

Logaritmus alkalmazása feladatok (középszint)

1. (KSZÉV Minta (3) 2004./II/13)

Egy pohár kihűlő tea pillanatnyi hőmérsékletét közelítőleg a következő összefüggés adja meg:

$$T(t) = 90 \cdot 10^{-0,038t},$$

ahol t az eltelt idő percben kifejezve, T pedig a hőmérséklet °C-ban megadva. Tudjuk, hogy a környezet hőmérséklete 0°C.

a) Számolja ki az alábbi táblázat hiányzó értékeit:

Eltelt idő (perc)	0	5	10		20	25
A tea hőmérséklete (°C)		58,1		24,2	15,6	

b) Ábrázolja koordináta-rendszerben a tea hűlésének a folyamatát!

c) Tudjuk, hogy a kezdetben forró kávé esetében is a hőmérséklet exponenciálisan csökken, és pillanatnyi értékét közelítőleg a $T(t) = a \cdot 10^{-bt}$ összefüggés adja meg, ahol a és b adott állandók, t az eltelt idő percben. Megmértük, hogy kezdetben ($t = 0$) 75 °C-os, 5 perc múlva 70 °C-os a kávé hőmérséklete. Adja meg az adatok alapján a és b értékét!

2. (KSZÉV 2006.10/II/18)

A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet:

$$E = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}.$$

A képletben az E a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

- Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt?
- Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?
- Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)?

3. (KSZÉV-NY 2008.05/II/18)

Egy biológiai laboratóriumban a munkacsoport egy egysejtű tenyészetet tanulmányozott. Azt tapasztalták, hogy a tenyészet milligrammban mért tömegét az

$$m(t) = 0,8 \cdot 10^{0,02t}$$

függvény jó közelítéssel leírja, ha t a megfigyelés kezdetétől eltelt időt jelöli órában mérve.

- Adja meg milligrammban a tenyészet tömegét a megfigyelés kezdetekor!
- Számítsa ki, hogy mennyit változott a tenyészet tömege a megfigyelés második 24 órájában! (A választ egy tizedes pontossággal adja meg!)
- A tenyészet tömege 12,68 milligramm volt, amikor technikai okok miatt a megfigyelést abba kellett hagyni. Számítsa ki, hogy ez a megfigyelés hányadik napján következett be!

4. (KSZÉV 2009.10/II/18)

Ha az eredetileg $I_0 \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$ intenzitású lézersugár x mm ($x \geq 0$) mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0,1^{\frac{x}{5}} \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0 = 800 \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

- a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x) \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right)$	800						

- b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)

5. (KSZÉV 2011.05/II/17)

Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a

$$\lg p_m = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301$$

összefüggés áll fenn. A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

- Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?
- Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?
- Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást?

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

6. (KSZÉV 2011.10/II/16)

Újsághír: „Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”

A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3} \lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richterskálán.

- A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt a felszabaduló energia. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel?
- A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia?
- A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban?

7. (KSZÉV 2013.10/II/16)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz. A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével az alábbi összefüggés adja meg:

$$B(t) = 3\,000\,000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}.$$

- Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével?
- Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg!

8. (KSZÉV 2015.10/II/17)

Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkező években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul:

$$t(x) = 3600 \cdot 0,854^x,$$

ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

- Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest!
- Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken?

9. (KSZÉV Minta (2) 2015.10/I/11)

Egy telefonkészülék akkumulátora a rendszeres használat során folyamatosan veszít kapacitásából, azaz teljes feltöltés esetén is egyre kevesebb ideig működik a készülék. Az egyik modellel végzett kísérletek alapján a szakemberek az alábbi, közelítő kapcsolatot találták:

$$A(t) = 1,5 \cdot 2^{-t+2} + 8,$$

ahol $A(t)$ az akkumulátor üzemidejét jelzi órában, teljes feltöltés és átlagos használat során, az első feltöltés után t év elteltével.

- Számítsa ki, hogy az első feltöltés után várhatóan hány óráig üzemel majd a telefonunk (további töltés nélkül)!
- A képlet alapján várhatóan hány hónap elteltével lesz az akkumulátor üzemideje 12,5 óra?

10. (KSZÉV 2017.10/II/16)

A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

- Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? 1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg:

$$f(x) = 51 \cdot 1,667^x,$$

ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

- A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén?

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

- Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót?

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb. 8%-kal csökkent.

- Hány hívást indítottak vezetékes hálózatból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban?

11. (KSZÉV 2018.10/II/16)

Az edzésen megsérült Cili térde, ezért megműtötték. A műtét utáni naptól kezdve rendszeres napi sétát írt elő neki a gyógytornász. Cili az első nap csak 20 métert sétált, majd minden nap 15 százalékkal nagyobb távot tett meg, mint az előző napon. Egyik nap séta közben ezt mondta Cili: „A mai napon már 1000 métert sétáltam!” Hányadik napon mondhatta ezt először?

12. (KSZÉV 2019.05/II/16)

Péter az előző táblázat adatai alapján olyan matematikai modellt alkotott, amely az elektromos autók számát exponenciálisan növekedőnek tekinti. E szerint, ha a 2012 óta eltelt évek száma x , akkor az elektromos autók számát (millió darabra) megközelítőleg az $f(x) = 0,122 \cdot 2^{0,822x}$

összefüggés adja meg. A modell alapján számolva melyik évben érheti el az elektromos autók száma a 25 millió darabot?

13. (KSZÉV-NY 2019.05/II/18)

A titkosítási algoritmusok sokszor használnak nagy prímszámokat. 2018 elején jelent meg a hír, hogy megtalálták az addig ismert legnagyobb prímszámot: ez a $2^{77\,232\,917} - 1$. Egy matematikai témákkal foglalkozó internetes oldalon ez olvasható:

„Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyei számának a meghatározásához először vegyük annak 10-es alapú logaritmusát. Az így kapott számnál nagyobb egész számok közül a legkisebb lesz a kérdéses szám számjegyeinek a száma.”

Mutassa meg a leírt módszerrel, hogy a $2^{77\,232\,917}$ (tízes számrendszerben felírva) 23 249 425 számjegyből áll!

14. (KSZÉV-NY 2020.05/II/18)

Ismert tény, hogy magára hagyott forró tea előbb-utóbb lehűl. Ez a hőmérsékletcsökkenés exponenciális jellegű. Egy kísérlet során egy kanna forró teát egy 23°C-os helyiségben magára hagytak, majd időről időre megmérték a hőmérsékletét. Az eredményeket számítógépbe táplálva a tea T hőmérsékletére (°C-ban) a következő összefüggést kapták:

$$T_{\text{tea}}(t) = 23 + 56 \cdot 0,96^t,$$

ahol t a mérés kezdete óta eltelt idő percben.

- A megállapított összefüggés szerint hány °C lesz a tea hőmérséklete negyedóra elteltével?
- Számítsa ki, hogy a fenti összefüggés szerint hány perc alatt csökken a tea hőmérséklete 37°C-ra!

15. (KSZÉV 2020.10/II/15)

Egy klímakutató a globális éves középhőmérséklet alakulását vizsgálja. A kutató (a 2000 óta mért adatok alapján tett) egyik feltételezése szerint 2018 utáni néhány évtizedben a globális éves középhőmérséklet alakulását a következő függvénnyel lehet előre jelezni:

$$g(t) = 15,92 \cdot 1,002^t.$$

Ebben a képletben t a 2018 óta eltelt évek számát, $g(t)$ pedig az adott év becsült középhőmérsékletét jelöli Celsius-fokban ($t \geq 0$). Ezt a modellt alkalmazva számítsa ki, hogy melyik évben lesz az éves középhőmérséklet 16,7 °C!

16. (KSZÉV 2021.05/II/15)

Amerikai kutatók 104 labrador genetikai elemzése alapján felállítottak egy egyenletet, amellyel (a kutya 3 hónapos korától) megmondható, milyen korú az adott kutya emberévekben. A kutya valódi életkorát években mérve jelölje K , ekkor az emberévekben kifejezett életkort (E) az alábbi képlettel kapjuk: $E = 37 \cdot \lg K + 31$, ahol ($K > 0,25$).

- Egy kutya emberévekbe átszámított életkora $E = 70$ év. Hány év, hány hónap ennek a kutyának a valódi életkora? Válaszát egész hónapra kerekítve adja meg!

Egy másik átszámítás szerint – a kutya 3 éves korától kezdve – az emberévekben kifejezett életkor az $E = 5,5 \cdot K + 12$, ahol ($K > 3$).

- Számítsa ki egy $K = 8$ éves labrador esetén az emberévekben kifejezett életkort mindkét képlettel! Az amerikai kutatók képletéből kiszámított érték hány százalékkal nagyobb, mint a másik képletből kiszámított érték?

17. (KSZÉV 2022.05/II/16)

Az új autók értéke a megvásárlás pillanatától kezdve csökken. A csökkenés mértékét különböző modellekkel lehet becsülni. A *lineáris* becslési módszer szerint az autó minden hónapban ugyanannyi forintot veszít az értékéből.

- a) Egy újonnan 6 millió forintba kerülő autó értéke a lineáris becslési módszer szerint 5 év alatt csökken a felére. Hány forinttal csökken az autó értéke egy hónap alatt?

Az *exponenciális* modell szerint az új autó értéke havonta 1%-kal csökken.

- b) Hány forintba csökken a 6 millió forintba kerülő új autó értéke két év alatt az exponenciális modell szerint, és ez hány százalékos csökkenést jelent az új kori értékéhez képest?
- c) Hány hónap alatt csökken a felére az autó értéke az exponenciális modell szerint?