

Gráfelméleti feladatok (emelt szint)

1. (ESZÉV Minta (1) 2004.05/9)

Egy háromnapos konferencián, amelyen öt ország küldöttei vettek részt, három hivatalos nyelvet használtak: az angolt, a németet és a franciát. Amikor programegyeztetésre összeültek, kiderült, hogy a brit és a magyar vezetőnek egy-egy, a franciának kettő, a németnek és az olasznak három-három személyes ismerőse van a vezetőségben. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

- Rajzoljon fel egy olyan gráfot, amely az ismeretségeket szemlélteti a vezetőségben!
- Ismerte-e egymást a német és az olasz küldöttség vezetője? (Válaszát indokolja!)

2. (ESZÉV Minta (3) 2004.05/8)

Egy vállalat a nyolc gyáregysége között zártláncú kamerarendszert épít ki úgy, hogy bármely két egység között legyen kapcsolat. Biztonsági okokból olyan terv készült, hogy bármely két kábel meghibásodása esetén még összefüggő maradjon a rendszer, viszont ha egy harmadik kábel is meghibásodik, akkor már nem feltétlenül marad összefüggő a rendszer.

- Mutassa meg, hogy a fenti feltételek mellett minden gyáregységből legalább három kábel kell, hogy kiinduljon!
- Legalább hány kábel-összeköttetést kell kiépíteni?
- Szemléltesse a rendszert egy olyan gráf felrajzolásával, amelyben az élek száma minimális!

3. (ESZÉV 2005.05/2)

Döntse el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis!

- Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.
- Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.
- Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
- Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

4. (ESZÉV 2005.10/2)

Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a tenispályára, mindegyik fiú kezét fog a többiekkel. Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt?

5. (ESZÉV 2005.10/8)

Egy kiránduláson tíz tanuló körmérkőzéses asztalitenisz bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.) Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott!

6. (ESZÉV-NY 2007.05/3)

A Pécsre közlekedő vonat első osztályú fülkájában hatan utaznak egy tudományos konferenciára. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az utitársak közül, a többiek pontosan négy-négy utitársat ismernek régebből. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

- Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!
- Az ismerősök a fülkébe lépve kézfogással köszöntötték egymást. Hány kézfogás történt?

7. (ESZÉV 2008.05/7)

Annának 40 ismerőse van. Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer. A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn? (Az ismeretségek kölcsönösek.)

8. (ESZÉV-NY 2008.05/5)

Egy edzőtáborba összesen 10 lány és 9 fiú érkezett meg. Az első foglalkozáson az edző mindenkit megkérdezett, hogy hány társát ismerte korábban a csoportból. (Az ismeretség kölcsönös.) Tudjuk, hogy korábban mindegyik fiú pontosan ugyanannyi lányt ismert, viszont a lányok mindannyian különböző számú fiút ismertek. Lehet-e, hogy minden fiú 6 lányt ismert korábban a tábor kezdetekor?

9. (ESZÉV 2009.10/7)

Egy angol matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki nem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott. Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?

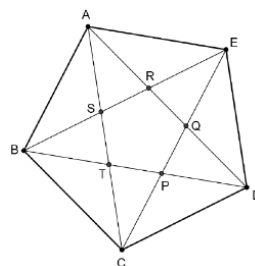
10. (ESZÉV-NY 2010.05/2)

Kati felvett négy pontot: A, B, C és D, majd megrajzolt egy olyan egyszerű teljes gráfot, amelynek 253 éle van, és csúcsai között szerepelnek az A, B, C és D csúcsok is.

- Hány új gráfcúscot kellett megrajzolni a már meglévő 4 csúcs mellé?
- Legfeljebb hány éle törölhető ki ennek a gráfnak, hogy még összefüggő maradjon?

11. (ESZÉV 2010.10/6)

Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot válaszára!



- állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.
- állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amelyik nyolc élű kör.

12. (ESZÉV 2011.10/9)

Öt, egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

- Összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, de a másikban nem.)
- Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

13. (ESZÉV 2012.10/9)

A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszeit indokolja!

- Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.
- Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.

14. (ESZÉV 2013.05/3)

Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:

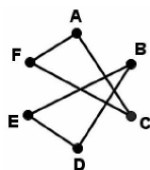
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.

- Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!
- Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

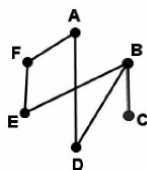
Tekintsük a következő halmazokat:

$P = \{\text{összefüggő gráfok}\}$, $Q = \{\text{egyszerű gráfok}\}$, $R = \{\text{kört tartalmazó gráfok}\}$.

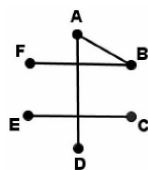
a) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a lenti halmazábrában a megfelelő helyre!



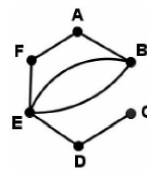
1. ábra



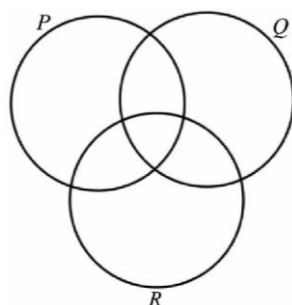
2. ábra



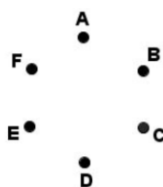
3. ábra



4. ábra



b) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára, és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



5. ábra

15. (ESZÉV-NY 2014.05/2)

Egy teljes gráfból 45 élt elhagyva egy fagráfot kaptunk. Hány pontja van ennek a gráfnak?

16. (ESZÉV 2014.10/8)

a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszeit indokolja!

A) Van olyan hatpontú fa gráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszerű.

B) Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

C) Van olyan fa gráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F . Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A -nak legalább annyi ismerőse van, mint B -nek, B -nek legalább annyi ismerőse van, mint C -nek, és így tovább, E -nek legalább annyi ismerőse van, mint F -nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

17. (ESZÉV-NY 2015.05/6)

a) Egy 9 pontú fagráfban ismerjük 8 pont fokszerűát: 1; 1; 1; 1; 2; 3; 3, 3. Határozza meg a kilencedik pont fokszerűát!

b) Van-e olyan 9 pontú egyszerű gráf, amelyben mind a 9 pontnak más a fokszerűa?

18. (ESZÉV 2015.10/6)

A H halmaz a nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszerűa legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

- a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
- b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

19. (ESZÉV Minta (3) 2015.10/4)

Hány olyan 4 pontú, 3 élű gráf van, amelynek vannak többszörös élei? (Két gráfot nem tekintünk különbözőnek, ha csúcsaik között van olyan kölcsönösen egy-értelmű megfeleltetés, hogy mindkét gráfban ugyanazok a csúcsok vannak élekkel összekötve.)

20. (ESZÉV 2016.05/6)

Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

21. (ESZÉV-NY 2017.05/6)

A H halmaz a tízpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: *Ha egy (tízpontú egyszerű) gráfnak legfeljebb 8 éle van, akkor nem tartalmaz kört.*

- a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
- b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

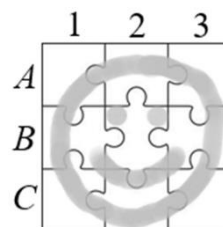
22. (ESZÉV 2017.10/6)

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összeköttöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

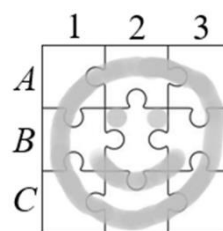
- a) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!
- b) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

23. (ESZÉV 2018.05/5)

Az ábrán egy 3×3 -as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ($A_1, A_2, \dots, C_3$) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalon) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képen.



- a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a foksámok összegét!
- b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!
- c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!



24. (ESZÉV 2018.05/8)

Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

Van olyan G_1 , illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.)

25. (ESZÉV 2019.05/7)

Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze

önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk. Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

- Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.
- Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

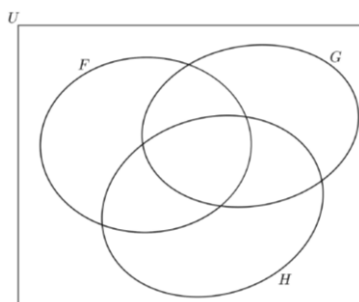
26. (ESZÉV-NY 2019.05/2)

Több település közötti legkisebb költségű vezetékhálózat tervezésekor először egy **teljes gráfot** készítettek. Ebben a gráfban minden települést a gráf egy csúcsával, minden vezetékes kapcsolatot a gráf egy-egy élével jelöltek, majd a gráf minden élére ráírták, hogy mennyibe kerülne az adott kapcsolat kiépítése. Ezután egyesével kitörölték a „költséges éleket” úgy, hogy a törlés után megmaradó gráf összefüggő maradjon. A teljes gráf élei kétharmadának törlése után végül egy (a legkisebb költségű hálózatot megadó) **fagráfot** kaptak. Hány település szerepelt a tervben?

27. (ESZÉV 2019.10/6)

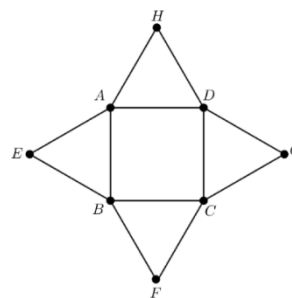
Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

- Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U -nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!
- A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot!



28. (ESZÉV 2020.05/3)

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot. A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!



29. (ESZÉV-NY 2020.05/6)

Legyen G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van. Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelyek a fokszáma legalább 2? Válaszát indokolja!

30. (ESZÉV 2020.10/6)

Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = (x + 4)(2 - x), \quad g(x) = x + 4, \quad h(x) = x^2 - 4, \quad i(x) = |x| - 4.$$

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

- Rajzolja fel az így kapott gráfot!

A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelyei -5 és 3 , az m függvény zérushelyei 3 és -3 , az n függvény zérushelyei pedig 5 és -5 . A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

- b) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k , m , n és p függvényekre a b) feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen?

31. (ESZÉV 2021.05/6)

Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság ismeretségi hálója (ismeretségi gráfja). (Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.) A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A -nak 5, B -nek 4, C -nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E és F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.

- a) Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálója?

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt.

- b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálója?

32. (ESZÉV Minta 2021.10/3)

Képzeld el, hogy egy nagy lapra leírtuk az összes olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű pozitív egész számot, melyben nem szerepel a 0 számjegy. A lapon két számot akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha pontosan két azonos számjegy van bennük. (Pl. a 536-ot és a 315-öt összekötjük, de a 718-at és a 615-öt közvetlenül nem, illetve a 842-t és a 284-et sem.) Így egy gráfot kapunk.

- a) Határozza meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). Állítását indokolja!

A kapott gráf összefüggő.

- b) Hány éle van ennek a gráfnak?

33. (ESZÉV 2022.05/8)

Egy hatfős baráti társaság tagjai András, Bori, Csaba, Dóra, Ervin és Fanni bajnokságon döntik el, hogy ki a legjobb pingpongos közülük. Mindenki mindenki ellen egy mérkőzést játszik. Amikor 9 mérkőzést már lejátszottak, akkor kiderült, hogy mindegyikük páratlan számú mérkőzésen van túl. András az eddigi egyetlen meccsét Bori ellen játszotta, Csaba még nem játszott Ervin ellen. Játszott-e már Dóra Fanni ellen?

34. (ESZÉV-NY 2022.05/7)

Egy papírlapon adott öt pont. A pontok mellé egy-egy pozitív egész számot írunk. Az adott pontok legyenek egy olyan ötpontú egyszerű gráf csúcsai, amelynek két csúcsa pontosan akkor van éllel összekötve, ha a csúcsok mellé írt számok közül az egyik többszöröse a másiknak. Az alábbi három ábra mindegyikén 5-5 pont látható. Írjon mindhárom ábrán az 5 pont mellé **különböző** pozitív egész számokat, majd rajzolja meg a fenti szabály szerint a gráf éleit úgy, hogy az első esetben egy teljes gráfot, a második esetben egy fagráfot, a harmadik esetben pedig egy üres gráfot kapjon (az üres gráfnak egyetlen éle sincsen)!

