

Felszín- és térfogatszámítás feladatok (emelt szint)

1. (ESZÉV Minta (3) 2004.05/7)

Egy négyoldalú gúla alaplapja rombusz. A gúla csúcsa a rombusz középpontja felett van, attól 82 cm távolságra. A rombusz oldalának hossza 54 cm, hegyesszőge $43^\circ 36'$.

- Számítsa ki a gúla térfogatát! (M: 54 965,4 cm³)
- Mekkora a gúla oldalélei? (M: 96,11 és 84,42 cm)
- Mekkora a gúla felszíne? (M: 11 085,1 cm²)

2. (ESZÉV 2005.10/6)

A $KLMN$ derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges LM szárhoz egyenes körűl. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg! (M: 13 326,47)

3. (ESZÉV 2006.02/8)

Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldaljegesei.

- Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében! (M: $\frac{3\sqrt{3}(1-2x)^2}{4}$ dm²)

Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait.

- Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (M: $x = \frac{1}{6}$ dm)

4. (ESZÉV 2006.05/9)

Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az A' csúcsot az A -val, a B' csúcsot a B -vel, a C' csúcsot a C -vel, a D' csúcsot a D -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a DAD' szög 45° -os, a BAB' szög 60° -os.

- Mekkora a $B'AD'$ szög koszinusza? (M: 0,6124)
- Mekkora az $AB'A'D'$ tetraéder térfogata, ha a téglatest legrövidebb éle 10? (M: 500)
- Mekkora az $AA'D'$ és az $AB'D'$ síkok hajlásszöge? (M: $39,23^\circ$)

5. (ESZÉV-NY 2006.05/5)

Egy középkori, román stílusban épült templom tornyának tetőrésze egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. A felújítás alkalmával ebben a tetőrészben egy olyan maximális méretű kocka alakú helyiséget alakítottak ki, amelynek járószintje a gúla alaplapján van, mennyezetének sarkai a gúla oldaléleire illeszkednek.

- Mekkora a tetőtéri helyiség alapterülete, ha a gúla élei 8 m hosszúak? (M: 11 m²)
- A toronytető légterének hány százalékát foglalja el ez a helyiség? (M: 30%)

6. (ESZÉV-NY 2006.10/5)

Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

- A kész talapzatnak hány éle, hány csúcsa, hány lapja van? (M: 36; 24; 14)
- A kész talapzatnak mekkora a felszíne? (818,35 dm²)

7. (ESZÉV 2007.05/2)

- Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm. Mekkora a háromszög hegyesszögei? (M: $71,57^\circ$)
- A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$. Milyen hosszú a PB szakasz? (M: 10 cm)
- Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára a C pontban! A merőleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD hossza 15 cm. Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata? (M: 270 cm^3)

8. (ESZÉV 2007.05/9)

Az 1. ábra szerinti padlástér egy 6×6 méteres négyzet alapú gúla, ahol a tető csúcsa a négyzet középpontja felett 5 méter magasan van.

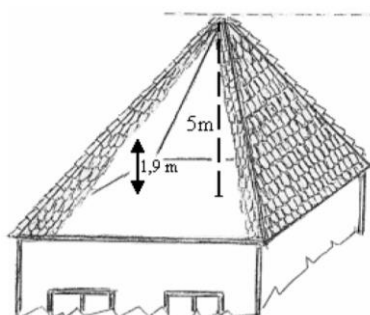
- Milyen szöget zárnak be a tetősíkok a vízszintessel (padlássíkkal)? (M: 59°)

Hasznos alapterületnek számít a tetőtérben az a terület, amely fölött a (bel)magasság legalább 1,9 méter.

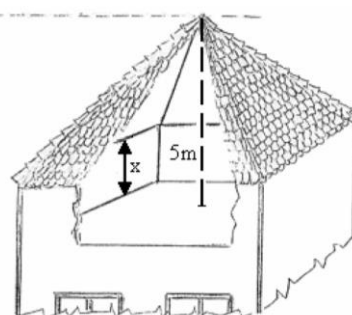
- Mennyi lenne a tetőtér beépítésekor a hasznos alapterület? (M: $13,84 \text{ m}^2$)

A tető cseréjekor a hasznos alapterület növelésének érdekében a ház oldalfalait egy ún. koszorúval kívánják magasítani. A ház teljes magassága – építészeti előírások miatt – nem növelhető, ezért a falak magasítása csak úgy lehetséges, ha a tető síkjának meredekségét csökkentik (2. ábra). Jelölje x a koszorú magasságát és T a hasznos alapterületet.

- Írja fel a $T(x)$ függvény hozzárendelési szabályát! (M: $T(x) = \left(\frac{18,6}{5-x}\right)^2$, ha $0 \leq x < 1,9$; 36, ha $1,9 \leq x \leq 5$)



1. ábra



2. ábra

9. (ESZÉV 2007.10/7)

A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

- Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (M: 1,3%-kal)
- Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatára – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott – közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke!

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítható, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibáját százalékban mérve a következő függvény adja meg: $f:]1; \infty[\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$.

- Igazolja, hogy f -nek nincs szélsőértéke!

10. (ESZÉV-NY 2008.05/6)

Egy tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 5, illetve 20 egység.

- Számítsa ki a trapéz területét és átlójának hosszát! (M: 125; 16,01)
- Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy a trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja körül! (M: 3141,59)
- Bizonyítsa be általánosan a következő állítást: Ha egy húrtrapéz érintőnégyyszög, akkor magasságának hossza az alapok hosszának mértani közepe.

11. (ESZÉV 2008.10/8)

Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnak, G pedig a DE oldalélnak a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle? (M: 30,53)

12. (ESZÉV 2009.05/1)

Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\sqrt{2}$ egység.

- Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával? (M: 60°)
- Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (M: 3822,5)

13. (ESZÉV-NY 2009.05/8)

Egy forgáskúp alapkörének átmérője 10 cm, alkotója 13 cm. Írjon ebbe egy olyan, a kúppal közös szimmetriatengelyű forgáshengert, amelynek alaplapja a kúp alaplapjára illeszkedik, és térfogata maximális! Mekkora ennek a hengernek a sugara? (M: $\frac{10}{3}$ cm)

14. (ESZÉV-NY 2010.05/6)

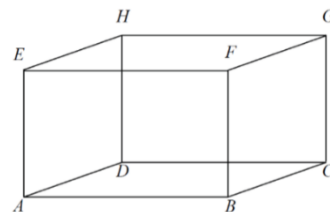
Vízszintes terepen egy 6 méter mély, lefelé keskenyedő, négyszöglapok által határolt gödröt ástak. A gödör alja is vízszintes. A gödör nyílása egy 8×8 m-es négyzet, két szemközti lapja függőleges, a másik kettő pedig 75° , illetve 60° -os szöget zár be a földfelszín síkjával. (E két szemközti „ferde” lap síkjai 45° -os szöget zárnak be egymással.)

- Rajzolja le a gödör azon síkmetszetét, amely merőleges a ferde lapokra (és így a földfelszínre is)! A rajzon tüntesse fel az adatokat!
- Hány m^3 földet kellett kiásni a gödör elkészítéséhez? Az eredményt m^3 pontossággal adja meg! (M: $262 m^3$)

15. (ESZÉV 2010.10/3)

Az $ABCDEFGH$ téglatest A csúcsból induló élei: $AB = 12$; $AD = 6$; $AE = 8$. Jelölje a HG él felezőpontját P .

- Számítsa ki az $ABCDP$ gúla felszínét! (M: 240)
- Mekkora szöget zár be az $ABCDP$ gúla ABP lapjának síkja az $ABCD$ lap síkjával? (M: $53,1^\circ$)

**16. (ESZÉV-NY 2011.05/4)**

Egy $ABCDE$ négyoldalú szabályos gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúlát elmetsszük az EAC síkkal. A síkmetszet területe 64 cm^2 . Ha a gúlát az E csúcsától mért 4 cm távolságban, az alaplappal párhuzamos síkkal metsszük el, akkor 32 cm^2 területű síkmetszetet kapunk.

- Mekkora a gúla magassága, és mekkora az alaplapjának területe? (M: 8 cm; 128 cm^2)
- Számítsa ki a gúla alaplapjának és oldallapjának hajlásszögét! (M: $54,7^\circ$)

17. (ESZÉV-NY 2011.05/9)

Egy játékszombában fa elemekből álló építőkészletet gyártanak. Az építőkészlet egyik darabját úgy készítik, hogy egy 3 cm élhosszúságú kockának mind a nyolc „csúcsát” levágják egy-egy

sík mentén úgy, hogy a fűrész a csúcsba futó mindhárom élt a csúcstól 1 cm távolságban vágja el. Az így kapott test térfogata hány százaléka az eredeti kocka térfogatának? (A fűrészeléskor keletkező anyagvesztés elhanyagolható, számításaiban nem kell figyelembe vennie!) (M: 95%)

18. (ESZÉV 2011.10/7)

Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm. A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson át.

a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (M: 5,2 dl)

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata $2p$ százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékaival tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az ezt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg p értékét! (M: $p = 35$)

19. (ESZÉV 2012.05/3)

Egy forgáskúp nyílásszöge 90° , magassága 6 cm.

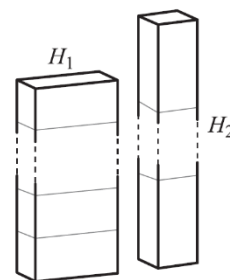
a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3 -ben) és felszínét (cm^2 -ben)! (M: 226 cm^3 , 273 cm^2)

b) A kúp alaplajjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3 -ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján? (M: 181 cm^3)

Válaszait egészre kerekítve adja meg!

20. (ESZÉV 2012.05/5)

Két egyenes hasábot építünk: H_1 -et és H_2 -t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építéskor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építéskor pedig a négyzet alakú alaplajjukkal. A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa: 0,8. Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1 -et és H_2 -t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel? (M: 6)



21. (ESZÉV-NY 2012.05/9)

Egy galéria új kiállítótermet nyitott. A terem alakja egy négyzet alapú egyenes gúla, melynek belső méretei: az alapél 12 méter, az oldalél 10 méter. Az egyik kiállító művész azt kérte, hogy a kiállítás kivitelezője ragasszon az oldalfalakra körbe az alapélekkel párhuzamos keskeny színes csíkot (vonalat), amelyre majd a kiírásokat elhelyezik. A színes vonalak vízszintes, képzeletbeli síkja éppen felezte a kiállítóteret térfogatát.

a) Mekkora a színes vonalak összes hossza? Milyen magasan helyezkedik el a padló síkja felett a képzeletbeli felezősík? (M: 38,1 m; 1,09 m)

A kiállítás megnyitására úgy helyezték el a terem legmagasabb pontjáról belógatott mikrofont, hogy az minden oldalfaltól és a padlótól is azonos távolságra legyen.

b) Milyen hosszú volt a belógató vezeték, ha a mikrofon és a rögzítés méretétől eltekintünk? (Válaszait cm pontossággal adja meg!) (M: 3,02 m)

22. (ESZÉV 2012.10/7)

Egy üzemben 4000 cm^3 -es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékekkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

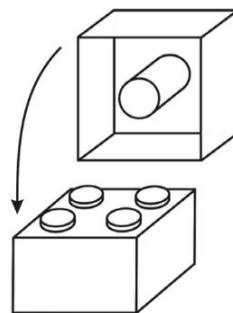
- Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai $6,4 \text{ cm}$ magasak! (M: 1265 cm^2)
- Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát! (M: 20 cm)

23. (ESZÉV 2013.05/7)

Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdni, amelynek térfogata 1000 cm^3 . A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0,2 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$, míg oldalának anyagköltsége $0,1 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$. Mekkora legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (M: $r = 4,3 \text{ cm}$, $m = 17,2 \text{ cm}$, a minimális anyagköltség 70 Ft)

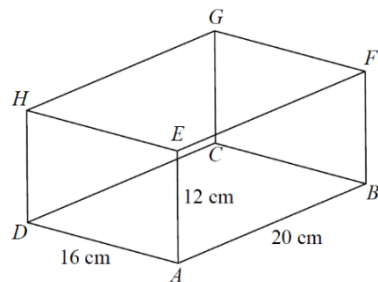
24. (ESZÉV 2013.05/8)

Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm , az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm . Mekkora a nagyobb henger átmérője? (M: $10,97 \text{ mm}$)

**25. (ESZÉV-NY 2013.05/4)**

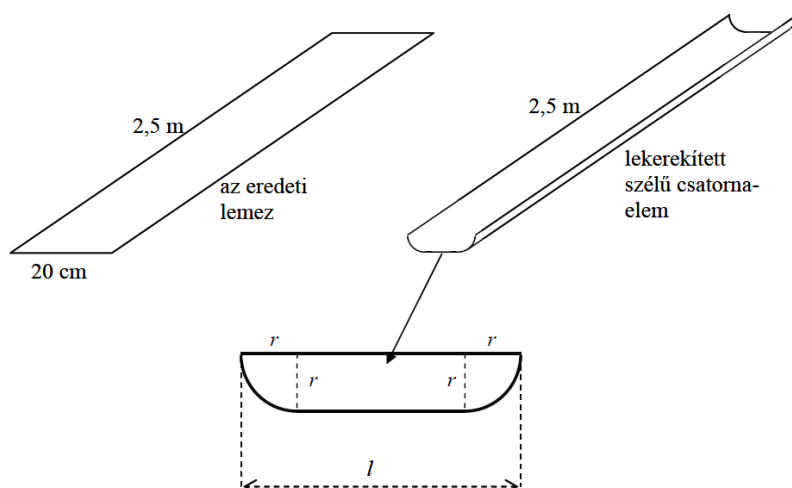
Az ábrán látható téglatest A csúcsából induló három élének hossza: $AB = 20 \text{ cm}$; $AD = 16 \text{ cm}$; $AE = 12 \text{ cm}$.

- Legyen P az AB él felezőpontja, Q pedig az EH él felezőpontja. Számítsa ki a PQ távolságot! ($17,55 \text{ cm}$)
- Az AE élegyenestől milyen távolságra vannak a hozzá képest kitérő élegyenesek? (M: 20 és 16 cm)

**26. (ESZÉV-NY 2013.05/8)**

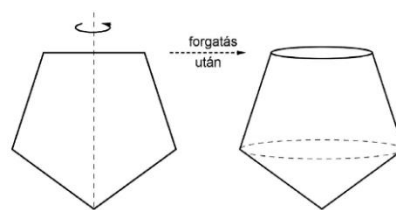
A bádgosüzemben téglalap alakú, 20 cm széles, $2,5 \text{ m}$ hosszú vékony bádoglemezekből $2,5 \text{ m}$ hosszú ereszsatorna-elemeket készítenek az ábrán látható lekerekített szélű keresztmetszettel.

- A csatorna folytonos vonallal határolt keresztmetszetének területe 55 cm^2 . Mekkora a negyedkörívek sugara (r), és milyen széles a csatorna (l)? Válaszait centiméterben, egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (M: $r = 4,0 \text{ cm}$, $l = 15,4 \text{ cm}$)
- A tervezők maximális áteresztőképességre töreksenek. Igazolja, hogy ez abban az esetben valósul meg, ha $l = 2r$. Számítsa ki, hogy vízszintes helyzetben hány liter vizet képes befogadni egy csatornaelem, ha ilyen keresztmetszettel készítik el? (Válaszát egész literre kerekítve adja meg!) (M: 16 liter)



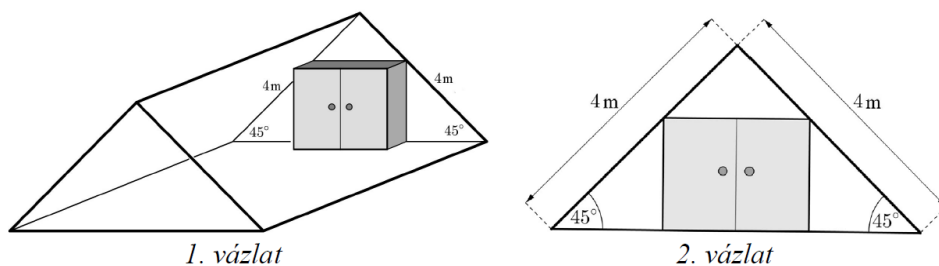
27. (ESZÉV 2014.05/3)

Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőönt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetriatengelye körüli forgatásával származtatható (lásd ábra). Hány cm^3 a nehezék térfogata? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (M: $13,6 \text{ cm}^3$)



28. (ESZÉV 2014.05/9)

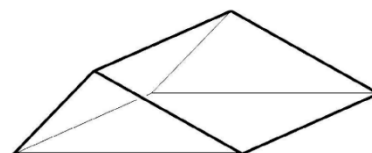
Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készített. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig előlnézetben ábrázolja a szekrényt.



A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie. Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (M: $\sqrt{2}$ és $2\sqrt{2}$ m)

29. (ESZÉV-NY 2014.05/3)

A Tetőfedők Egyesülete a veterán tetőfedőknek egy kicsi, tömör, névre szóló bronzplasztikával kedveskedik. Az emléktárgy alaplapja egy 4 cm oldalú négyzet, melynek két szemközti éléhez egy-egy, az alaplap síkjára merőleges, egymással egybevágó háromszöglap csatlakozik az ábra szerint.



A háromszöglapok két oldaléle 2 cm és 3 cm hosszú. Az emléktárgyhoz megrendelt téglatest alakú díszdoboz belső mérete $4,1 \text{ cm} \times 4,1 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$, az emléktárgy készítésére felhasznált bronz sűrűsége pedig $8,2 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Számítással igazolja, hogy a bronzplasztika befér a dobozba és tömege nem haladja meg a 10 dkg-ot! (M: $m = 1,45 \text{ cm}$; tömege: $0,09512 \text{ kg}$)

30. (ESZÉV 2014.10/2)

Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

- Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m^2 -nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni? (M: 4,8 l, tehát nem)
- Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben? Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg! (M: 20 cm)

31. (ESZÉV 2015.05/9)

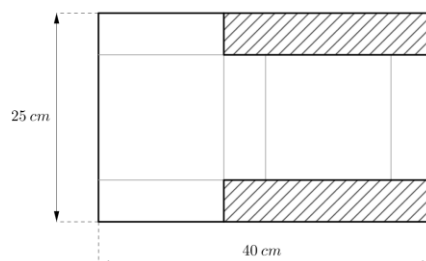
- Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé!

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p , a másiké pedig q ($p > 0$, $q > 0$). (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

- Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6 \cdot \sqrt[3]{(p^3 + q^3)^2}$!
- Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege!

32. (ESZÉV-NY 2015.05/5)

Egy $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ -es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt él mentén) egy olyan téglalatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő.



- Mekkora lesz a kapott téglalatest felszíne, ha a kivágott téglalapok rövidebb oldala 2 cm-es? (M: 912 cm^2)
- Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglalatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat? (M: 5 cm, 15 cm, 15 cm; $V_{\max} = 1125 \text{ cm}^3$)

33. (ESZÉV 2015.10/5)

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík 30° -os szöget zár be a hasáb alaplappal, és két részre vágja a hasábot. Számítsa ki a két rész térfogatának arányát! (M: $2\sqrt{3} : 10\sqrt{3} = 1 : 5$)

34. (ESZÉV Minta (1) 2015.10/7)

Egy asztalon álló doboz alakja olyan négyzet alapú, egyenes hasáb, amelyben az oldalél hossza kétszerese az alapél hosszának. A doboz egy 30 cm átmérőjű, félgömb alakú tállal éppen lefedhető úgy, hogy a tál alsó széle az asztalon fekszik, és érinti a doboz egyik négyzetlapjának négy csúcsát. (A félgömb és a hasáb tengelye egybeesik.)

- Milyen hosszúak a doboz élei? (M: 7,07 és 14,14 cm)

Egy négyzet alapú, egyenes hasáb éleinek hossza (centiméterben mérve) egész szám. A hasáb felszínének és térfogatának a mérőszáma egyenlő.

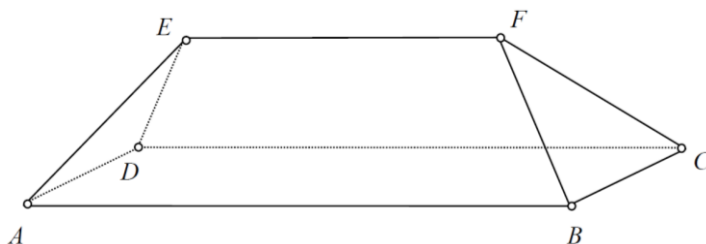
- Milyen hosszúak a hasáb élei? (M: 5; 10 vagy 6; 6 vagy 8; 4 vagy 12; 3)

35. (ESZÉV Minta (2) 2015.10/7)

Egy családi ház tetőterének alapja téglalap, a tető gerince a téglalap középvonalának az alapra merőleges síkjában helyezkedik el. Az ábra szerinti $ABCD$ téglalap méretei: $AB = 10$ méter és



$BC = 8$ méter, EF hossza $6,8$ méter, az EF gerincet az alappal összekötő gerendák méretei pedig: $EA = ED = FB = FC = 5,8$ méter.



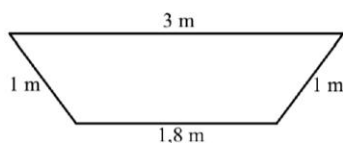
A lakók a tetőteret tárolásra használják, így itt – alapos szigetelés után – bizonyos mértékben télen is fűteni kell. A fűtés tervezésekor fontos tudni, mekkora a kifűtendő térfogat. Mekkora a tetőtér térfogata? Válaszát m^3 -ben, egész értékre kerekítve adja meg! (M: 139 m^3)

36. (ESZÉV Minta (3) 2015.10/6)

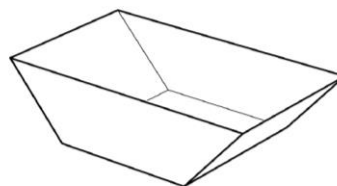
Egy téglatest alaplaja az $ABCD$, fedőlapja az $EFGH$ téglalap; az AE , BF , CG , DH élek párhuzamosak. A téglatest éleinek hossza $AB = 3$, $AD = 4$, $AE = 2$ egység. Határozza meg az AE egyenes és a BH testátló távolságát! (M: $2,4$ egység)

37. (ESZÉV 2016.05/8)

Egy kisüzemben a termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplaja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az $1,8 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ -es (téglalap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra

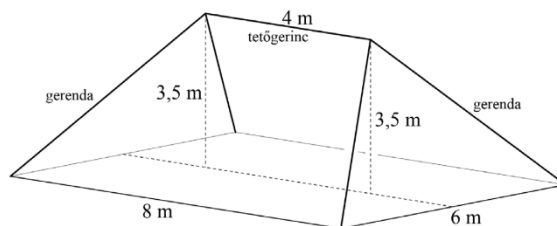


2. ábra

- Számítsa ki a hasáb térfogatát! (M: $3,84 \text{ m}^3$)
- Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött $2,7 \text{ m}^3$ térfogatú folyadék! (M: $0,6 \text{ m}$)

38. (ESZÉV-NY 2016.05/3)

Egy 6 méter széles és 8 méter hosszú, téglalap alaprajzú épületre „sátortetőt” építettek. A tető 4 méter hosszú gerince a mennyezet téglalapjának hosszabbik középvonala fölött, attól $3,5$ méter távolságra van. A mennyezet téglalapjának négy csúcsában támaszkodó, négy egyenlő hosszúságú gerenda tartja a tetőgerincet.



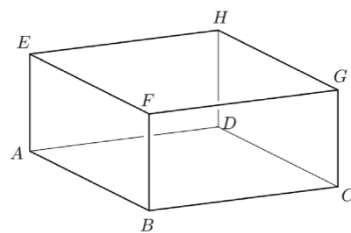
- Számítsa ki a tartógerendák hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket! (M: $\sqrt{25,25} \approx 5 \text{ m}$; $\approx 44^\circ$)

A tető déli irányba néző, trapéz alakú részére egy téglalap alakú napelemet fektetnek. A téglalap egyik oldala a tető alsó élére, az ezzel szemközti oldala pedig a trapéz középvonalára illeszkedik. A napelem sehol sem nyúlik túl a tetőn.

- Mekkora a legnagyobb területű napelem, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? Válaszát négyzetméterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (M: $13,8 \text{ m}^2$)

39. (ESZÉV-NY 2016.05/8)

Az $ABCDEFGH$ téglalest $ABCD$ lapjára merőleges élei AE , BF , CG és DH . A téglalest három élének hossza: $AB = 12$ cm, $AD = 16$ cm és $AE = 5$ cm.



- Számítsa ki az $ACFH$ tetraéder térfogatát! (M: 320 cm^3)
- Igazolja, hogy az $ACFH$ tetraéder oldallapjai egybevágó háromszögek!
- Igazolja, hogy az $ACFH$ tetraéder oldallapjai hegyesszögű háromszögek!

40. (ESZÉV 2016.10/2)

Ádámék kerti zuhanyozójának tartálya egy feketére festett, forgáshenger alakú, acéllemezből készült hordó. A henger átmérője 50 cm, magassága 80 cm.

- Számítsa ki a hordó térfogatát és felszínét! (A lemez vastagsága elhanyagolható.) A térfogatot egész literre, a felszínt egész négyzetdeciméterre kerekítve adja meg! (M: 157 liter; 165 dm^2)

A megadott méretű hordót úgy szerelik fel, hogy a forgástengelye vízszintes legyen. Ebben a helyzetben – a beömlő nyílás miatt – csak 40 cm magasságig lehet feltölteni vízzel.

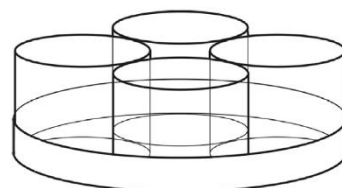


- A teljes térfogatának hány százalékáig tölthető fel a vízszintes tengelyű tartály? (M: $\approx 86\%$)

41. (ESZÉV 2017.05/3)

- Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



- Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

- Igaz-e, hogy a pohárba befér 5 dl üdítő? (M: $V_{\text{pohár}} = 512 \text{ cm}^3 > 5 \text{ dl}$, azaz befér)

42. (ESZÉV 2017.05/6)

Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

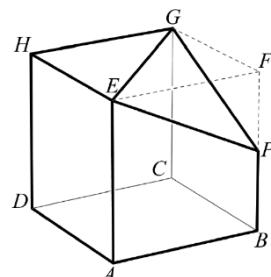
- Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, felül nyitott hordó elkészítéséhez, ha a gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik? (M: 190 dm^2)

Egy kisvállalkozásnál több méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú hordókat.

- Mekkora annak a 200 liter térfogatú, felül nyitott forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne? (M: $r = m = 3,99 \text{ dm}$)

43. (ESZÉV 2017.10/2)

A 6 cm oldalélű tömör $ABCDEFGH$ kocka BF élén megjelöltük az ℓ P felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az E , G , P pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).



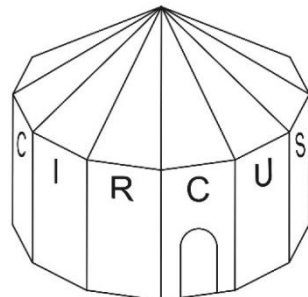
- Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne? (M: 202 cm^2)
- Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka $EFGH$ lapjának síkja? (M: $35,3^\circ$)

44. (ESZÉV 2017.10/7)

Egy akcióban egy csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél. Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg! (M: 15,96 $\approx$ 16 cm)

45. (ESZÉV-NY 2018.05/4)

Egy cirkuszi sátor alsó része szabályos tizenkétszög alapú egyenes hasáb, a felső része pedig szabályos tizenkétszög alapú gúla, amelynek alaplapja a hasáb fedőlapjára illeszkedik. Az alapélek hossza 5 méter, a hasáb alakú rész magassága 8 méter, a felső, gúla alakú rész magassága 3 méter. A téli időszakban a sátrat olyan (egyforma) fűtőtestekkel fűtik, amelyek egyenként 200 m³ befűtésére elegendők. Legalább hány ilyen fűtőtestre van szükség? (M: 13)

**46. (ESZÉV-NY 2018.05/8)**

Egy négyzetes oszlopnak (négyzet alapú egyenes hasábnak) pontosan négy olyan éle van, amelyek 10 cm hosszú. Az oszlop testátlójának hossza 12,5 cm. Számítsa ki a négyzetes oszlop felszínét! (M: 268 cm²)

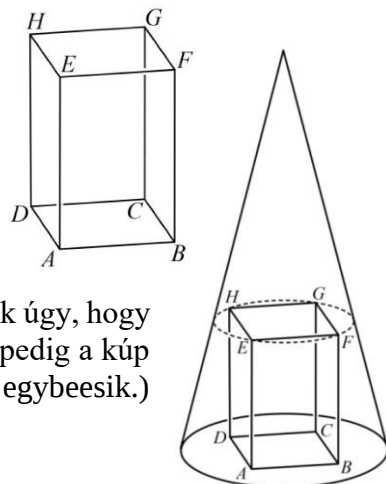
47. (ESZÉV 2018.10/8)

Az ABCDEFGH négyzetes oszlop AE, BF, CG, DH élei merőlegesek az ABCD alaplapra. Az A csúsból kiinduló három él hossza $AB = AD = 8$ egység, $AE = 15$ egység.

- a) Számítsa ki az $\vec{EF}$ és $\vec{AH}$ vektorok skaláris szorzatát! (M: 0, a két vektor merőleges)

A négyzetes oszlop köré egy P csúspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az A, B, C, D csúcsok a kúp alaplapjára, az E, F, G, H csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.

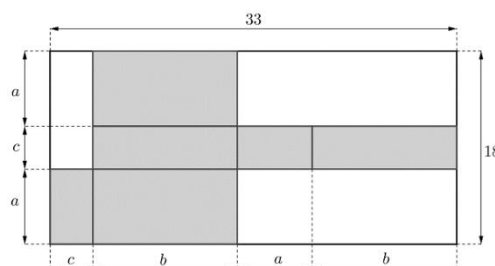
- b) Számítsa ki a kúp felszínét! (M: 1446,9 cm²)

**48. (ESZÉV 2019.05/4)**

Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával. Határozza meg a tetraéder térfogatát! (M: 10,4 cm³)

49. (ESZÉV 2019.05/5)

Egy 33 cm $\times$ 18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az ábra szerint választják meg. Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm! (M: 308 cm³)

**50. (ESZÉV-NY 2019.05/8)**

A Balaton vízfelületének hossza kb. 76,5 km, átlagos szélessége kb. 7,7 km.

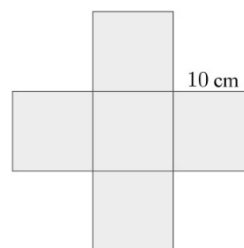
- a) Számítsa ki a Balaton átlagos vízmélységét, ha a tóban levő vízmennyiség becsült térfogata 2 milliárd m³! Válaszát méterben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (M: 3,4 m)

A tó szélessége Balatonvilágos és Balatonalmádi között a legnagyobb, kb. 12,7 km.

- b) Legalább hány méterrel kell a vízfelszín fölé emelkednie a balatonvilágosi kikötőben elhelyezett jelzőoszlopnak ahhoz, hogy az oszlop tetején rögzített viharjelző készülék fényjelzése – a Föld görbületét is figyelembe véve – látható legyen a balatonalmádi strandon fürdőzők számára is? (A Földet tekintjük egy 6370 kilométer sugarú gömbnek.) (M: 13 m)

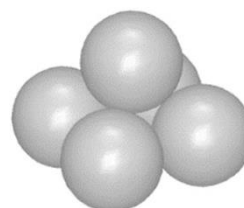
51. (ESZÉV 2020.05/3)

A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja. Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább 200 cm^2 , de kevesebb 300 cm^2 -nél!



52. (ESZÉV-NY 2020.05/7)

5 golyóból kétrétegű piramist építünk (ábra). Az alsó réteget alkotó 4 golyót egy vízszintes síklapon helyezük el úgy, hogy az egymás melletti golyók érintsék egymást, középpontjaik pedig egy négyzet csúcsai legyenek. A golyók sugara 1 cm. Számítsa ki a kétrétegű piramis magasságát! (M: $\sqrt{2} + 2 \approx 3,41 \text{ cm}$)



53. (ESZÉV 2020.10/4)

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan befér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.) (M: 58%)

54. (ESZÉV 2020.10/7)

Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy $7 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ -es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy, kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm. Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogná el). A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.

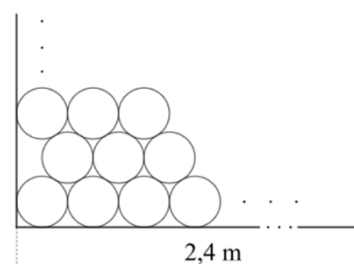
- a) A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság? (M: 79 cm)

A ház cserépteteje előregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.

- b) Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserépezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz? (M: 1055 db)

55. (ESZÉV 2021.05/9)

Egy teherautó raktere 2,4 méter széles, 2 méter magas és 7 méter hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, 24 centiméter az átmérőjük, és 7 méter hosszúak. A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktéren egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi el a farönköket.



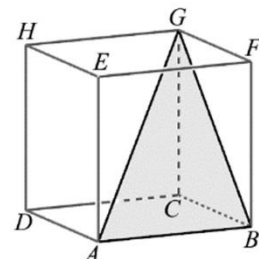
- a) Mutassa meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni!
 b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak? (M: 19%)

56. (ESZÉV-NY 2021.05/7)

Egy tömör fából készült forgáshenger magassága 30 cm, felszíne $10\,000\text{ cm}^2$. A hengerből egy olyan forgáskúpot készítenek, amelynek az alapköre és a magassága megegyezik a hengerével. A henger térfogatának hány százaléka lesz forgács, és mekkora a kúp térfogata? (M: 67%-a, $23\,970\text{ cm}^3$)

57. (ESZÉV 2021.10/8)

Az ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka élhosszúsága 10 egység. Számítsa ki az ABG háromszög beírt körének sugarát! (M: 3,41)

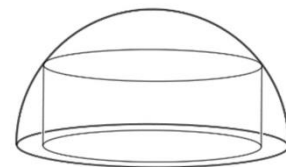


58. (ESZÉV 2021.10/9)

Két forgáshenger alakú viaszgyertyánk van. Az egyik gyertya alapkörének sugara r , magassága h , a másik alapkörének sugara R , magassága szintén h . A két gyertyát összeolvasztjuk, majd a viaszból egy ugyancsak h magasságú, forgáshenger alakú gyertyát öntünk ($r, h, R > 0$).

- a) Igazolja, hogy az így kapott gyertya alapkörének sugara legalább $\sqrt{2rR}$. (Az öntés során fellépő anyagvesztéstől eltekinthetünk.)

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).



- b) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (cm^3 -ben mérve) $225\pi m - \pi m^3$, ahol $0 < m < 15$.

59. (ESZÉV Minta 2021.10/2)

A strand büféjében az egyik üdítő 1,5 literes és 0,5 literes kiszerelésben is kapható. (A műanyag palackokat tekintjük geometriai értelemben hasonló hengereknek.) Hány százalékkal nagyobb három kis palack felszínének összege, mint egy nagypalack felszíne? A választ egész számra kerekítve adja meg! (M: 44%)



60. (ESZÉV 2022.05/6)

Egy csonkakúp alapkörének sugara 14 cm, fedőkörének sugara 8 cm, alkotója 10 cm hosszú. Géza szeretné gyorsan megbecsülni a csonkakúp térfogatát, ezért azt egy henger térfogatával közelíti. A közelítő henger alapkörének sugara megegyezik a csonkakúp alap- és fedőköre sugarának számtani közepével, magassága pedig egyenlő a csonkakúp magasságával. Határozza meg Géza közelítésének relatív hibáját! (Relatív hibának nevezzük a közelítő értéknek a pontos értéktől mért százalékos eltérését.) (M: $-2,4\%$)

61. (ESZÉV-NY 2022.05/6)

Egy gyárban olyan 5 liter űrtartalmú lábosokat készítenek, melyek alakja jó közelítéssel (felül nyitott) forgáshenger. Mekkora az 5 literes lábos alapkörének a sugara, ha magassága 15 cm? (M: 10,3 cm)