

Mechanikai alapismeretek 1. Statika

Építésmérnök O/BSc, Építőművész BA

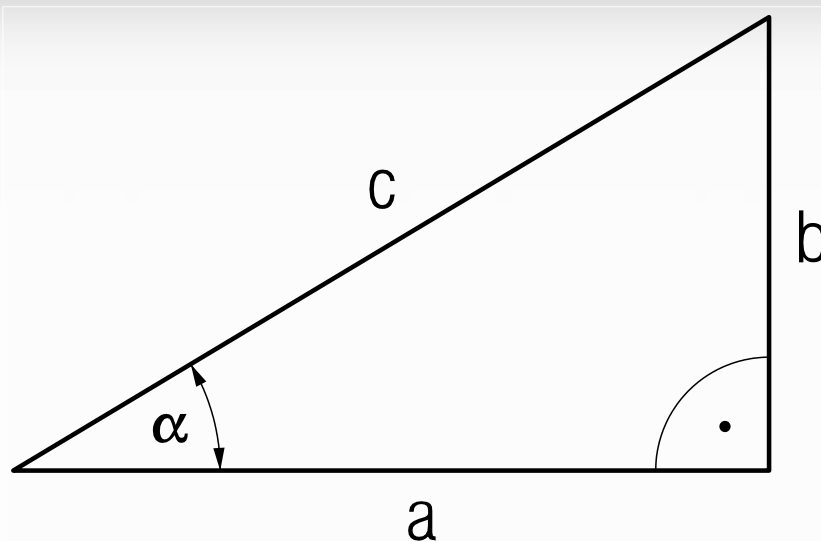
SÍKBELI ERŐRENDSZER

ERŐ, ERŐPÁR, NYOMATÉK

ÉS MEGOSZLÓ TEHER



Trigonometriai összefüggések 1



$$a = c \cdot \cos \alpha$$

$$b = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

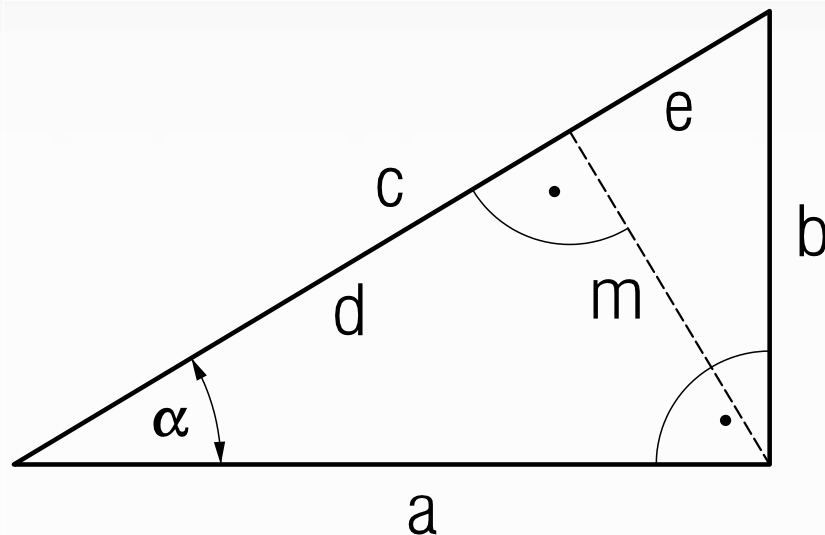
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pitagoraszai számhármassok

a	b	c
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37
15	36	39
9	40	41

Trigonometriai összefüggések 2

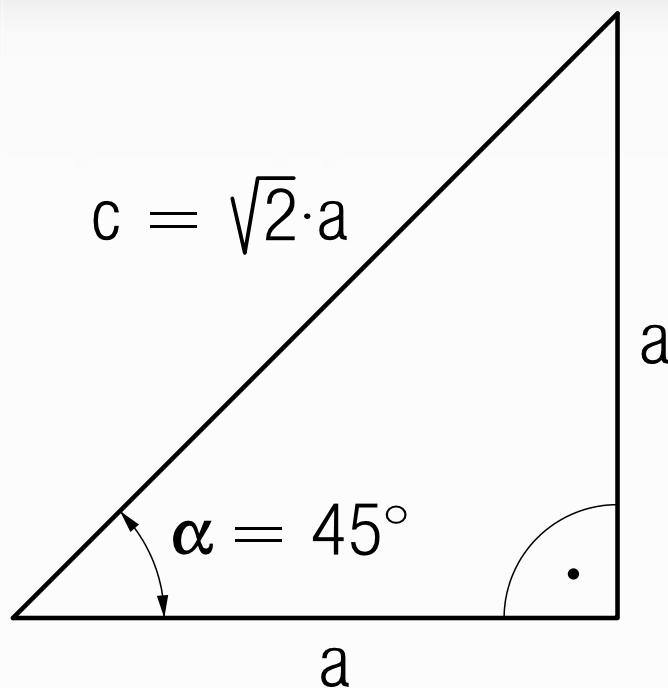


$$2 \cdot A = a \cdot b = c \cdot m \rightarrow m = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$d : m = a : b \rightarrow d = \frac{m \cdot a}{b} = \frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{c}$$

$$e : m = b : a \rightarrow e = \frac{m \cdot b}{a} = \frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{c}$$

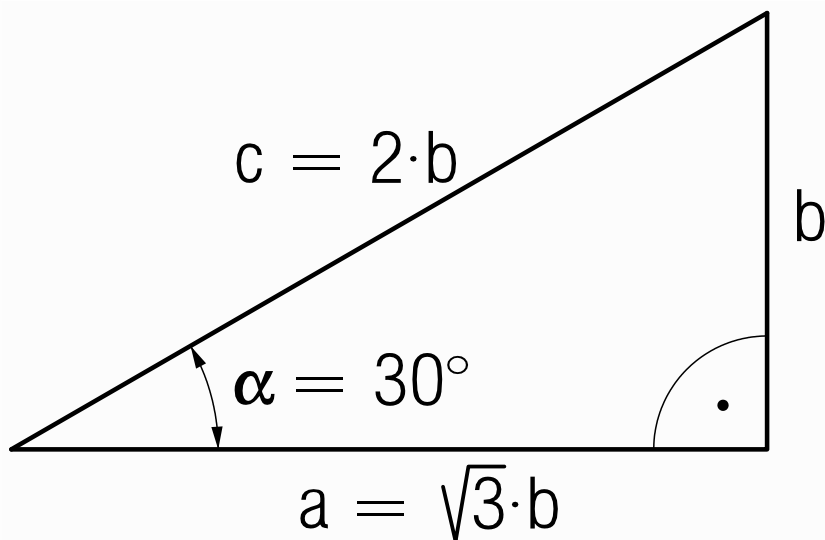
Trigonometriai összefüggések 3



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

Trigonometriai összefüggések 4



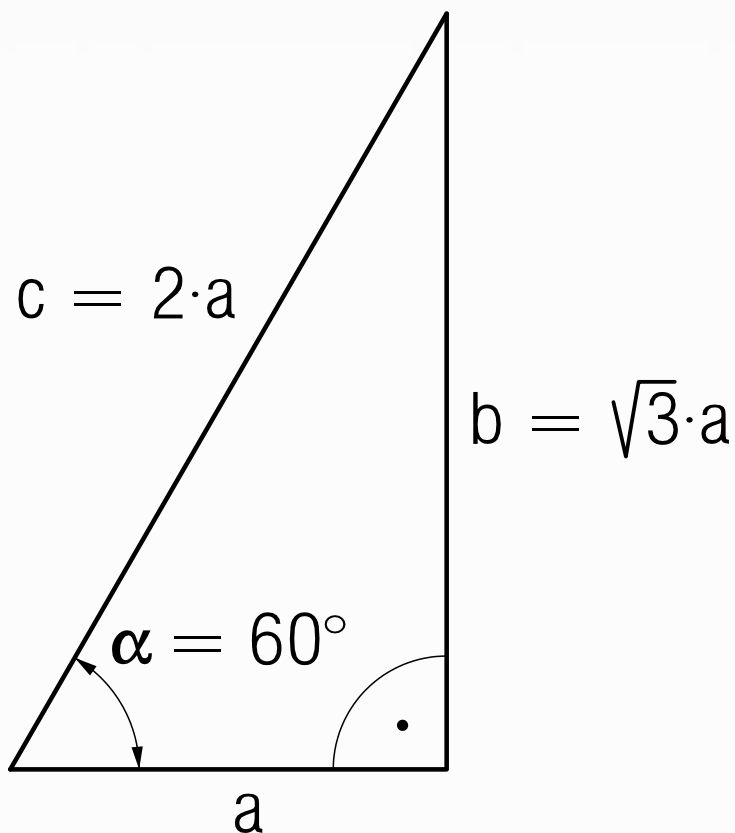
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57735$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3} = 1,732$$

Trigonometriai összefüggések 5



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

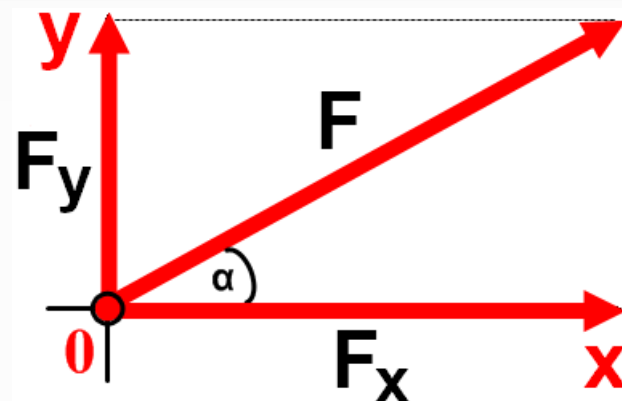
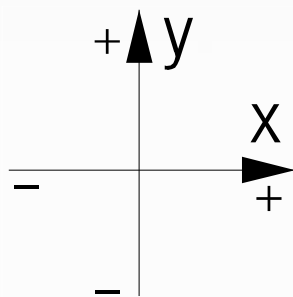
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = 1,732$$

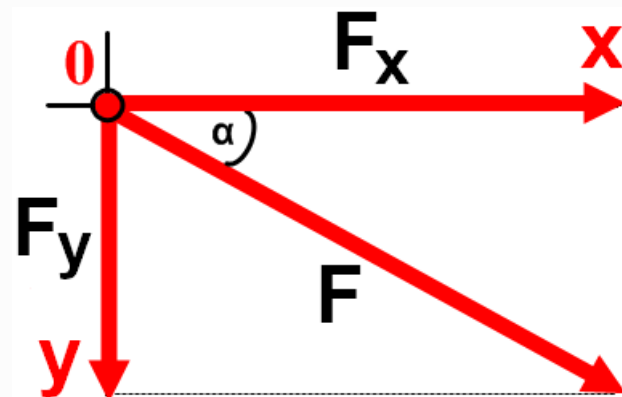
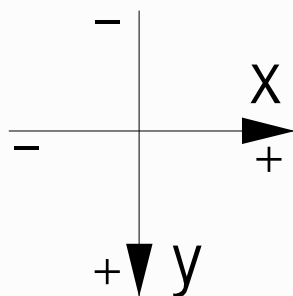
$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57735$$

Erő és a koordináta-rendszer

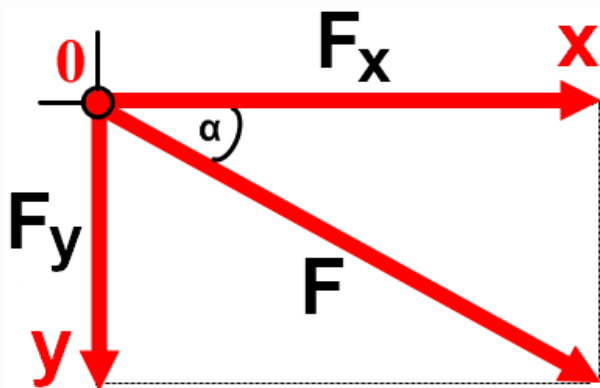
matematikai koordináta-rendszer



mechanikai koordináta-rendszer



Erő és vetületi összetevői



$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

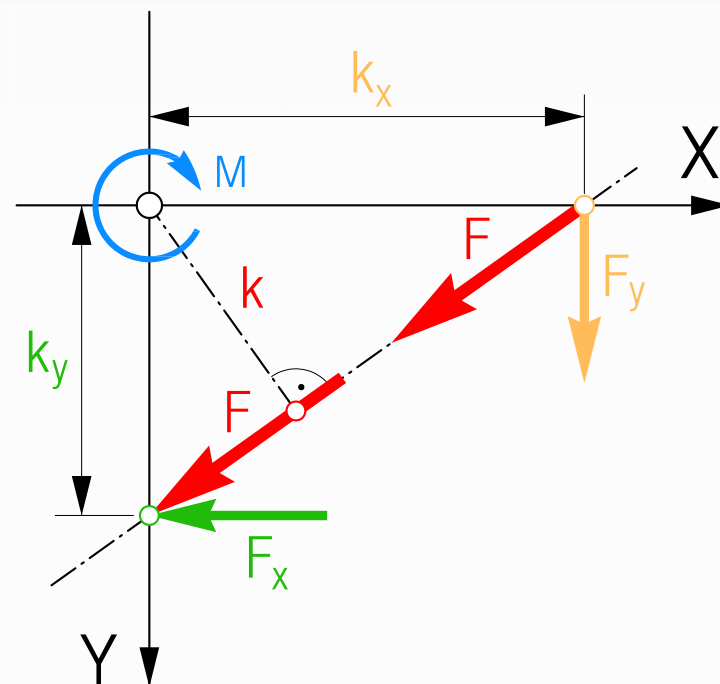
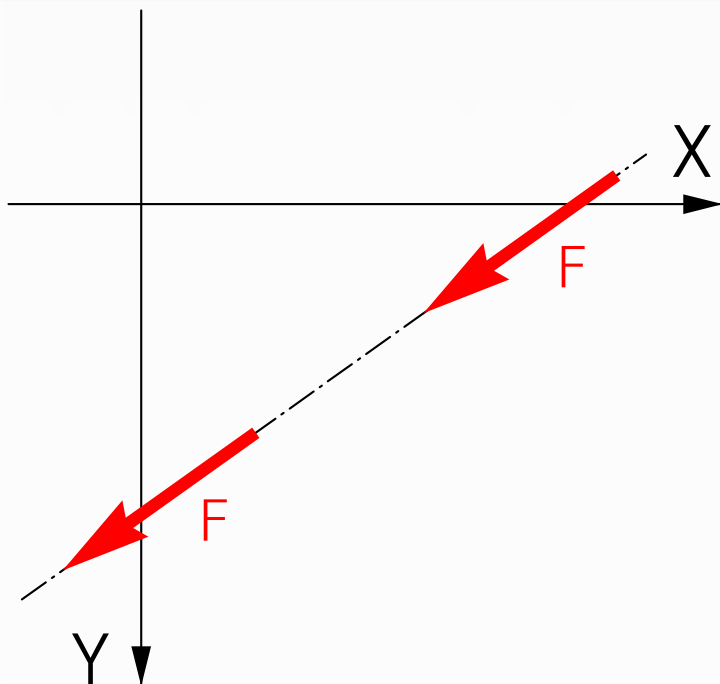
$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{F_y}{F_x}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

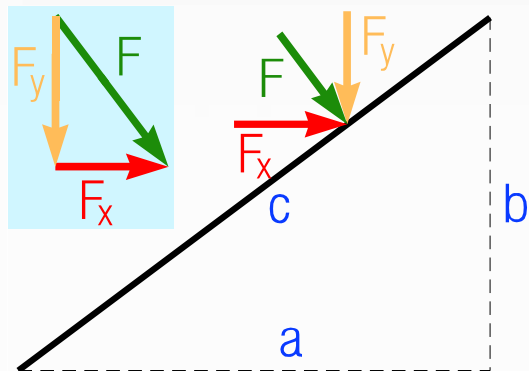
Erő és vetületi összetevői



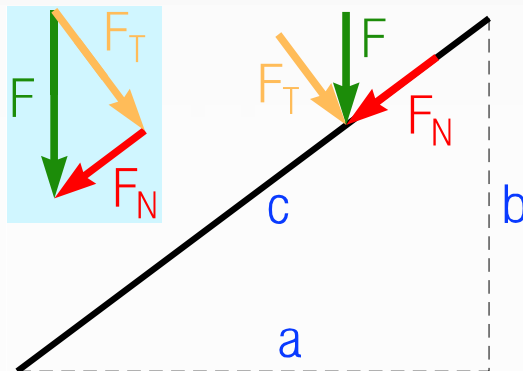
Az erő a hatásvonalán bárhova eltolható

Erő felbontása vetületi összetevőire

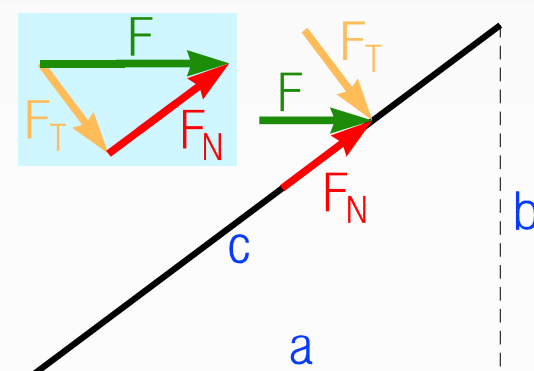
Az erő iránya a ferde tartó befogóival és nem a szögével van megadva



a rúdra merőlegesen ható erő



függőlegesen ható erő



vízszintesen ható erő

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$F_x : F = b : c$$

$$F_x = (F \cdot \sin \alpha) = F \cdot \frac{b}{c}$$

$$F_y : F = a : c$$

$$F_y = (F \cdot \cos \alpha) = F \cdot \frac{a}{c}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$F_N : F = b : c$$

$$F_N = (F \cdot \sin \alpha) = F \cdot \frac{b}{c}$$

$$F_T : F = a : c$$

$$F_T = (F \cdot \cos \alpha) = F \cdot \frac{a}{c}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

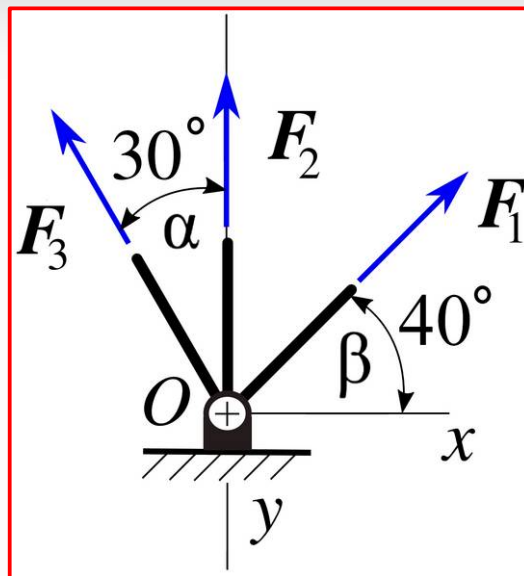
$$F_N : F = a : c$$

$$F_N = (F \cdot \cos \alpha) = F \cdot \frac{a}{c}$$

$$F_T : F = b : c$$

$$F_T = (F \cdot \sin \alpha) = F \cdot \frac{b}{c}$$

Erő és vetületi összetevői



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \beta = F_1 \cdot \cos 40^\circ$$

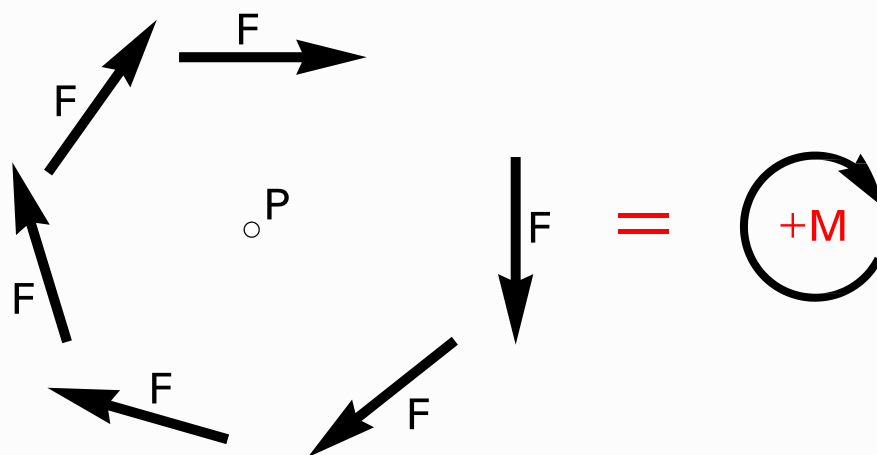
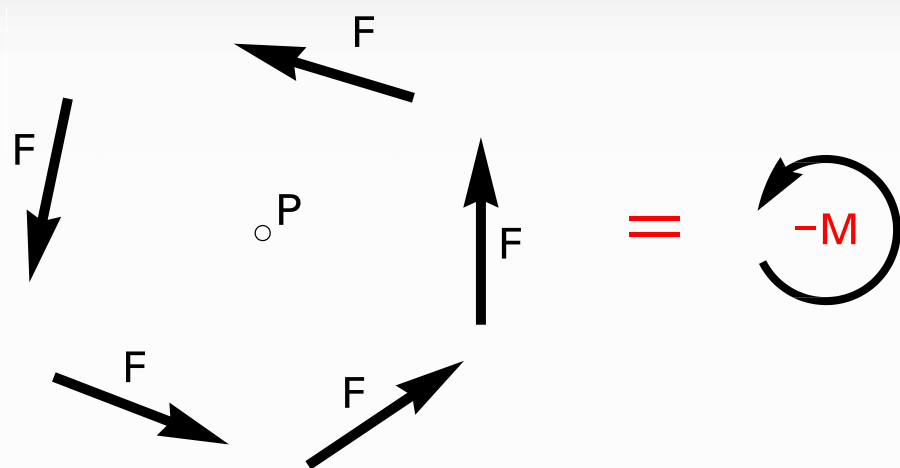
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \beta = F_1 \cdot \sin 40^\circ$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \sin \alpha = F_3 \cdot \sin 30^\circ$$

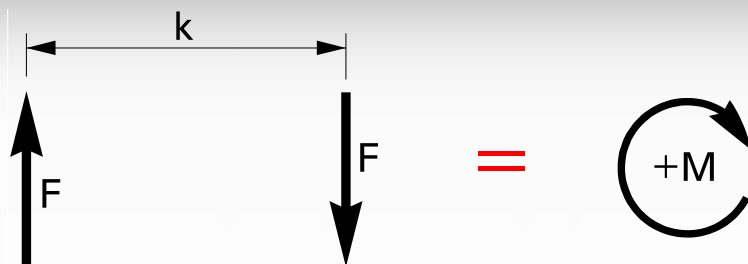
$$F_{3y} = F_3 \cdot \cos \alpha = F_3 \cdot \cos 30^\circ$$

Mindig az a vetületet számoljuk a **cos** α taggal, amelyik tengelyhez az α szöget megadjuk!

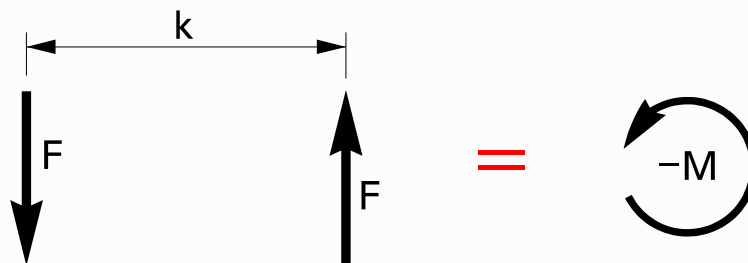
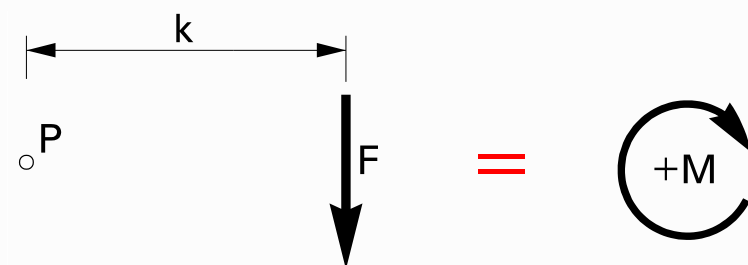
Nyomaték előjele



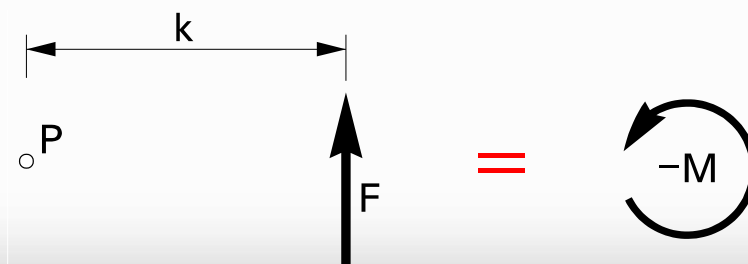
Erőpár, nyomaték



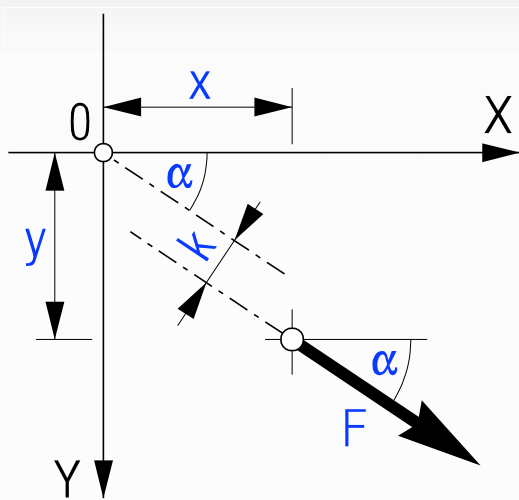
$$M = + F \cdot k$$



$$M = - F \cdot k$$



Pontra ható nyomaték

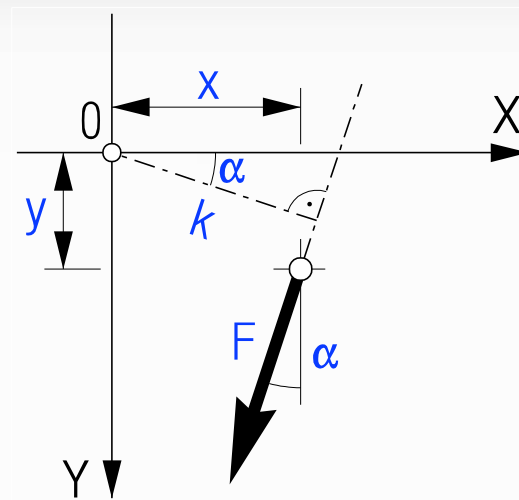


$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$M_0 = F_y \cdot x - F_x \cdot y$$

$$k = \frac{M_0}{F}$$



$$F_x = F \cdot \sin \alpha$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha$$

$$M_0 = F_y \cdot x + F_x \cdot y$$

$$k = \frac{M_0}{F}$$

Erő helye a koordináta-rendszerben

Az erő által kifejtett nyomaték:

$$M = F \cdot k = F_x \cdot (-k_y) = F_y \cdot k_x$$

Az erő erőkarja:

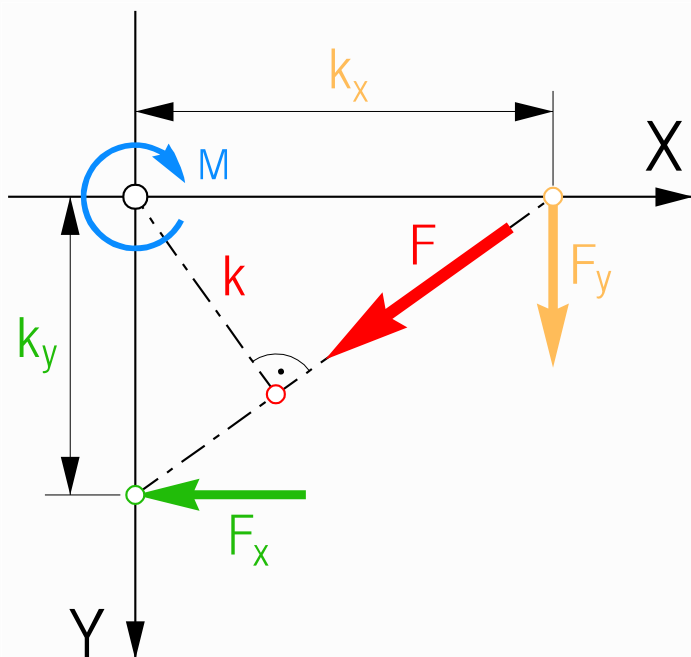
$$k = \frac{M}{F}$$

Az erő hatásvonalának tengelymetszetei:

$$k_x = \frac{M}{F_y}$$

$$k_y = -\frac{M}{F_x}$$

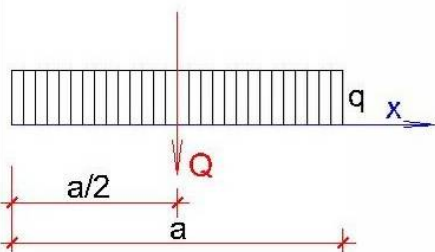
M , F_x , k_y , F_y és k_x előjelhelyes!



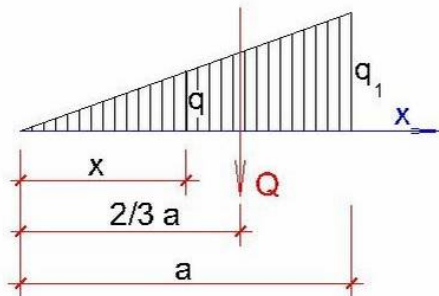
Vonal mentén megoszló teher

Vonal mentén megoszló erőrendszer

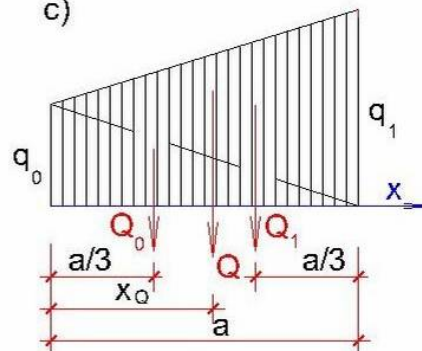
a)



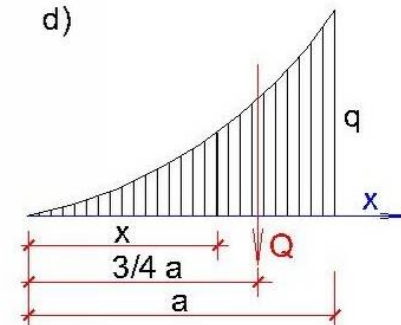
b)



c)



d)



Egyenletesen megoszló teher

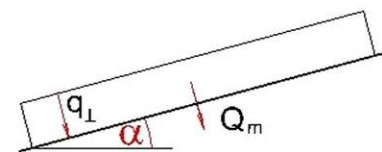
Egyenletesen változó teher

Megoszló teher ferde tartón

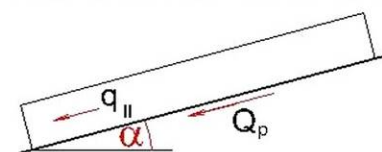
Megoszló teher ferde tartón

Összetevőkre bontás

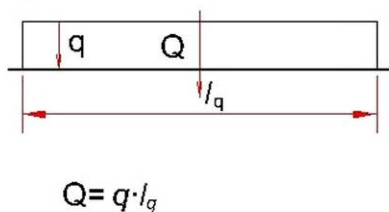
Tengelyre merőleges összetevő:



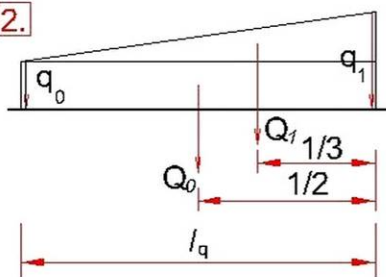
Tengellyel párhuzamos összetevő:



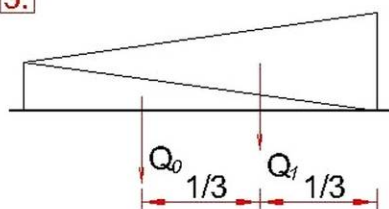
1.



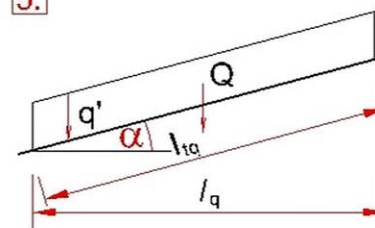
2.



3.



5.



Nyomatékszámítás példa 1



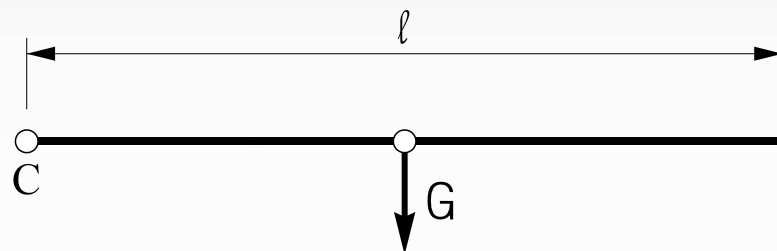
Toldi Miklós petrencésrúdja

a rúd hossza: $l = 3,2\text{m}$

a rúd átmérője: $d = 6,0\text{cm}$

a rúd anyaga: akác, sűrűsége: $\rho = 750\text{kg/m}^3$

Mekkora nyomatékot fejt ki a rúd Toldi csuklójára ?



Toldi Miklós petrencésrúdja

térfogata:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot l = \frac{(0,06\text{m})^2 \cdot \pi}{4} \cdot 3,2\text{m} = 0,009\text{m}^3$$

tömege:

$$m = A \cdot \rho = 0,009\text{m}^3 \cdot 750\text{kg/m}^3 = 6,785\text{kg}$$

súlya:

$$G = m \cdot g = 6,785\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 = 66,6\text{N}$$

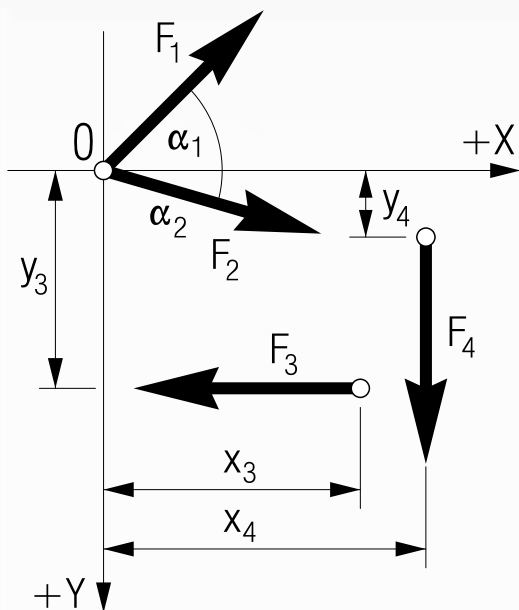
erőkar:

$$k = \frac{l}{2} = \frac{3,2\text{m}}{2} = 1,6\text{m}$$

nyomaték:

$$M = G \cdot k = 66,6\text{N} \cdot 1,6\text{m} = 106,56\text{Nm} \curvearrowright$$

Nyomatékszámítás példa 2



$$F_1 = 12 \text{ kN}$$

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$F_2 = 14 \text{ kN}$$

$$\alpha_2 = 20^\circ$$

$$F_3 = 8 \text{ kN}$$

$$x_3 = 3,5 \text{ m}$$

$$y_3 = 3,0 \text{ m}$$

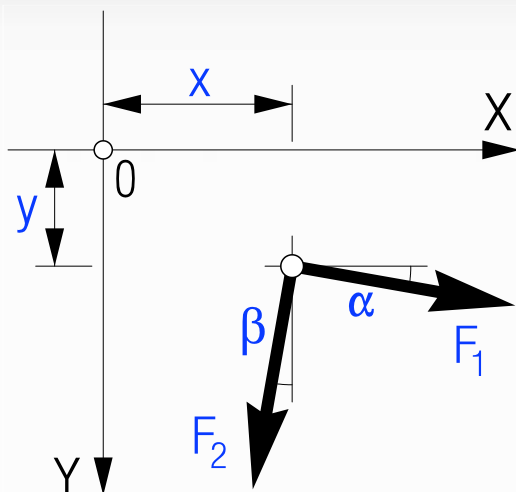
$$F_4 = 6 \text{ kN}$$

$$x_4 = 5,0 \text{ m}$$

$$y_4 = 1,0 \text{ m}$$

$$\sum M_i^0 = F_3 \cdot y_3 + F_4 \cdot x_4 = 8 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 6 \text{ kN} \cdot 5,0 \text{ m} = 54,0 \text{ kNm} (\curvearrowright)$$

Nyomatékszámítás példa 3



$$F_1 = 16 \text{ kN}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$F_2 = 24 \text{ kN}$$

$$\beta = 20^\circ$$

$$x = 1,5 \text{ m}$$

$$y = 2,5 \text{ m}$$

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 16,0 \text{ kN} \cdot \cos 15^\circ = +15,455 \text{ kN} \rightarrow$$

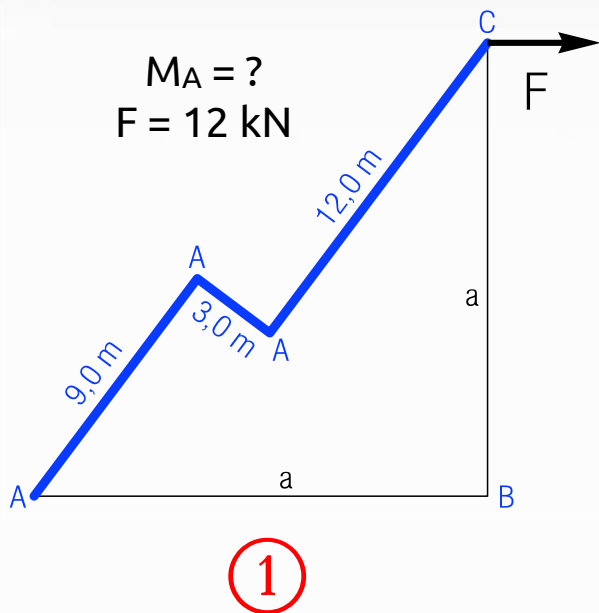
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 16,0 \text{ kN} \cdot \sin 15^\circ = +4,141 \text{ kN} \downarrow$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin \beta = 24,0 \text{ kN} \cdot \sin 20^\circ = -8,208 \text{ kN} \leftarrow$$

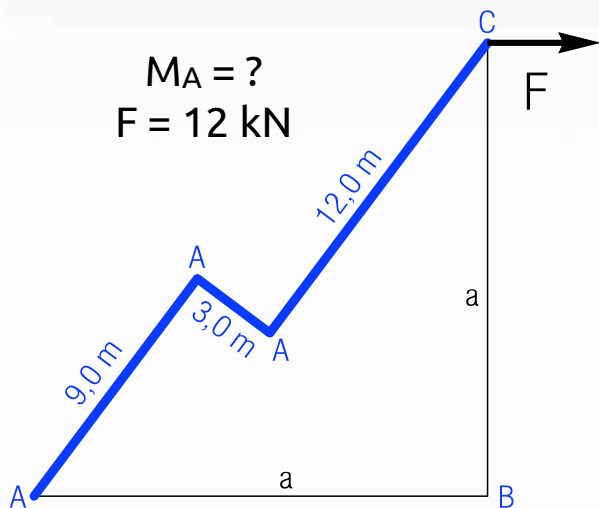
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta = 24,0 \text{ kN} \cdot \cos 20^\circ = +22,553 \text{ kN} \downarrow$$

$$\begin{aligned} \sum M_i^0 &= -F_{1x} \cdot y + F_{1y} \cdot x + F_{2x} \cdot y + F_{2y} \cdot x \\ &= -15,455 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} + 4,141 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} \\ &\quad + 8,208 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} + 22,553 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} \\ &= -38,6375 \text{ kNm} + 6,2115 \text{ kNm} \\ &\quad + 20,5200 \text{ kNm} + 33,8295 \text{ kNm} \\ &= +21,9235 \text{ kNm} (\curvearrowright) \end{aligned}$$

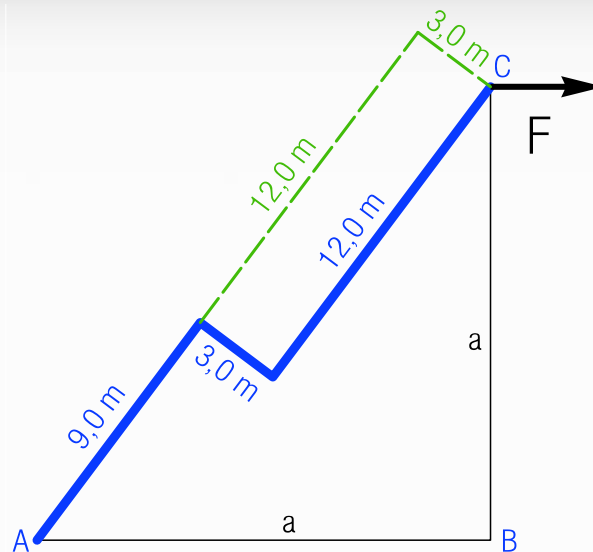
Nyomatékszámítás példa 4/1



Nyomatékszámítás példa 4/2

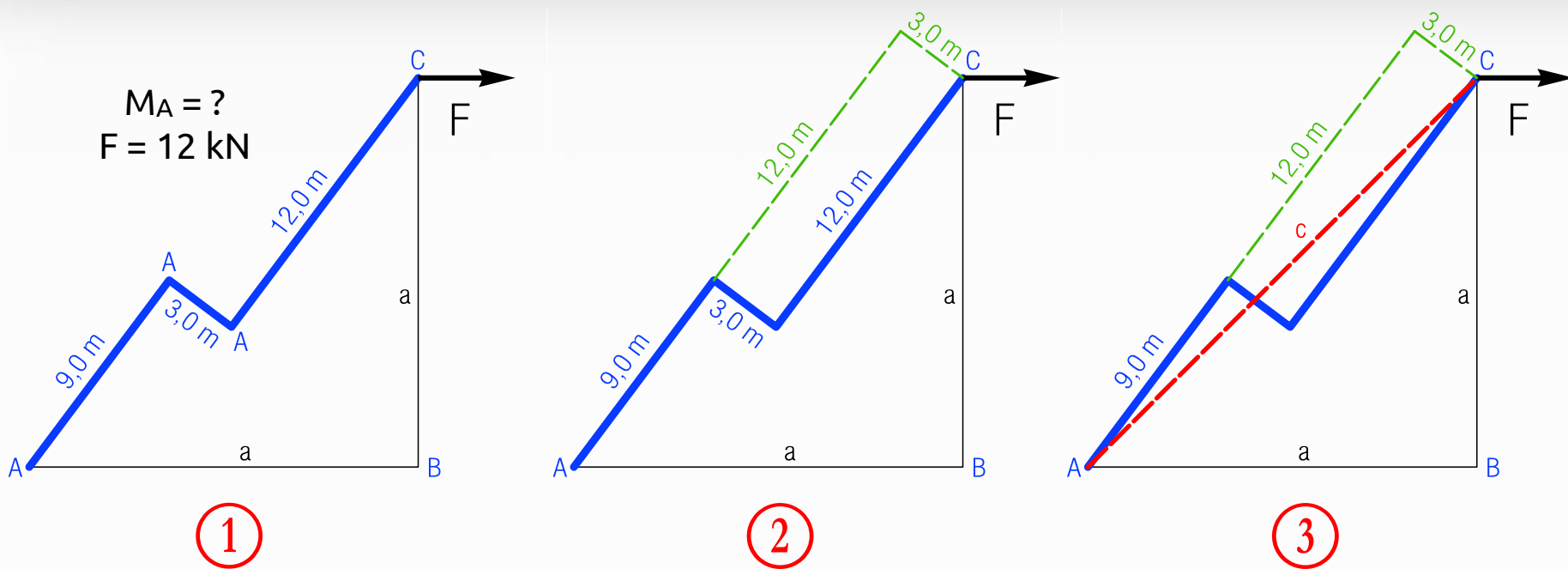


1



2

Nyomatékszámítás példa 4/3

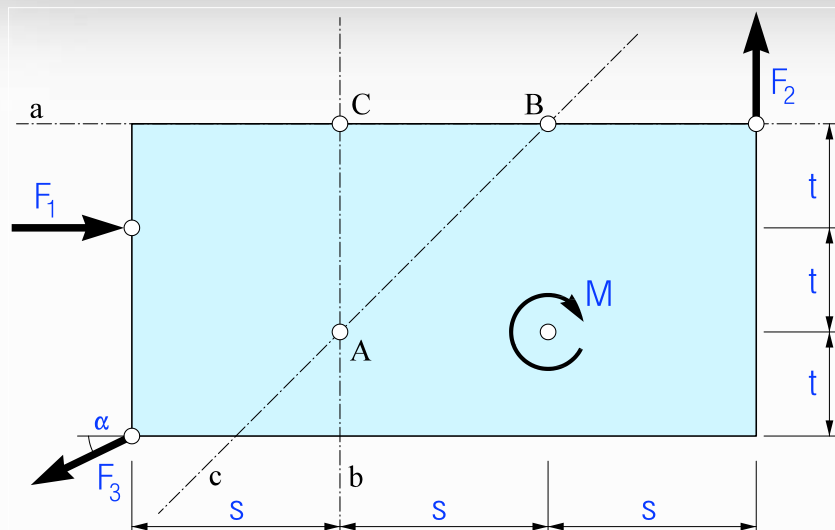


$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(9+12)^2 + 3^2} = \sqrt{21^2 + 3^2} = \sqrt{441 + 9} = \sqrt{450} = 21,095 \text{ m}$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{450}{2}} = \sqrt{225} = 15,00 \text{ m}$$

$$M_A = F \cdot a = 12 \text{ kN} \cdot 15 \text{ m} = 180 \text{ kNm} \quad \curvearrowright$$

Nyomatékszámítás példa 5



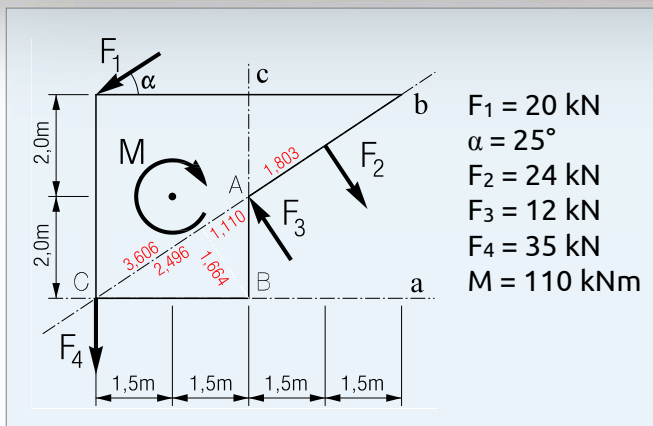
1. ferde erő vetületi összetevőinek meghatározása
 2. erőkarok meghatározása
 3. résznyomatékok számítása
 4. résznyomatékok összegzése
- vagy
1. ferde erő vetületi összetevőinek meghatározása
 2. erőkarok meghatározása
 3. nyomaték egyenlet felírása
 4. nyomaték egyenletbe behelyettesítés

$$\sum M_A = M + F_1 \cdot t - F_2 \cdot (2 \cdot s) + F_{3x} \cdot t - F_{3y} \cdot s$$

$$\sum M_B = M - F_1 \cdot t - F_2 \cdot s + F_{3x} \cdot (3 \cdot t) - F_{3y} \cdot (2 \cdot s)$$

$$\sum M_C = M - F_1 \cdot t - F_2 \cdot (2 \cdot s) + F_{3x} \cdot (3 \cdot t) - F_{3y} \cdot s$$

Nyomatékszámítás példa 6/1



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \cos 25^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{18,126 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \sin 25^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{8,452 \text{ kN} (\uparrow)}$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

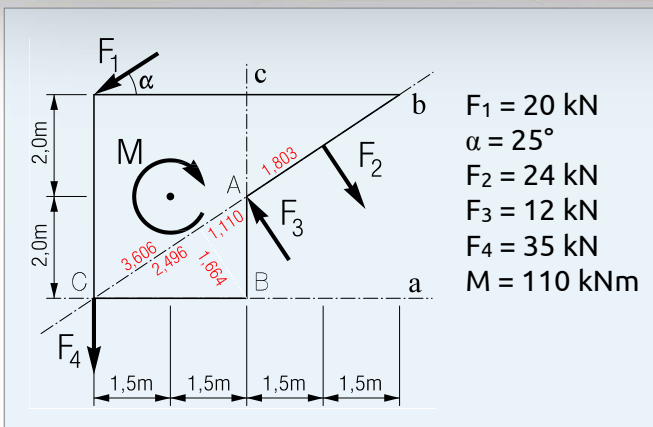
$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= F_{1x} \cdot 2,0 \text{ m} + F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 1,8 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} - M \\ &= 18,13 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 8,45 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot 1,8 \text{ m} - 35 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - 110 \text{ kNm} \\ &= 36,25 \text{ kNm} + 25,36 \text{ kNm} + 43,27 \text{ kNm} - 105,00 \text{ kNm} - 110,00 \text{ kNm} \\ &= \mathbf{-110,12 \text{ kNm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 2,91 \text{ m} - F_3 \cdot 1,11 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} - M \\ &= 18,13 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 8,45 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot 2,91 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot 1,11 \text{ m} - 35 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - 110 \text{ kNm} \\ &= 72,50 \text{ kNm} + 25,36 \text{ kNm} + 70,08 \text{ kNm} - 13,32 \text{ kNm} - 105 \text{ kNm} - 110 \text{ kNm} \\ &= \mathbf{-60,55 \text{ kNm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C &= F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_2 \cdot 5,41 \text{ m} - F_3 \cdot 3,61 \text{ m} - M \\ &= 18,13 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot 5,41 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot 3,61 \text{ m} - 110 \text{ kNm} \\ &= 72,50 \text{ kNm} + 129,82 \text{ kNm} - 43,27 \text{ kNm} - 110,00 \text{ kNm} \\ &= \mathbf{49,05 \text{ kNm}} \end{aligned}$$

Nyomatékszámítás példa 6/2



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \cos 25^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{18,126 \text{ kN} } (\rightarrow)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \sin 25^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{8,452 \text{ kN} } (\uparrow)$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	2,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 2,00$	$+18,126 \cdot 2,00$	+36,25
F_{1y}	8,452 kN	3,00	↺	$+ F_{1y} \cdot 3,00$	$+8,452 \cdot 3,00$	+25,36
F_2	24 kN	1,803	↺	$+ F_2 \cdot 1,803$	$+24 \cdot 1,803$	+43,27
F_3	12 kN	0	—	$F_3 \cdot 0$	$12 \cdot 0$	0
F_4	35 kN	3,00	↻	$- F_4 \cdot 3,00$	$-35 \cdot 3,00$	-105,00
M	110 kNm	—	↻	$- M$	-110	-110,00
ΣM_A			↻			-110,12

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	4,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 4,00$	$+18,126 \cdot 4,00$	+72,50
F_{1y}	8,452 kN	3,00	↺	$+ F_{1y} \cdot 3,00$	$+8,452 \cdot 3,00$	+25,36
F_2	24 kN	2,913	↺	$+ F_2 \cdot 2,913$	$+24 \cdot 2,913$	+69,91
F_3	12 kN	1,110	↻	$- F_3 \cdot 1,110$	$-12 \cdot 1,110$	-13,32
F_4	35 kN	3,00	↻	$- F_4 \cdot 3,00$	$-35 \cdot 3,00$	-105,00
M	110 kNm	—	↻	$- M$	-110	-110,00
ΣM_B			↻			-60,55

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	4,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 4,00$	$+18,126 \cdot 4,00$	+72,50
F_{1y}	8,452 kN	0	—	$F_{1y} \cdot 0$	$8,452 \cdot 0$	0
F_2	24 kN	5,409	↺	$+ F_2 \cdot 5,409$	$+24 \cdot 5,409$	+129,82
F_3	12 kN	3,606	↻	$- F_3 \cdot 3,606$	$-12 \cdot 3,606$	-43,27
F_4	35 kN	0	—	$F_4 \cdot 0$	$35 \cdot 0$	0
M	110 kNm	—	↻	$- M$	-110	-110,00
ΣM_C			↺			+49,05