

Számtani- és mértani sorozatos feladatok (emelt szint)

1. (ESZÉV Minta (2) 2004.05/5)

Egy trópusi lián hajtása egyre lassabban növekszik, ahogy a növény egyre hosszabb lesz. A kicsírázó magból a növény az első hónapban 100 cm-re nő, és minden további hónapban megközelítőleg az előző havi növekedésének a $\frac{4}{5}$ -ével lesz hosszabb.

- a) Mennyit fog nőni a 21. hónapban?
- b) Hány hónap növekedés után lesz 400 cm-nél hosszabb?
- c) Megnöhet-e 600 cm hosszúságúra?

2. (ESZÉV Minta (3) 2004.05/3)

Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 114. Ha a harmadik számot 72-vel csökkentjük, egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Határozza meg a mértani sorozat első elemét és hányadosát!

3. (ESZÉV 2005.05/3)

Egy növekedő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja?

4. (ESZÉV 2005.10/3)

Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.

- a) Mekkora összeget kapott Péter?

Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60 000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez).

- b) Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100 000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára?

5. (ESZÉV 2006.02/4)

Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, a felbontást az alábbi módon kezdve:

(1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), ...

- a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme?
- b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme?

6. (ESZÉV-NY 2006.05/8)

- a) A tízes számrendszerben felírt egyjegyű $\overline{a}$, kétjegyű $\overline{ab}$ és háromjegyű $\overline{bba}$ szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagja. (Azonos betűk azonos számjegyeket jelölnek.) Számítsa ki a sorozat differenciáját és az első száz elem összegét!

- b) Bizonyítsa be, hogy egy mértani sorozat első n elemének, második n elemének és harmadik n elemének összege egy mértani sorozat három egymást követő eleme!

7. (ESZÉV 2006.10/9)

Az (a_n) számsorozatról a következőket tudjuk:

- a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;
- az a_1 , a_2 és $a_3 - 9a_1$ számok ebben a sorrendben egy számtani sorozat három egymást követő tagjai;
- az (a_n) sorozat első öt tagjának összege 682.

Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja?

8. (ESZÉV 2007.05/3)

Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármast adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg a számtani sorozat első három tagját!

9. (ESZÉV-NY 2007.05/6)

Daninak két kedvenc tantárgya van, a matematika és a biológia.

- a) Dani az egyik délután egy kisállat-kereskedés akváriumában megszámlolta a nagy piros és a kis csíkos halakat. A nagy piros halak száma p , a kis csíkosaké c . Testvérének, Katának nem árulta el, hány halat számolt meg, de az alábbiakat elmondta neki: „A 4, a p és a c számok ebben a sorrendben egy mértani, a p , a c és a 40 számok pedig ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.” Hány darab nagy piros és hány darab kis csíkos halat számolt meg Dani az akváriumban?
- b) Dani vásárolt egy nagy akváriumot, és 100 darab apró halat telepített bele. A telepítés és a gondozás jól sikerült, minden hónapban 20%-kal nőtt az állomány. Dani minden második hónap végén eladta a halainak mindig ugyanannyi százalékát. A 24. hónap végén az akváriumban 252 darab hal maradt. Kéthavonta az állomány hány százalékát adta el Dani?

10. (ESZÉV 2007.10/3)

Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1 000 000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy a forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

- a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt egész Ft-ra kerekítve adja meg.)
- b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a dolgozó a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)
- c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen a kedvezőbb? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

11. (ESZÉV 2008.05/8)

Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

$$a_n = (-2)^n + 2^n; \quad b_n = |n - 23| - |n - 10|; \quad c_n = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right]^2.$$

Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!

12. (ESZÉV-NY 2008.05/1)

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ egy számtani sorozat első huszonegy tagja. Közülük a páratlan sorszámúak összege 15-tel nagyobb, mint a páros sorszámúak összege. Tudjuk továbbá, hogy $a_{20} = 3a_9$. Határozza meg az a_{15} értékét!

13. (ESZÉV 2008.10/9)

Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is: Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

14. (ESZÉV 2009.05/7)

András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, hogy naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte az előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon, és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, párosan 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

a) Hány métert úszott le András a 6. napon?

b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt?

15. (ESZÉV-NY 2009.05/5)

Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első három tagja: a, b, c . Ha az első két tag változatlanul hagyása mellett a harmadik tagot $(a + 2b)$ -vel csökkentjük, akkor egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Az $a; b + 9; c$ számok ebben a sorrendben ugyancsak egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozza meg az a, b és c számokat!

16. (ESZÉV 2009.10/4)

Az (a_n) mértani és a (b_n) számtani sorozatban $a_1 = b_1 = 1$ és $a_6 = b_6 = -1$.

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját!

b) Milyen pozitív egész n -re lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora?

17. (ESZÉV 2010.05/3)

Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?

18. (ESZÉV-NY 2010.05/8)

Az (a_n) , (b_n) és (c_n) egész számokból álló mértani sorozatok. Az egyes sorozatok hányadosai és bizonyos tagjai között a következő összefüggések érvényesek:

- (1) a_1, b_1 és c_1 ebben a sorrendben egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek 2 a hányadosa;
- (2) az $(a_n), (b_n)$ és (c_n) sorozatok hányadosai ebben a sorrendben egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek 1 a különbsége (differenciája);
- (3) $a_2 + b_2 + c_2 = 24$;
- (4) $c_1 + c_2 + c_3 = 84$.

Adja meg mindhárom eredeti mértani sorozat első három tagját!

19. (ESZÉV 2011.05/5)

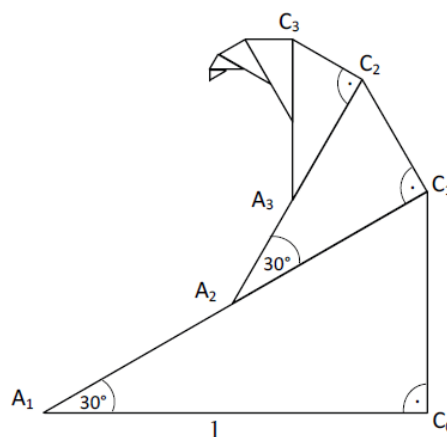
Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30° -os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2 .

Az A_2C_2 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzolunk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3 .

Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.

Ez az eljárás tovább folytatható.

- a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe)!
- b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2 \dots C_n$ töröttvonal hossza minden $n \in \mathbf{N}^+$ -ra kisebb, mint 1,4!



20. (ESZÉV-NY 2011.05/5)

Vizsgáljuk azt a sorozatot, amelynek n -edik tagja adott $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $a_n = n + \sin(n\alpha)$.

- a) Legyen $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Írja fel a sorozat első három tagjának pontos értékét!
- b) Milyen $\alpha \in [0; 2\pi]$ esetén lesznek az a_1, a_2, a_3 számok ebben a sorrendben egy konstans sorozattól különböző számtani sorozat szomszédos tagjai?

A megoldásban használhatja az alábbi azonosságokat is:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ illetve}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

21. (ESZÉV 2011.10/1)

Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, mikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35 100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta?

22. (ESZÉV 2012.05/2)

A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$ -szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139. Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!

23. (ESZÉV 2012.05/5)

Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}, n \in \mathbf{N}^+$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

24. (ESZÉV 2012.05/9)

- a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!
- b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60° -os szöge!

25. (ESZÉV-NY 2012.05/4)

Adott az $a_n = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{7^5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{7^{2n-1}}, n \in \mathbf{N}^+$ sorozat.

- a) Melyik az a legnagyobb n természetes szám, amelyre $a_n > 49^{-50}$?

Adott a $b_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \dots + \frac{1}{7^{2n-1}}, n \in \mathbf{N}^+$ sorozat.

- b) Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ határértéket!

26. (ESZÉV 2012.10/6)

Az Elektromos Kisautók Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n -edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n - 1)$ -edik órában megtett útjának ($n \in \mathbf{N}$ és $n > 1$).

- a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszi az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.

- b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni az autóban?

A „Végkimerülés” kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

- c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés” kategóriában?

27. (ESZÉV 2013.05/4)

- a) Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)
- b) Ádám is vett fel hiteket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet

összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintba kerekítve adja meg!

28. (ESZÉV 2013.05/6)

Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7.

- a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást végtelen sokszor megismételjük.

- b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?

29. (ESZÉV-NY 2013.05/5)

- a) Egy mértani sorozat első tagja 32, a hányadosa pedig $\frac{1}{128}$. Igazolja, hogy akármennyi egymást követő tagját adjuk össze a sorozatnak az első taggal kezdve, az összeg nem haladhatja meg a 32,5 értéket!
- b) Az $\{a_n\}$ olyan mértani sorozat, amelynek $\frac{1}{128}$ az első tagja, a hányadosa pedig 32. Milyen pozitív n egész számra teljesül az $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 2048^{3n}$ egyenlőség?

30. (ESZÉV 2013.10/7)

Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$. A hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1 , a t_2 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2 , és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

31. (ESZÉV 2014.05/7)

- a) Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6. Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő!
- b) András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja. Hány éves András?

32. (ESZÉV-NY 2014.05/4)

Egy hételemű, pozitív egész számokból álló adatsokaság hat eleme: 10; 2; 5; 2; 4; 2. A hetedik adatot nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a hét adat átlaga, módusza és mediánja (nem feltétlenül ebben a sorrendben) egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Határozza meg a hetedik adat lehetséges értékeit!

33. (ESZÉV 2014.10/9)

Éva egy 7×7 -es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)

- a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe a 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta?

		91				
				11		

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

- b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz!

34. (ESZÉV 2015.05/7)

Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje).

- a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!
- b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?
- c) Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1,02$ és $H = 2\,000\,000$!

35. (ESZÉV 2015.05/8)

- a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz!
- b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

36. (ESZÉV-NY 2015.05/7)

Egy iskola egyéni sakkbajnokságának döntőjében minden versenyző egyszer játszott a többi döntőbe jutott versenyzővel. A verseny végén kiderült, hogy a versenyzők elért pontszámai egy szigorúan növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Hányan versenyeztek a döntőben és hány pontja volt a győztesnek, ha az utolsó helyezett összesen 1 pontot szerzett? (A sakkversenyen győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont jár.)

37. (ESZÉV 2015.10/1)

Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén olajfolt keletkezett. A szakemberek műhol-dak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.

- a) Ha az első megfigyeléskor 400 m^2 volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva?

A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a $12\,400 \text{ m}^2$ területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2 -ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe $12\,270 \text{ m}^2$ lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.

- b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a $12\,400 \text{ m}^2$ -es olajfolt teljes eltávolítása?

38. (ESZÉV Minta (1) 2015.10/6)

Enikő három különböző pozitív számra gondolt, és ezekről az alábbi információkat árulta el:

- I. A számok tekinthetők egy növekvő számtani sorozat három szomszédos tagjának.
- II. A három szám közül a legnagyobb és a legkisebb tag köbének összege 1072.
- III. A legnagyobb és a legkisebb tag négyzetének különbsége éppen 32-szerese a számtani sorozat differenciájának.

Határozza meg a három számot!

39. (ESZÉV Minta (1) 2015.10/9)

a) Igazolja, hogy szomszédos pozitív egész számok reciprokainak különbsége egyenlő a számok szorzatának reciprokával! (A nagyobbik számból vonjuk ki a kisebbet.)

Tekintsük az $\frac{1}{10 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 16} + \dots$ végtelen sort. (A második tagtól kezdve minden nevezőben az előző nevező tényezőinél 2-vel nagyobb számok szerepelnek.)

b) Igazolja, hogy a sor n -edik részletösszegének értéke $S_n = \frac{n}{100+20n}$. (S_n a sor első n tagjának összegét jelöli.)

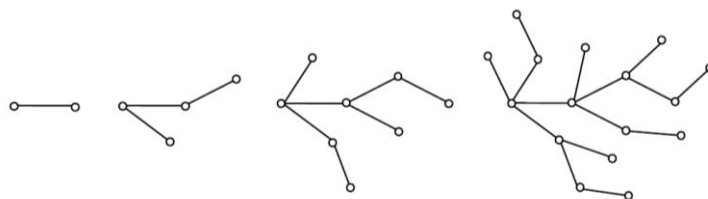
c) Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határértéket!

40. (ESZÉV Minta (3) 2015.10/4)

Három szám $d = 1$ differenciájú növekvő számtani sorozatot alkot. Ha az első számot 5-tel csökkentjük, a harmadik számot pedig 23-mal növeljük (a középső szám változatlan marad), akkor az így kapott három szám egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjával egyenlő. Számítsa ki az eredeti három számot, és a kapott mértani sorozat hányadosát!

41. (ESZÉV Minta (3) 2015.10/8)

Egy modell szerint a tengeri moszat ágainak időegységenkénti számát az $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (ahol $n \geq 1$) rekurzív összefüggés írja le, ahol a_n a moszat ágainak számát jelenti az n -edik időegység végére. (A növekedési modellt úgy képzelhetjük el, hogy a moszatnak minden időegység alatt egy új ága nő, továbbá minden régi ága is egy-egy újabb ágot növeszt. Az ábrán $a_1 = 1$, azaz egyetlen kezdeti ág esetén a következő három időegység alatti növekedést szemléltettük.)



- a) Igazolja, hogy ha az első időegység végére egy ága van a moszatnak ($a_1 = 1$), akkor az n -edik időegység végére a moszat ágainak száma $a_n = 2^n - 1$!
- b) A moszat ágainak száma melyik időegység végére éri el a 800-at?
- c) Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^{n-3}-17}$ határértéket!

42. (ESZÉV 2016.05/3)

a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

Tekintsük a következő állítást: „Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.” (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

- b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
- c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

43. (ESZÉV-NY 2016.05/6)

Igazolja, hogy ha $a_n = \frac{11n-5}{3n-8}$, $n \in \mathbb{N}^+$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat nem monoton, de korlátos!

44. (ESZÉV 2016.10/9)

- a) Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5. Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa 2. Az 1000-nél kisebb pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mekkora a valószínűsége, hogy olyan számot választottunk, amely tagja valamelyik sorozatnak? Válaszát $\frac{p}{q}$ alakban adja meg úgy, hogy p és q pozitív egészek és relatív prímek legyenek!
- b) Három teljes gráf pontjainak száma egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja! (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

45. (ESZÉV 2017.05/7)

Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé” válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $3 + 4 = 7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.)

Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanak a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

46. (ESZÉV-NY 2017.05/7)

Hány olyan különböző hegyesszögű háromszög van, melynek szögei fokban mérve különböző egész számok, és a szögek egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha nem hasonlók egymáshoz.)

47. (ESZÉV-NY 2017.05/8)

Egy járvány terjedésére vonatkozó előrejelzések szerint a nagyvárosban a fertőzöttek száma minden nap az előző napi érték 105%-ára növekszik. Ha a növekedés üteme az előrejelzés szerint alakulna, akkor hány nap alatt emelkedne a város összlakosságának 0,2%-áról az összlakosság 1%-ára az összes fertőzött száma?

48. (ESZÉV 2017.10/5)

A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok töltéskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken.

- a) Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor töltéskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele?

Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.)

- b) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor töltéskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)?

49. (ESZÉV 2017.10/9)

A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

- Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99?
- Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot!
- Igazolja, hogy az n -edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in \mathbb{Z}^+$).

50. (ESZÉV 2018.05/1)

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3:4:5.

51. (ESZÉV-NY 2018.05/2)

- Egy síkbeli négyszög szögei (fokban mérve) egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek hányadosa 3. Határozza meg a négyszög szögeit!
- Egy konvex sokszög szögei (fokban mérve) egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja 143, differenciája 2. Határozza meg a sokszög oldalainak számát!

52. (ESZÉV 2018.10/1)

- Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{4}$, a sorozat első öt tagjának összege 852,5. Határozza meg a sorozat első tagját! Számításai során ne használjon közelítő értéket!
- Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 852,5; első tíz tagjának összege pedig 2330. Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját!

53. (ESZÉV 2019.05/2)

Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!

54. (ESZÉV-NY 2019.05/5)

Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Az első dobás eredményét egy számtani sorozat első tagjának, a második dobás eredményét a sorozat differenciájának tekintjük.

- Az így kapható sorozatok között hány olyan van, amelyben az első 10 tag összege kisebb 100-nál? (Két sorozatot különbözőnek tekintünk, ha az első tagjuk vagy a differenciájuk eltér egymástól.)

Tekintsük az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelynek egyik számjegye sem 0.

- Hány olyan van ezek között, amelynek a négy számjegye (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy egymást követő tagja?

55. (ESZÉV 2019.10/7)

- Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!
- Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

56. (ESZÉV 2020.05/1)

- Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130. Adja meg a sorozat ötödik tagját!

- b) A $\{b_n\}$ mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130. Adja meg a sorozat ötödik tagját!

57. (ESZÉV-NY 2020.05/7)

Bizonyítsa be (például teljes indukcióval) az alábbi összefüggést, ahol $n \in \mathbb{N}^+$!

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

58. (ESZÉV-NY 2020.05/8)

Egy élelmiszergyártó kisüzem levesporkészítő részlegében 700 kg levespor van raktáron. A raktárkészlet csökkentése érdekében az eladással foglalkozó vezető azt tervezi, hogy minden hónapban először (eladással, jótékony célú ajándékozással) 24%-kal csökkentik az aktuális raktárkészletet, ezután a készletet megnövelik a havonta előállított 60 kg levesporral (így például az első hónap végén 592 kg levespor lesz raktáron).

- a) Ha sikerül a terv megvalósítása, akkor összesen hány kg levesport adnak/ajándékoznak el 18 hónap alatt?
- b) Igazolja, hogy a tervezett módszert 18 hónapon túl (gondolatban akár végtelen sokáig) is alkalmazva a raktárkészlet minden hónapban csökken ugyan, de soha nem csökken 250 kg alá!

59. (ESZÉV 2020.10/4)

Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel. András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulása elhanyagolható.)

60. (ESZÉV 2020.10/6)

Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a

$$B(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L}{B_0} - 1\right) \cdot 0,75^t}$$

formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve ($0 \leq t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$). Egy nagyvárosban $L = 1,5$ millió, $B_0 = 1000$.

- a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal?
- b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?

61. (ESZÉV 2021.05/3)

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450 000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik. Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

62. (ESZÉV-NY 2021.05/5)

Kovács úr új autót vásárolt 5 millió forintért. Egy matematikai modell szerint az autó egy év alatt elveszíti az aktuális értékének 12%-át.

- a) Ha csak az értékvesztést vesszük figyelembe, akkor hány teljes év elteltével ér 1,5 millió forintnál kevesebbet Kovács úr autója?

A Precíz Kft. havi amortizációval (értékvesztéssel) számolja ki a gépjármű aktuális értékét. (Havi amortizáció: az autó értéke minden hónapban az előző havi értékének ugyanakkora százalékaival csökken.)

- b) Mutassa meg, hogy ha az éves értékvesztés 12%-os, akkor a havi amortizáció megközelítőleg 1,06%-os!

Kovács úr szeretné eladni törésmentes és jó állapotú autóját a Precíz Kft.-nek. A Kft. szórólapján az áll, hogy kétféleképpen is kiszámítják az autó aktuális értékét, és az eladó számára kedvezőbb árat garantálják.

I. módszer: a jelenlegi akciójukban 12 hónapot levonnak az autó valós életkorából, majd 1,06%-os havi amortizációval számolják ki az autó értékét.

II. módszer: az autó által megtett kilométerek alapján számítják ki az autó „életkorát” úgy, hogy évente átlagosan 15 000 km-es megtett utat feltételeznek; ebben az esetben azonban 1,2%-os havi amortizációval számolnak (az 1,06% helyett), és nincsen 12 hónap kedvezmény.

- c) Melyik számítási módszer a kedvezőbb Kovács úr számára, ha az autója 8 éves 5 hónapos, és az autó eddig 91 250 km utat tett meg?

63. (ESZÉV 2021.10/5)

A (c_n) számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Határozza meg n értékét!

64. (ESZÉV Minta 2021.10/5)

Három kosárban összesen 57 alma van. Kezdetben az egyes kosarakban lévő almák száma egy számtani sorozat három egymást követő tagját alkotja. Abból a kosárból, amelyikben a második legtöbb gyümölcs van, egyet átteszünk abba, amelyikben a legtöbb van. Ezután az egyes kosarakban lévő almák száma egy mértani sorozat három egymást követő tagját alkotja. Hány alma van kezdetben az egyes kosarakban külön-külön?

65. (ESZÉV 2022.05/2)

- a) Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3, az első n tag összege pedig 4900. Határozza meg n értékét!
- b) Egy mértani sorozat első és második tagjának összege 6, harmadik és negyedik tagjának összege pedig 96. Adja meg a sorozat első tagját és hányadosát!

66. (ESZÉV-NY 2022.05/3)

Egy háromszög három oldalának hossza (valamilyen sorrendben) tekinthető egy mértani sorozat három szomszédos tagjának. Két oldal hosszát ismerjük, az egyik 12 cm, a másik 27 cm. Milyen hosszú lehet a harmadik oldal?