

Halmazelméleti feladatok (emelt szint)

1. (ESZÉV Minta (1) 2004.05/9)

Egy konferencián három hivatalos nyelvet használtak: az angolt, a németet és a franciát. Minden résztvevő beszélt a három nyelv közül legalább az egyiken, mindhárom nyelven azonban az 55 résztvevő közül mindössze az öt delegációvezető beszélt. A résztvevők közül 36-an beszéltek angolul, 28-an németül és 19-en franciául. Hányan beszéltek pontosan két nyelvet?

2. (ESZÉV Minta (2) 2004.05/4)

Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, németet és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14-en tanulnak, németül 15-en, franciául pedig 11-en. Pontosán két nyelvet 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

3. (ESZÉV Minta (3) 2004.05/6)

Az iskolában 3 különböző szakkör működik: dráma, fotó, népi tánc. Egy 22 fős osztály minden tanulója legalább az egyik szakkörön részt vesz. A 22 tanulóból pontosan két szakkört látogat 16 tanuló, és van 3 olyan, aki mindegyikre jár. Hány tanuló jár pontosan egy szakkörre?

4. (ESZÉV 2005.05/5)

Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálat. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálat. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

5. (ESZÉV 2005.10/8)

Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőt az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hány tanulója van az osztálynak?

6. (ESZÉV-NY 2006.05/4)

Egy 30 fős tudóscsoport a számítógépeknek a kutatásban, az oktatásban és a kommunikációban betöltött szerepével foglalkozik. Közülük mindenki publikált már legalább az egyik témában. A csoport tagjai közül 12-en írtak már tanulmányt a számítógép kutatásban betöltött szerepéről, 18-an a számítógép oktatásban betöltött szerepéről, és 17 tudós jelent meg tanulmánya a számítógépnek a kommunikációban betöltött szerepéről. A csoportban 7 olyan tudós van, aki a fentiek közül pontosan két témakörben jelentetett már meg tanulmányt. Hány olyan tudós van, akinek mindhárom témakörben jelent már meg tanulmánya?

7. (ESZÉV 2008.05/1)

Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?

b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

8. (ESZÉV 2009.05/2)

Egy 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia. Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

- 1) Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet.
- 2) Az angol is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.
- 3) Angolul 27-en tanulnak.
- 4) A németet is és franciát is tanulók száma 15.

9. (ESZÉV-NY 2009.05/9)

Egy zeneiskolában három hangszeren: zongorán, gitáron és szaxofonon lehet tanulni. Tavaly 18 tanuló iratkozott be a zeneiskolába. Közülük mindenki egy vagy két hangszeren tanult játszani, három hangszeren egyikük sem. Tizenöten tanultak zongorázni, nyolcan gitározni és heten szaxofonozni. Hányan tanultak pontosan két hangszeren játszani?

10. (ESZÉV 2010.10/9)

Egy egyetem 10 580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgálata. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának német nyelvvizsgálata sincs.

- a) Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeztek angol és hányan német nyelvvizsgával?
- b) A hallgatók hány százaléka rendelkezett az angol és német nyelvvizsgák mindegyikével?

11. (ESZÉV-NY 2011.05/2)

Egy egyetem mesterképzőjére jelentkező 29 hallgatónak nyilatkoznia kellett arról, van-e angol, német vagy francia nyelvvizsgálata. A jelentkezők közül angol nyelvvizsgálata 22, német 18, francia 18 hallgatónak van. 12 hallgatónak német és francia nyelvvizsgálata is van, de közülük 3 főnek nincs angol nyelvvizsgálata. Az angol nyelvvizsgával rendelkezők közül 7-nek nincs német és 8-nak nincs francia nyelvvizsgálata.

- a) Hány jelentkező válaszolt mindhárom kérdésre igennel?
- b) Hány jelentkező válaszolt mindhárom kérdésre nemmel?

12. (ESZÉV-NY 2012.05/2)

Megadunk négy halmazt:

$A = \{\text{héttel osztható pozitív kétjegyű számok}\},$

$B = \{\text{a 29 kétjegyű pozitív többszörösei}\},$

$C = \{\text{azok a pozitív kétjegyű számok, amelyeknél a 11-gyel nagyobb szám négyzetszám}\},$

$D = \{\text{azok a pozitív kétjegyű számok, amelyeknél a 13-mal kisebb szám négyzetszám}\}.$

- a) Hány elemű az $A \cup C$ halmaz?
- b) Hány elemű a $B \cap D$ halmaz?
- c) Melyek azok a kétjegyű pozitív egészek, amelyek a fenti négy halmaz közül pontosan kétőnek az elemei?

13. (ESZÉV-NY 2015.05/9)

Egy osztály tanulói matematikadolgozatot írtak, melynek során három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot összesen 22-en oldották meg, közülük a második feladatot is megoldotta 16 tanuló. Azok, akik mindhárom feladatot megoldották, háromszor annyian voltak, mint akiknek csak az első feladat sikerült. Azok, akik csak az első két feladatot tudták megoldani, két és félszer annyian voltak, mint akik csak az első és a harmadikat. Hány tanuló oldotta meg mindhárom feladatot?

14. (ESZÉV-NY 2016.05/2)

Egy 28 fős osztályban minden tanulónak van év végi osztályzata fizikából és matematikából is. 23 tanuló nem kapott jelest fizikából, és 21 tanuló nem kapott jelest matematikából, de a két tárgy közül legalább az egyikből 10-en kaptak jelest. Hány tanulónak van jelese mindkét tárgyból?

15. (ESZÉV-NY 2018.05/6)

Az A , B és C nemüres halmazokról tudjuk a következőket: az A minden eleme a B -nek is eleme, továbbá C -nek van olyan eleme, amelyik A -nak is eleme. Az alábbi öt állítás mindegyikéről döntse el, hogy igaz vagy hamis! (Válaszait nem kell indokolnia.)

- (1.) Van olyan eleme A -nak, amelyik C -nek is eleme.
- (2.) Nincs olyan eleme C -nek, amelyik B -nek is eleme.
- (3.) Ha valami eleme B -nek, akkor eleme A -nak is.
- (4.) Ha valami nem eleme B -nek, akkor az eleme C -nek.
- (5.) Ha valami nem eleme B -nek, akkor az nem eleme A -nak sem.

16. (ESZÉV 2020.05/6)

Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

17. (ESZÉV 2020.10/8)

Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halmaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy. Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak?

18. (ESZÉV 2021.10/3)

Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható?

19. (ESZÉV 2022.05/3)

Egy társasházban 50-en laknak. A lakók 38%-a nő, 32%-a szemüveges. Legalább, illetve legfeljebb hányan lehetnek a lakók között a nem szemüveges férfiak?

20. (ESZÉV-NY 2022.05/7)

Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Hány olyan részhalmaza van H -nak, amelyben az elemek szorzata osztható 9-cel? (Egyelemű halmaz esetén az „elemek szorzatának” az egyetlen elem értékét tekintjük.)