

Függvények, analízis feladatok (emelt szint)

1. (ESZÉV Minta (1) 2004.05/1)

Oldja meg grafikus módszerrel az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$3^x < 2\sqrt{x} + 1.$$

2. (ESZÉV Minta (1) 2004.05/7)

Két tesztautó egyszerre haladt át a startvonalon, majd ugyanazon az egyenes úton folytatta útját. Az egyes autók startvonalától mért távolságát a $0 \leq t \leq 90$ időintervallumon az

$$f(t) = 900 - \frac{1}{4}(t - 60)^2 \text{ és a } g(t) = \frac{20t}{3}$$

képlettel megadott függvény írja le, ahol az időt másodpercben, a távolságot méterben mérjük.

- Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényeket!
- Mekkora távolságra voltak a startvonalától az autók a mérés kezdete után 1,5 perccel?
- Fogalmazza meg, hogy mit ír le az $f - g$ függvény!
- Határozza meg számítással azt a pillanatot, amelyben a mérés során a két autó a legtávolabb került egymástól!

3. (ESZÉV Minta (2) 2004.05/3)

Határozza meg a grafikonjuk egyenletével megadott, a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvények értékkészletét! Vizsgálja e függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából, rajzolja meg grafikonjukat derékszögű koordináta-rendszerben!

- $y = x \cdot |x|$.
- $y = (\sin x + \cos x)^2$.

4. (ESZÉV Minta (2) 2004.05/9)

1910 júniusában Lisszabon kikötőjéből M tonna üzemanyaggal útnak indul az Arca nevű gőzös. Az óránkénti tüzelőanyagfelhasználás (y tonna óránként) a hajó sebességétől (v csomó, azaz tengeri mérföld/óra) a következő képlet szerint függ: $y = 1,4 + 0,005v^2$, ahol a képletben szereplő számok a hajó típusától függő állandók. Mekkora állandó sebességgel kell mennie a hajónak, hogy M tonna tüzelőanyaggal a lehető legnagyobb utat tegye meg?

5. (ESZÉV Minta (3) 2004.05/9)

Az $x^3 + 2x^2 + cx + y + d = 0$ egyenletű grafikonról tudjuk, hogy az origóban érinti az x tengelyt.

- Határozza meg a c és d valós paraméterek értékét!
- Határozza meg a $x \mapsto -x^3 - 2x^2$ ($\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$) függvény menetét és szélsőértékeit!
- A zérushelyek megállapítása után ábrázolja a fenti függvényt!

6. (ESZÉV 2005.05/4)

- Ábrázolja a $[0; 6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \frac{1}{2}|x - 4| + 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!
- Állapítsa meg a függvény értékkészletét!
- Forgassuk meg a $[0; 4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét!

7. (ESZÉV 2005.05/6)

Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p - 3,5)x^2 + 2(p - 2)x + 6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

- a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!
 b) Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?

8. (ESZÉV 2005.10/4)

- a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $f: [0; 7] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ függvényt!
 b) Adja meg az f függvény értékkészletét!
 c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0; 7]$ intervallumon?

9. (ESZÉV 2006.05/2)

Legyen adott az $f: [-2,5; 2,5] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ függvény.

- a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit!
 b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából!
 c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

10. (ESZÉV 2006.05/8)

- a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével az $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt a $[-3; 4]$ intervallumon!
 b) Legyen az f , g és h függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x - 3$ és $h(x) = |x|$. Készítse el az f , g és h függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszerűen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit!
 c) Keressen példát olyan p és t , a valós számok halmazán értelmezett függvényekre, amelyekre $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$! Adja meg a p és t függvények hozzárendelési szabályát!

11. (ESZÉV-NY 2006.05/6)

Adottak az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 10x - 22$ és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 6$ függvények.

- a) Oldja meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet!
 b) Írja fel az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y = f(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét!
 c) Ábrázolja az f és a g függvény grafikonját! Számítsa ki az $y = f(x)$, $y = g(x)$ egyenletű grafikonok és az $x = 6$ egyenletű egyenes által közrefogott, az y tengelyhez közelebbi síkidom területét!

12. (ESZÉV 2006.10/6)

Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az

$$m(t) = 12 - \frac{10}{t+1} \text{ képlet;}$$

a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula:

$$h(t) = 5\sqrt{0,4t + 1} + 0,4,$$

ahol t az 1969 óta eltelt időt jelöli években ($t \geq 1$), és a magasságot méterben számolják.

- a) Adja meg a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását egy olyan táblázatban, amely a magasságokat az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja!
 b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?
 c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amelynek magasságát a

$$g(t) = t^3 - 16,5t^2 + 72t + 60$$

képlet írja le! (A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években.)

13. (ESZÉV 2007.05/4)

- a) Ábrázolja a $[0; 6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!
- b) Adja meg az $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5; -4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét!

14. (ESZÉV 2007.05/5)

- a) Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető!
- b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!
- c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan?
A: Az f értékkészlete: $[0; 5]$
B: Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.
C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon.
- d) Határozza meg az $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx$ értékét!

15. (ESZÉV-NY 2007.05/8)

Az f függvényt a $[0; 5]$ intervallumon értelmezzük: $f(x) = 3 \cos x - \cos(-x)$.

- a) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e? A válaszait indokolja!
▪ Az f függvény korlátos.
▪ Az f függvény minimumhelye és legnagyobb értéke is irracionális szám.
- b) Mekkora területű síkidomot határol az x tengely $[0; 5]$ intervalluma; az y tengely $[0; f(0)]$ intervalluma; az $x = 5$ egyenes $[0; f(5)]$ intervalluma és az f függvény görbéje?

16. (ESZÉV 2007.10/6)

Adott az $f:]-1; 6[\rightarrow \mathbf{R}, f(x) \mapsto -4x^3 + 192x$ függvény.

- a) Határozza meg f zérushelyeit, és elemezze az f függvényt monotonitás szempontjából!
- b) Jelölje c az f értelmezési tartományának egy pozitív elemét. Határozza meg a c értékét úgy, hogy az x tengely $[0; c]$ szakasza, az $x - c = 0$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen!

17. (ESZÉV 2007.10/7)

Igazolja, hogy az alábbi függvénynek nincs szélsőértéke!

$$f:]1; \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}.$$

18. (ESZÉV 2008.05/6)

- a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!
- b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexió pontját!

19. (ESZÉV-NY 2008.05/8)

A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélén a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe 600 cm^2 . Mekkora legyenek a lap méretei, ha a szerkesztő a lehető legnagyobb nyomtatási területet szeretné elérni a lapokon?

20. (ESZÉV 2008.10/7)

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 5$. Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét!

21. (ESZÉV 2009.05/4)

Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq -1; \\ 2x + 1, & \text{ha } -1 < x < 0; \\ 1, & \text{ha } x \geq 0; \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = x^2 - 2.$$

- Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt!
- Adja meg az $f(x) = g(x)$ egyenlet valós megoldásait!
- Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét!

22. (ESZÉV-NY 2009.05/3)

Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ függvény.

- Számítsa ki a függvény zérushelyeit és számítással határozza meg a függvény minimumának helyét és értékét!
- Ábrázolja a függvényt a $[-2; 4]$ intervallumon!
- Határozza meg az $y = 2x^2 - 4x - 6$ egyenletű parabola fókuszpontjának koordinátáit!

23. (ESZÉV 2009.10/9)

Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával. Mekkora legyen m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy üreges fatalpra fogják állítani.) Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m , a határoló kör sugara pedig r , akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$.

24. (ESZÉV 2010.05/1)

Adott az f és a g függvény:

$$f: D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}; \quad x \mapsto (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x.$$

- Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans!

$$g: D_g = [-7; 7]; \quad x \mapsto x^2 - 6|x|.$$

- Számítsa ki a g függvény zérushelyeit!
- Adja meg a g függvény értékkészletét!

25. (ESZÉV 2010.05/6)

Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $a \in \mathbf{R}$.

- Igazolja, hogy $\int_0^a f(x) dx = -a^3 + a$.
- Mely pozitív valós a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x) dx \geq 0$?
- Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $f(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?

26. (ESZÉV-NY 2010.05/3)

Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára *annyiszor 400 Ft-tal* csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

- Adja meg annak a B függvénynek az $x \mapsto B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételeit jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?
- Hány utas esetén lesz a repülő-társaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

27. (ESZÉV-NY 2010.05/9)

Jelölje az $y = x^2 - 4x - 12$ egyenletű parabola tengelypontját C , az x tengellyel alkotott metszéspontjait pedig A és B . Az ABC háromszög területe hányad része a parabola és az x tengely által közrefogott zárt síkidom területének?

28. (ESZÉV 2010.10/1)

Az alábbi f és g függvényt is a $[-3; 6]$ intervallumon értelmezzük.

$$f(x) = \sqrt{x+3} \text{ és } g(x) = -0,5x + 2,5.$$

- Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és a g függvényt a $[-3; 6]$ intervallumon!
- Igazolja számolással, hogy a két grafikon metszéspontjának koordinátái egész szám!

29. (ESZÉV 2010.10/5)

Az $x^2 = 2y$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \leq 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét!

30. (ESZÉV 2010.10/7)

Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0,03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0,0001x^3 - 30,12x + 13\,000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

- Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?
- Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? (*nyereség = bevétel - kiadás*)

31. (ESZÉV 2011.05/7)

A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

- Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?

- b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

32. (ESZÉV-NY 2011.05/1)

Adott az $f: [-2; 5] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ függvény. Jellemezze a függvényt a következő szempontok szerint: növekedés, fogyás, szélsőérték (helye és értéke)!

33. (ESZÉV-NY 2011.05/9)

Egy játéküzemben fa elemekből álló építőkészletet gyártanak. Ha x darab készletet gyártanak naponta, akkor a teljes gyártási költség $k(x) = \frac{x^{1,5}}{5} + 12x + 300$ euró. Egy készletet 18 euróért tudnak értékesíteni. Naponta hány készletet gyártson az üzem, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ez a maximális haszon?

34. (ESZÉV 2011.10/8)

Az $ABCD$ négyzet csúcsai: $A(0; 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?

35. (ESZÉV 2011.10/8)

- a) Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$f: [0; 5] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x^2 - 4x + 3| \text{ függvényt!}$$

- b) Tekintsük az $|(x - 2)^2 - 1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!
- c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6; 6[$ intervallumon!
- d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét!

36. (ESZÉV 2012.05/4)

Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya: $f(x) = -3x^3 + (p - 3)x^2 + p^2x - 6$.

- a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x) dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$.
- b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!
- c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

37. (ESZÉV-NY 2012.05/6)

Adott az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény. Grafikonjának tengelypontja a $T(4; 2)$ pont, és a $P(2; 0)$ pont is illeszkedik a grafikonra.

- a) Számítsa ki az a , b , c együtthatók értékét!
- b) Írja fel a grafikon 3 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét!
- c) Számítsa ki az f grafikonja és az x tengely által határolt tartomány területet!

38. (ESZÉV 2012.10/7)

Egy üzemben 4000 cm^3 -es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománccfestékekkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománccfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!

39. (ESZÉV 2013.05/7)

Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdni, amelynek térfogata 1000 cm^3 . A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0,2 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$, míg oldalának anyagköltsége $0,1 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$. Mekkora legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintba kerekítve!

40. (ESZÉV-NY 2013.05/6)

Rajzolja meg közös koordináta-rendszerben az $y = x^2 + 2x$, és az $y = x^2 - x - 3$ egyenletű parabolákat! Számítsa ki e két parabola és az y tengely által határolt síkidom területét!

41. (ESZÉV 2013.10/6)

Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- az üzemeltetési költség $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén $400 + 0,8x$ Ft kilométerenként;
- a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

- a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsikilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban, egészre kerekítve adja meg!
- b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f: [0; 6] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0; 4]; \\ \frac{x^2 - 12x + 36}{2}, & x \in]4; 6]. \end{cases}$$

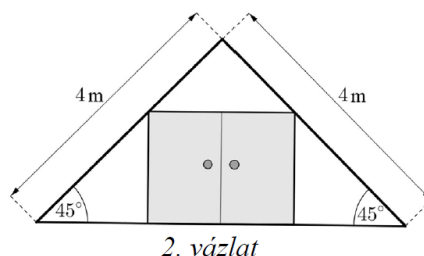
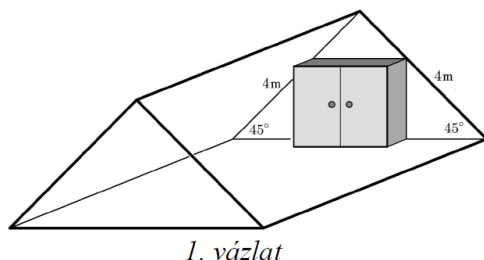
Számítsa ki az embléma modelljének területét!

42. (ESZÉV 2014.05/4)

- a) Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az $f:]-2; 3[\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!
- b) Adja meg azt a $g:]-2; 3[\rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy $g' = f$ (tehát az f függvény a g deriváltfüggvénye), és ezen kívül $g(2) = 0$ is teljesül!

43. (ESZÉV 2014.05/9)

Kovács úr a tetőtérbe egy téglatest alakú beépített szekrényt készített. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig előlnézetben ábrázolja a szekrényt.



A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie. Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.)



44. (ESZÉV-NY 2014.05/6)

Adott az $y = -x^2 + 2x + 5$ egyenletű parabola. Az $y = 2$ egyenletű egyenes és a parabola első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük P -vel. Számítsa ki a parabola P pontbeli érintőjének a meredekségét!

45. (ESZÉV-NY 2014.05/7)

Határozza meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a , b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

- 1) $f(1) = f(-1) + 4$;
- 2) $f'(3) = 10$ (f' az f deriváltfüggvénye);
- 3) $\int_0^2 f(x) dx = -8$.

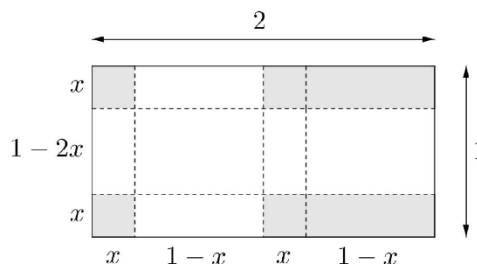
46. (ESZÉV 2014.10/4)

Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

- a) Igazolja, hogy ha $x \in]0; 3[$, akkor $y > 0$.
- b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta)
- c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre!

47. (ESZÉV 2014.10/7)

Egy üzemben fémdobozok gyártását tervezik. A téglalap alakú doboz hálózátát egy 2 méter $\times$ 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen?

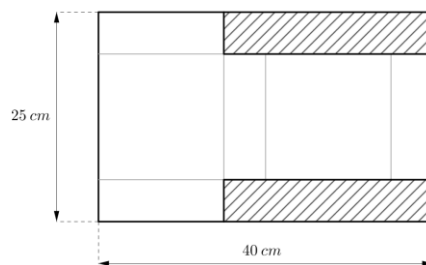
**48. (ESZÉV 2015.05/5)**

Adott az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$ és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 - 2$ függvény.

- a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!
- b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet!
- c) Számítással igazolja, hogy a $h:]-\infty; -0,5[\rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

49. (ESZÉV-NY 2015.05/5)

Egy 40 cm $\times$ 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő. Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

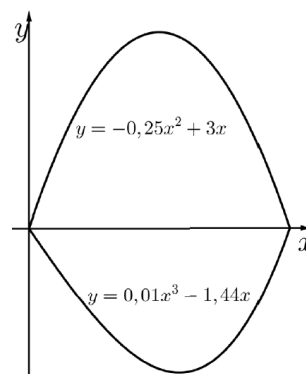
**50. (ESZÉV-NY 2015.05/8)**

A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y = -0,25x^2 + 3x$, illetve az $y = 0,01x^3 - 1,44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0 \leq x \leq 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.) Tudjuk, hogy a $(0; 0)$ és a $(12; 0)$ pont a két ív közös pontja.

- a) Mindkét ív esetében adja meg az ív x tengelytől legtávolabbi pontjának első koordinátáját!
- b) Mekkora a két ív által közrezárt síkidom területe?
- c) Értelmezzük a $]0; 12[$ intervallumon az alábbi hozzárendeléssel megadott f és g függvényeket:

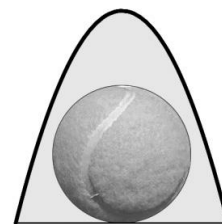
$$f(x) = \frac{-0,25x^2 + 3x}{0,01x^3 - 1,44x} \text{ és } g(x) = -\frac{25}{x+12}.$$

Igazolja, hogy $f(x) = g(x)$, és mutassa meg, hogy a g függvény szigorúan monoton növekvő!



51. (ESZÉV 2015.10/4)

Egy teniszeremény emblémája a koordináta-rendszerben készült tervrajzon az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely által határolt a parabolaszéletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2,6y = 0$. Hány százaléka a kör területe a parabolaszélet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!



52. (ESZÉV 2015.10/7)

Adott az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

- a) Igazolja, hogy a függvénynek $x = -15$ -ben abszolút minimuma, $x = 0$ -ban lokális maximuma, $x = 9$ -ben lokális minimuma van!
- b) Igazolja, hogy f konkáv a $] -9; 5[$ intervallumon!
- c) Newton-Leibniz-tétellel határozza meg a $\int_0^5 f(x) dx$ határozott integrál értékét!

53. (ESZÉV Minta (1) 2015.10/8)

A valós számok halmazán értelmezett f , g és h függvényekről a következőket tudjuk:

- I. A g és h elsőfokú függvények képei egymásra merőleges egyenesek.
- II. A két egyenes az y tengelyt a $(0; 3)$ pontban metszi.
- III. A $g \circ h$ függvény zérushelye $x = 9$.

(Megjegyzés: A $g \circ h$ összetett függvény definíciója: $(g \circ h)(x) = g(h(x))$)

- a) Adja meg a g és h függvények hozzárendelési szabályát, és igazolja, hogy az $f = g \cdot h$ függvény hozzárendelési szabálya $f: x \mapsto -x^2 + \frac{9}{2}x + 9$!
- b) Adja meg az f függvény $x = 2$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének az egyenletét!

54. (ESZÉV Minta (2) 2015.10/4)

Adott az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$ és a $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x + 3$ függvény.

- a) Határozza meg az $f \circ g$ összetett függvény hozzárendelési szabályát! (A polinomfüggvény fokszám szerint rendezett alakját adja meg!) Az $f \circ g$ összetett függvény definíciója: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- b) Számítsa ki a $g \circ f$ függvény $x = 1$ helyen felvett helyettesítési értékét!
- c) Állapítsa meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g}{f}$ határértéket, és adjon meg egy olyan x_0 küszöbértéket, amelynél nagyobb x -ekre $\frac{g}{f}$ 0,01-nál jobban megközelíti a határértéket!

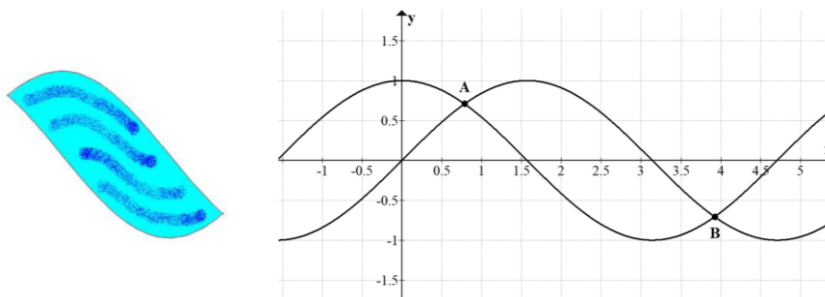
55. (ESZÉV Minta (2) 2015.10/6)

Bonifác mester, egy kisváros pékmestere minden nap hajnalban kel, és 12 órát tölt a műhelyben. Idejének egy részében nehéz fizikai munkát végez, a fennmaradó időben pihen. Saját becslése szerint a naponta elkészített péksütemények $M(t)$ számát a munkavégzésre fordított t óra függvényében jó közelítéssel adja meg a következő képlet: $M(t) = t^2(12 - t)$. A napi 12

órából mennyi időt fordítson a mester fizikai munkára, illetve pihenésre, hogy a lehető legtöbb péksüteményt tudja elkészíteni?

56. (ESZÉV Minta (2) 2015.10/9)

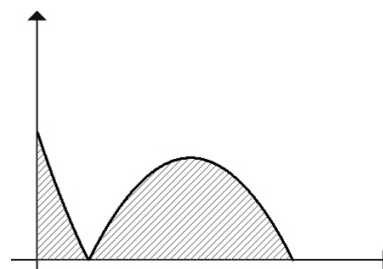
Az ábrán egy cég által tervezett, ún. „csepp” logó látható. Ezt az alakzatot a grafikonon látható A és B pontok közötti $a(x) = \sin x$ és $b(x) = \cos x$ egyenletű függvénygörbék határolják.



Határozza meg az A és a B pont koordinátáit! Mekkora a „csepp” logó területe, ha a koordináta-rendszerbeli 1 egység a valóságban 3 cm-nek felel meg?

57. (ESZÉV Minta (3) 2015.10/9)

Egy folyóparti kettős földgát két homokból épített töltésből áll, melyeket egymás mellé építettek. A töltés keresztmetszetét az $x \in [0; 5]$, $h(x) = \frac{1}{2}|x^2 - 6x + 5|$ függvény írja le. (A gátak x szélessége és h magassága egyaránt méterben adott.) A kettős gátnak a folyóparttal párhuzamos, kb. 9 méteres szakasza lényegében egyenesnek tekinthető.



- Hány köbméter földre volt szükség ennek a kilenc méteres szakasznak a kiépítéséhez? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!
- Határozza meg a $h(x)$ függvény $x = 4$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének egyenletét!

58. (ESZÉV 2016.05/7)

Adott az f , a g és a h függvény:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2^x - 1;$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 3x + 2;$$

$$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = 12 - x^2.$$

- Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f és külső függvénye a h (vagyis $k(x) = h(f(x))$ minden x valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.
- Oldja meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
- Mekkora a h és az $x \mapsto -4$ ($x \in \mathbf{R}$) függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület?

59. (ESZÉV 2016.05/9)

A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800 + 950\,000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

- A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

- Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502\,200 + \frac{265\,050\,000}{v}$ kg lesz ($v > 0$)!

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800 \text{ km/h} \leq v \leq 1100 \text{ km/h}$.

- c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

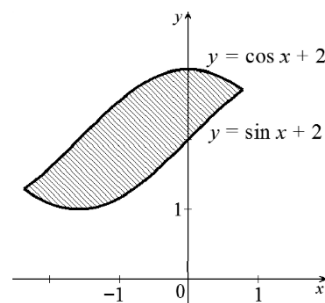
60. (ESZÉV-NY 2016.05/4)

Egy város kézilabdacsapatának vezetői a bajnoki mérkőzések jegybevételét szeretnék növelni. A korábbi évek adatai azt mutatják, hogy 1500 Ft-os jegyár esetén átlagosan 1000-en vásárolnak jegyet. Az adatokból az is kiderül, hogy ahányszor 5 Ft-tal csökkentik a jegy árát, átlagosan annyszor 10 fővel többen váltanak jegyet az adott mérkőzésre; ha a jegyárat növelik, akkor pedig ahányszor 5 Ft-tal nő a jegy ára, átlagosan annyszor 10 fővel csökken a jegyet vásárló nézők száma. (A jegy ára forintban kifejezve 0-ra vagy 5-re végződhöz.)

- a) Mutassa meg, hogy ha a jelenlegi jegyár 1500 forint, akkor a fenti modell szerint a jegyárak bármilyen összegű növelése esetén csökkenni fog az összbevétel!
b) A modell szerint mekkora lehet a jegyárakból származó legnagyobb bevétel egy mérkőzésen, és mennyit kell fizetni ebben az esetben egy jegyért?

61. (ESZÉV-NY 2016.05/4)

Számítsa ki az ábrán látható, két görbe vonal által közrefogott síkidom területét! (Az egyik határoló vonal az $y = \sin x + 2$, a másik pedig az $y = \cos x + 2$ egyenletű görbének egy része.)



62. (ESZÉV 2016.10/7)

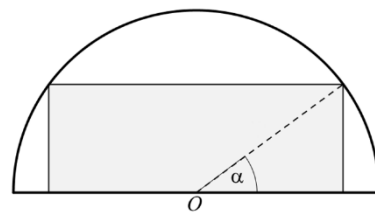
Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ és } g(x) = 10 + 10x - x^2.$$

- a) Igazolja, hogy a $[2; 8]$ intervallumon az f és a g függvények csak pozitív értékeket vesznek fel!
b) Határozza meg azt a t valós számot a $[2; 8]$ intervallumban, amelyre teljesül, hogy az f függvény görbéje alatti terület a $[2; t]$ intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a $[t; 8]$ intervallumon.

63. (ESZÉV 2016.10/8)

Egy várrom területén szabadtéri színház alakítanak ki. A tervrajz szerint a téglalap alakú színpadot az egyik bástya félkör alakban elhelyezkedő falmaradványai közé helyeznék el. A bástya belső átmérője 12 méter. (Az ábrán a tervrajz egy részlete látható: O a félkör középpontja, a téglalap csúcsába vezető sugár és az átmérő közötti szög pedig α ; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.) Hogyan kell megválasztani az α szöget, hogy a színpad területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a legnagyobb terület?



64. (ESZÉV 2017.05/4)

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

- a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!
b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

65. (ESZÉV 2017.05/6)

Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezfordókat. Mekkora annak a 200 liter térfogatú, felül nyitott forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

66. (ESZÉV-NY 2017.05/4)

- a) Mekkora területű síkidomot zár közre az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola és az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenes?

Az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontban metszi.

- b) Számítsa ki a parabola B pontbeli érintőjének meredekségét, ha tudjuk, hogy a B pont első koordinátája pozitív!

67. (ESZÉV-NY 2017.05/9)

Több részletben összesen 350 tonna árut szeretnénk vasúton elszállíttatni. Az egyik szállítócég árajánlatában a szállítási díj két összetevőből áll. Egyrészt a szállított áru tömegének négyzetével arányos díjat kell fizetnünk, másrészt az áru tömegétől független állandó alapidjat is felszámítanak: ha egyszerre t tonna áru elszállítását rendeljük meg, akkor ezért $\frac{t^2}{10} + 205$ eurót kell fizetnünk.

- a) Igazolja, hogy ha két részletben (két alkalommal) szállíttatnánk el a 350 tonna árut, akkor a vasúti költség abban az esetben lenne a legkisebb, ha az árut két egyenlő tömegű részre osztanánk!

A vasúti szállítás költségének csökkentése érdekében a 350 tonna tömegű árut n egyenlő részre osztjuk, és azt tervezzük, hogy minden egyes alkalommal egy-egy részt szállíttatunk el a vasúttal ($n \in \mathbf{N}^+$).

- b) Igazolja, hogy a szállítócég ajánlata szerint az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen $\frac{12\,250}{n} + 205n$ euró lenne!

A vasúti szállítás költségén kívül figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha a 350 tonna árut n egyenlő tömegű részre akarjuk szétosztani, akkor a munka elvégzéséért nekünk $(n - 1) \cdot 400$ eurót kell fizetnünk ($n \in \mathbf{N}^+$).

- c) Hány egyenlő tömegű részletre bontva lenne a legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása?

68. (ESZÉV 2017.10/4)

Adott a $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény.

- a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú intervallumot, amelyben a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!
- b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x) dx = 0$ teljesüljön!
- c) Határozza meg az $f:]-4; -1[\rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

69. (ESZÉV 2018.05/8)

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.



A híd két támpillérének PV távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a PV felezőpontja (U), a tengelye pedig a PV felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PQ = 50$ méter. A tervek szerint a QR íven fel függesztett hirdetővászon az ábrán sötétített $PQRS$ területet fedi majd be (RS merőleges PS -re).

Hány m^2 területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező?

70. (ESZÉV 2018.05/8)

Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt”, azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is). A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni. A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

- A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?
- Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

71. (ESZÉV-NY 2018.05/5)

Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 1$ függvény. Hány rácsponthoz tartozik az f függvény grafikonja és a koordinátatengelyek által az első síknegyedben közbezárt síkidom? (A síkidom határolóvonalait is a síkidomhoz tartozónak tekintjük.)

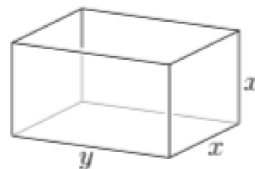
72. (ESZÉV-NY 2018.05/5)

- Számítsa ki az a , b és c értékét, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ és $a \neq 0$) függvényről tudjuk, hogy $f'(2) = 6$ és $f'(6) = 2$, valamint $\int_0^2 f(x) dx = \frac{50}{3}$.
- Határozza meg annak a $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amely érinti az $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3$ egyenletű parabolát!

73. (ESZÉV-NY 2018.05/8)

Négyszetes oszlop alakú üveg akváriumot vettünk. A választott akvárium felülről nyitott, négyzetlapjai függőleges síkúak (az ábra szerint), és pontosan 288 liter víz fér bele.

Azt szeretnénk tudni, hogy a belső üvegfelületek káros algásodása szempontjából kedvező volt-e a választásunk. Számítsa ki, hogy – a megadott feltételek mellett – hány deciméter hosszúak a lehető legkisebb belső felületű akvárium (belső) élei!



74. (ESZÉV 2018.10/4)

Egy zöldségárú vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

- a) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat:

$$y = -\frac{1}{5}x + 200 \quad (0 < x < 1000).$$

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségáros másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

- b) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségáros napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.)

75. (ESZÉV 2018.10/9)

- a) Határozza meg a $p > 0$ valós paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20) dx = 0$ teljesüljön!

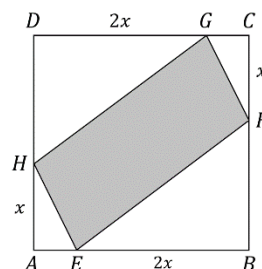
- b) Adja meg az a, b, c valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi függvénynek $x = 2$ -ben zérushelye, $x = 4$ -ben lokális maximumhelye, $x = -1$ -ben pedig inflexiós pontja legyen!

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28, \quad x \in \mathbb{R}.$$

76. (ESZÉV 2019.05/1)

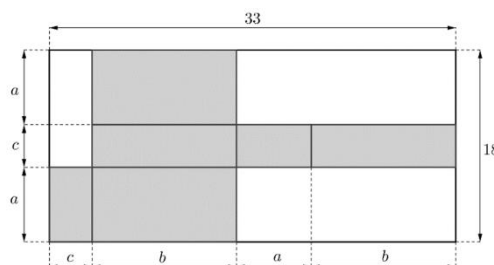
Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az $EFGH$ paralelogrammát írjuk. Az AH és a CF szakasz hossza x méter, a BE és a DG szakasz hossza $2x$ méter ($0 < x < 2$).

- a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2 -ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$.
- b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!



77. (ESZÉV 2019.05/5)

Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az ábra szerint választják meg. Hogyan kell megválasztani az a, b, c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



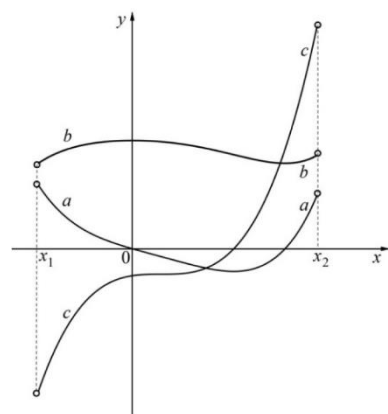
78. (ESZÉV-NY 2019.05/6)

Egy r sugarú köríkek ívhossza i , a köríkek kerülete: $2r + i = 10$ cm. Igazolja, hogy a 10 cm kerületű köríkek közül annak maximális a területe, amelynek a középponti szöge 2 radián nagyságú!

79. (ESZÉV-NY 2019.05/9)

Az ábrán az $]x_1; x_2[$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény grafikonja, valamint az f első deriváltfüggvényének és az f második deriváltfüggvényének grafikonja látható. A három függvény grafikonját valamilyen sorrendben az a, b, c betűkkel jelöltük.

Az alábbi táblázat A jelű állítása szerint az ábrán a jelöli az f függvényt, b jelöli az f első deriváltfüggvényét (f'), és c jelöli az f második deriváltfüggvényét (f''). Ehhez hasonlóan felsoroltuk az összes többi lehetséges megfeleltetést is.



- a) Állapítsa meg a **B, C, D, E, F** állítások logikai értékét! Válaszait itt nem kell indokolnia. (Az **A** állítás hamis, ezt már megadtuk.)
- b) A függvény és deriváltfüggvényei közötti kapcsolatokra alapozva indokolja meg, miért hamis az **A** állítás!

	f	f'	f''	az állítás igaz/hamis
A	a	b	c	hamis
B	a	c	b	
C	b	a	c	
D	b	c	a	
E	c	a	b	
F	c	b	a	

- Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben az A, B, C, D pontok: $A(0; 4)$, $B(0; 1)$, $C(p; 1)$, $D(p; 4)$, ahol $p > 0$. Az $y = \frac{x^2}{4}$ egyenletű görbe felezi az $ABCD$ téglalap területét.
- c) Igazolja, hogy $p > 4$, majd számítsa ki p értékét!

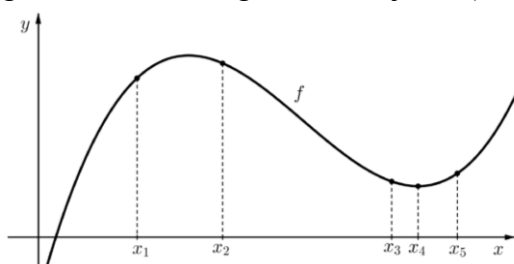
80. (ESZÉV 2019.10/1)

Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk egy adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a $d: [5; 20] \rightarrow \mathbf{R}$, $d(x) = -0,25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

- a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?
- b) Hány dm^2 -rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
- c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter?

81. (ESZÉV 2019.10/4)

- a) Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet. Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába! (Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

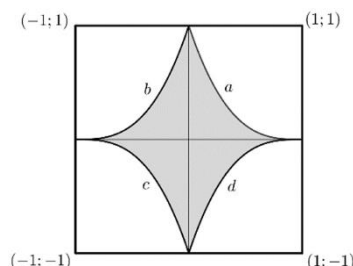
- b) Adott az $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 8$ egyenletű parabola. Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x - y = k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is!

82. (ESZÉV 2019.10/5)

Az egységnyi oldalú, szabályos ABC háromszögbe olyan $PQRS$ téglalapot írunk, melynek PQ oldala az AB oldalra illeszkedik, R a BC oldal pontja, S pedig a CA oldalé. Határozza meg a $PQRS$ téglalap területének maximális értékét!

83. (ESZÉV 2019.10/8)

Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint. Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, illetve $(1; -1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az a jelű ív egyenlete $y = (1 - x)^3$, $0 \leq x \leq 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus. Írja fel a másik három (az ábrán b, c , illetve d jelű) ív egyenletét is!

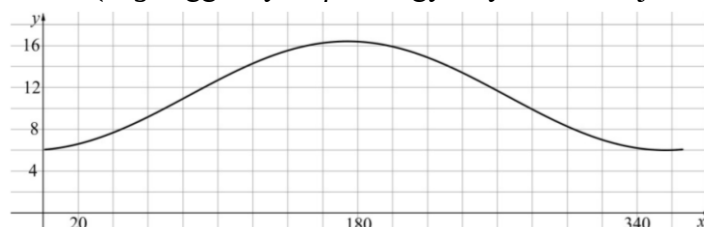


84. (ESZÉV 2020.05/5)

Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5,2 \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11,2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365$, $n \in \mathbf{N}$). Az alábbi ábra a $g: [1; 365] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = -5,2 \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11$ függvényt szemlélteti. (A g függvény az f -nek egy folytonos kiterjesztése.)



- Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal! Válaszát óra:perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!
- Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

Adott egy másik, az $y = -5,2 \cos x + 11,2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és az $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek.

- Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

85. (ESZÉV 2020.05/9)

Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek). A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készítettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

- Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?
- Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

86. (ESZÉV-NY 2020.05/4)

Adott az $y = 7 - \frac{1}{2}x$ egyenletű e egyenes. Számítsa ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet $y = -\frac{(x-4)^2}{4} + 7$ egyenletű parabola és az e egyenes határol!

87. (ESZÉV-NY 2020.05/9)

Több próbaút során is vizsgálták, hogy az 1917-ben gyártott és nosztalgiajárműként megőrzött 109.109 sorozatszámú gőzmozdony szénfogyasztása hogyan függ a mozdony átlagsebességétől. A mérések szerint v km/h átlagsebesség esetén ($50 < v < 100$) jó közelítéssel $0,5v^2 -$

$65v + 3800$ kg volt az óránkénti szénfogyasztás. A mozdony a hozzákapcsolt szerkocsiban 6,1 tonna szenet tud magával vinni.

- Számítsa ki, hogy 60 km/h átlagsebesség esetén (a megadott modell szerint) hány km hosszúságú útra elegendő a 6,1 tonna szénkészlet!
- Határozza meg azt az átlagsebességet, amelynél a 6,1 tonna szén a lehető leghosszabb útra elegendő!

88. (ESZÉV 2020.10/1)

Adott két függvény: $f:]0; 130[\rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 900 - 0,25(x - 60)^2$, illetve $g:]0; 130[\rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 6,4x$.

- Adja meg a f zérushelyét!
- Számítsa ki az $f(20) - g(20)$ különbség értékét!
- Adja meg a $h:]0; 130[\rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (helyét és értékét)!

89. (ESZÉV 2020.10/5)

Határozza meg az $f(x) = (x + 4)(2 - x)$ és $g(x) = x + 4$ függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét!

90. (ESZÉV 2020.10/6)

Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbf{N}^+$, akkor a $b_n = \frac{L}{1+K \cdot 0,75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekvő, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

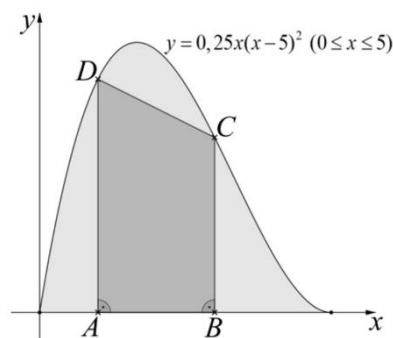
91. (ESZÉV 2021.05/4)

Adott az $y = 0,25x(x - 5)^2$ egyenletű görbe, ahol $0 \leq x \leq 5$.

- Igazolja, hogy az origó és az $(5; 0)$ pont is rajta van a görbén!

Az $ABCD$ derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja $A(1; 0)$, illetve $B(3; 0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A megadott görbe és az x tengely $[0; 5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.

- Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznek is pontja lesz?



92. (ESZÉV 2021.05/5)

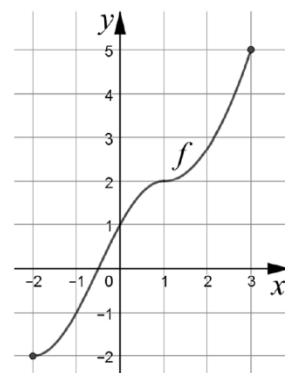
Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3}{(1+\cos x)^2+2}$ függvény értékkészlete az $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ intervallum.

93. (ESZÉV 2021.05/7)

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45° -os szögre törekszik a dobás indításánál.

- Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0; 2)$ és a $Q(4,6; 3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45° ! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg!



Az ábrán a $[-2; 3]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos f függvény grafikonja látható.

b) Adja meg az f inverzfüggvényének értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából!

94. (ESZÉV 2021.05/8)

Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n -szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbf{N}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

- a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik!
- b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne!

95. (ESZÉV-NY 2021.05/4)

Adott az $x^2 - 4y = 0$ egyenletű parabola és az $x - y = 5$ egyenletű g egyenes. Adja meg a parabola g egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét!

96. (ESZÉV-NY 2021.05/7)

Határozza meg a $10\,000\text{ cm}^2$ felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatú henger alapkörének a sugarát és a henger magasságát!

97. (ESZÉV-NY 2021.05/9)

- a) Számítsa ki az $a_n = \frac{2}{(n+1)^2-1}$ sorozat első négy tagjának az összegét! Válaszát $\frac{a}{b}$ alakban adja meg, ahol a és b relatív prím pozitív egész számok!
- b) Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ határértéket!

98. (ESZÉV 2021.10/5)

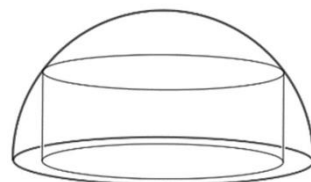
Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$ és így tovább, $a_n = \binom{n+1}{2}$, ahol $n \in \mathbf{N}^+$. A sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Mennyi a (b_n) sorozat határértéke?

99. (ESZÉV 2021.10/5)

Az $y = \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x)$ egyenletű g görbe áthalad az $A(1; 3)$ és $B(3; 5)$ pontokon, a h egyenes pedig az origón és a $C(4; 4)$ ponton. Mekkora a g és h által közbezárt korlátos alakzat területe?

100. (ESZÉV 2021.10/5)

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint). Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a!



101. (ESZÉV Minta 2021.10/2)

Adott a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto 3 - 6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ függvény.

- a) Mennyi az f függvény (legkisebb pozitív) periódusa?
- b) Igazolja, hogy az f függvény páros!

c) Adja meg az f függvény zérushelyeit!

Érintőt húzunk az f függvény grafikonjának abba a pontjába, melynek első koordinátája π .

d) Írja fel az érintő egyenesének egyenletét!

102. (ESZÉV Minta 2021.10/9)

Határozza meg, milyen x érték esetén van az $f(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 2)$ függvénynek helyi minimuma, illetve helyi maximuma a $] -5; 5[$ intervallumon!

103. (ESZÉV 2022.05/7)

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x - 3)(1,5 - x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

a) Mutassa meg, hogy csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

b) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítás és eladása) esetén éri el?

104. (ESZÉV 2022.05/9)

Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola és az $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ egyenletű kör. Határozza meg a parabola és az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

105. (ESZÉV-NY 2022.05/6)

Egy gyárban olyan 5 liter űrtartalmú lábosokat készítenek, melyek alakja jó közelítéssel (felül nyitott) forgáshenger. A lábosok külső felületét vékony, piros zománcréteggel vonják be. Mekkora legyen az 5 literes lábos alapkörének a sugara, hogy a külső felület bevonásához a lehető legkevesebb zománcot kelljen felhasználni?

106. (ESZÉV-NY 2022.05/6)

a) Határozza meg az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a , b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk az alábbiakat:

(1) $f(0) = 1$;

(2) $f(1) = 0$;

(3) $f'(2) = f''(1)$ (az f első deriváltjának $x = 2$ -ben vett értéke megegyezik az f második deriváltjának $x = 1$ -ben vett értékével).

b) Igazolja, hogy az $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ és az $y = x^3 + 3$ egyenletű görbének két közös-pontja van, és számítsa ki a görbék által közbezárt síkidom területét!