2h$ .

Az **első Runge - Kutta módszer** az  $y' = f(x,y)$  differenciálegyenlet megoldására az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltétel mellett:

Megválasztjuk az  $x_0$  és  $x_1 = x_0 + h$  közötti  $h$  lépésközt, majd végrehajtjuk a (22) számításokat.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
 k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{4}\right) \\
 k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 - k_2 + 2k_3) \\
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{22}$$

A kapott  $y_1$  a keresett  $y(x_1)$  függvényérték egy közelítése. Az  $x_1, y_1$  kezdeti értékekből kiindulva megismételjük az eljárást – esetleg más lépésközzel, s.í.t.

Példa. A (13) differenciálegyenletben  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 0,1$  esetén

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 0, \quad k_2 = -0,005, \quad k_3 = -0,00499375, \\
 k_4 &= -0,009950125 \quad y_1 = 0,995012479.
 \end{aligned}$$

A kapott eredmény minden kiírt jegyében megegyezik a pontos megoldással.

#### 7.4. A mozgásegyenletek visszavezetése elsőrendűre

A másodrendű, nemlineáris, inhomogén, explicit differenciálegyenlet vagy differenciálegyenlet-rendszer megoldása gyakorlatilag csak valamilyen alkalmas numerikus módszerrel történhet. Ezek a módszerek csak elsőrendű egyenletek megoldására alkalmasak, ezért az egyenletrendszert át kell alakítani elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre.

Az egydimenziós másodrendű explicit differenciálegyenlet-rendszer rövid alakban felírva:

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \in R^{(1)}$$

Kétdimenziós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre átalakítva:

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{y}} &= \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t, y_2, y_1) \\ y_1 \end{bmatrix} \in R^{(2)} \\
 \text{ill.} \quad \underline{y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in R^{(2)}
 \end{aligned}$$

A kezdőértékek vektora

$$y(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{bmatrix} \in R^{(2)}$$

Az átalakított differenciálegyenlet-rendszer közvetlenül alkalmas a numerikus megoldás végrehajtására.

**IRODALOMJEGYZÉK**

- Günther Natke: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen – und Modalanalyse  
Friedr. Vieweg&Sohn Braunschweig/Wiesbaden 1983.
- Fodor György: Lineáris rendszerek analízise  
Műszaki Könyvkiadó Bp. 1967.
- Ludvig Győző: Gépek dinamikája  
Műszaki Könyvkiadó Bp. 1973.
- Szabó Imre: Gépészeti rendszertechnika  
Műszaki Könyvkiadó Bp. 1986.
- Gedeon József: Mechanika IV/1. BME  
Tankönyvkiadó Bp. 1990.
- Eduard Stiefel: Bevezetés a numerikus matematikába  
Műszaki Könyvkiadó Bp. 1973.
- Fodor György: Jelek és rendszerek I.  
Műegyetemi kiadó Bp. 1995.

## Gépészeti rendszertechnika

### ***Ellenőrző kérdések***

1. A rendszer fogalma
2. A folyamat fogalma
3. A törvény fogalma
4. A törvény meghatározásának módszertana (törvényszerűségek)
5. A leíró jellemzők felosztása
6. A modell
7. A modellezés
8. A rendszermodell fajtái
9. A szimuláció fogalma
10. A matematikai modell jellege szerinti modellpárok
11. A matematikai modell megalkotásának módjai
12. A rendszeridentifikáció feladatkitűzése
13. Az identifikált modell előállítása
14. Az időben változó fizikai folyamat felosztása
15. Az identifikációs probléma besorolása
16. A rendszervizsgálat ábrázolási módjai
17. A jel fogalma
18. A jelek osztályozása
19. Gerjesztő jelek (diagramok)
20. A determinisztikus jelek fogalma
21. A harmonikus jel kinematikai jellemzői, leírása
22. A periodikus jel kinematikai jellemzői, leírása
23. A nemperiodikus jel leírása a frekvenciatérben
24. A rendszejjellemző függvény fogalma
25. Az átmeneti függvény
26. A gerjesztés közelítése lépcsős görbével
27. A  $t=0$  időpillanatban fellépő ugrás hatására létrejövő felelet
28. A  $\tau$  időpillanatban fellépő ugrás hatására létrejövő felelet
29. Tetszőleges gerjesztés hatására létrejövő felelet az átmeneti függvénnyel kifejezve
30. Az átmeneti függvény meghatározása méréssel
31. Dirac impulzus
32. A súlyfüggvény előállítása az átmeneti függvényből
33. Az állandó amplitudójú impulzus közelítése Dirac impulzussal
34. A rendszer felelete az egységnyi erősségű impulzus alakú gerjesztésre
35. A gerjesztés közelítése Dirac impulzussal
36.  $\Delta\tau$  hosszúságú gerjesztés hatására létrejövő felelet
37. Tetszőleges gerjesztés hatására létrejövő felelet a súlyfüggvénnyel kifejezve
38. Frekvencia jelleggörbe
39. Átviteli függvény
40. Egyszabadságfokú rendszerrel történő átvitel az idő- és a frekvenciatartományban az átmeneti függvénnyel kifejezve
41. Egyszabadságfokú rendszerrel történő átvitel az idő- és a frekvenciatartományban a súlyfüggvénnyel kifejezve
42. A sztochasztikus jelek fogalma
43. A sztochasztikus folyamat vizsgálati módszerei

44. Mintafüggvény fogalma
45. Mintaregisztrátum fogalma
46. Stochasztikus folyamat felosztása
47. Stacionaritás
48. Ergodicitás
49. A sztochasztikus folyamat statisztikai jellemzői az amplitudó tartományban
50. A sztochasztikus folyamat jellemzői az időtartományban
51. A sztochasztikus folyamat jellemzői a frekvenciatartományban
52. Egyszabadságfokú rendszerrel történő átvitel sztochasztikus folyamat esetén az időtartományban
53. Egyszabadságfokú rendszerrel történő átvitel sztochasztikus folyamat esetén a frekvenciatartományban
54. Mozgásegyenletek felírásának módszerei
55. Mozgásegyenletek megoldása numerikus módszerrel

# TARTALOMJEGYZÉK

oldal

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. A RENDSZERTECHNIKAI ALAPFOGALMAI.....</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1. A jelenségek és folyamatok leírása.....                       | 1         |
| 1.2. Rendszermodell.....                                           | 2         |
| 1.3. Szimuláció.....                                               | 3         |
| 1.4. A matematikai modell jellege.....                             | 3         |
| 1.5. A matematikai modell előállítás.....                          | 4         |
| 1.6. A rendszervizsgálat ábrázolási módjai.....                    | 4         |
| 1.7. A jel fogalma és szerepe.....                                 | 6         |
| 1.8. Rendszeridentifikáció.....                                    | 9         |
| 1.8.1. A rendszeridentifikáció besorolása és feladatkitűzése.....  | 10        |
| 1.8.2. Modelldefiníciók és összefüggések.....                      | 12        |
| 1.8.3. Az identifikációs mennyiségek és eljárások jellemzői.....   | 15        |
| 1.8.4. Feltételek és gyakorlati szempontok.....                    | 16        |
| <b>2. DETERMINISZTIKUS JELEK ÉS FOLYAMATOK.....</b>                | <b>18</b> |
| 2.1. Kinematikai jellemzők.....                                    | 18        |
| 2.1.1. Harmonikus jel.....                                         | 18        |
| 2.1.2. Periodikus jel.....                                         | 22        |
| 2.1.3. Szuperponált és modulált jel.....                           | 24        |
| 2.1.4. Nemperiodikus jel.....                                      | 26        |
| 2.1.4.1. Fourier-transzformáció.....                               | 26        |
| 2.1.4.2. Laplace transzformáció.....                               | 31        |
| 2.2. Determinisztikus egyszabadságfokú rendszerek.....             | 33        |
| 2.2.1. Átmeneti függvény.....                                      | 33        |
| 2.2.2. Súlyfüggvény.....                                           | 36        |
| 2.2.3. Frekvencia jelleggörbe.....                                 | 40        |
| 2.2.4. Átviteli függvény.....                                      | 41        |
| 2.2.5. Rendszerösszefoglalás.....                                  | 42        |
| 2.3. Determinisztikus többszabadságfokú rendszerek.....            | 44        |
| 2.3.1. Súlyfüggvények mátrixa.....                                 | 44        |
| 2.3.2. Frekvencia jelleggörbe mátrix.....                          | 44        |
| 2.4. Diszkrét jelek és folyamatok.....                             | 45        |
| 2.4.1. Időfolytonos jelek diszkrétizálása.....                     | 45        |
| 2.4.2. A z-transzformáció.....                                     | 46        |
| 2.4.3. A diszkrét Fourier-transzformáció.....                      | 46        |
| 2.4.4. A fast-Fourier-transzformáció.....                          | 47        |
| 2.5. A Fourier-, a Laplace- és a z-transzformáció áttekintése..... | 48        |
| <b>3. SZTOCHASZTIKUS JELEK ÉS FOLYAMATOK.....</b>                  | <b>49</b> |
| 3.1. A sztochasztikus jelek és folyamatok jellemzése.....          | 49        |
| 3.2. Statisztikai alapok.....                                      | 51        |
| 3.2.1. Valószínűségi változó és jellemzői.....                     | 51        |
| 3.2.2. Több valószínűségi változó.....                             | 54        |
| 3.2.3. Gauss eloszlások.....                                       | 55        |
| 3.3. Sztochasztikus folyamatok.....                                | 56        |
| 3.3.1. Stacionárius sztochasztikus folyamatok.....                 | 57        |

|                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.2. Ergodikus sztochasztikus folyamatok.....                 | 59         |
| 3.4. A sztochasztikus folyamat statisztikai jellemzői.....      | 62         |
| 3.5. Korreláció függvények.....                                 | 66         |
| 3.5.1. Egyszerű időbeli átlagértékek.....                       | 66         |
| 3.5.2. Autokorreláció függvény.....                             | 66         |
| 3.5.3. Keresztkorreláció függvény.....                          | 69         |
| 3.6. Spektrál sűrűségfüggvény.....                              | 71         |
| 3.6.1. A Wiener-Khintchine-transzformáció.....                  | 71         |
| 3.6.2. A hatásos spektrálsűrűség.....                           | 72         |
| 3.6.3. Kereszt spektrálsűrűség.....                             | 75         |
| 3.6.4. Koherencia függvény.....                                 | 75         |
| 3.7. Egyszabadságfokú rendszerrel történő átvitel.....          | 76         |
| 3.7.1. Ábrázolás az időtérben.....                              | 76         |
| 3.7.2. Ábrázolás a frekvenciatérben.....                        | 76         |
| 3.7.3. Rendszerösszefoglalás.....                               | 78         |
| 3.8. Többszabadságfokú rendszerek.....                          | 81         |
| 3.8.1. Ábrázolás az időtérben.....                              | 81         |
| 3.8.2. Ábrázolás a frekvenciatérben.....                        | 81         |
| 3.9. Determinisztikus és sztochasztikus jelek keveréke.....     | 82         |
| <b>4. A DINAMIKAI RENDSZEREK MODELLEZÉSE.....</b>               | <b>84</b>  |
| 4.1. A dinamikai rendszerek osztályozása.....                   | 85         |
| 4.2. A modell elemei.....                                       | 86         |
| 4.3. A modell vizsgálatának módszerei.....                      | 90         |
| 4.4. Modellalkotás.....                                         | 97         |
| <b>5. A MOZGÁSEGYENLETEK FELÍRÁSÁNAK MÓDSZEREI.....</b>         | <b>105</b> |
| 5.1. A mozgásegyenletek felírásának szintetikus módszere.....   | 105        |
| 5.2. A mozgásegyenletek felírásának analitikus módszere.....    | 106        |
| 5.3. A mátrix-számítás alkalmazása.....                         | 113        |
| <b>6. A MOZGÁSEGYENLET MEGOLDÁSA.....</b>                       | <b>121</b> |
| 6.1. Analitikus megoldás.....                                   | 121        |
| 6.2. Megoldás a fázis-síkon.....                                | 128        |
| 6.3. Megoldás komplex változók segítségével.....                | 132        |
| 6.4. Típus rendszerek és a feladatok visszavezetése.....        | 137        |
| <b>7. A MOZGÁSEGYENLET MEGOLDÁSÁNAK NUMERIKUS MÓDSZEREI....</b> | <b>138</b> |
| 7.1. Numerikus differenciálás.....                              | 138        |
| 7.2. Numerikus integrálás.....                                  | 140        |
| 7.3. Elsőrendű differenciálegyenletek.....                      | 142        |
| 7.3.1. Elsőrendű nemlineáris differenciálegyenletek.....        | 144        |
| 7.3.2. Heun-módszer.....                                        | 146        |
| 7.3.3. Runge-Kutta-módszer.....                                 | 146        |
| 7.4. A mozgásegyenletek visszavezetése elsőrendűre.....         | 147        |
| <b>IRODALOMJEGYZÉK.....</b>                                     | <b>149</b> |
| <b>ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK.....</b>                                  | <b>150</b> |