

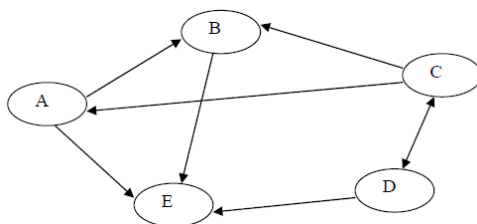
Gráfelméleti feladatok (középszint)

1. (KSZÉV Minta (1) 2004.05/I/7)

Egy öttagú társaságban a házigazda mindenkit ismer, minden egyes vendége pedig pontosan két embert ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Szemléltesse rajzzal az ismeretségeket!

2. (KSZÉV Minta (3) 2004.05/I/7)

Egy iskolai bajnokságban 5 csapat körmerkőzést játszik. (Mindenki mindenkivel egyszer játszik.) Az ábra az eddig lejátszott mérkőzéseket mutatja. A nyíl mindig a győztes felé mutat. Döntetlen esetén az összekötő vonal mindkét végén nyíl van. A csapat győzelem esetén 2 pontot, döntetlen esetén 1 pontot kap, vereség esetén pedig nem kap pontot.



- a) Kinek hány pontja van ebben a pillanatban?
- b) Hány mérkőzés van még hátra?

3. (KSZÉV Minta (5) 2004.05/I/7)

5 város között úthálózatot hozunk létre. Legalább hány utat kell építeni, hogy bármelyik városból bármelyik városba el lehessen jutni? Válaszát ábrával indokolja!

4. (KSZÉV Minta (5) 2004.05/I/12)

Hat labdarúgócsapat egyfordulós körmerkőzést – minden csapat minden csapattal egy mérkőzést – játszott. Hány mérkőzés volt?

5. (KSZÉV 2005.05 (1)/I/9)

Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak?

6. (KSZÉV 2005.05 (2)/I/10)

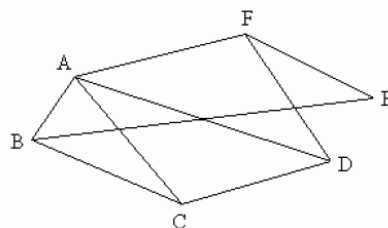
Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelynek 4 éle van!

7. (KSZÉV 2005.05 (3)/I/10)

Egy álláshirdetésre négyen jelentkeznek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Kiderült, hogy közülük hárman, Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri. Szemléltesse az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

8. (KSZÉV 2005.05 (3)/II/14)

Az iskolák közötti labdarúgó-bajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti az ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? Válaszát indokolja!



9. (KSZÉV 2005.10/I/9)

Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!

10. (KSZÉV 2006.02/I/6)

Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.

11. (KSZÉV 2005.05/I/6)

Szemléltesse gráffal azt a vasúthálózatot, amelyben szereplő hét településről a következőket tudjuk: Az A várost B, C és D városokkal vasútvonal köti össze, a B városból C és E városokba, valamint a D városból az F és a G településekhez közvetlen vasútvonal megy. Mennyi a fokszámok összege ebben a gráfban?

12. (KSZÉV 2006.10/I/3)

Az iskolában hat osztály nevezett be a focibajnokságra egy-egy csapattal. Hány mérkőzést kell lejátszani, ha mindenki mindenkivel játszik, és a csapatok szerveznek visszavágókat is?

13. (KSZÉV 2007.05/II/14)

A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andrásen kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

- a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket!
- b) Hány mérkőzés van még hátra?

14. (KSZÉV-NY 2007.05/I/8)

Józsefnek 3 gyermeke volt: Andor, Mátyás és Dávid. Mátyásnak 3 fia született, Dávidnak 1, Andornak egy sem.

- a) Szemléltesse gráffal az apa-fiú kapcsolatokat!
- b) Hány csúcsa és hány éle van ennek a gráfnak?

15. (ESZÉV-NY 2007.05/3)

A Pécsre közlekedő vonat egyik fülkéjében hatan utaznak. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az útitársak közül, a többiek pontosan négy-négy útitársat ismernek régebbről. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

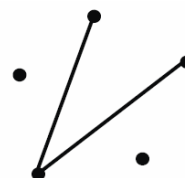
- a) Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!
- b) Az ismerősök a fülkébe lépve kézfogással köszöntötték egymást. Hány kézfogás történt?

16. (KSZÉV-NY 2008.05/I/11)

Öt fiú, András, Balázs, Csanád, Dénes és Elemér a kollégiumban ugyanabba az ötágyas szobába kerülnek. András ismerte mind a négy társát, a többiek viszont mindannyian három embert ismertek a négy szobatárs közül. Dénes nem ismerte Elemért. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely az öt diák egymás közötti korábbi ismeretségét szemlélteti!

17. (KSZÉV 2008.10/I/10)

Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!



18. (KSZÉV 2009.05/I/3)

Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltessen gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.)

19. (KSZÉV-NY 2010.05/II/15)

András, Balázs, Cili, Dani, Eszter, Feri, Gabi és Hedvig jó barátságban van egymással. A nyári szünet első napján András kitalálta, hogy másnap együtt elutazhatnak a nyaralójukba. Ezért felhívta telefonon Cilit és Ferit, és megkérte őket, hogy a többieket értesítsék telefonon az utazás tervéről. (Egy hívás alkalmával mindig csak ketten beszélgetnek egymással.)

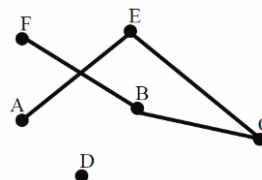
- a) Legalább hány telefonbeszélgetésnek kellett megtörténnie (beleértve András beszélgetéseit is), hogy mindenki tudjon a tervezett nyaralásról?

A létrejött telefonbeszélgetések során végül mindenki értesült András tervéről. Ezekről a telefonbeszélgetésekről a következőket tudjuk:

- András csak Cilit és Ferit hívta fel;
 - Feri senki mással nem beszélt telefonon, Cili pedig csak Andrással és Danival beszélt;
 - Dani összesen két barátjával beszélt, Eszter pedig hárommal;
 - Balázssal csak Hedvig beszélt, mivel Hedvig tudta, hogy másnak már nem kell szólnia;
 - András egyedül csak Gabi hívta fel, hogy megkérdezze a nyaraló pontos címét.
- b) Ábrázolja a telefonbeszélgetéseket egy olyan gráfban, amelyben a pontok az embereket jelölik, és két pontot pontosan akkor köt össze él, ha az illetők beszéltek egymással telefonon (függetlenül attól, hogy ki kezdeményezte a hívást)!

20. (KSZÉV 2010.05/I/7)

Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzoljon be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki! A berajzolt éleket két végpontjukkal adja meg!



21. (KSZÉV 2010.10/I/2)

Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai?

22. (KSZÉV 2010.10/I/11)

A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábbról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Rajzolja fel a négytagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját!

23. (KSZÉV-NY 2012.10/I/10)

Egy vasúti fülkében öt utas utazik. Közülük egy személy három másikat ismer, három főnek 2-2 útitárs ismerőse a fülkében, egy személy van, aki csak egy útitársát ismeri. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Rajzolja meg egy ilyen társaság egy lehetséges ismeretségi gráfját!

24. (KSZÉV 2012.10/I/8)

Rajzoljon olyan gráfot, melynek 5 csúcsa és 5 éle van, továbbá legalább az egyik csúcsának a fokszáma 3.

25. (KSZÉV 2013.05/II/16)

Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

- a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!
- b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát indokolja!)

26. (KSZÉV 2014.05/I/10)

Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti!

27. (KSZÉV-NY 2014.05/I/5)

Adja meg az alábbi hétpontú gráfban a csúcsok fokszámának összegét!



28. (KSZÉV 2014.10/II/18)

Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezét fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezét, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

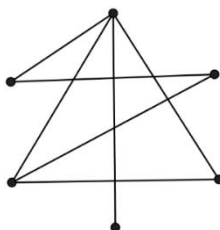
- Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezét fogtak az edzés előtt!
- Hány kézfogás történt összesen?

29. (KSZÉV 2015.05/I/8)

Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4.

30. (KSZÉV-NY 2015.05/I/2)

Adja meg az alábbi hatpontú gráfban a pontok fokszámának összegét!



31. (KSZÉV 2015.10/I/12)

Az iskolai asztalitenisz-bajnokságon heten indulnak. Mindenki mindenkivel egyszer játszik. Mostanáig Anita már mind a 6 mérkőzését lejátszotta, Zsuzsa 2, Gabi, Szilvi, Kati és Orsi pedig 1-1 mérkőzésen vannak túl. Hány mérkőzését játszotta le mostanáig a bajnokság hetedik résztvevője, Flóra?

32. (KSZÉV Minta (1) 2015.10/I/3)

Rajzoljon egy olyan 6 pontú gráfot, melyben a fokszámok összege 20, és a gráfnak van elsőfokú pontja!

33. (KSZÉV Minta (1) 2015.10/II/18)

Valamely csapatsportban a mérkőzés előtt mindkét csapat összes játékosa (a csere- játékosok is) kezét fog a másik csapat összes játékosával és a három játékvezetővel. Hányan vannak egy csapatban, ha összesen 432 kézfogás volt, és a két csapat létszáma azonos?

34. (KSZÉV Minta (2) 2015.10/I/7)

Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

- Van olyan 5 pontú gráf, melyben a fokszámok 1, 2, 2, 3, 3.
- Egy teljes gráf éleinek száma lehet 15.

35. (KSZÉV Minta (3) 2015.10/I/6)

Rajzoljon egy olyan ötpontú gráfot, melyben a fokszámok összege 14.

36. (KSZÉV Minta (3) 2015.10/II/15)

A 12. b osztály tanulói az érettségi banketten három asztalnál foglaltak helyet. A második asztalnál eggyel többen ültek, mint az első asztalnál és kettővel kevesebben, mint a harmadik asztalnál. A köszöntő után minden asztalnál mindenki mindenkivel koccintott az ünnepi pezsgővel, és így az első két asztalnál összesen ugyanannyi koccintás volt, mint a harmadik asztalnál. Hányan ültek a második asztalnál?

37. (KSZÉV 2016.05/I/5)

Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismeretségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: 5, 4, 3, 2, 1.

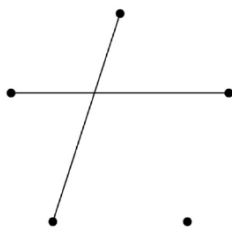
- Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismeretségi viszonyait!
- Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

38. (KSZÉV-NY 2016.05/I/6)

Egy találkozóra öt üzletember érkezik, akik a többi résztvevő közül rendre 1, 2, 2, 2, 3 másikat ismernek (az ismeretségek kölcsönösek). Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!

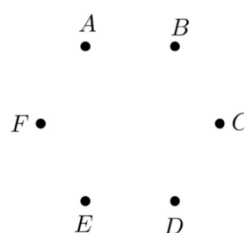
39. (KSZÉV 2016.10/I/1)

Az ábrán látható ötpontú gráfot egészítse ki további éllekké úgy, hogy mindegyik pont fokszáma 2 legyen!



40. (KSZÉV 2017.05/I/3)

Egy hatfős asztaltársaság tagjai: Anna, Balázs, Cili, Dezső, Egon és Fruzsina. Mindegyikük pontosan három másik személyt ismer a társaságban. Cili ismeri Dezsőt és Egont, Anna pedig nem ismeri sem Balázst, sem Dezsőt. Szemléltesse gráffal a társaság ismeretségi viszonyait! (Minden ismeretség kölcsönös.)



41. (KSZÉV-NY 2017.05/I/4)

Egy ötfős társaság tagjai találkozáskor üdvözölték egymást. Néhányan kezét is fogtak egymással. Feljegyeztük, hogy az egyes személyek hányszor fogtak kezét: 2, 3, 4, 3, 2. Hány kézfogás történt összesen? Válaszát indokolja!

42. (KSZÉV 2017.10/I/6)

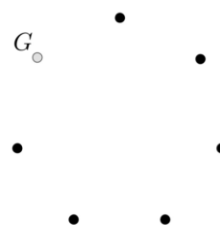
Hány éle van egy 8 pontú teljes gráfnak?

43. (KSZÉV 2017.10/I/8)

Egy születésnap összejövetelen egy 7 fős társaság tagjai közül néhányan koccintottak egymással. Lehetséges-e, hogy az egyes résztvevők 1; 2; 2; 3; 3; 6; 6 másik résztvevővel koccintottak az összejövetel során? Válaszát indokolja!

44. (KSZÉV 2018.05/I/5)

Egy hétagú társaság hat tagjáról tudjuk, hogy hány ismerőse van a társaságban: 1, 2, 3, 4, 4, 5. Rajzoljon erről a társaságról egy lehetséges ismeretségi gráfot, és adja meg a hetedik ember (G) ismerőseinek számát ebben az esetben! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

**45. (KSZÉV-NY 2018.05/II/16)**

Egy labdarúgócsapat hat tagja az egyik mérkőzés előtt bemelegítésként egyéni lábteniszmérkőzéseket játszott egymás ellen. Az alábbi táblázat mutatja, hogy melyik játékos hány társával mérkőzött. (Senki nem játszott kétszer ugyanazzal a csapattársával.)

játékos	A	B	C	D	E	F
mérkőzések száma	2	5	2	2	5	

Lehetséges-e, hogy az F jelű játékos 3 társával mérkőzött? Indokolja válaszát!

46. (KSZÉV 2018.10/I/3)

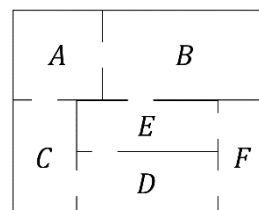
Hét csapat körmérkőzést játszik, azaz minden csapat minden másik csapattal egyszer mérkőzik meg. Eddig összesen 9 mérkőzést játszottak le. Hány mérkőzés van még hátra?

47. (KSZÉV 2019.05/I/5)

Egy ötpontú gráfnak 7 éle van. Mennyi a gráfban a csúcsok fokszámának összege?

48. (KSZÉV 2019.05/II/18)

Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.) Rajzolja fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot!

**49. (KSZÉV-NY 2019.05/I/2)**

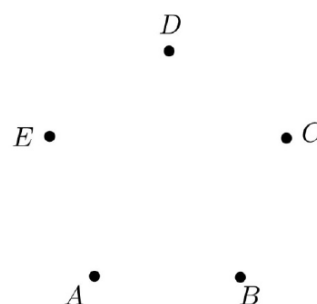
Egy esküvőn azt kérdeztük egy ötagú asztaltársaság tagjaitól, hogy hány ismerősük ül az asztalnál (az ismeretségek kölcsönösek). Négy személy válasza sorban: 4, 4, 4, 3. Az ötödik személynek hány ismerőse ül az asztalnál?

50. (KSZÉV 2019.10/I/1)

Rajzoljon egy olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszámának összege 14.

51. (KSZÉV 2020.05/I/4)

Egy konferencia 5 résztvevője áll egy asztal körül a kávészünetben (jelölje őket A, B, C, D, illetve E). Tudjuk, hogy A ismer mindenkit az asztalnál. B nem ismeri E-t, de a többieket ismeri. C két résztvevőt ismer, D pedig hármat. Ábrázolja az ötfős társaság tagjai közötti ismeretségeket egy gráffal, és adja meg, hogy kiket ismer az asztalnál az E-vel jelölt személy! (Minden ismeretség kölcsönös.)

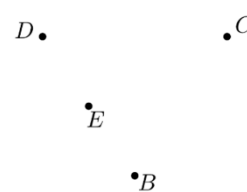
**52. (KSZÉV-NY 2020.05/I/5)**

Rajzoljon olyan 5 pontú gráfot, amelynek 7 éle van, és minden pont fokszáma legfeljebb 3.

53. (KSZÉV 2020.10/II/17)

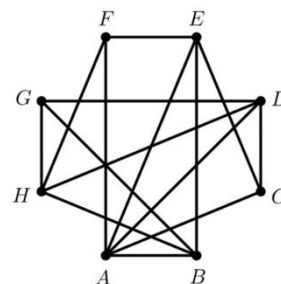
Tekintsük az A, B, C, D és E pontokat egy gráf csúcsainak.

- Egészítse ki élekkel a fenti ábrát úgy, hogy a kapott gráfban minden csúcs fokszáma 2 vagy 3 legyen!
- Lehet-e olyan 5 csúcsú gráfot rajzolni, amelyben minden csúcs fokszáma pontosan 3?



54. (KSZÉV 2021.05/II/16)

Egy nyolccsapatos jégkorongbajnokságban minden csapat minden másikkal egyszer mérkőzik meg. Az ábrán látható gráf az eddig lejátszott mérkőzéseket szemlélteti. A pontok a csapatokat jelképezik, és két pont között pontosan akkor van él, ha a két csapat már játszott egymással. A bajnokságból 5 fordulót már megrendeztek, ám néhány mérkőzés elmaradt. (Egy fordulóban – ha nincs elmaradó mérkőzés – mindegyik csapat egy mérkőzést játszik.)



- Adja meg három olyan csapat betűjelét, melyek közül bármely kettő már lejátszotta az egymás közötti mérkőzését!
- Hány mérkőzés maradt el az első 5 fordulóban?

55. (KSZÉV-NY 2021.05/II/15)

Egy új közösségi oldalon Anna, Bence, Cili, Dénes, Edit és Feri már regisztrálta magát. Ahhoz, hogy két regisztrált felhasználó *ismerős* legyen az oldalon, kölcsönösen be kell jelölniük egymást. A 6 fő között Anna már csak Bencével *nem ismerős*, a többiekkel igen. Cili (Annán kívül) Ferivel, Bence pedig csupán Edittel *ismerős*. Dénes, Edit és Feri még *nem ismerősei* egymásnak az oldalon. Szemléltesse gráffal, hogy a 6 fő közül ki kivel *ismerős* ezen a közösségi oldalon, és adja meg, hány olyan „pár” van közöttük, akik még *nem ismerősei* egymásnak?

56. (KSZÉV 2021.10/II/14)

Létezik-e olyan 7 pontú gráf, amelyben minden pont foka száma 3? (Ha válasza **igen**, akkor rajzoljon ilyen gráfot, ha a válasza **nem**, akkor válaszát indokolja.)

57. (KSZÉV Minta 2021.10/I/2)

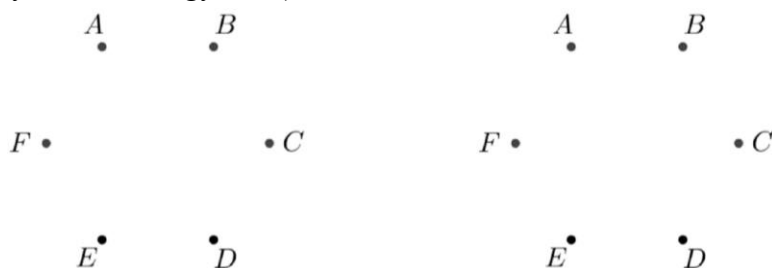
Rajzoljon egy olyan hatpontú gráfot, amelyben minden csúcs foka száma 3.

58. (KSZÉV 2022.05/I/2)

Hány éle van egy tízpontú teljes gráfnak?

59. (KSZÉV-NY 2022.05/I/12)

Egy hatfős társaságban Andrásnak 5, Borinak 5, Cilinek 3, Dezsőnek 3, Elemérnek 2 ismerőse van. Hány ismerőse lehet a többiek között Flórának, a társaság hatodik tagjának? Minden lehetőséget szemléltessen a megfelelő ismeretségi gráffal! (Az ismeretség kölcsönös, a gráfban a pontok mellett a nevek kezdőbetűje szerepel. A gráfban két pontot akkor kössön össze él, ha a megfelelő személyek ismerik egymást.)



60. (KSZÉV 2022.10/I/9)

Rajzoljon egy olyan hatpontú gráfot, melyben két pontnak egyenlő a foka száma, a többi négy fokszám viszont ettől és egymástól is különbözik!