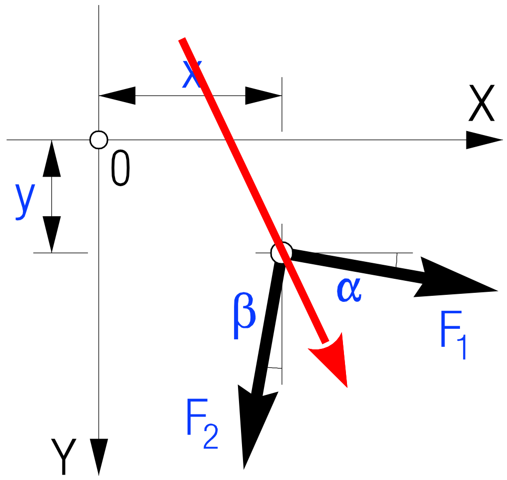
Statika 2022 - 1. ZH **A** Név: Neptun:

1. Határozza meg az alábbi erőrendszer eredőjét és helyét, valamit az eredő által a 0 pontra kifejtett nyomatékát számítással, az eredményt is ábrázolja! (10 p)



F_1 = 10 kN

α = 35°

F_2 = 5 kN

β = 23°

x = 4,6 m

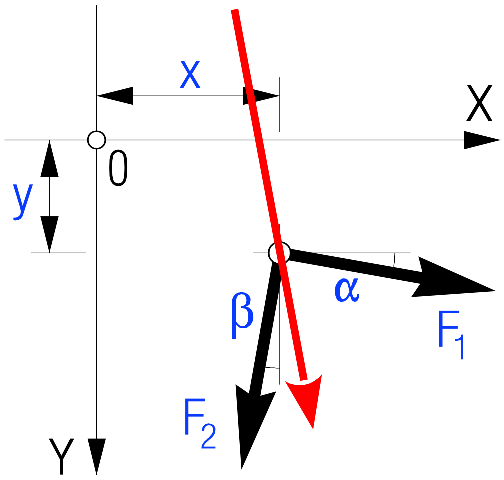
y = 3,5 m

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha = 10\,kN \cdot \cos 35^o = \mathbf{8{,}192\,kN}\ (\rightarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 10\,kN \cdot \sin 35^o = \mathbf{5{,}736\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin\beta = 5\,kN \cdot \sin 23^o = \mathbf{1{,}954\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos\beta = 5\,kN \cdot \cos 23^o = \mathbf{4{,}603\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 8{,}192\,kN - 1{,}954\,kN = \mathbf{6{,}238\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 5{,}736\,kN + 4{,}603\,kN = \mathbf{10{,}339\,kN}\ (\downarrow)\ [1\,p]$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{6{,}238^2 + 10{,}339^2} = \sqrt{38{,}9126 + 106{,}8949} = \sqrt{145{,}8075} = \mathbf{12{,}075\,kN}\ [1\,p]$$
$$\gamma = arc\,tg\frac{R_y}{R_x} = arc\,tg\frac{10{,}339\,kN}{6{,}238\,kN} = arc\,tg\,1{,}657422 = \mathbf{58{,}895^o}\ [1\,p]$$

$$M_0 = -F_{1x} \cdot y + F_{1y} \cdot x + F_{2x} \cdot y + F_{2y} \cdot x$$
$$= -8{,}192\,kN \cdot 3{,}5\,m + 5{,}736\,kN \cdot 4{,}6\,m + 1{,}954\,kN \cdot 3{,}5\,m + 4{,}603\,kN \cdot 4{,}6\,m$$
$$= -28{,}672\,kNm + 26{,}386\,kNm + 6{,}839\,kNm + 21{,}174\,kNm = \mathbf{25{,}727\,kNm}\ (\circlearrowright)\ [1\,p]$$
$$k_x = \frac{M_0}{R_y} = \frac{25{,}727\,kNm}{10{,}339\,kN} = \mathbf{2{,}488\,m}\ [1\,p]$$
$$k_y = -\frac{M_0}{R_x} = -\frac{25{,}727\,kNm}{6{,}238\,kN} = \mathbf{-4{,}124\,m}\ [1\,p]$$
$$k = \frac{M_0}{R} = \frac{25{,}727\,kNm}{12{,}075\,kN} = \mathbf{2{,}131\,m}\ [1\,p]$$

1. Határozza meg az alábbi erőrendszer eredőjét és helyét, valamit az eredő által a 0 pontra kifejtett nyomatékát számítással, az eredményt is ábrázolja! (10 p)



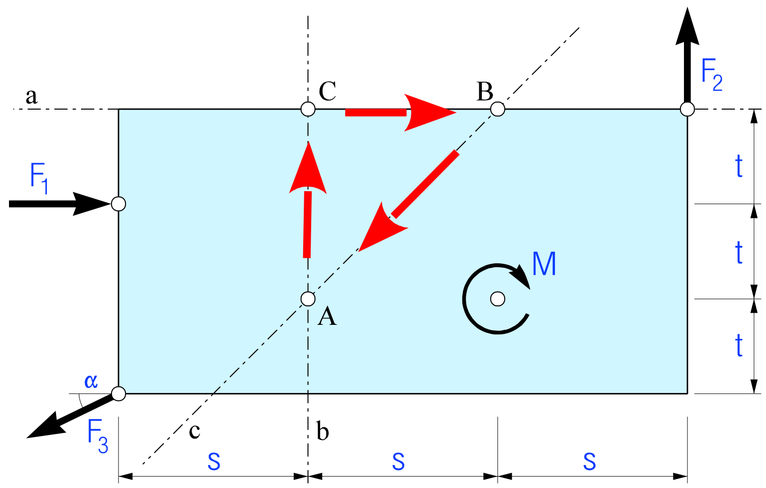
F_1 = 17 kN
α = 43°
F_2 = 26 kN
β = 25°
x = 1,7 m
y = 1,2 m

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha = 17\,kN \cdot \cos 43^o = \mathbf{12{,}433\,kN}\ (\rightarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 17\,kN \cdot \sin 43^o = \mathbf{11{,}594\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin\beta = 26\,kN \cdot \sin 25^o = \mathbf{10{,}988\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos\beta = 26\,kN \cdot \cos 25^o = \mathbf{23{,}564\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 12{,}433\,kN - 10{,}988\,kN = \mathbf{1{,}445\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 11{,}594\,kN + 23{,}564\,kN = \mathbf{35{,}158\,kN}\ (\downarrow)\ [1\,p]$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{1{,}445^2 + 35{,}158^2} = \sqrt{2{,}088 + 1236{,}085} = \sqrt{1238{,}1730} = \mathbf{35{,}188\,kN}\ [1\,p]$$
$$\gamma = arc\,tg\frac{R_y}{R_x} = arc\,tg\frac{35{,}158\,kN}{1{,}445\,kN} = arc\,tg\,24{,}33080 = \mathbf{87{,}65^o}\ [1\,p]$$

$$M_0 = -F_{1x}\cdot y + F_{1y}\cdot x + F_{2x}\cdot y + F_{2y}\cdot x$$
$$= -12{,}433\,kN \cdot 1{,}2\,m + 11{,}594\,kN \cdot 1{,}7\,m + 10{,}988\,kN \cdot 1{,}2\,m + 23{,}564\,kN \cdot 1{,}7\,m$$
$$= -14{,}920\,kNm + 19{,}710\,kNm + 13{,}186\,kNm + 40{,}059\,kNm = \mathbf{58{,}035\,kNm}\ (\circlearrowright)\ [1\,p]$$
$$k_x = \frac{M_0}{R_y} = \frac{58{,}035\,kNm}{35{,}158\,kN} = \mathbf{1{,}651\,m}\ [1\,p]$$
$$k_y = -\frac{M_0}{R_x} = -\frac{58{,}035\,kNm}{1{,}445\,kN} = \mathbf{-40{,}162\,m}\ [1\,p]$$
$$k = \frac{M_0}{R} = \frac{58{,}035\,kNm}{35{,}188\,kN} = \mathbf{1{,}649\,m}\ [1\,p]$$

2. Egyensúlyozza 3 erővel az alábbi erőrendszert számítással, az eredményt ábrázolja is! (10 p)



$F_1 = 20$ kN

$F_2 = 15$ kN

$F_3 = 25$ kN

$\alpha = 32°$

$M = 50$ kNm

$s = 4{,}0$ m

$t = 2{,}0$ m

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha = 25\,kN \cdot \cos 32^o = \mathbf{21{,}201\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha = 25\,kN \cdot \sin 32^o = \mathbf{13{,}248\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

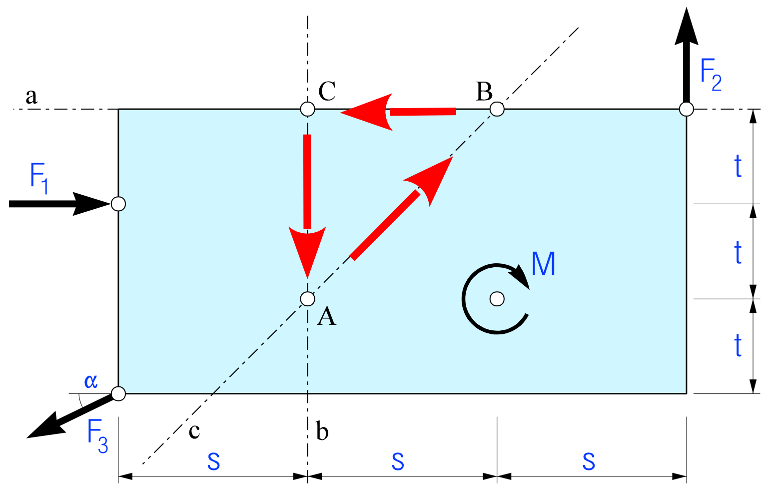
$$\sum M_A = 0 = F_1 \cdot t - F_2 \cdot 2s + F_{3x} \cdot t - F_{3y} \cdot s + M + A \cdot 2t$$
$$= 20\,kN \cdot 2\,m - 15\,kN \cdot 8\,m + 21{,}201\,kN \cdot 2\,m - 13{,}248\,kN \cdot 4\,m + 50\,kNm + A \cdot 4\,m$$
$$= 40\,kNm - 120\,kNm + 42{,}402\,kNm - 52{,}992\,kNm + 50\,kNm + A \cdot 4\,m$$
$$= -40{,}590\,kNm + A \cdot 4\,m\ [2\,p]$$
$$A = \frac{40{,}590\,kNm}{4{,}0\,m} = \mathbf{10{,}148\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$

$$\sum M_B = 0 = -F_1 \cdot t - F_2 \cdot s + F_{3x} \cdot 3t - F_{3y} \cdot 2s + M + B \cdot s$$
$$= -20\,kN \cdot 2m - 15\,kN \cdot 4\,m + 21{,}201\,kN \cdot 6\,m - 13{,}248\,kN \cdot 8\,m + 50\,kNm + B \cdot 4\,m$$
$$= -40\,kNm - 60\,kNm + 127{,}206\,kNm - 105{,}984\,kNm + 50\,kNm + B \cdot 4\,m$$
$$= -28{,}778\,kNm + B \cdot 4\,m\ [2\,p]$$
$$B = \frac{28{,}778\,kNm}{4{,}0\,m} = \mathbf{7{,}195\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$k_c = \frac{4{,}0\,m}{\sqrt{2}} = 2{,}828\,m$$

$$\sum M_C = 0 = -F_1 \cdot t - F_2 \cdot 2s + F_{3x} \cdot 3t - F_{3y} \cdot s + M + C \cdot k_c$$
$$= -20\,kN \cdot 2m - 15\,kN \cdot 8\,m + 21{,}201\,kN \cdot 6\,m - 13{,}248\,kN \cdot 4\,m + 50\,kNm + C \cdot 2{,}828\,m$$
$$= -40\,kNm - 120\,kNm + 127{,}206\,kNm - 52{,}992\,kNm + 50\,kNm + C \cdot 2{,}828\,m$$
$$= -35{,}786\,kNm + C \cdot 2{,}828\,m\ [2\,p]$$
$$C = \frac{35{,}786\,kNm}{2{,}828\,m} = \mathbf{12{,}652\,kN}\ (\swarrow)\ [1\,p]$$

2. Egyensúlyozza 3 erővel az alábbi erőrendszert számítással, az eredményt ábrázolja is! (10 p)



$F_1 = 22$ kN

$F_2 = 15$ kN

$F_3 = 35$ kN

$\alpha = 37°$

M = 100 kNm

s = 3,0 m

t = 2,0 m

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha = 35\,kN \cdot \cos 37^o = \mathbf{27{,}952\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha = 35\,kN \cdot \sin 37^o = \mathbf{21{,}064\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

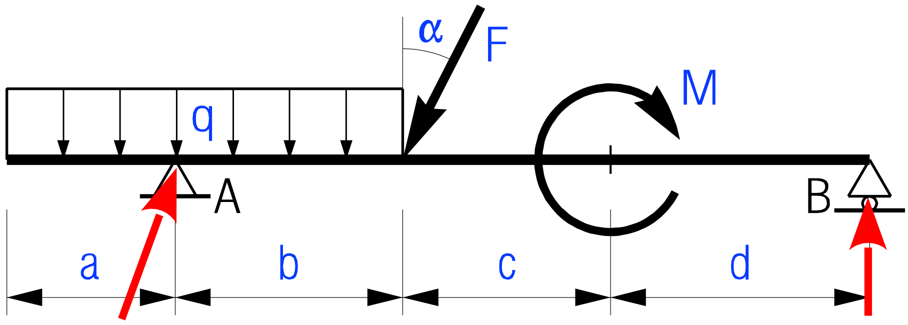
$$\sum M_A = 0 = F_1 \cdot t - F_2 \cdot 2s + F_{3x} \cdot t - F_{3y} \cdot s + M + A \cdot 2t$$
$$= 22\,kN \cdot 2\,m - 15\,kN \cdot 6\,m + 27{,}952\,kN \cdot 2\,m - 21{,}064\,kN \cdot 3\,m + 100\,kNm + A \cdot 4\,m$$
$$= 44\,kNm - 90\,kNm + 55{,}904\,kNm - 63{,}192\,kNm + 100\,kNm + A \cdot 4\,m$$
$$= 46{,}712\,kNm + A \cdot 4\,m\ [2\,p]$$
$$A = \frac{-46{,}712\,kNm}{4{,}0\,m} = \mathbf{11{,}678\,kN}\ (\leftarrow)\ [1\,p]$$

$$\sum M_B = 0 = -F_1 \cdot t - F_2 \cdot s + F_{3x} \cdot 3t - F_{3y} \cdot 2s + M + B \cdot s$$
$$= -22\,kN \cdot 2\,m - 15\,kN \cdot 3\,m + 27{,}952\,kN \cdot 6\,m - 21{,}064\,kN \cdot 6\,m + 100\,kNm + B \cdot 3\,m$$
$$= -44\,kNm - 45\,kNm + 167{,}712\,kNm - 126{,}384\,kNm + 100\,kNm + B \cdot 3\,m$$
$$= 52{,}328\,kNm + B \cdot 3\,m\ [2\,p]$$
$$B = \frac{-52{,}328\,kNm}{3{,}0\,m} = \mathbf{17{,}443\,kN}\ (\downarrow)\ [1\,p]$$

$$k_c = \frac{3{,}0\,m \cdot 4{,}0\,m}{5{,}0\,m} = 2{,}4\,m$$

$$\sum M_C = 0 = -F_1 \cdot t - F_2 \cdot 2s + F_{3x} \cdot 3t - F_{3y} \cdot s + M + C \cdot k_c$$
$$= -22\,kN \cdot 2\,m - 15\,kN \cdot 6\,m + 27{,}952\,kN \cdot 6\,m - 21{,}064\,kN \cdot 3\,m + 100\,kNm + C \cdot 2{,}4\,m$$
$$= -44\,kNm - 90\,kNm + 167{,}712\,kNm - 63{,}192\,kNm + 100\,kNm + C \cdot 2{,}4\,m$$
$$= 70{,}520\,kNm + C \cdot 2{,}4\,m\ [2\,p]$$
$$C = \frac{-70{,}520\,kNm}{2{,}4\,m} = \mathbf{29{,}383\,kN}\ (\nearrow)\ [1\,p]$$

3. Határozza meg az alábbi tartó reakcióerőit (támaszerőit), az eredményt ábrázolja is a tartón! (10 p)



q = 12 kN/m
F = 20 kN
α = 20,0°
M = 18 kNm
a = 1,0 m
b = 4,0 m
c = 1,0 m
d = 4,0 m

$$F_x = F \cdot \sin\alpha = 20\,kN \cdot \sin 20^o = \mathbf{6{,}840\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$F_y = F \cdot \cos\alpha = 20\,kN \cdot \cos 20^o = \mathbf{18{,}794\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$\sum M_A = 0 = F_y \cdot b - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + M - B \cdot (b+c+d)$$

$$= 18{,}794\,kN \cdot 4\,m - 12\,kN/m \cdot 1\,m \cdot 0{,}5\,m + 12\,kN/m \cdot 4\,m \cdot 2\,m + 18\,kNm - B \cdot 9\,m$$

$$= 75{,}176\,kNm - 6{,}0\,kNm + 96{,}0\,kNm + 18\,kNm - B \cdot 9\,m$$

$$= 183{,}176\,kNm - B \cdot 9\,m\ [2\,p]$$

$$B = \frac{183{,}176\,kNm}{9{,}0\,m} = \mathbf{20{,}353\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_y = 0 = F_y + q \cdot (a+b) - B - A_y$$

$$= 18{,}794\,kN + 12{,}0\,kN/m \cdot 5\,m - 20{,}353\,kN - A_y$$

$$= 18{,}794\,kN + 60{,}0\,kN - 20{,}353\,kN - A_y = 58{,}441\,kN - A_y$$

$$A_y = \mathbf{58{,}441\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_x = 0 = -F_x + A_x$$

$$= -6{,}840\,kN + A_x$$

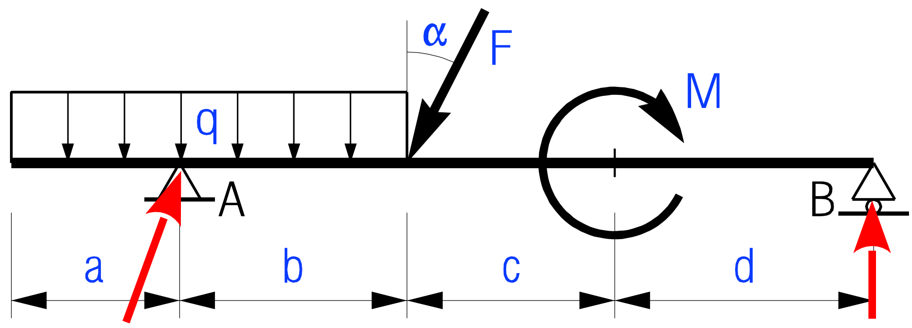
$$A_x = \mathbf{6{,}840\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{6{,}840^2 + 58{,}441^2} = \sqrt{46{,}7856 + 3415{,}3505} = \sqrt{3462{,}1361} = \mathbf{58{,}840\,kN}\ [1\,p]$$

$$\gamma = arc\,tg\frac{A_y}{A_x} = arc\,tg\frac{58{,}441\,kN}{6{,}840\,kN} = arc\,tg\,8{,}544006 = \mathbf{83{,}32^o}\ [1\,p]$$

3. Határozza meg az alábbi tartó reakcióerőit (támaszerőit), az eredményt ábrázolja is a tartón! (10 p)



q = 4 kN/m
F = 20 kN
α = 19,0°
M = 12 kNm
a = 1,0 m
b = 4,5 m
c = 1,0 m
d = 2,5 m

$$F_x = F \cdot \sin\alpha = 20\,kN \cdot \sin 19^o = \mathbf{6{,}511\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$F_y = F \cdot \cos\alpha = 20\,kN \cdot \cos 19^o = \mathbf{18{,}910\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$\sum M_A = 0 = F_y \cdot b - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + M - B \cdot (b+c+d)$$

$$= 18{,}910\,kN \cdot 4{,}5\,m - 4\,kN/m \cdot 1\,m \cdot 0{,}5\,m + 4\,kN/m \cdot 4{,}5\,m \cdot 2{,}25\,m + 12\,kNm - B \cdot 8\,m$$

$$= 85{,}095\,kNm - 2{,}0\,kNm + 40{,}5\,kNm + 12\,kNm - B \cdot 8\,m$$

$$= 135{,}595\,kNm - B \cdot 8\,m\ [2\,p]$$

$$B = \frac{135{,}595\,kNm}{8{,}0\,m} = \mathbf{16{,}949\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_y = 0 = F_y + q \cdot (a+b) - B - A_y$$

$$= 18{,}910\,kN + 4{,}0\,kN/m \cdot 5{,}5\,m - 16{,}949\,kN - A_y$$

$$= 18{,}910\,kN + 22{,}0\,kN - 16{,}949\,kN - A_y = 23{,}961\,kN - A_y$$

$$A_y = \mathbf{23{,}961\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_x = 0 = -F_x + A_x$$

$$= -6{,}511\,kN + A_x$$

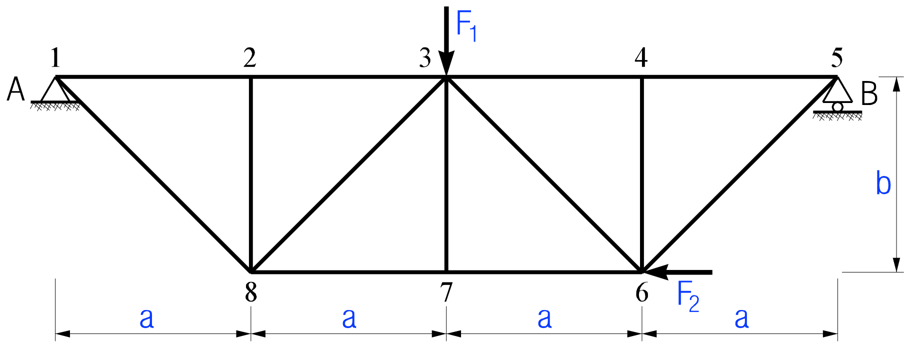
$$A_x = \mathbf{6{,}511\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{6{,}511^2 + 23{,}961^2} = \sqrt{42{,}3931 + 574{,}1295} = \sqrt{616{,}5226} = \mathbf{24{,}830\,kN}\ [1\,p]$$

$$\gamma = arc\,tg\frac{A_y}{A_x} = arc\,tg\frac{23{,}961\,kN}{6{,}511\,kN} = arc\,tg\,3{,}680080 = \mathbf{74{,}80^o}\ [1\,p]$$

4. Határozza meg az alábbi rácsos tartó rúderőit a csomóponti módszerrel számítással, az eredményt ábrázolja is a tartón! (20 p)



F_1 = 150 kN

F_2 = 200 kN

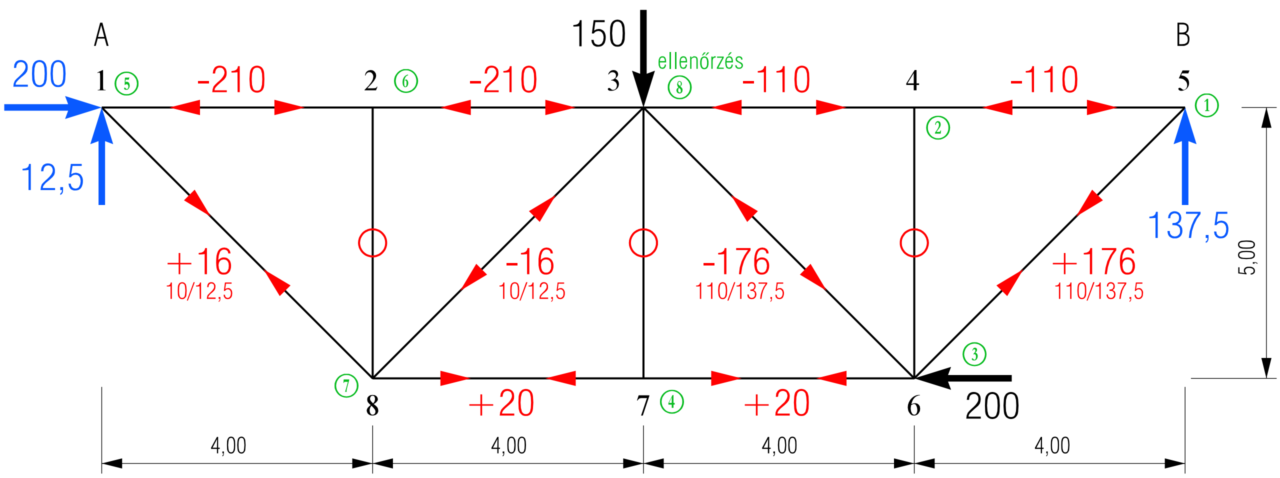
a = 4,0 m

b = 5,0 m

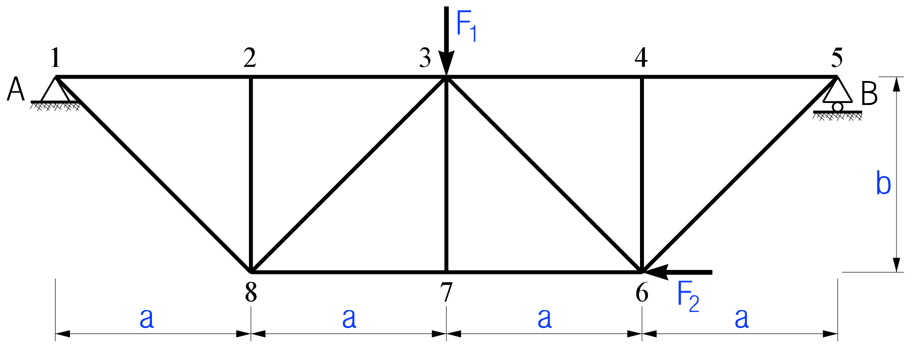
$$\sum M_A = 0 = F_1 \cdot 2{\cdot}a + F_1 \cdot b - B \cdot 4{\cdot}a$$
$$= 150\,kN \cdot 8{,}0\,m + 200\,kN \cdot 5{,}0 - B \cdot 16{,}0\,m$$
$$= 1200{,}0\,kNm + 1000{,}0\,kNm - B \cdot 16{,}0\,m$$
$$= 2200{,}0\,kNm - B \cdot 16\,m$$
$$B = \frac{2200{,}0\,kNm}{16{,}0\,m} = \mathbf{137{,}5\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_y = 0 = F_1 - B - A_y = 150\,kN - 137{,}5\,kN - A_y = 12{,}5\,kN - A_y$$
$$A_y = \mathbf{12{,}5\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_x = 0 = -F_x + A_x = -200{,}0\,kN + A_x$$
$$A_x = \mathbf{200{,}0\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$



4. Határozza meg az alábbi rácsos tartó rúderőit a csomóponti módszerrel számítással, az eredményt ábrázolja is a tartón! (20 p)



F_1 = 300 kN

F_2 = 200 kN

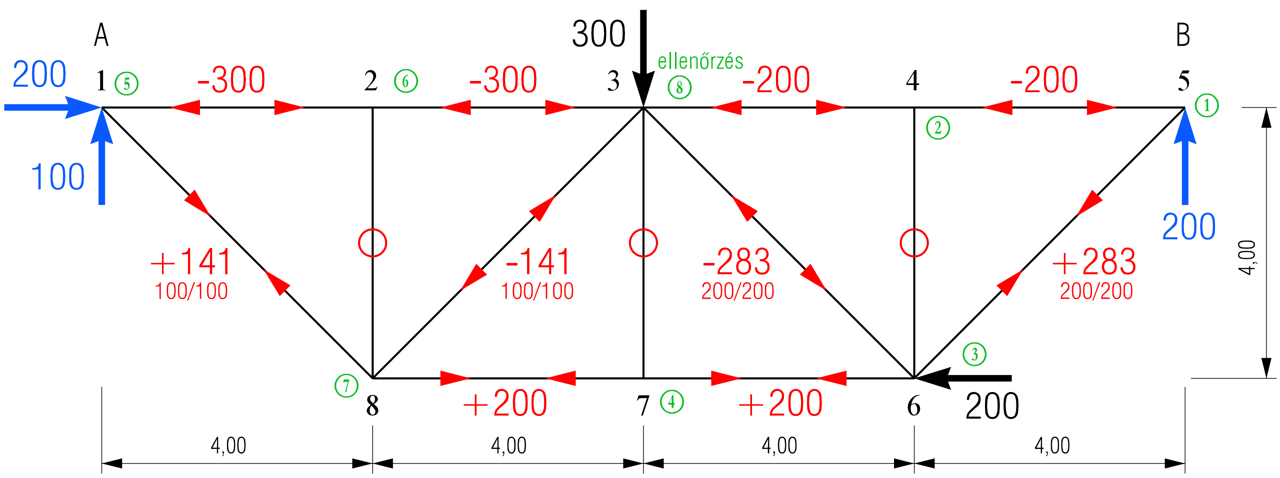
a = 4,0 m

b = 4,0 m

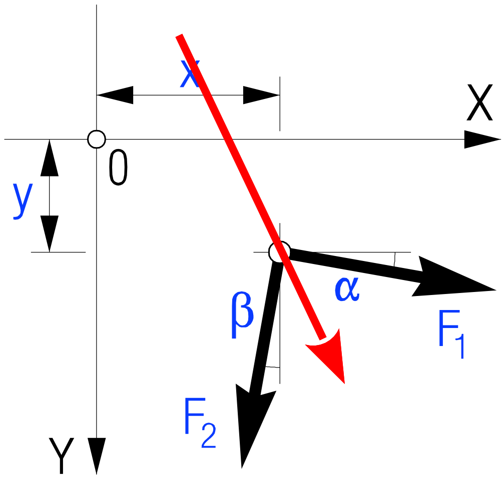
$$\sum M_A = 0 = F_1 \cdot 2 \cdot a + F_1 \cdot b - B \cdot 4 \cdot a$$
$$= 300\,kN \cdot 8{,}0\,m + 200\,kN \cdot 4{,}0 - B \cdot 16{,}0\,m$$
$$= 2400{,}0\,kNm + 800{,}0\,kNm - B \cdot 16{,}0\,m$$
$$= 3200{,}0\,kNm - B \cdot 16\,m$$
$$B = \frac{3200{,}0\,kNm}{16{,}0\,m} = \mathbf{200{,}0\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_y = 0 = F_1 - B - A_y = 300\,kN - 200\,kN - A_y = 100\,kN - A_y$$
$$A_y = \mathbf{100{,}0\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum F_x = 0 = -F_x + A_x = -200{,}0\,kN + A_x$$
$$A_x = \mathbf{200{,}0\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$



1. Határozza meg az alábbi erőrendszer eredőjét és helyét, valamit az eredő által a 0 pontra kifejtett nyomatékát számítással, az eredményt is ábrázolja! (10 p)



$F_1 = 10$ kN
$\alpha = 35°$

$F_2 = 5$ kN
$\beta = 23°$

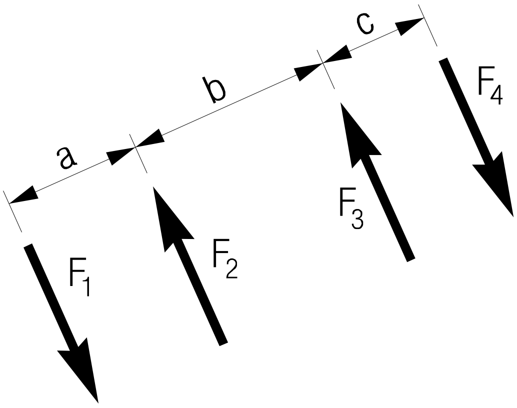
x = 4,6 m
y = 3,5 m

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha = 10\,kN \cdot \cos 35^o = \mathbf{8{,}192\,kN}\ (\rightarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha = 10\,kN \cdot \sin 35^o = \mathbf{5{,}736\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin\beta = 5\,kN \cdot \sin 23^o = \mathbf{1{,}954\,kN}\ (\leftarrow)\ [0{,}5\,p]$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos\beta = 5\,kN \cdot \cos 23^o = \mathbf{4{,}603\,kN}\ (\downarrow)\ [0{,}5\,p]$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 8{,}192\,kN - 1{,}954\,kN = \mathbf{6{,}238\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 5{,}736\,kN + 4{,}603\,kN = \mathbf{10{,}339\,kN}\ (\downarrow)\ [1\,p]$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{6{,}238^2 + 10{,}339^2} = \sqrt{38{,}9126 + 106{,}8949} = \sqrt{145{,}8075} = \mathbf{12{,}075\,kN}\ [1\,p]$$
$$\gamma = arc\,tg\frac{R_y}{R_x} = arc\,tg\frac{10{,}339\,kN}{6{,}238\,kN} = arc\,tg\,1{,}657422 = \mathbf{58{,}895^o}\ [1\,p]$$

$$M_0 = -F_{1x} \cdot y + F_{1y} \cdot x + F_{2x} \cdot y + F_{2y} \cdot x$$
$$= -8{,}192\,kN \cdot 3{,}5\,m + 5{,}736\,kN \cdot 4{,}6\,m + 1{,}954\,kN \cdot 3{,}5\,m + 4{,}603\,kN \cdot 4{,}6\,m$$
$$= -28{,}672\,kNm + 26{,}386\,kNm + 6{,}839\,kNm + 21{,}174\,kNm = \mathbf{25{,}727\,kNm}\ (\circlearrowleft)\ [1\,p]$$
$$k_x = \frac{M_0}{R_y} = \frac{25{,}727\,kNm}{10{,}339\,kN} = \mathbf{2{,}488\,m}\ [1\,p]$$
$$k_y = -\frac{M_0}{R_y} = -\frac{25{,}727\,kNm}{6{,}238\,kN} = \mathbf{-4{,}124\,m}\ [1\,p]$$
$$k = \frac{M_0}{R} = \frac{25{,}727\,kNm}{12{,}075\,kN} = \mathbf{2{,}131\,m}\ [1\,p]$$

1. Határozza meg és ábrázolja az alábbi erőrendszer eredőjét számítással! [Σ10p]

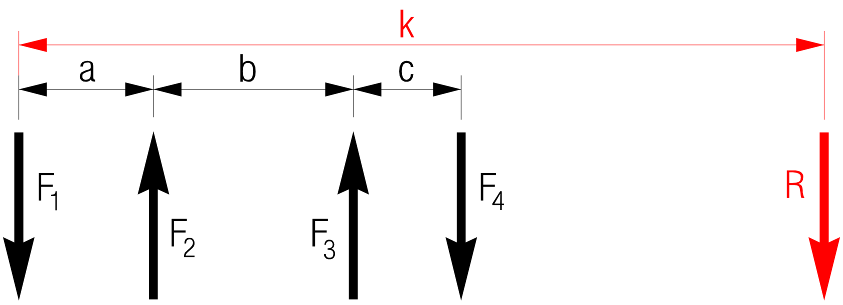


$F_1 = 21$ kN
$F_2 = 44$ kN
$F_3 = 32$ kN
$F_4 = 75$ kN
a = 2,5 m
b = 3,5 m
c = 2,0 m

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 21\,kN - 44\,kN - 32\,kN + 75\,kN = \mathbf{20\,kN} \quad [4\,p]$$

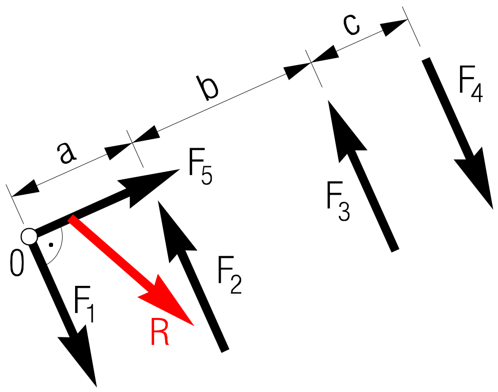
$$R \cdot k = \Sigma F_i \cdot k_i$$

$$k = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a+b) + F_4 \cdot (a+b+c)}{R}$$
$$= \frac{0 - 44\,kN \cdot 2{,}5\,m - 32\,kN \cdot (2{,}5\,m + 3{,}5\,m) + 75\,kN \cdot (2{,}5\,m + 3{,}5\,m + 2{,}0\,m)}{20\,kN}$$
$$= \frac{0 - 110\,kNm - 192\,kNm + 600\,kNm}{20\,kN} = \frac{298\,kNm}{20\,kN} = \mathbf{14{,}9\,m} \quad [4\,p]$$



[2p]

1. Határozza meg és ábrázolja az alábbi erőrendszer eredőjét számítással! [Σ10p]



[1p]

$F_1 = 32$ kN
$F_2 = 20$ kN
$F_3 = 18$ kN
$F_4 = 16$ kN
$F_4 = 6$ kN
a = 2,0 m
b = 2,5 m
c = 3,5 m

$$R_x = F_5 = \mathbf{6\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$

$$R_y = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 32\,kN - 20\,kN - 18\,kN + 16\,kN = \mathbf{10\,kN}\ (\downarrow)\ [2\,p]$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} = \mathbf{11{,}66\,kN}\quad [1\,p]$$

$$\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{10\,kN}{6\,kN} = \mathbf{1{,}6667}\ [1\,p] \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan(1{,}6667) = \mathbf{59{,}036^o}\ [1\,p]$$

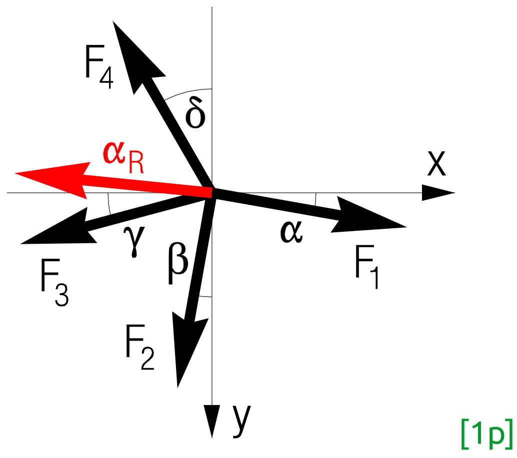
$$R \cdot k = \Sigma F_i \cdot k_i$$

$$k = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a+b) + F_4 \cdot (a+b+c) + F_5 \cdot 0}{R_y}$$

$$= \frac{0 - 20\,kN \cdot 2{,}0\,m - 18\,kN \cdot (2{,}0\,m + 2{,}5\,m) + 16\,kN \cdot (2{,}0\,m + 2{,}5\,m + 3{,}5\,m) + 0}{10\,kN}$$

$$= \frac{0 - 40\,kNm - 81\,kNm + 128\,kNm + 0}{10\,kN} = \frac{7\,kNm}{10\,kN} = \mathbf{0{,}7\,m}\ [3\,p]$$

1. Határozza meg és ábrázolja az alábbi erőrendszer eredőjét számítással! [Σ10p]



$F_1 = 12$ kN
$\alpha = 15°$
$F_2 = 21$ kN
$\beta = 10°$
$F_3 = 30$ kN
$\gamma = 25°$
$F_4 = 45$ kN
$\delta = 35°$

sorszám	F_i kN	szög	$F_{i,x}$ kN [2p]	$F_{i,y}$ kN [2p]	$F_{i,x}$ kN	$F_{i,y}$ kN
1	12	15°	$+ F_1 \cdot \cos \alpha$	$+ F_1 \cdot \sin \alpha$	11,591	3,106
2	21	10°	$- F_2 \cdot \sin \beta$	$+ F_2 \cdot \cos \beta$	–3,647	20,681
3	30	25°	$- F_3 \cdot \cos \gamma$	$+ F_3 \cdot \sin \gamma$	–27,189	12,678
4	45	35°	$- F_4 \cdot \sin \delta$	$- F_4 \cdot \cos \delta$	–25,811	–36,862
Σ	tg α_R = 0,397/45,056 = **0,008811** [1p] α_R = **0,505°** [1p]				**–45,056 ←**	**– 0,397 ↑**
					45,058 ↖ [3·1p]	

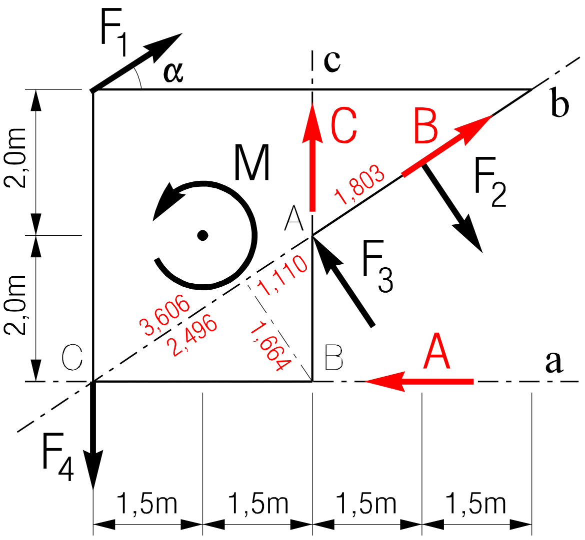
$$R_x = \sum F_{ix} = F_1 \cdot \cos\alpha - F_2 \cdot \sin\beta - F_3 \cdot \cos\gamma - F_4 \cdot \sin\delta$$
$$= 11{,}591\,kN - 3{,}647\,kN - 27{,}189\,kN - 25{,}811\,kN = \mathbf{-45{,}056\,kN}\ (\leftarrow)$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \cos\beta + F_3 \cdot \sin\gamma - F_4 \cdot \cos\delta$$
$$= 3{,}106\,kN + 20{,}618\,kN + 12{,}678\,kN - 36{,}862\,kN = \mathbf{-0{,}397\,kN}\ (\uparrow)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{45{,}056^2 + 0{,}397^2} = \sqrt{2030{,}043 + 0{,}158} = \sqrt{2030{,}201} = \mathbf{45{,}058\,kN}$$

$$\tan(\alpha_R) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{0{,}397\,kN}{45{,}056\,kN} = \mathbf{0{,}008811} \rightarrow \alpha_R = \arctan(0{,}008811) = \mathbf{0{,}505^o}$$

2. Egyensúlyozza 3 erővel (és ábrázolja) az alábbi erőrendszert számítással! [Σ15p]



$F_1 = 20$ kN

$\alpha = 25°$

$F_{1x} = 20$ kN $\cdot \cos\alpha =$ 18,126 kN

$F_{1y} = 20$ kN $\cdot \sin\alpha =$ 8,452 kN

$F_2 = 24$ kN

$F_3 = 12$ kN

$F_4 = 35$ kN

$M = 110$ kNm

F_1 hatásvonala nem párhuzamos a B erőével!

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + A \cdot k_A$$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	2,00	↻	$+ F_{1x} \cdot 2{,}00$	$+18{,}126 \cdot 2{,}00$	+36,25
F_{1y}	8,452 kN	3,00	↻	$+ F_{1y} \cdot 3{,}00$	$+8{,}452 \cdot 3{,}00$	+25,36
F_2	24 kN	1,803	↻	$+ F_2 \cdot 1{,}803$	$+24 \cdot 1{,}803$	+43,27
F_3	12 kN	0	–	$F_3 \cdot 0$	$12 \cdot 0$	0
F_4	35 kN	3,00	↺	$- F_4 \cdot 3{,}00$	$-35 \cdot 3{,}00$	-105,00
M	110 kNm	–	↺	- M	-110	-110,00
ΣM_A^*			↺			**-110,12**
A	**55,06 kN (←)**	2,00	↻	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**+110,12**
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 = F_{1x} \cdot 2{,}0\,m + F_{1y} \cdot 3{,}0\,m + F_2 \cdot 1{,}8\,m - F_4 \cdot 3{,}0\,m - M - A \cdot 2{,}0\,m \\ &= 18{,}13\,kN \cdot 2{,}0\,m + 8{,}45\,kN \cdot 3{,}0\,m + 24\,kN \cdot 1{,}8\,m - 35\,kN \cdot 3{,}0\,m - 110\,kNm - A \cdot 2{,}0\,m \\ &= 36{,}25\,kNm + 25{,}36\,kNm + 43{,}27\,kNm - 105{,}00\,kNm - 110{,}00\,kNm - A \cdot 2{,}0\,m \\ &= -110{,}12\,kNm - A \cdot 2{,}0\,m\end{aligned}$$

$$A = \frac{-110{,}12\,kNm}{2{,}0\,m} = \mathbf{-55{,}06\,kN} \quad (\leftarrow [0{,}5\,p])$$

$$\sum M_B = 0 = \sum M_B^* + B \cdot k_B$$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	4,00	↻	+ F_{1x} · 4,00	+18,126 · 4,00	+72,50
F_{1y}	8,452 kN	3,00	↻	+ F_{1y} · 3,00	+8,452 · 3,00	+25,36
F_2	24 kN	2,913	↻	+ F_2 · 2,913	+24 · 2,913	+69,91
F_3	12 kN	1,110	↺	- F_3 · 1,110	-12 · 1,110	-13,32
F_4	35 kN	3,00	↺	- F_4 · 3,00	-35 · 3,00	-105,00
M	110 kNm	–	↺	- M	-110	-110,00
ΣM_B^*			↺			**-60,55**
B	**36,39 kN (↗)**	1,664	↻	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**+60,55**
ΣM_B	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 = F_{1x} \cdot 4{,}0\,m + F_{1y} \cdot 3{,}0\,m + F_2 \cdot 2{,}91\,m - F_3 \cdot 1{,}11\,m - F_4 \cdot 3{,}0\,m - M + B_y \cdot 3{,}0\,m \\ &= 18{,}13\,kN \cdot 4{,}0\,m + 8{,}45\,kN \cdot 3{,}0\,m + 24\,kN \cdot 2{,}91\,m - 12\,kN \cdot 1{,}11\,m - 35\,kN \cdot 3{,}0\,m \\ &\quad - 110\,kNm + B_y \cdot 3{,}0\,m \\ &= 72{,}50\,kNm + 25{,}36\,kNm + 70{,}08\,kNm - 13{,}32\,kNm - 105\,kNm \\ &\quad - 110\,kNm + B_y \cdot 3{,}0\,m \\ &= -60{,}55\,kNm + B_y \cdot 3{,}0\,m = -60{,}55\,kNm + B \cdot 1{,}664\,m\end{aligned}$$

$$B_y = \frac{60{,}55\,kNm}{3{,}0\,m} = \mathbf{20{,}18\,kN}\ (\uparrow) \qquad B_x = \frac{3}{2} \cdot B_y = \mathbf{30{,}28\,kN}\ (\rightarrow)$$

$$B = \frac{60{,}55\,kNm}{1{,}664\,m} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{20{,}18^2 + 30{,}28^2} = \sqrt{1323{,}94} = \mathbf{36{,}39\,kN}\ (\nearrow [0{,}5\,p])$$

$$\sum M_C = 0 = \sum M_C^* + C \cdot k_C$$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	4,00	↻	+ F_{1x} · 4,00	+18,126 · 4,00	+72,50
F_{1y}	8,452 kN	0	–	F_{1y} · 0	8,452 · 0	0
F_2	24 kN	5,409	↻	+ F_2 · 5,409	+24 · 5,409	+129,82
F_3	12 kN	3,606	↺	- F_3 · 3,606	-12 · 3,606	-43,27
F_4	35 kN	0	–	F_4 · 0	35 · 0	0
M	110 kNm	–	↺	- M	-110	-110,00
ΣM_C^*			↻			**+49,05**
C	**16,35 kN (↑)**	3,00	↺	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**-49,05**
ΣM_C	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\begin{aligned}
\Sigma M_C &= 0 = F_{1x} \cdot 4{,}0\,m + F_2 \cdot 5{,}41\,m - F_3 \cdot 3{,}61\,m - M + C \cdot 3{,}0\,m \\
&= 18{,}13\,kN \cdot 4{,}0\,m + 24\,kN \cdot 5{,}41\,m - 12\,kN \cdot 3{,}61\,m - 110\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m \\
&= 72{,}50\,kNm + 129{,}82\,kNm - 43{,}27\,kNm - 110{,}00\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m \\
&= 49{,}05\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m
\end{aligned}$$

$$C = \frac{-49{,}05\,kNm}{3{,}0\,m} = \mathbf{-16{,}35\,kN} \left(\uparrow [0{,}5\,p]\right)$$

$$\Sigma M_A = 0 = q\cdot(a+b)\cdot\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+M+F_y\cdot(b+c+d)+B_y\cdot(b+c+d)$$

$$= 5\,kN/m\cdot(2{,}5\,m+3{,}5\,m)\cdot\left(\frac{2{,}5\,m+3{,}5\,m}{2}-2{,}5\,m\right)$$

$$-8\,kNm+9{,}659\,kN\cdot(3{,}5\,m+1{,}0\,m+2{,}0\,m)+B_y\cdot(3{,}5\,m+1{,}0\,m+2{,}0\,m)$$

$$= 5\,kN/m\cdot 6{,}0\,m\cdot 0{,}5\,m-8\,kNm+9{,}659\,kN\cdot 6{,}5\,m+B_y\cdot 6{,}5\,m$$

$$= 15\,kNm-8\,kNm+62{,}784\,kNm+B\cdot 6{,}5\,m = 69{,}784\,kNm+B_y\cdot 6{,}5\,m$$

$$B_y = \frac{-69{,}784\,kNm}{6{,}5\,m} = \mathbf{-10{,}736\,kN}\ (\uparrow)\ [4+0{,}5\,p]$$

$$\Sigma F_x = 0 = F_x+B_x = -2{,}588\,kN+B_x$$

$$B_x = \mathbf{2{,}588\,kN}\ (\rightarrow)\ [2+0{,}5\,p]$$

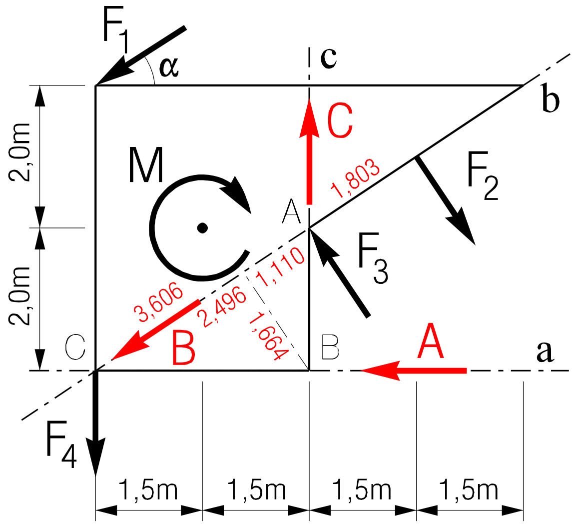
$$\Sigma F_y = 0 = q\cdot(a+b)+A+F_y+B_y = 5\,kN/m\cdot 6{,}0\,m+A+9{,}659\,kN-10{,}736\,kN$$

$$A = \mathbf{-28{,}923\,kN}\ (\uparrow)\ [2{,}5+0{,}5\,p]$$

$$B = \sqrt{B_x^2+B_y^2} = \sqrt{2{,}588^2+10{,}736^2} = \sqrt{121{,}959} = \mathbf{11{,}044\,kN}\ [1\,p]$$

$$\tan(\alpha) = \frac{B_y}{B_x} = \frac{10{,}736\,kN}{2{,}588\,kN} = \mathbf{4{,}1484}\ [1\,p] \rightarrow \alpha = \arctan(4{,}1484) = \mathbf{76{,}45^o}\ [1\,p]$$

2. Egyensúlyozza 3 erővel (és ábrázolja) az alábbi erőrendszert számítással! [Σ15p]



F_1 = 24 kN

α = 32°

F_{1x} = 24 kN · cos α = 20,353 kN

F_{1y} = 24 kN · sin α = 12,718 kN

F_2 = 20 kN

F_3 = 16 kN

F_4 = 30 kN

M = 130 kNm

F_1 hatásvonala nem párhuzamos a B erőével!

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + A \cdot k_A$$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	20,353 kN	2,00	↺	- F_{1x} · 2,00	-20,353 · 2,00	-40,71
F_{1y}	12,718 kN	3,00	↺	- F_{1y} · 3,00	-12,718 · 3,00	-38,15
F_2	20 kN	1,803	↻	+ F_2 · 1,803	+20 · 1,803	+36,06
F_3	16 kN	0	–	F_3 · 0	16 · 0	0
F_4	30 kN	3,00	↺	- F_4 · 3,00	-30 · 3,00	-90,00
M	130 kNm	–	↻	+ M	130	130,00
ΣM_A^*			↺			**-2,80**
A	**1,40 kN (←)**	2,00	↻	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**+2,80**
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 = -F_{1x}\cdot 2{,}0\,m - F_{1y}\cdot 3{,}0\,m + F_2\cdot 1{,}8\,m - F_4\cdot 3{,}0\,m + M - A\cdot 2{,}0\,m\\ &= -20{,}35\,kN\cdot 2{,}0\,m - 12{,}72\,kN\cdot 3{,}0\,m + 20\,kN\cdot 1{,}8\,m - 30\,kN\cdot 3{,}0\,m + 130\,kNm - A\cdot 2{,}0\,m\\ &= -40{,}71\,kNm - 38{,}15\,kNm + 36{,}06\,kNm - 90{,}00\,kNm + 130{,}00\,kNm - A\cdot 2{,}0\,m\\ &= -2{,}80\,kNm - A\cdot 2{,}0\,m\end{aligned}$$

$$A = \frac{-2{,}80\,kNm}{2{,}0\,m} = \mathbf{-1{,}40\,kN}\ (\leftarrow[0{,}5\,p])$$

$\sum M_B = 0 = \sum M_B^* + B \cdot k_B$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	20,353 kN	4,00	↺	$- F_{1x} \cdot 4{,}00$	-20,353 · 4,00	-81,41
F_{1y}	12,718 kN	3,00	↺	$- F_{1y} \cdot 3{,}00$	-12,718 · 3,00	-38,15
F_2	20 kN	2,913	↻	$+ F_2 \cdot 2{,}913$	+20 · 2,913	+58,26
F_3	16 kN	1,110	↺	$- F_3 \cdot 1{,}110$	-16 · 1,110	-17,76
F_4	30 kN	3,00	↺	$- F_4 \cdot 3{,}00$	-30 · 3,00	-90,00
M	130 kNm	–	↻	+ M	130	130,00
ΣM_B^*			↺			**-23,47**
B	**14,11 kN (↙)**	1,664	↻	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**+23,47**
ΣM_B	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\sum M_B = 0 = -F_{1x} \cdot 4{,}0\,m - F_{1y} \cdot 3{,}0\,m + F_2 \cdot 2{,}91\,m - F_3 \cdot 1{,}11\,m - F_4 \cdot 3{,}0\,m + M - B \cdot 1{,}66\,m$$
$$= -20{,}35\,kN \cdot 4{,}0\,m - 12{,}72\,kN \cdot 3{,}0\,m + 20\,kN \cdot 2{,}91\,m - 16\,kN \cdot 1{,}11\,m - 30\,kN \cdot 3{,}0\,m + 130\,kNm - B \cdot 1{,}66\,m$$
$$= -81{,}41\,kNm - 38{,}15\,kNm + 58{,}26\,kNm - 17{,}76\,kNm - 90{,}0\,kNm + 130{,}0\,kNm - B \cdot 1{,}66\,m$$
$$= -23{,}47\,kNm - B \cdot 1{,}66\,m$$

$$B_y = \frac{23{,}47\,kNm}{3{,}0\,m} = \mathbf{7{,}82\,kN}\ (\downarrow) \qquad B_x = \frac{3}{2} \cdot B_y = \mathbf{11{,}74\,kN}\ (\leftarrow)$$

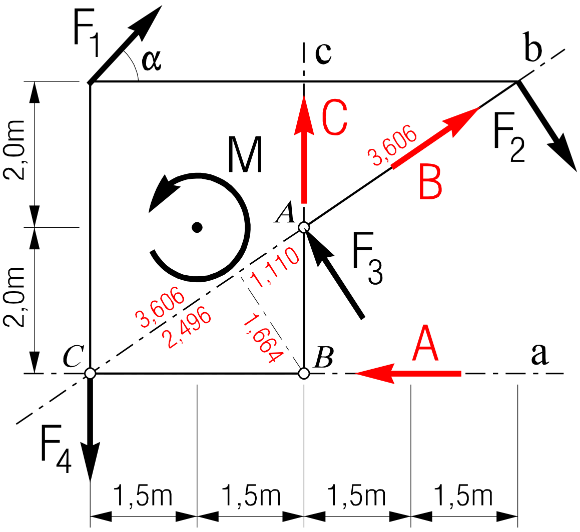
$$B = \frac{23{,}47\,kNm}{1{,}664\,m} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{7{,}82^2 + 11{,}74^2} = \sqrt{199{,}00} = \mathbf{14{,}11\,kN}\ (\swarrow [0{,}5\,p])$$

$\sum M_C = 0 = \sum M_C^* + C \cdot k_C$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	20,353 kN	4,00	↺	$- F_{1x} \cdot 4{,}00$	-20,353 · 4,00	-81,41
F_{1y}	12,718 kN	–	↺	$- F_{1y} \cdot 0$	-12,718 · 0	0
F_2	20 kN	5,409	↻	$+ F_2 \cdot 5{,}409$	+20 · 5,409	+108,18
F_3	16 kN	3,606	↺	$- F_3 \cdot 3{,}606$	-16 · 3,606	-57,70
F_4	30 kN	–	↺	$- F_4 \cdot 0$	-30 · 0	0
M	130 kNm	–	↻	+ M	130	130,00
ΣM_C^*			↻			**+99,07**
C	**33,02 kN (↑)**	3,00	↺	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**-99,07**
ΣM_C	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\sum M_C = 0 = -F_{1x} \cdot 4{,}0\,m + F_2 \cdot 5{,}41\,m - F_3 \cdot 3{,}61\,m - M + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$= -20{,}35\,kN \cdot 4{,}0\,m + 20\,kN \cdot 5{,}41\,m - 16\,kN \cdot 3{,}61\,m + 130\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$= -81{,}41\,kNm + 108{,}18\,kNm - 57{,}70\,kNm + 130{,}00\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$= 99{,}07\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$C = \frac{-99{,}07\,kNm}{3{,}0\,m} = \mathbf{-33{,}02\,kN}\ (\uparrow [0{,}5\,p])$$

2. Egyensúlyozza 3 erővel (és ábrázolja) az alábbi erőrendszert számítással! [Σ15p]



$F_1 = 23$ kN

$\alpha = 48°$

$F_{1x} = 23 \text{ kN} \cdot \cos\alpha = 15{,}390$ kN

$F_{1y} = 23 \text{ kN} \cdot \sin\alpha = 17{,}092$ kN

$F_2 = 22$ kN

$F_3 = 17$ kN

$F_4 = 32$ kN

$M = 145$ kNm

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + A \cdot k_A \quad [0{,}5p]$$

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	15,390 kN	2,00	↻	$+ F_{1x} \cdot 2{,}00$	$+15{,}390 \cdot 2{,}00$	+30,78
F_{1y}	17,092 kN	3,00	↻	$+ F_{1y} \cdot 3{,}00$	$+17{,}092 \cdot 3{,}00$	+51,28
F_2	22 kN	3,606	↻	$+ F_2 \cdot 3{,}606$	$+22 \cdot 3{,}606$	+79,33
F_3	17 kN	0	–	$F_3 \cdot 0$	$12 \cdot 0$	0
F_4	32 kN	3,00	↺	$- F_4 \cdot 3{,}00$	$-32 \cdot 3{,}00$	-96,00
M	145 kNm	–	↺	- M	-145	-145,00
ΣM_A^*			↺			**-79,61**
A	**39,805 kN (←)**	2,00	↻	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**+79,61**
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\sum M_A = 0 = F_{1x} \cdot 2{,}0\,m + F_{1y} \cdot 3{,}0\,m + F_2 \cdot 3{,}61\,m - F_4 \cdot 3{,}0\,m - M - A \cdot 2{,}0\,m$$
$$= 15{,}39\,kN \cdot 2{,}0\,m + 17{,}09\,kN \cdot 3{,}0\,m + 22\,kN \cdot 3{,}61\,m - 32\,kN \cdot 3{,}0\,m - 145\,kNm - A \cdot 2{,}0\,m$$
$$= 30{,}78\,kNm + 51{,}28\,kNm + 79{,}33\,kNm - 96{,}00\,kNm - 145{,}00\,kNm - A \cdot 2{,}0\,m$$
$$= -79{,}61\,kNm - A \cdot 2{,}0\,m$$

$$A = \frac{-79{,}61\,kNm}{2{,}0\,m} = -39{,}805\,kN \quad (\leftarrow [0{,}5\,p])$$

$\sum M_B = 0 = \sum M_B^* + B \cdot k_B$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	15,390 kN	4,00	↻	+ F_{1x} · 4,00	+15,390 · 4,00	+61,56
F_{1y}	17,092 kN	3,00	↻	+ F_{1y} · 3,00	+17,092 · 3,00	+51,28
F_2	22 kN	4,716	↻	+ F_2 · 4,716	+22 · 4,716	+103,75
F_3	17 kN	1,110	↺	- F_3 · 1,110	-17 · 1,110	-18,87
F_4	32 kN	3,00	↺	- F_4 · 3,00	-32 · 3,00	-96,00
M	145 kNm	–	↺	- M	-145	-145,00
ΣM_B^*			↺			**-43,28**
B	**26,01 kN (↗)**	1,664	↻	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**+43,28**
ΣM_B	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\sum M_B = 0 = F_{1x} \cdot 4{,}0\,m + F_{1y} \cdot 3{,}0\,m + F_2 \cdot 4{,}72\,m - F_3 \cdot 1{,}11\,m - F_4 \cdot 3{,}0\,m - M + B \cdot 1{,}66\,m$$
$$= 15{,}39\,kN \cdot 4{,}0\,m + 17{,}09\,kN \cdot 3{,}0\,m + 22\,kN \cdot 4{,}72\,m - 17\,kN \cdot 1{,}11\,m - 32\,kN \cdot 3{,}0\,m$$
$$- 145\,kNm + B \cdot 1{,}66\,m$$
$$= 61{,}56\,kNm + 51{,}28\,kNm + 103{,}75\,kNm - 18{,}87\,kNm - 96\,kNm$$
$$- 145\,kNm + B \cdot 1{,}66\,m = -43{,}28\,kNm + B \cdot 1{,}66\,m$$

$$B = \frac{43{,}28\,Nm}{1{,}664\,m} = \mathbf{26{,}01\,kN}\ (\nearrow [0{,}5\,p])$$

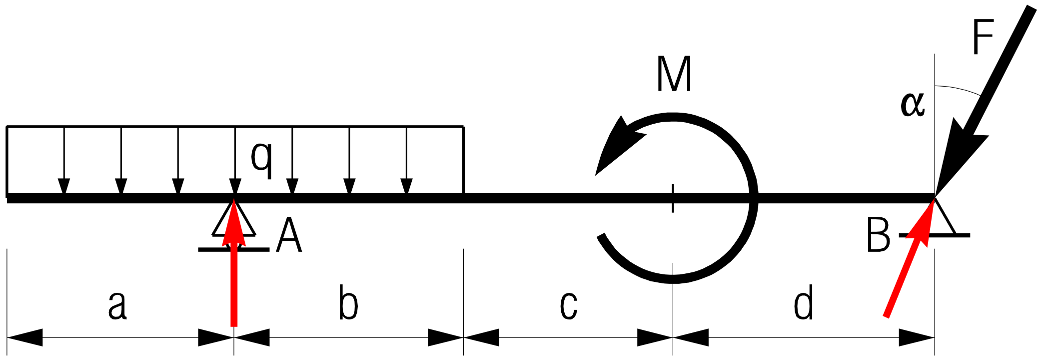
$\sum M_C = 0 = \sum M_C^* + C \cdot k_C$ [0,5p]

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm [3p]		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	15,390 kN	4,00	↻	+ F_{1x} · 4,00	+15,390 · 4,00	+61,56
F_{1y}	17,092 kN	0	–	F_{1y} · 0	8,452 · 0	0
F_2	22 kN	7,212	↻	+ F_2 · 7,212	+22 · 7,212	+158,66
F_3	17 kN	3,606	↺	- F_3 · 3,606	-17 · 3,606	-61,30
F_4	32 kN	0	–	F_4 · 0	35 · 0	0
M	145 kNm	–	↺	- M	-145	-145,00
ΣM_C^*			↻			**+13,92**
C	**4,64 kN (↑)**	3,00	↺	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**-13,92**
ΣM_C	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\sum M_C = 0 = F_{1x} \cdot 4{,}0\,m + F_2 \cdot 7{,}21\,m - F_3 \cdot 3{,}61\,m - M + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$= 15{,}39\,kN \cdot 4{,}0\,m + 22\,kN \cdot 7{,}21\,m - 17\,kN \cdot 3{,}61\,m - 145\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$= 61{,}56\,kNm + 158{,}66\,kNm - 61{,}30\,kNm - 145{,}00\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m$$
$$= 13{,}92\,kNm + C \cdot 3{,}0\,m$$

$$C = \frac{-13{,}92\,kNm}{3{,}0\,m} = \mathbf{-4{,}64\,kN} \ (\uparrow [0{,}5\,p])$$

4. Határozza meg és ábrázolja az alábbi tartó reakcióerőit (támaszerőit)! [Σ15p]



q = 5 kN/m
F = 10 kN
α = 15°
M = 8 kNm
a = 2,5 m
b = 3,5 m
c = 1,0 m
d = 2,0 m

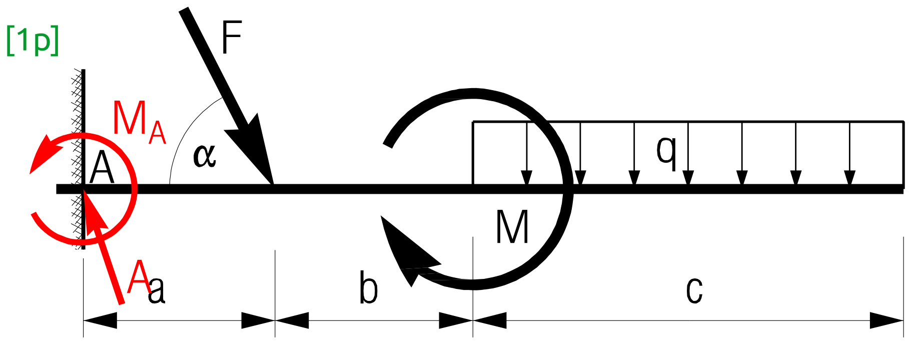
$F_x = F \cdot \sin\alpha = 10\,kN \cdot \sin 15^o = \mathbf{2{,}588\,kN}$ (←) [1 p]

$F_y = F \cdot \cos\alpha = 10\,kN \cdot \cos 15^o = \mathbf{9{,}659\,kN}$ (↓) [1 p]

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + B \cdot (b+c+d)$$

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_x	2,588 kN	0	–	0	0	0
F_y	9,659 kN	6,50	↻	$+ F_y \cdot (b + c + d)$	+9,659 · 6,50	+62,78
q	5 kN/m	0,50	↻	+ q · (a + b) · 0,50	+5 · 6,00 · 0,50	+15,00
M	8 kNm	–	↺	- M	-8,00	-8,00
ΣM_A^*			↻			**+69,78**
B	**10,74 kN (↑)**	6,50	↺	← ← ← ← ← ← ← ← ←		**-69,78**
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	**0**

4. Határozza meg és ábrázolja az alábbi tartó reakcióerőit (támaszerőit)! [Σ15p]



q = 4 kN/m
F = 12 kN
α = 75°
M = 15 kNm
a = 1,5 m
b = 2,5 m
c = 4,0 m

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = 12\,kN \cdot \cos 75^o = \mathbf{3{,}106\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$
$$F_y = F \cdot \sin\alpha = 12\,kN \cdot \sin 75^o = \mathbf{11{,}591\,kN}\ (\downarrow)\ [1\,p]$$
$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + M_A$$

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
Fx	3,106 kN	0	–	0	0	0
Fy	11,591 kN	1,50	↻	+ Fy · a	+11,591 · 1,50	+17,39
q	4 kN/m	6,00	↻	+ q · c · (a + b + c/2)	+4 · 4,00 · 6,00	+96,00
M	15 kNm	–	↻	+ M	+15,00	+15,00
ΣMA*			↻			**+128,39**
MA		–	↺			**-128,39**
ΣMA	0 kNm	–	–	–	–	**0**

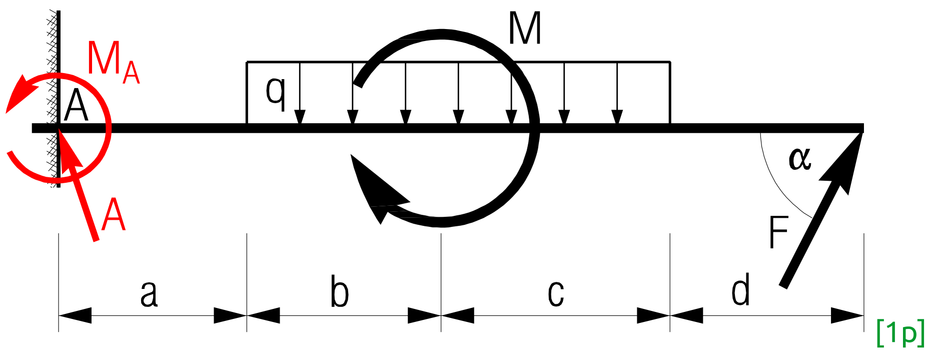
$$\sum M_A* = 0 = q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2}\right) + M + F_y \cdot a + M_A$$
$$= 4\,kN/m \cdot 4{,}0\,m \cdot \left(1{,}5\,m + 2{,}5\,m + \frac{4{,}0\,m}{2}\right) + 15\,kNm + 11{,}591\,kN \cdot 1{,}5\,m + M_A$$
$$= 4\,kN/m \cdot 4{,}0\,m \cdot 6{,}0\,m + 15\,kNm + 11{,}591\,kN \cdot 1{,}5\,m + M_A$$
$$= 96{,}0\,kNm + 15\,kNm + 17{,}387\,kNm + M_A = 128{,}39\,kNm + M_A$$
$$M_A = \mathbf{-128{,}39\,kNm}\ [3{+}0{,}5\,p]$$

$$\sum F_x = 0 = A_x + F_x = A_x + 3{,}106\,kN \rightarrow A_x = \mathbf{-3{,}106\,kN}\ (\leftarrow)\ [1{,}5{+}0{,}5\,p]$$

$$\sum F_y = 0 = A_y + F_y + q \cdot c = A_y + 11{,}591\,kN + 4\,kN/m \cdot 4{,}0\,m$$
$$= A_y + 11{,}591\,kN + 16{,}0\,kN = A_y + 27{,}591\,kN \rightarrow A_y = \mathbf{-27{,}591\,kN}\ (\uparrow)\ [2{+}0{,}5\,p]$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3{,}106^2 + 27{,}591^2} = \sqrt{770{,}91} = \mathbf{27{,}76\,kN}\ [1\,p]$$
$$\tan(\alpha) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{27{,}591\,kN}{3{,}106\,kN} = \mathbf{8{,}883}\ [1\,p] \rightarrow \alpha = \arctan(8{,}883) = \mathbf{83{,}58^o}\ [1\,p]$$

4. Határozza meg és ábrázolja az alábbi tartó reakcióerőit (támaszerőit)! [Σ15p]



q = 6 kN/m
F = 11 kN
α = 70°
M = 18 kNm
a = 2,0 m
b = 2,0 m
c = 4,0 m
d = 2,5 m

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = 11\,kN \cdot \cos 70^o = \mathbf{3{,}762\,kN}\ (\rightarrow)\ [1\,p]$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha = 11\,kN \cdot \sin 70^o = \mathbf{10{,}337\,kN}\ (\uparrow)\ [1\,p]$$

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + M_A$$

teher		erőkar, m [1p]	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_x	3,762 kN	0	–	0	0	0
F_y	10,337 kN	10,50	↺	$- F_y \cdot 10{,}50$	$-10{,}337 \cdot 10{,}50$	-108,54
q	6 kN/m	5,00	↻	$+ q \cdot (b + c) \cdot 5{,}00$	$+6 \cdot 6{,}00 \cdot 5{,}00$	+180,00
M	18 kNm	–	↺	+ M	+18	+18,00
ΣM_A^*			↻			**+89,46**
M_A		–	↺			**-89,46**
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	**0**

$$\sum M_A = 0 = q \cdot (b+c) \cdot \left(a + \frac{b+c}{2}\right) + M + F_y \cdot (a+b+c+d) + M_A$$

$$= 6\,kN/m \cdot (2{,}0\,m + 4{,}0\,m) \cdot \left(2{,}0\,m + \frac{2{,}0\,m + 4{,}0\,m}{2}\right) + 18\,kNm - 10{,}337\,kN \cdot 10{,}5\,m + M_A$$

$$= 5\,kN/m \cdot 6{,}0\,m \cdot 5{,}0\,m + 18\,kNm - 10{,}337\,kN \cdot 10{,}5\,m + M_A$$

$$= 180{,}00\,kNm + 18\,kNm - 108{,}54\,kNm + M_A = 89{,}46\,kNm + M_A$$

$$M_A = \mathbf{-89{,}46\,kN}\ [3\text{+}0{,}5\,p]$$

$$\sum F_x = 0 = F_x + A_x = 3{,}762\,kN + A_x$$

$$A_x = \mathbf{-3{,}762\,kN}\ (\leftarrow)\ [1{,}5\text{+}0{,}5\,p]$$

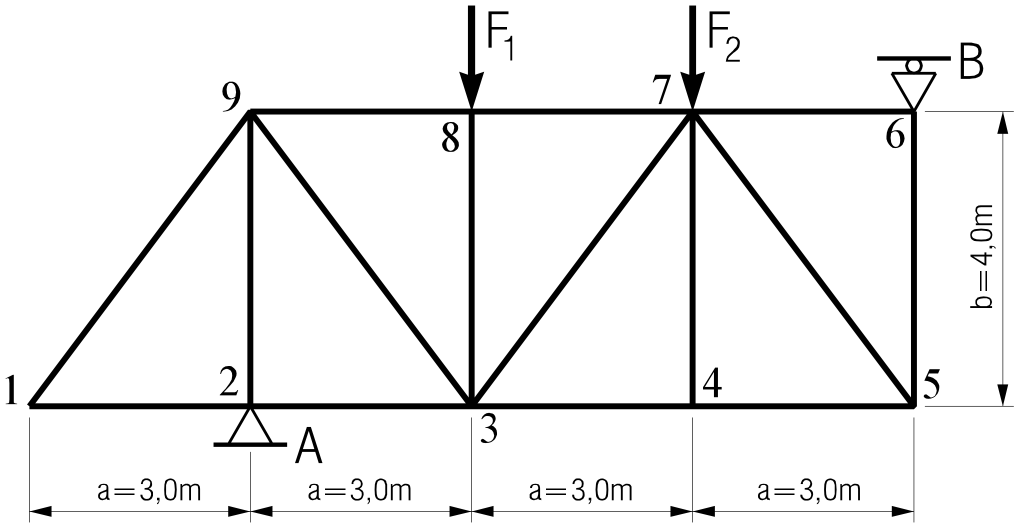
$$\sum F_y = 0 = q \cdot (b+c) + F_y + A_y = 6\,kN/m \cdot 6{,}0\,m - 10{,}337\,kN + A_y = 25{,}663\,kN + A_y$$

$$A_y = \mathbf{-25{,}663\,kN}\ (\uparrow)\ [2\text{+}0{,}5\,p]$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3{,}762^2 + 25{,}663^2} = \sqrt{672{,}74} = \mathbf{25{,}937\,kN}\ [1\,p]$$

$$\tan(\alpha) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{25{,}663\,kN}{3{,}762\,kN} = \mathbf{6{,}8216}\ [1\,p] \rightarrow \alpha = \arctan(6{,}8216) = \mathbf{81{,}66^o}\ [1\,p]$$

3. Határozza meg és ábrázolja az alábbi rácsos tartó rúderőit számítással! [Σ20p]

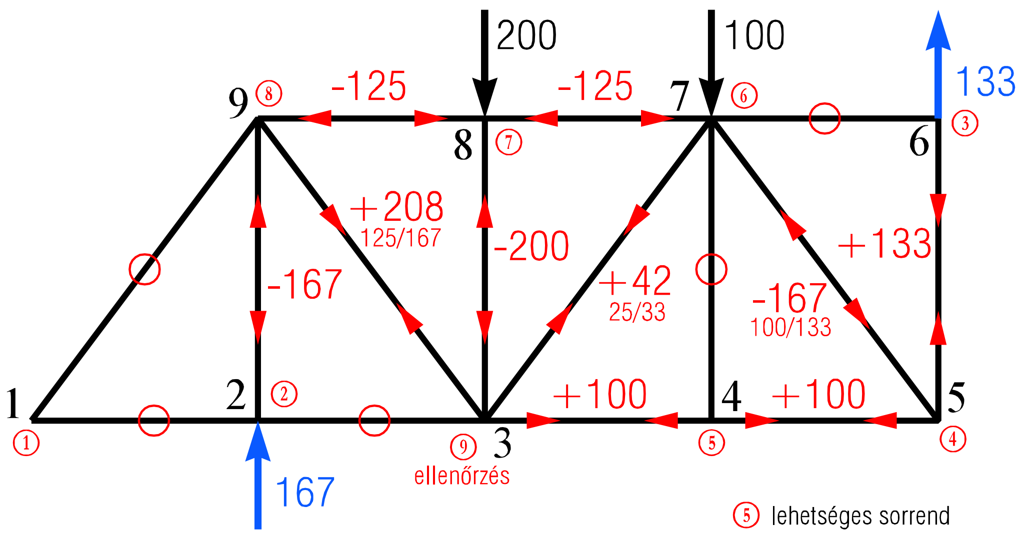


F₁ = 200 kN

F₂ = 100 kN

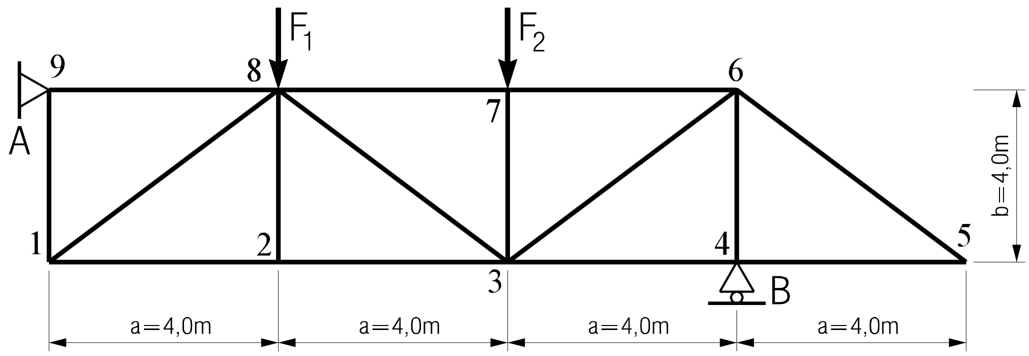
$$\Sigma M_A = 0 = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2 \cdot a + B \cdot 3 \cdot a = 200\,kN \cdot 3{,}0\,m + 100\,kN \cdot 6{,}0\,m + B \cdot 9{,}0\,m$$
$$= 600\,kNm + 600\,kNm + B \cdot 9{,}0\,m = 1200\,kNm + B \cdot 9{,}0\,m$$
$$B = \frac{-1200\,kNm}{9{,}0\,m} = \mathbf{-133{,}33\,kN \approx 133\,kN}\ (\uparrow) \quad [1\,p]$$
$$\Sigma F_y = 0 = A + F_1 + F_2 + B_y = A + 200\,kN + 100\,kN - 133{,}33\,kN$$
$$A = \mathbf{-166{,}67\,kN \approx 167\,kN}\ (\uparrow) \quad [1\,p]$$

[15·1p]



[3p]

3. Határozza meg és ábrázolja az alábbi rácsos tartó rúderőit számítással! [Σ20p]



F_1 = 120 kN

F_2 = 240 kN

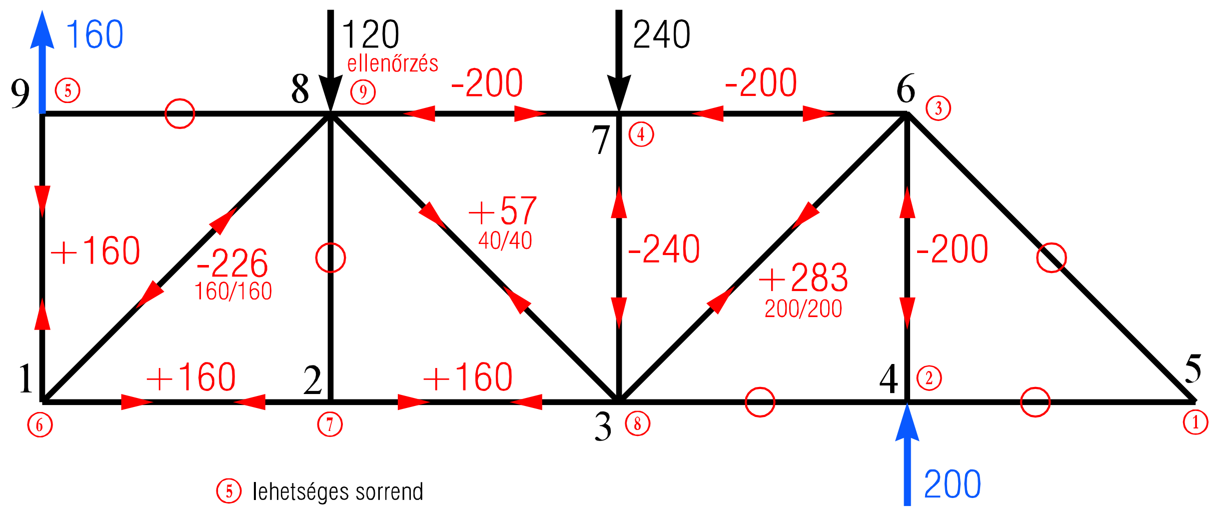
$$\Sigma M_A = 0 = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2 \cdot a + B \cdot 3 \cdot a = 120\,kN \cdot 4{,}0\,m + 240\,kN \cdot 8{,}0\,m + B \cdot 12{,}0\,m$$

$$= 480\,kNm + 1920\,kNm + B \cdot 12{,}0\,m = 2400\,kNm + B \cdot 12{,}0\,m$$

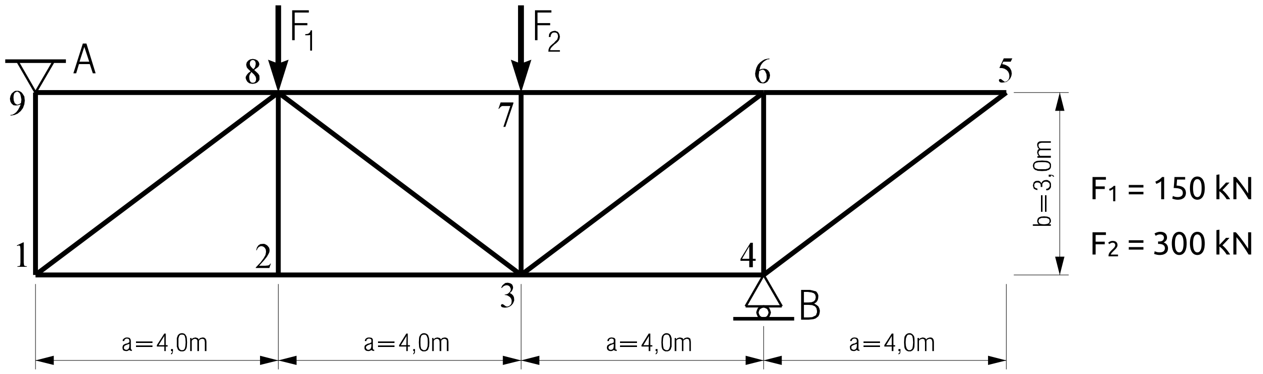
$$B = \frac{-2400\,kNm}{12{,}0\,m} = \mathbf{-200\,kN}\ (\uparrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = A + F_1 + F_2 + B_y = A + 120\,kN + 240\,kN - 200\,kN$$

$$A = \mathbf{-160\,kN}\ (\uparrow)$$

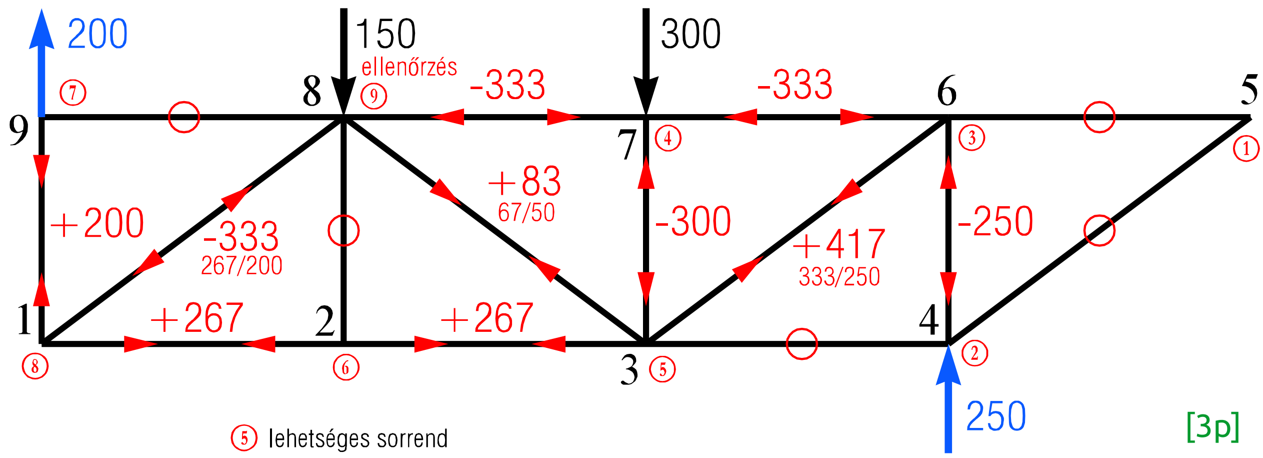


3. Határozza meg és ábrázolja az alábbi rácsos tartó rúderőit számítással! [Σ20p]



$$\sum M_A = 0 = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2 \cdot a + B \cdot 3 \cdot a = 150\,kN \cdot 4{,}0\,m + 300\,kN \cdot 8{,}0\,m + B \cdot 12{,}0\,m$$
$$= 600\,kNm + 240\,kNm + B \cdot 12{,}0\,m = 3000\,kNm + B \cdot 120\,m$$
$$B = \frac{-3000\,kNm}{12{,}0\,m} = \mathbf{-250\,kN}\ (\uparrow) \quad [1\,p]$$
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = \mathbf{0}$$
$$\Sigma F_y = 0 = A_y + F_1 + F_2 + B = A_y + 150\,kN + 300\,kN - 250\,kN$$
$$A = A_y = \mathbf{-200\,kN}\ (\uparrow) \quad [1\,p]$$

[15·1p]



[3p]