

Mechanikai alapismeretek 1. Statika

Építésmérnök O/BSc, Építőművész BA

SÍKBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE ÉS EGYENSÚLYA



Két erő egyensúlya

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0},$$

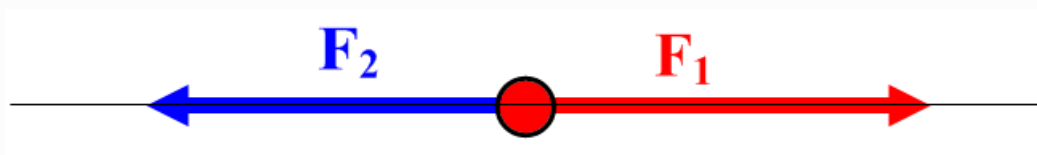
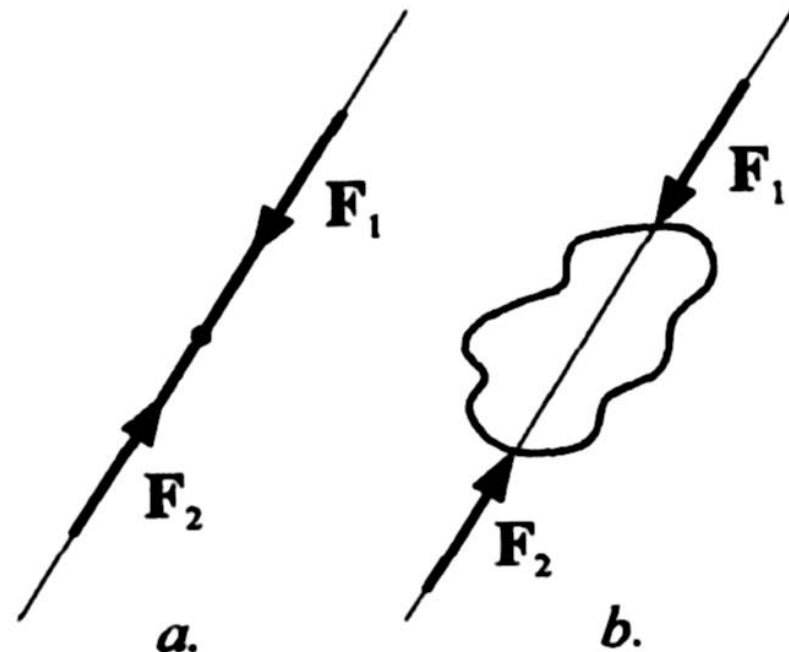
amiből

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1. \quad (2.12)$$

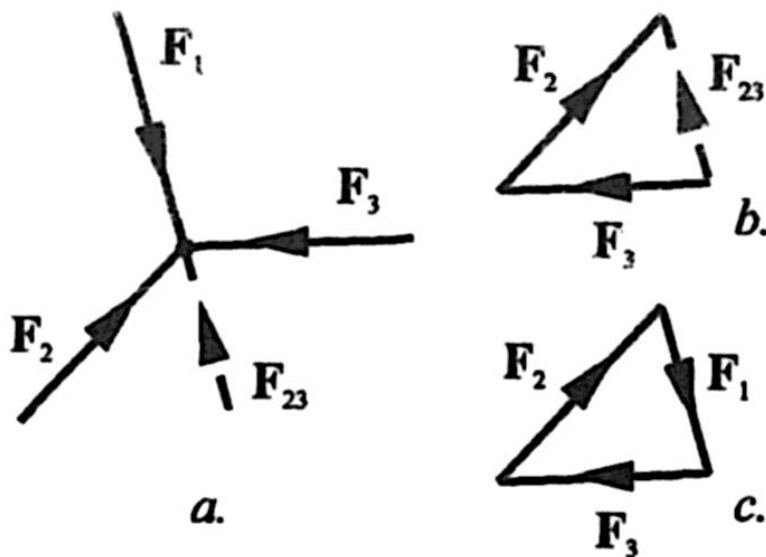


Tétel: *Két erő akkor lehet egyensúlyban, ha*

- $\Rightarrow$ *hatásvonaluk közös*
- $\Rightarrow$ *nagyságuk megegyező*
- $\Rightarrow$ *értelmük ellentétes.*



Három erő egyensúlya



2.9. ábra

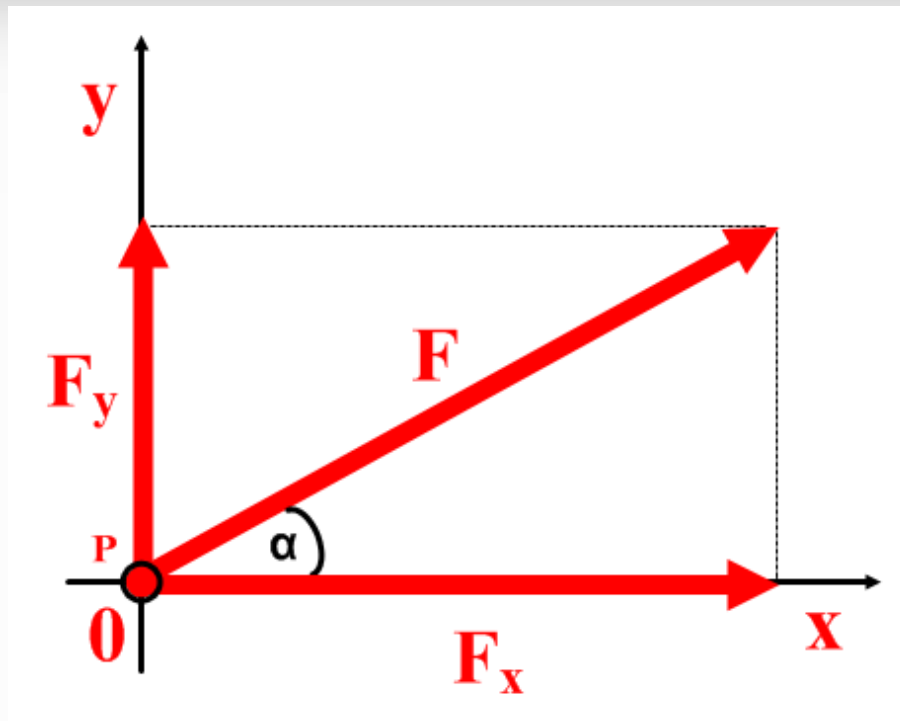
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}.$$



Tétel: *Három erő csak akkor lehet egyensúlyban, ha az erők síkbeli erőrendszert alkotnak,*

- $\Rightarrow$ *hatásvonalaik közös pontban metsződnek,*
- $\Rightarrow$ *az erővektoraikból alkotott vektorháromszög zárt és ebben*
- $\Rightarrow$ *a nyílfolyam folytonos (2.9.a.,c. ábra).*

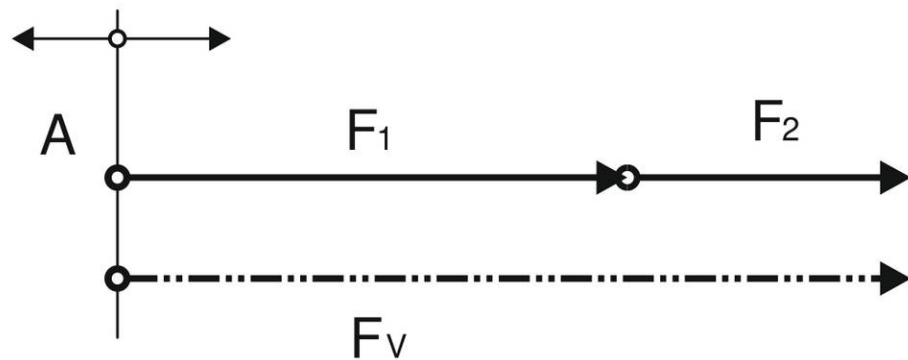
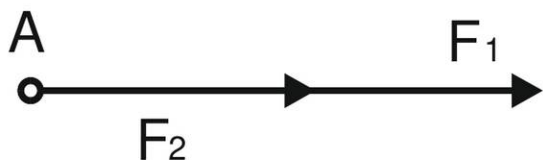
Erő felbontása vetületi összetevőkre



$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = \cos \alpha \cdot F$$

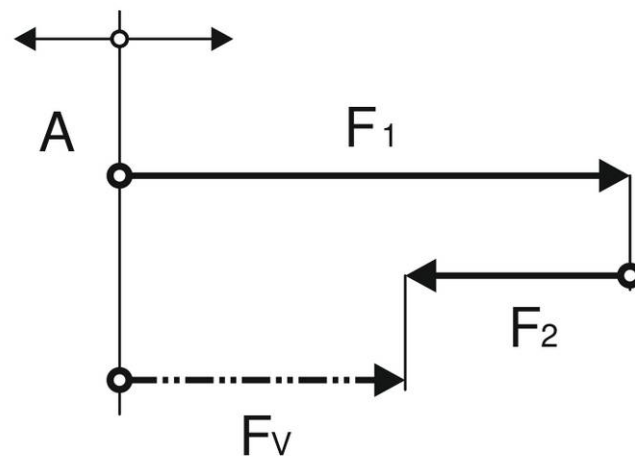
$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = \sin \alpha \cdot F$$

2 erő eredőjének meghatározása



$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_V = F_1 + F_2$$

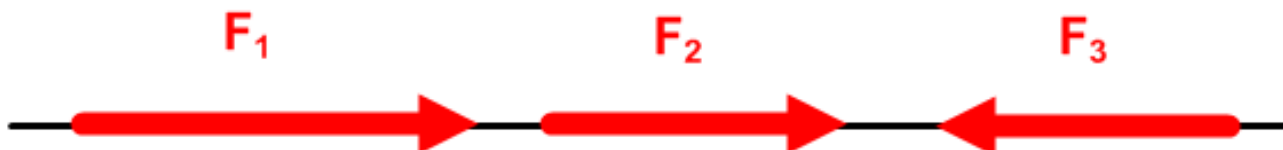


$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_V = F_1 - F_2$$

Eredő meghatározása

$$R = \sum F_i \text{ (N)}$$



$$R = F_1 + F_2 - F_3 \text{ (N)}$$

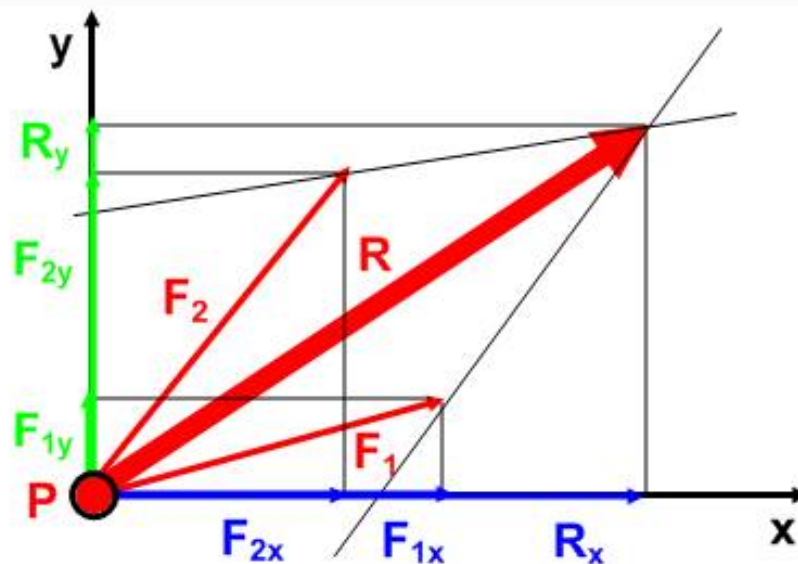
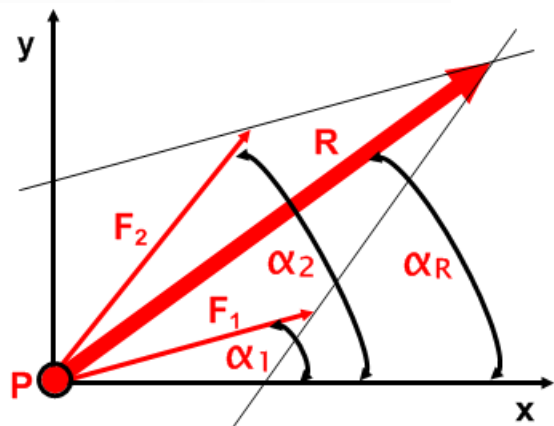
$$R = \sum F_i \text{ (N)}$$



$$R = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 \text{ (N)}$$

$$R = \underline{\underline{10}} \text{ (N)}$$

Eredő meghatározása



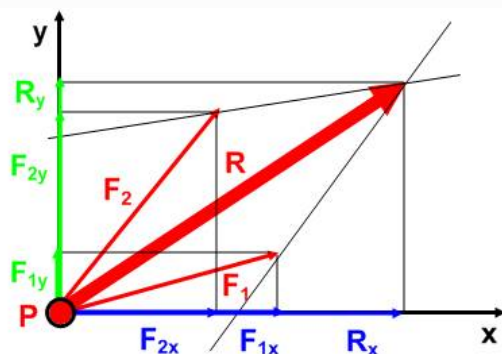
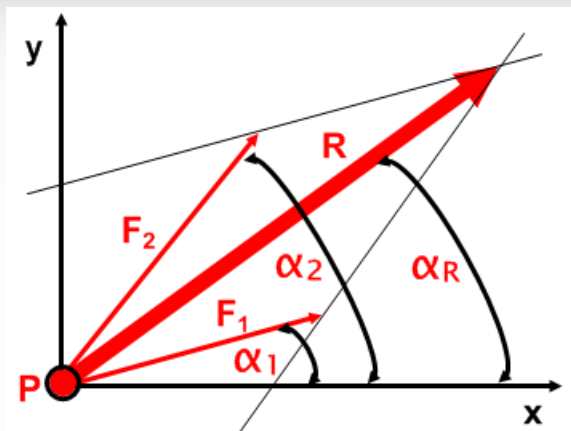
$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} \quad (\text{N})$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} \quad (\text{N})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (\text{N})$$

Eredő meghatározása

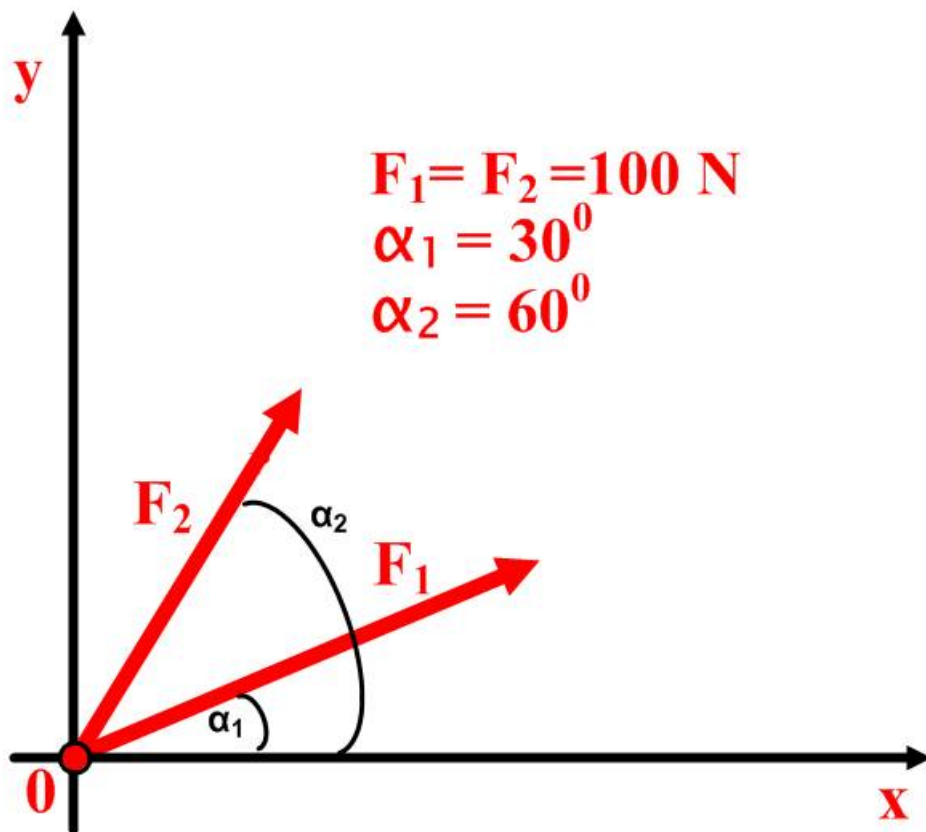


$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R$$

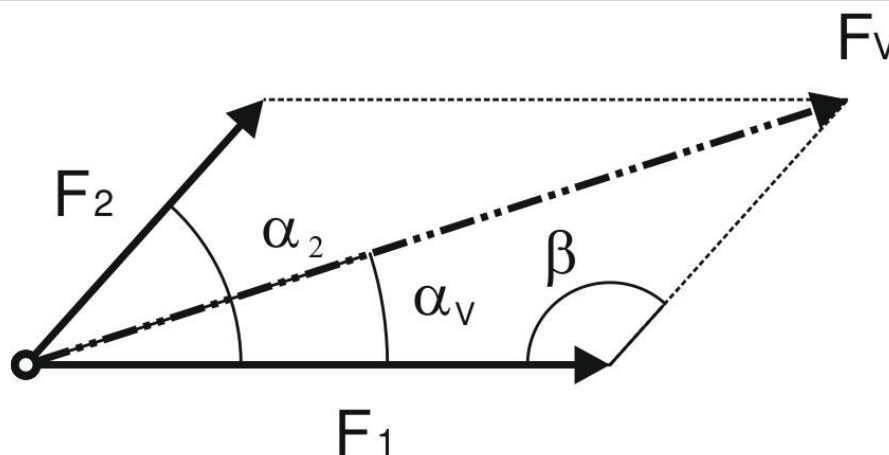
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} \quad (\text{N})$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} \quad (\text{N})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (\text{N})$$



2 erő eredőjének meghatározása



$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha_2$$

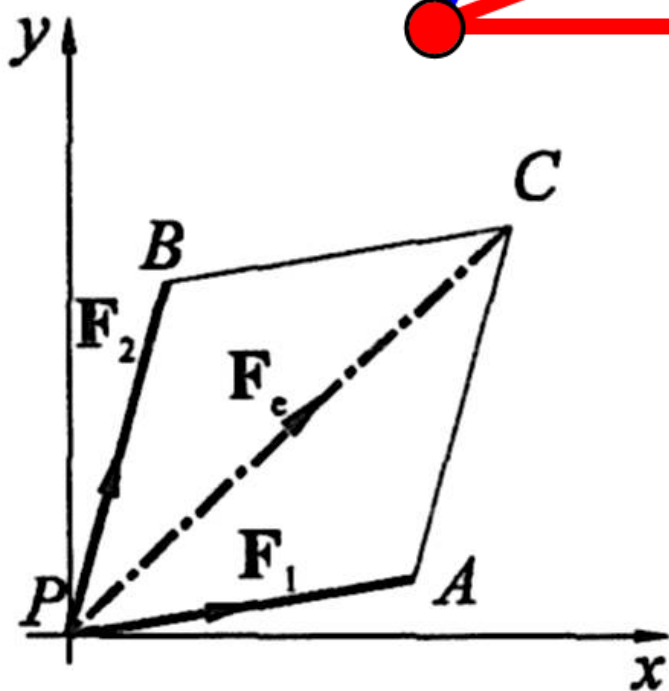
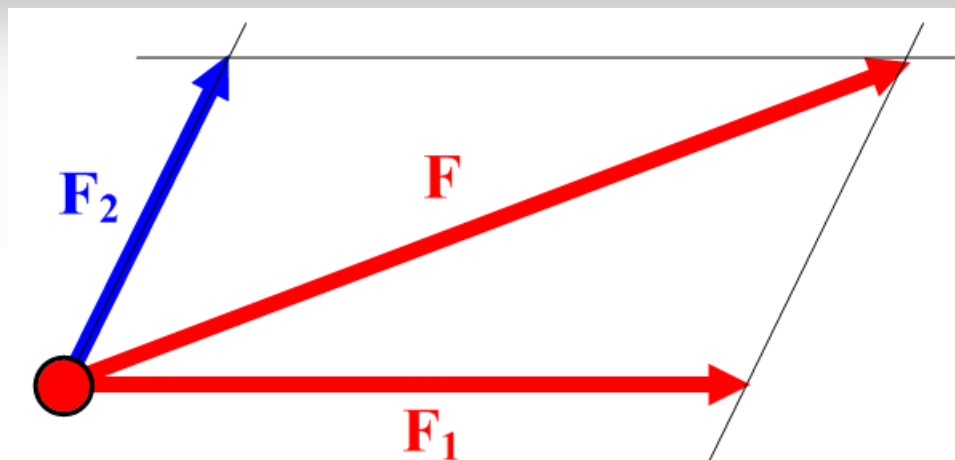
$$\cos \beta = -\cos \alpha_2$$

$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha_2}$$

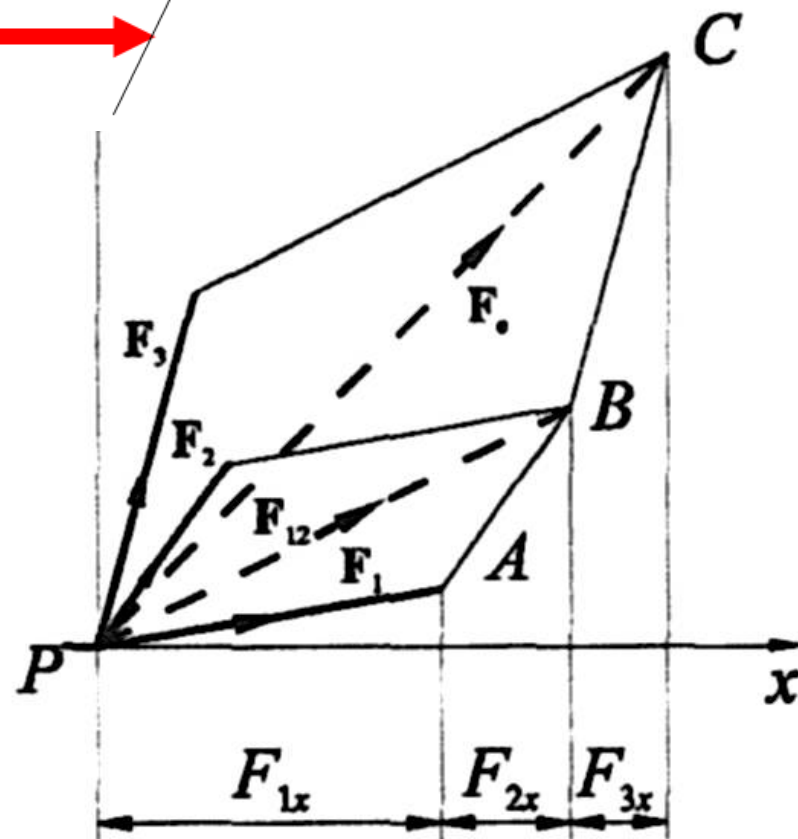
$$\frac{\sin \alpha_v}{\sin \beta} = \frac{F_2}{F_V}$$

$$\sin \alpha_v = \frac{F_2}{F_V} \cdot \sin \beta = \frac{F_2}{F_V} \cdot \sin(180^\circ - \alpha_2)$$

Eredő meghatározása

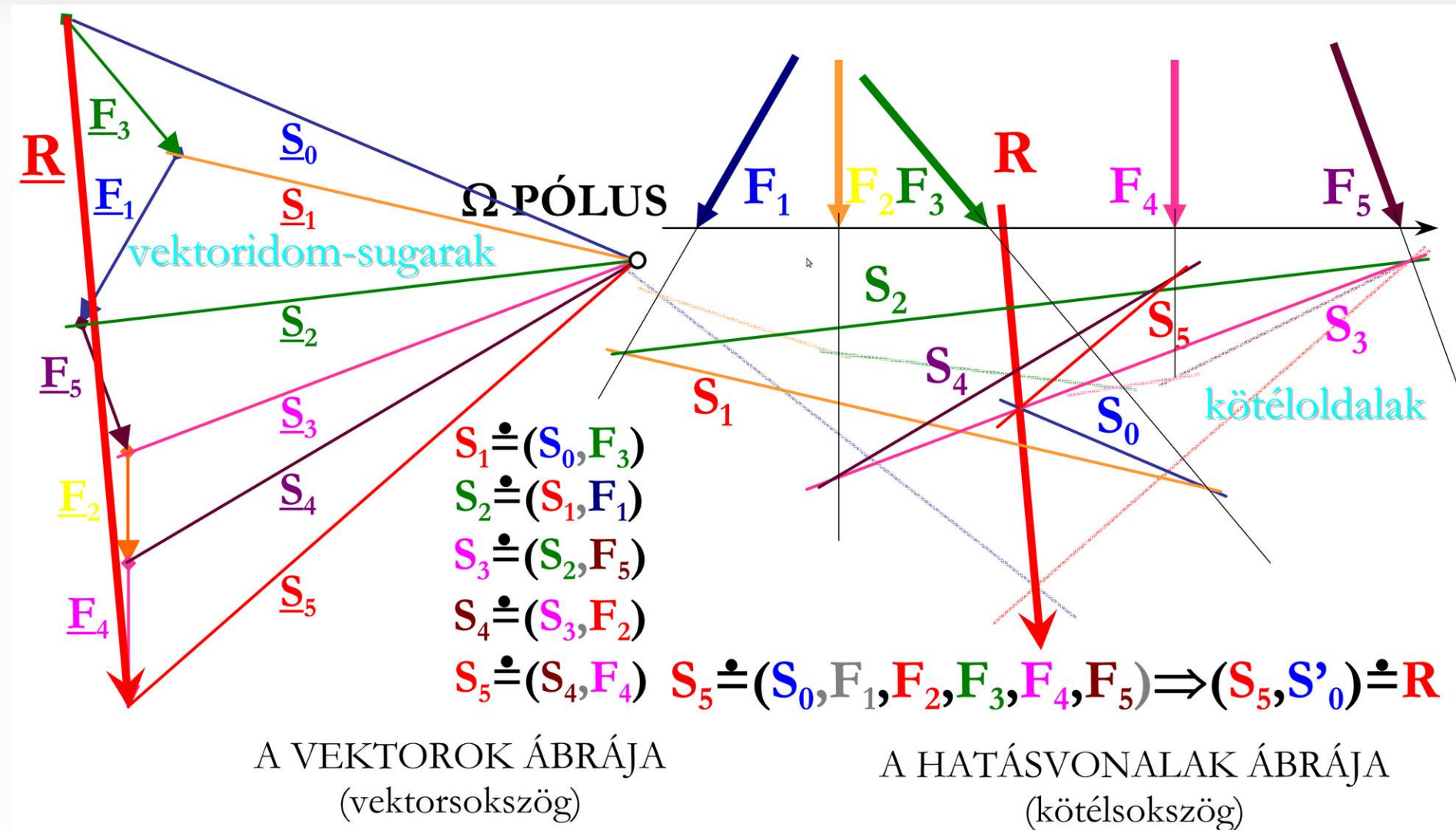


a.

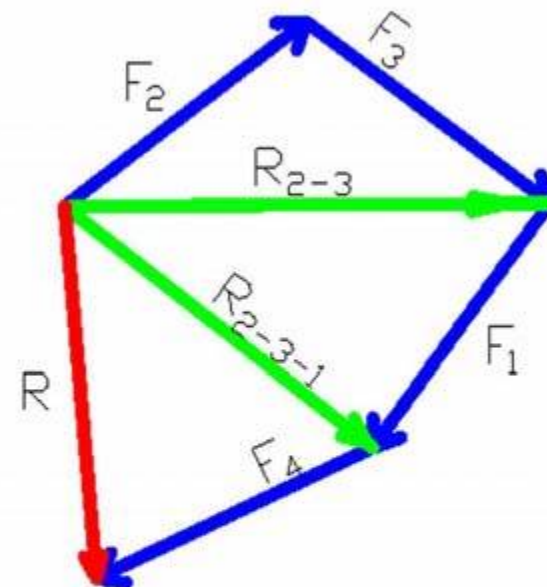
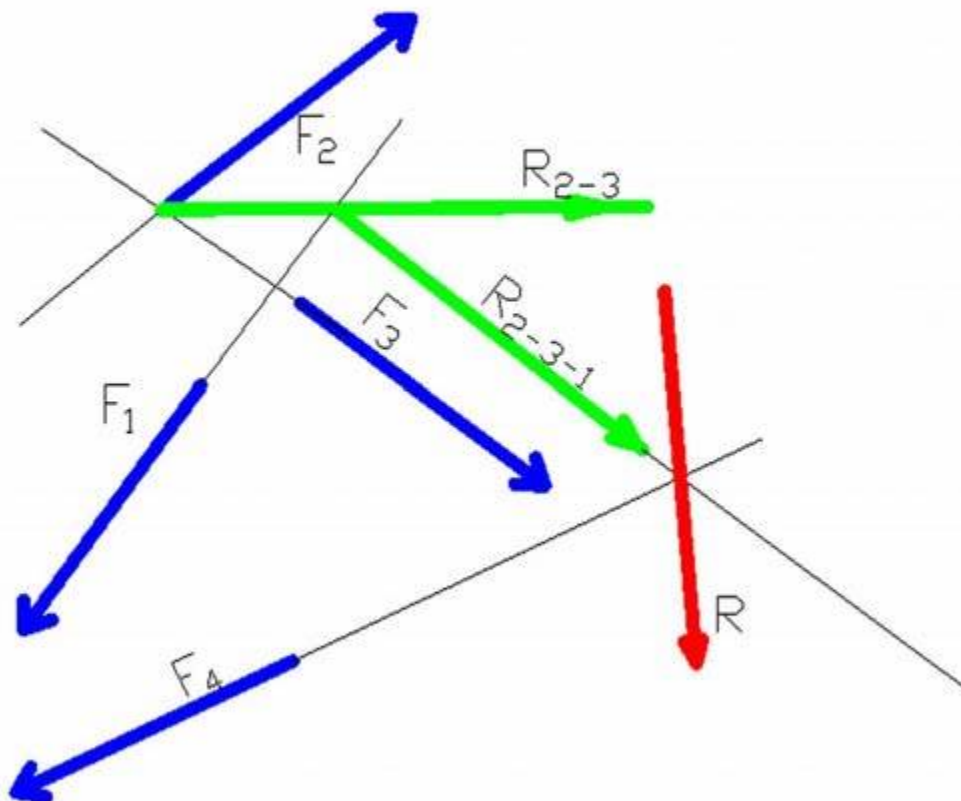


b.

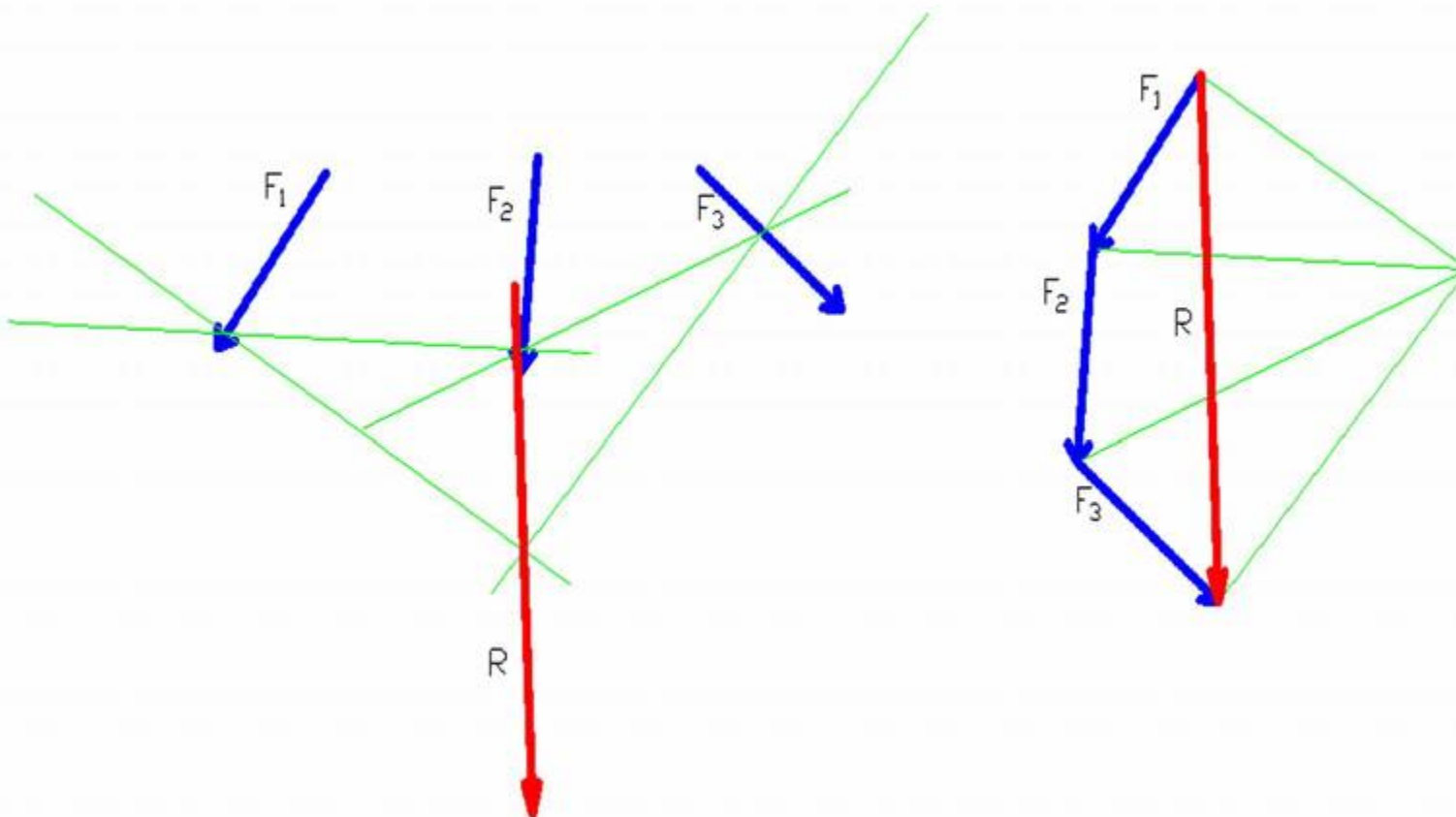
Eredő meghatározása



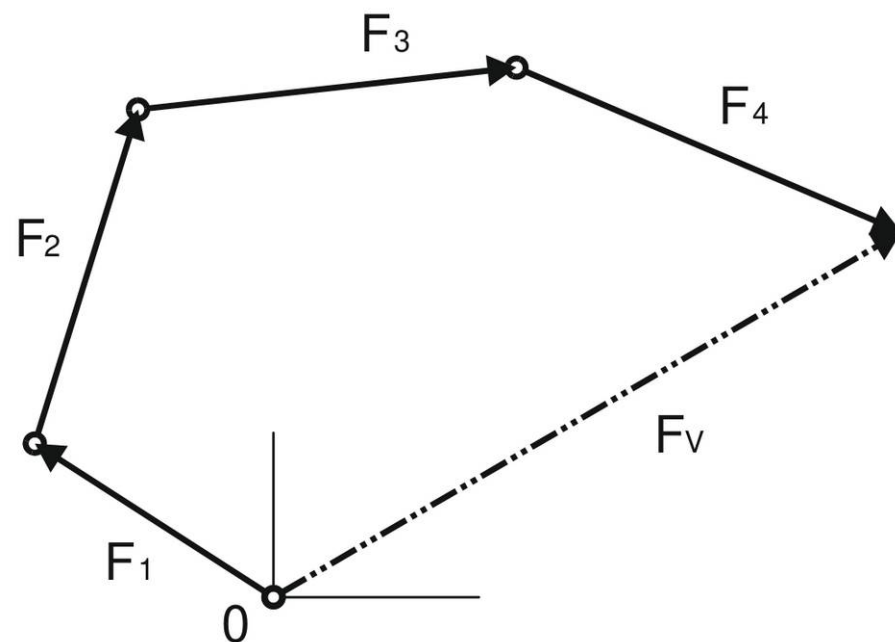
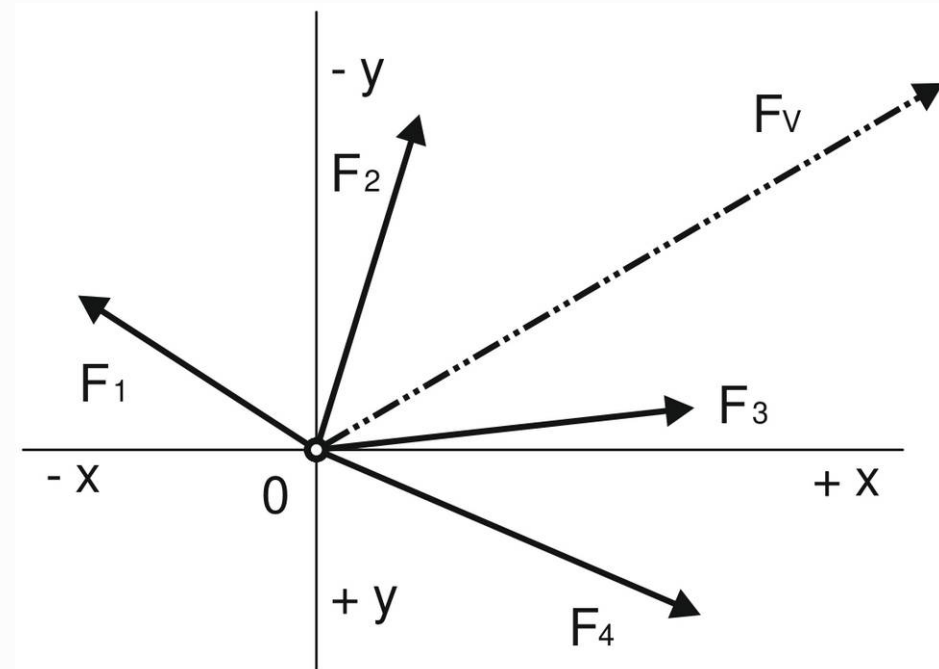
Eredő meghatározása



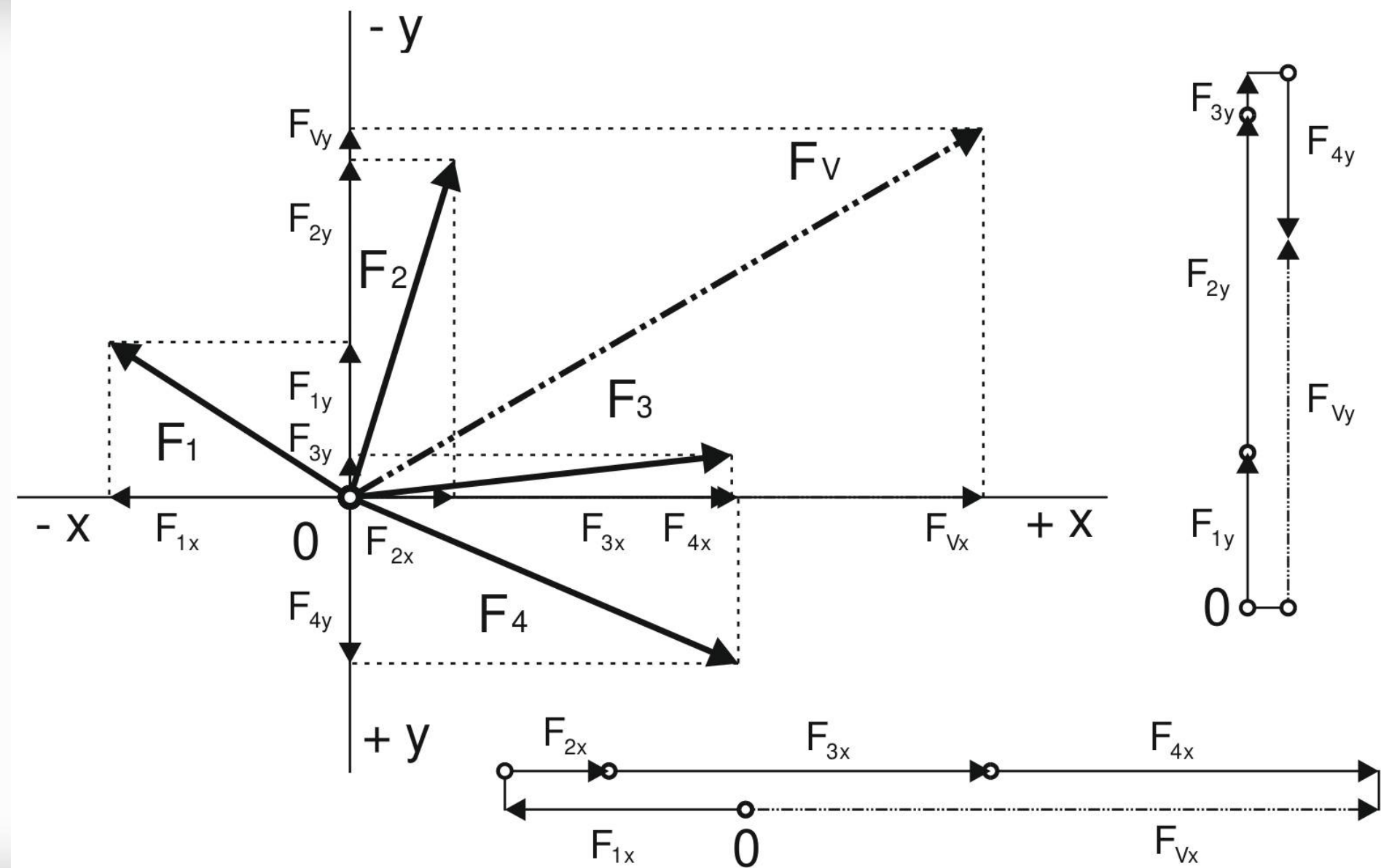
Eredő meghatározása – kötélsokszög



Közös támadáspontú erők eredője

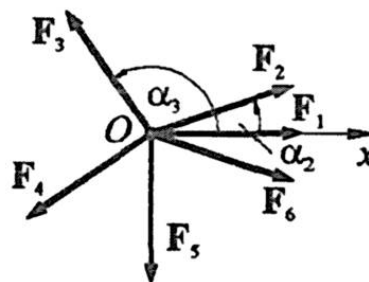


Közös támadáspontú erők eredője



Eredő meghatározása – kötélsokszög

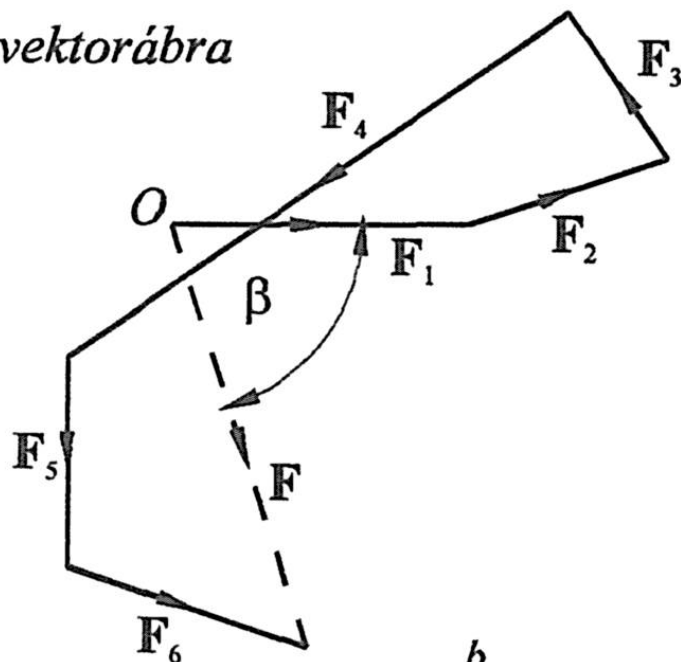
*szerkezeti
ábra*



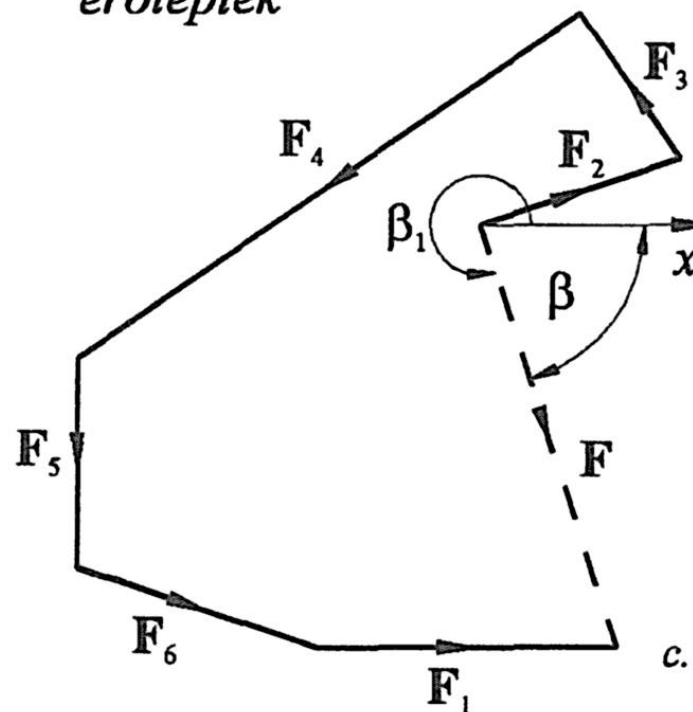
a.



vektorábra



b.

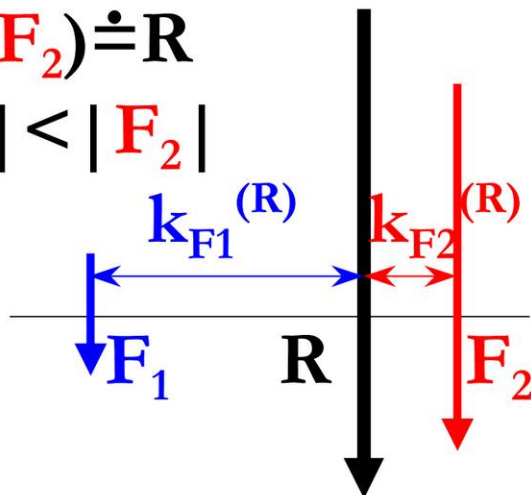


c.

Párhuzamos erők eredője

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \doteq \mathbf{R}$$

$$|\mathbf{F}_1| < |\mathbf{F}_2|$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

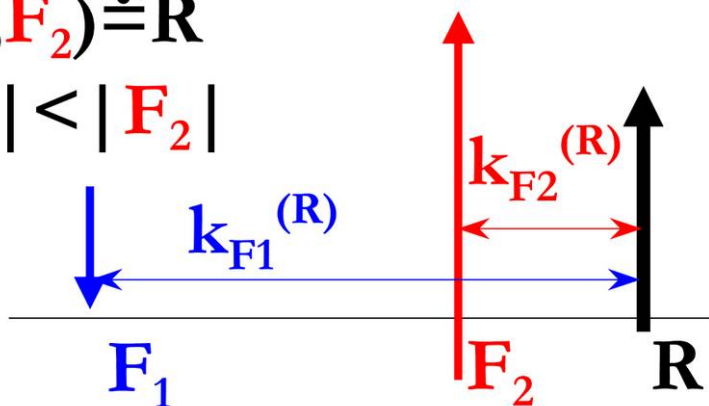
$$\mathbf{M}_R^{(R)} = 0 = -\mathbf{F}_1 \times \mathbf{k}_{F1}^{(R)} + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{F2}^{(R)}$$

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{k}_{F1}^{(R)} = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{F2}^{(R)}$$

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\mathbf{F}_2} = \frac{\mathbf{k}_{F2}^{(R)}}{\mathbf{k}_{F1}^{(R)}}$$

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \doteq \mathbf{R}$$

$$|\mathbf{F}_1| < |\mathbf{F}_2|$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M}_R^{(R)} = 0 = -\mathbf{F}_1 \times \mathbf{k}_{F1}^{(R)} + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{F2}^{(R)}$$

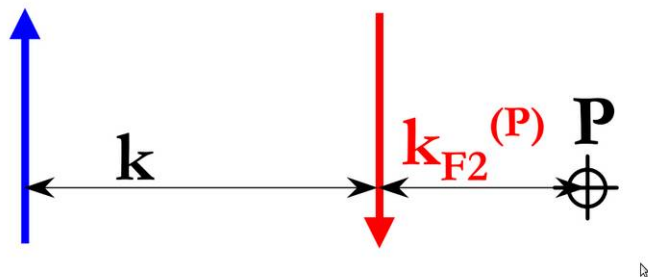
$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{k}_{F1}^{(R)} = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{F2}^{(R)}$$

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\mathbf{F}_2} = \frac{\mathbf{k}_{F2}^{(R)}}{\mathbf{k}_{F1}^{(R)}}$$

Párhuzamos erők eredője

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \doteq \mathbf{R}$$

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = 0$$

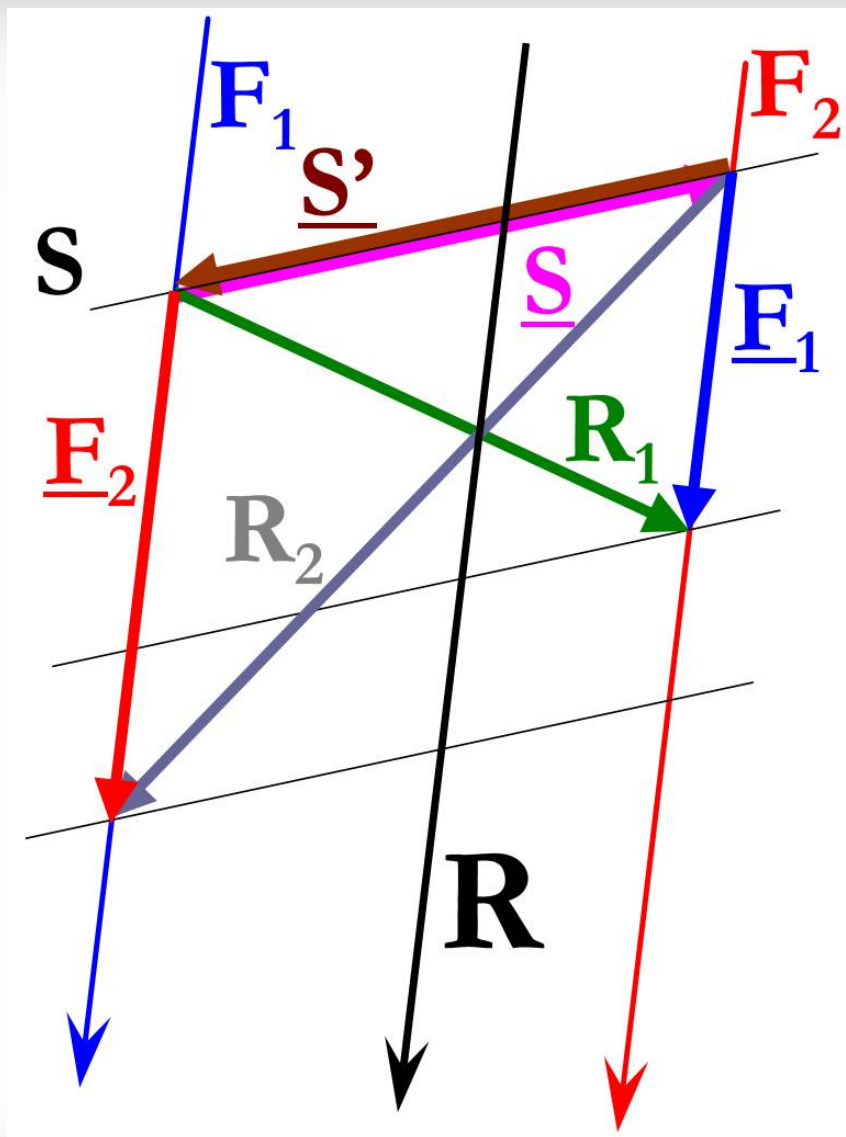
$$\Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2}^{(P)} = +\mathbf{F}_1 \times (\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{F}_2}^{(P)}) - \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{\mathbf{F}_2}^{(P)}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2}^{(P)} = +\mathbf{F}_1 \times \mathbf{k} + \mathbf{F}_1 \times \mathbf{k}_{\mathbf{F}_2}^{(P)} - \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{\mathbf{F}_2}^{(P)}$$

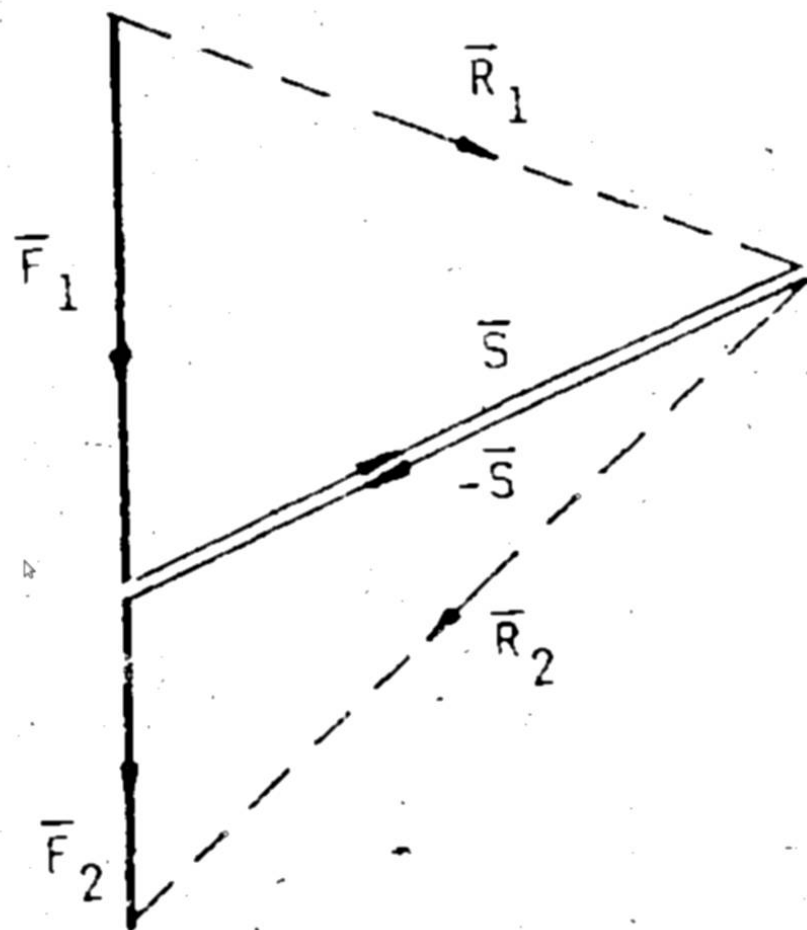
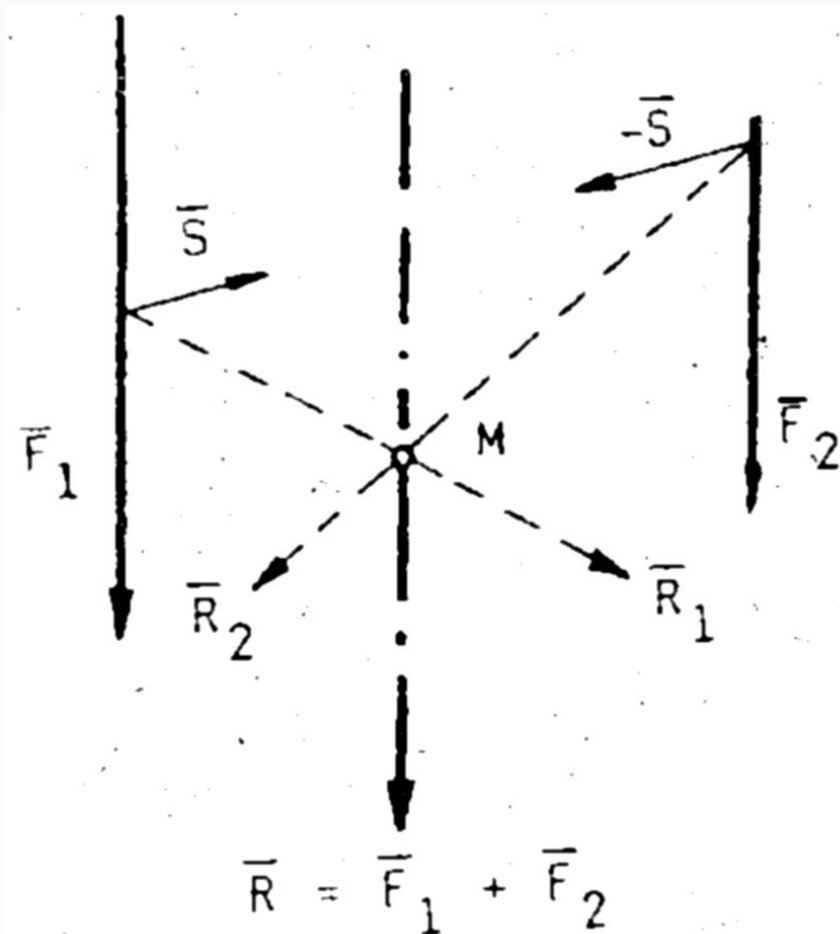
$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = F \Rightarrow \mathbf{F}_1 \times \mathbf{k}_{\mathbf{F}_2}^{(P)} - \mathbf{F}_2 \times \mathbf{k}_{\mathbf{F}_2}^{(P)} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2}^{(P)} = +F \times \mathbf{k}$$

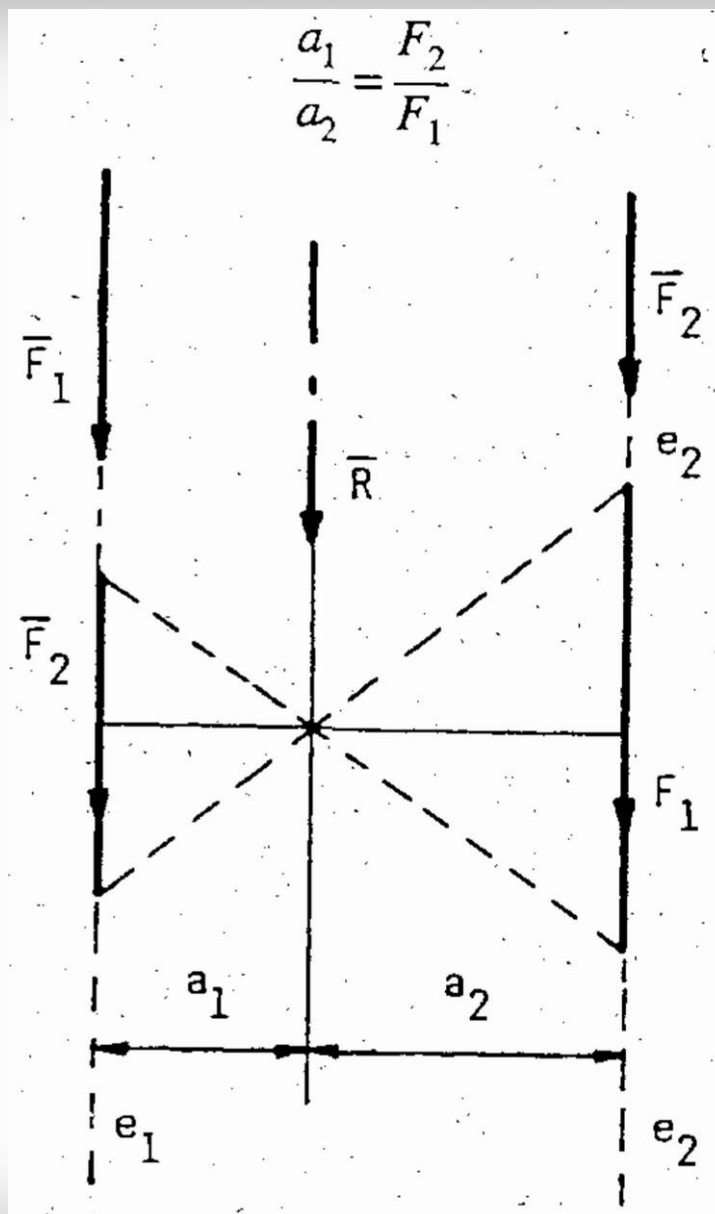
Párhuzamos erők eredője szerkesztéssel



Párhuzamos erők eredője szerkesztéssel



Párhuzamos erők eredője szerkesztéssel



Párhuzamos erők eredője

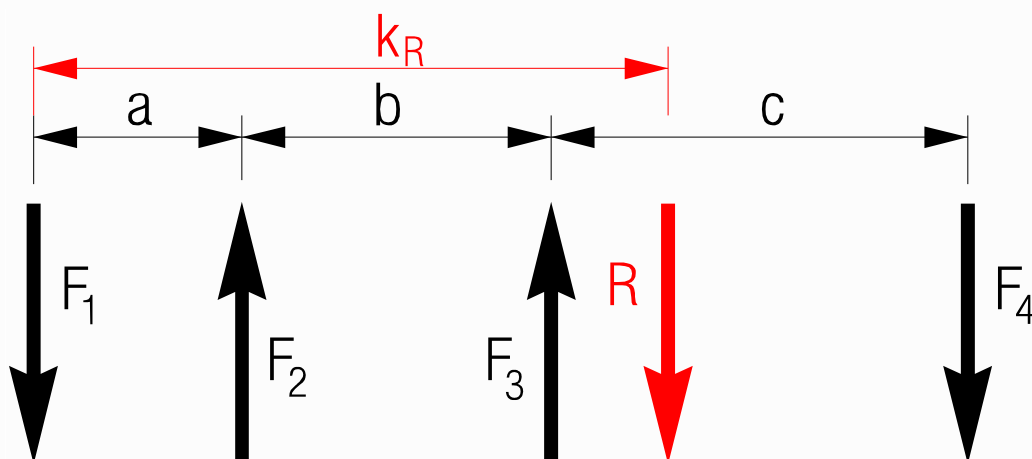
Az eredő (**R**) nagysága:

$$R = \sum F_i$$

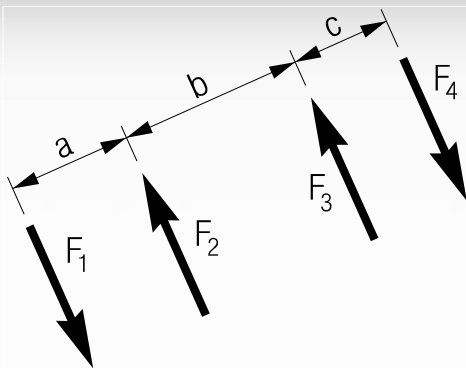
Az eredő (**R**) erőkarja (**k_R**):

$$R \cdot k_R = \sum F_i \cdot k_i$$

$$k_R = \frac{\sum F_i \cdot k_i}{R}$$



Párhuzamos erők eredője



$$F_1 = 21 \text{ kN}$$

$$F_2 = 44 \text{ kN}$$

$$F_3 = 32 \text{ kN}$$

$$F_4 = 75 \text{ kN}$$

$$a = 2,5 \text{ m}$$

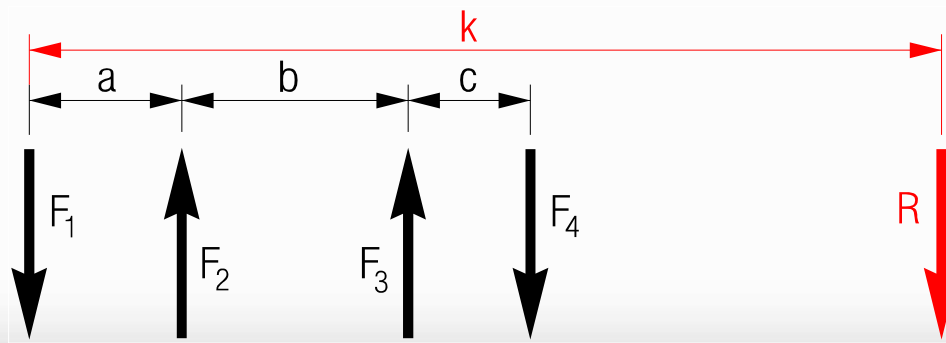
$$b = 3,5 \text{ m}$$

$$c = 2,0 \text{ m}$$

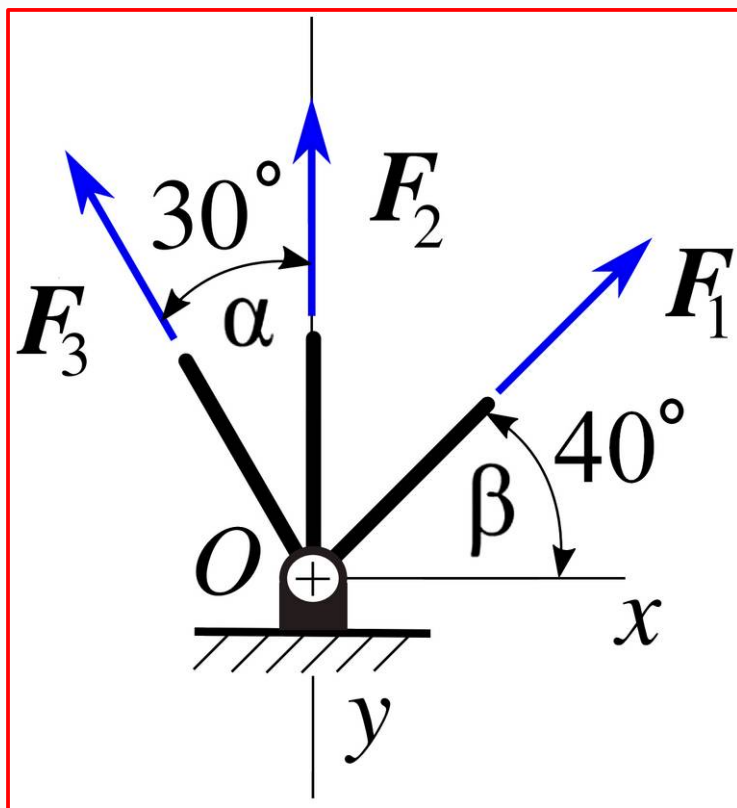
$$R = \sum F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 21 \text{ kN} - 44 \text{ kN} - 32 \text{ kN} + 75 \text{ kN} = \mathbf{20 \text{ kN} (\downarrow)}$$

$$R \cdot k = \sum F_i \cdot k_i$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a + b) + F_4 \cdot (a + b + c)}{R} \\ &= \frac{0 - 44 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} - 32 \text{ kN} \cdot (2,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m}) + 75 \text{ kN} \cdot (2,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m} + 2,0 \text{ m})}{20 \text{ kN}} \\ &= \frac{0 - 110 \text{ kNm} - 192 \text{ kNm} + 600 \text{ kNm}}{20 \text{ kN}} = \frac{298 \text{ kNm}}{20 \text{ kN}} = \mathbf{14,9 \text{ m}} \end{aligned}$$



Közös ponton átmenő erők eredője



Az eredő (R) nagysága:

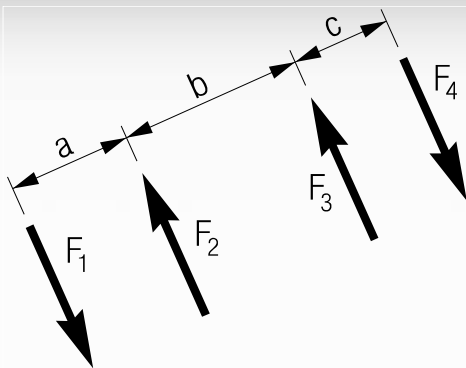
$$R_x = \sum F_{x,i}$$

$$R_y = \sum F_{y,i}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{R_y}{R_x}$$

Párhuzamos erők eredője



$$F_1 = 21 \text{ kN}$$

$$F_2 = 44 \text{ kN}$$

$$F_3 = 32 \text{ kN}$$

$$F_4 = 75 \text{ kN}$$

$$a = 2,5 \text{ m}$$

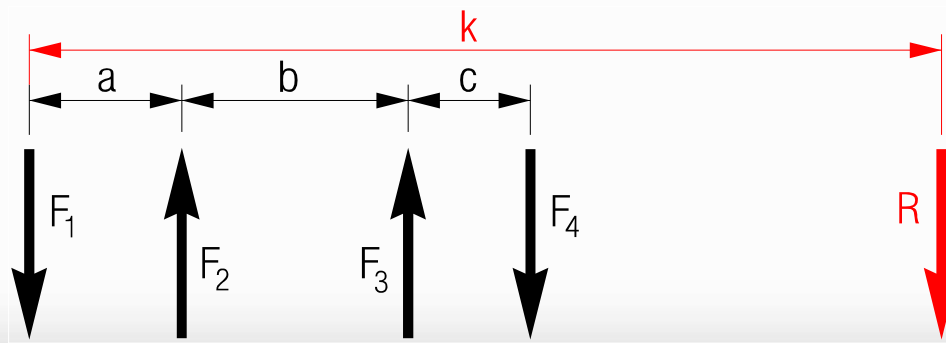
$$b = 3,5 \text{ m}$$

$$c = 2,0 \text{ m}$$

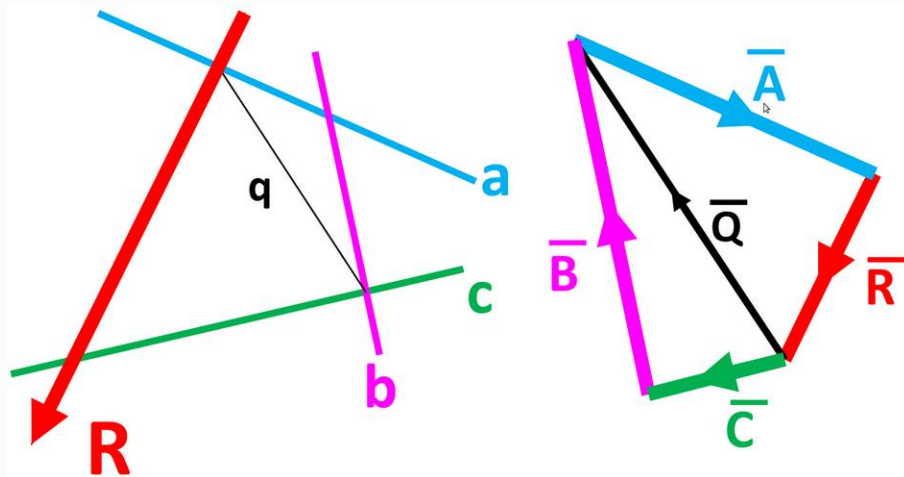
$$R = \sum F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 21 \text{ kN} - 44 \text{ kN} - 32 \text{ kN} + 75 \text{ kN} = \mathbf{20 \text{ kN} (\downarrow)}$$

$$R \cdot k = \sum F_i \cdot k_i$$

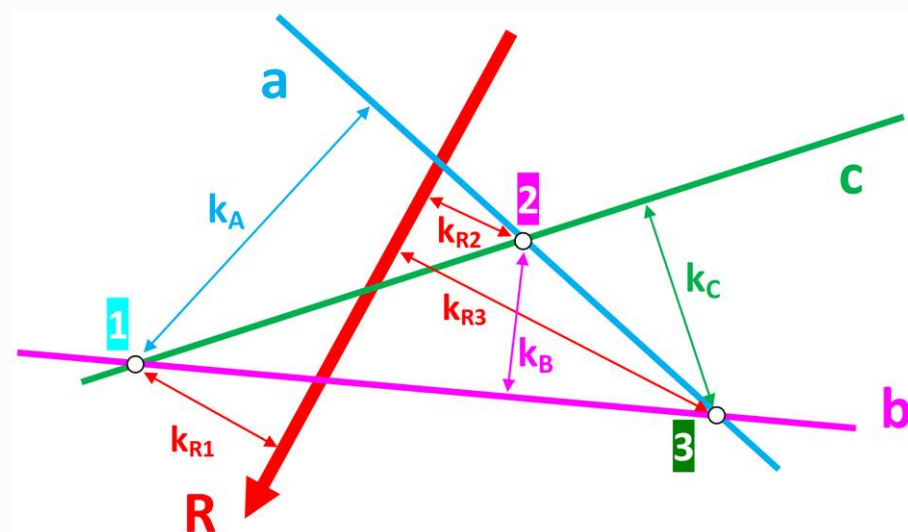
$$\begin{aligned} k &= \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a + F_3 \cdot (a + b) + F_4 \cdot (a + b + c)}{R} \\ &= \frac{0 - 44 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} - 32 \text{ kN} \cdot (2,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m}) + 75 \text{ kN} \cdot (2,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m} + 2,0 \text{ m})}{20 \text{ kN}} \\ &= \frac{0 - 110 \text{ kNm} - 192 \text{ kNm} + 600 \text{ kNm}}{20 \text{ kN}} = \frac{298 \text{ kNm}}{20 \text{ kN}} = \mathbf{14,9 \text{ m}} \end{aligned}$$



Síkbeli erők felbontása 3 komponensre



szerkesztéssel
Cullmann-féle módszer



számítással
Ritter-féle módszer

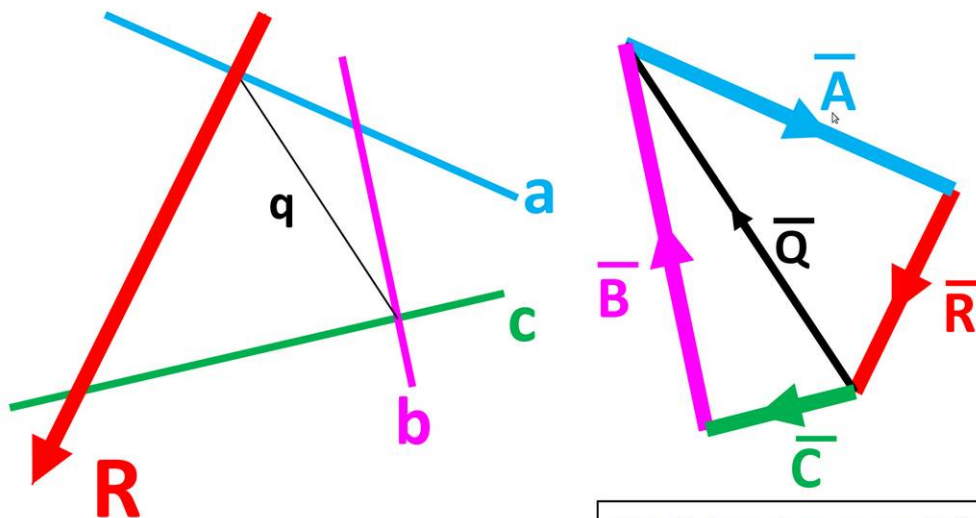
Cullmann-féle módszer

MEGOLDÁS:

A HÁROM EGYENSÚLYOZÓ ERŐ (A , B , C) KÖZÜL BÁRMELY KETTŐ (most B és C) HATÁSVONALÁNAK (b -nek és c -nek) A METSZÉSPONTJÁT ÖSSZEKÖTJÜK A HARMADIK EGYENSÚLYOZÓ ERŐ HATÁSVONALÁNAK (a) ÉS AZ EGYENSÚLYOZANDÓ ERŐ (R) HATÁSVONALÁNAK METSZÉSPONTJÁVAL. A KÉT METSZÉSPONTOT ÖSSZEKÖTŐ EGYENES A „ B ” ÉS „ C ” ERŐKET HELYETTESÍTŐ **CULMANN ERŐ (Q)** HATÁSVONALA (q) LESZ.

A CULMANN ERŐ (Q), A HARMADIK EGYENSÚLYOZÓ ERŐ (A) ÉS AZ EGYENSÚLYOZANDÓ ERŐ (R) A MÁSODIK AXIÓMA ALAPJÁN LEHET EGYENSÚLYBAN, MIVEL KÖZÖS A METSZÉSPONTJUK. A NYÍLFOLYTONOS VEKTORHÁROMSZÖGET PEDIG ÚGY SZERKESZTJÜK, HOGY AZ ISMERT „ R ” VEKTOR KÉT VÉGPONTJÁBA PÁRHUZAMOS EGYENESEKET HÚZUNK AZ „ A ” ÉS A „ Q ” HATÁSVONALÁVAL (a -val és q -val). MINDEGY, HOGY AZ „ R ” MELYIK VÉGPONTJÁBA MELYIK HATÁSVONALLAL HÚZUNK PÁRHUZAMOST.

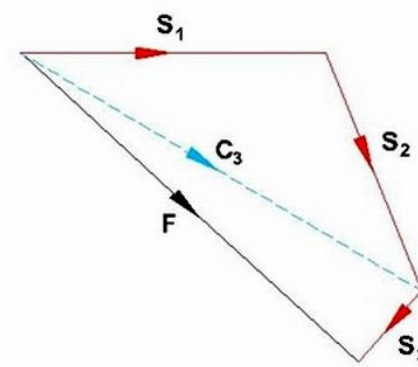
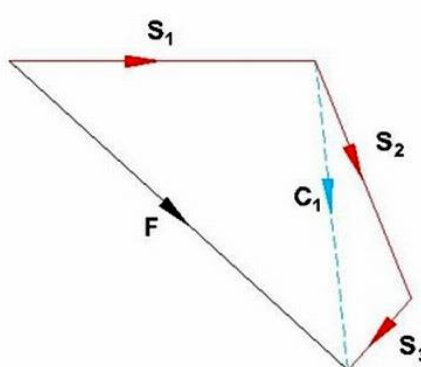
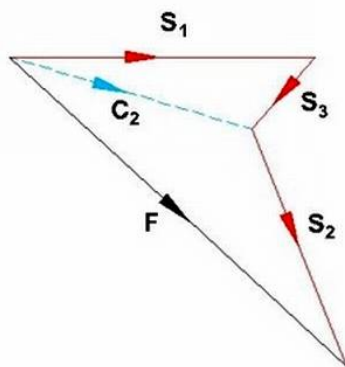
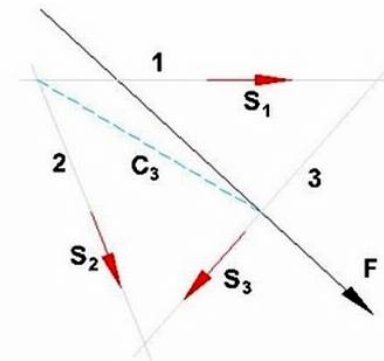
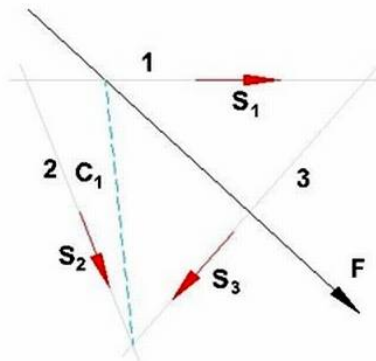
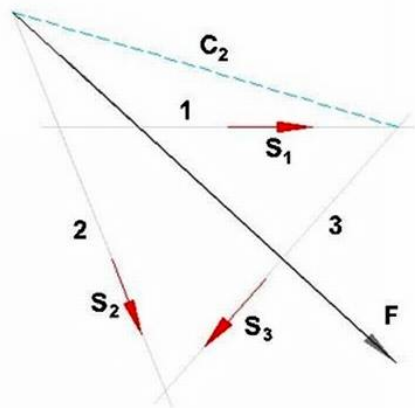
A VEKTORHÁROMSZÖGBŐL ADÓDIK A KERESETT „ A ” EGYENSÚLYOZÓ ERŐ ÉS A CULMANN-FÉLE ERŐ (Q). MIVEL A „ Q ” A „ B ” ÉS A „ C ” EREDŐJE, SZÉT KELL SZEDNI „ B ” – RE ÉS „ C ” – RE. EZ ÚGY TÖRTÉNIK, HOGY A „ Q ” VEKTOR KÉT VÉGÉBŐL PÁRHUZAMOS EGYENESEKET HÚZUNK b – VEL ÉS c – VEL. MINDEGY, HOGY MELYIK VÉGÉBŐL MELYIK VONALLAL HÚZZUK A PÁRHUZAMOST. A „ B ” ÉS „ C ” VEKTOROK NYILÁNAK **ÜTKÖZNI KELL** A „ Q ” VEKTOR NYILÁVAL. ÍGY TEHÁT MEGSZÜLETETT A MÁSODIK (B) ÉS HARMADIK (C) EGYENSÚLYOZÓ ERŐ IS.



Vegyük észre, hogy az egyensúlyban levő négy erő (R , A , B , C) vektorainak nyilai folyamatosak!

Culmann-féle módszer

Culmann-féle módszer



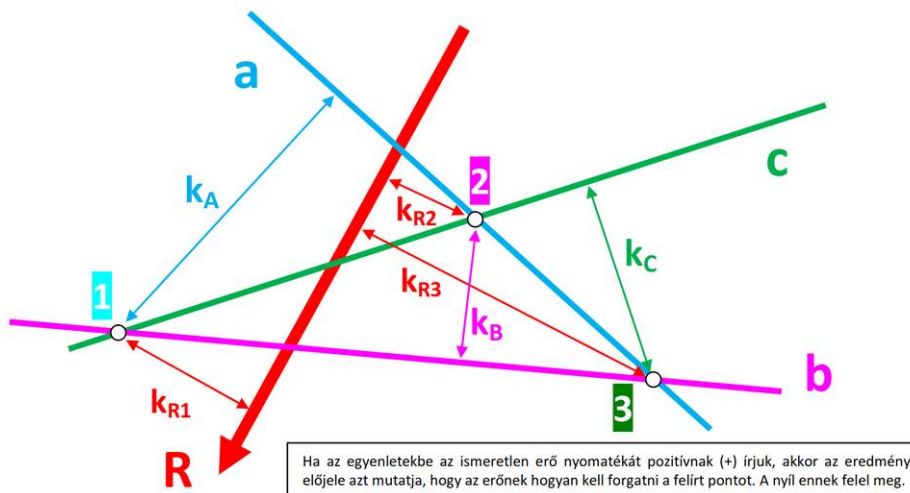
Ritter-féle módszer

MEGOLDÁS:

AZ EGYENSÚLY HÁROM FELTÉTELI EGYENLETE ($\Sigma F_{ix} = 0$, $\Sigma F_{iy} = 0$, $\Sigma M_i = 0$) KÖZÜL ITT CSAK A NYOMATÉKI EGYENLETET ($\Sigma M_i = 0$) HASZNÁLJUK.

ANNAK ÉRDEKÉBEN, HOGY AZ EGYENLET EGY ISMERETLENT TARTALMAZZON, AZ ÖSSZES ERŐ NYOMATÉKÁT **KÉT ISMERETLEN EGYENSÚLYOZÓ ERŐ HATÁSVONALÁNAK A METSZÉSPONTJÁRA KELL FELÍRNI**, MERT ÍGY AZOK KIESNEK AZ EGYENLETBŐL ÉS BENT MARAD EGYEDÜL A HARMADIK ISMERETLEN.

A GYAKORLATBAN A NEHÉZSÉGET A METSZÉSPONTOK HELYÉNEK A MEGHATÁROZÁSA VAGY EZEKNEK AZ ERŐK HATÁSVONALAITÓL MÉRT TÁVOLSÁGÁNAK A MEGHATÁROZÁSA SZOKTA OKOZNI. NO, DE MIVEL EZ „CSAK” GEOMETRIA, NEM NEVEZHETŐ A STATIKA „BŰNÉNEK”!



$$\Sigma M_i^1 = 0 \quad + R \times k_{R1} + A \times k_A = 0$$

$$A = - R \times k_{R1} / k_A$$

$$\Sigma M_i^2 = 0 \quad - R \times k_{R2} + B \times k_B = 0$$

$$B = + R \times k_{R2} / k_B$$

$$\Sigma M_i^3 = 0 \quad - R \times k_{R3} + C \times k_C = 0$$

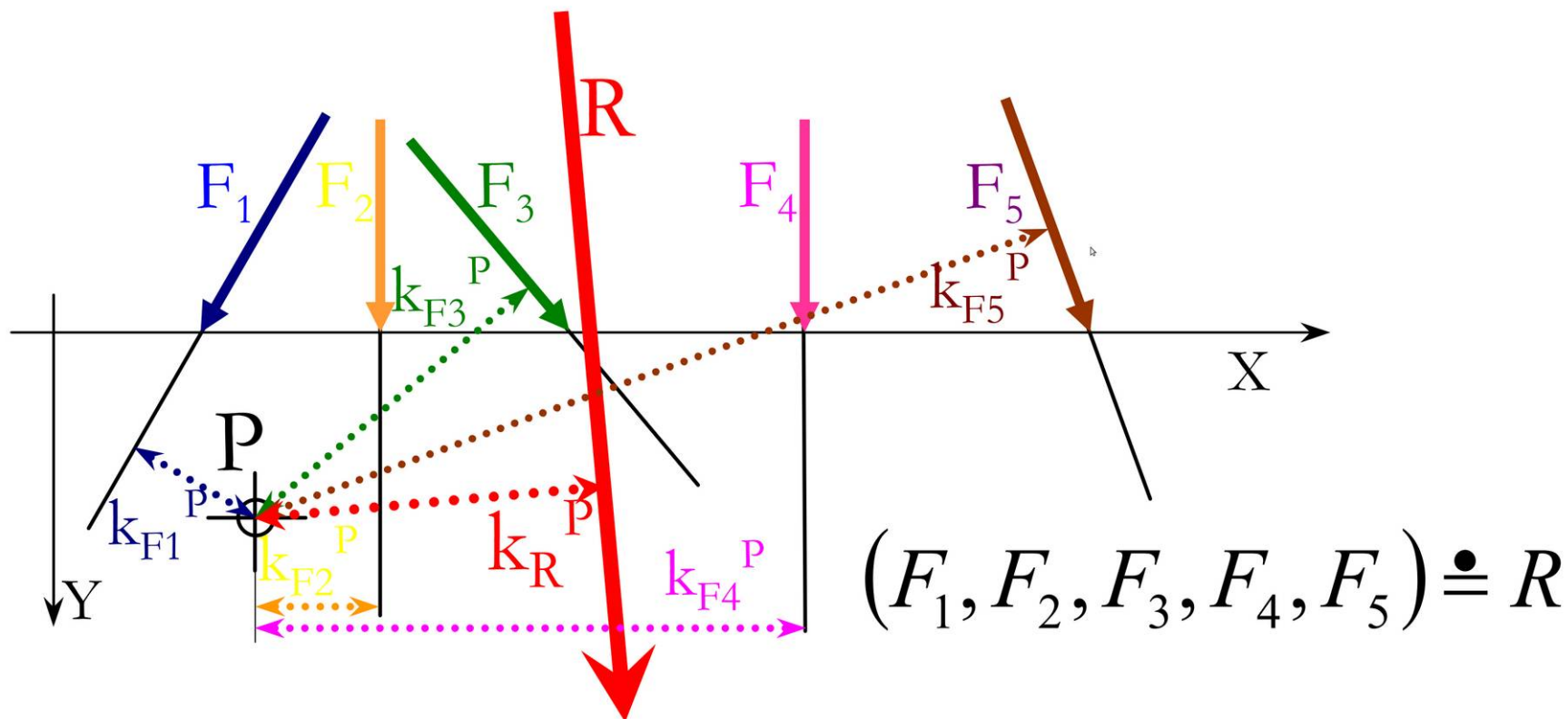
$$C = + R \times k_{R3} / k_C$$

Ez a módszer változatlanul kerül alkalmazásra a
RÁCSOS TARTÓK RÚDERŐINEK HÁRMAS ÁTMETSZÉSSSEL történő meghatározásakor!!!

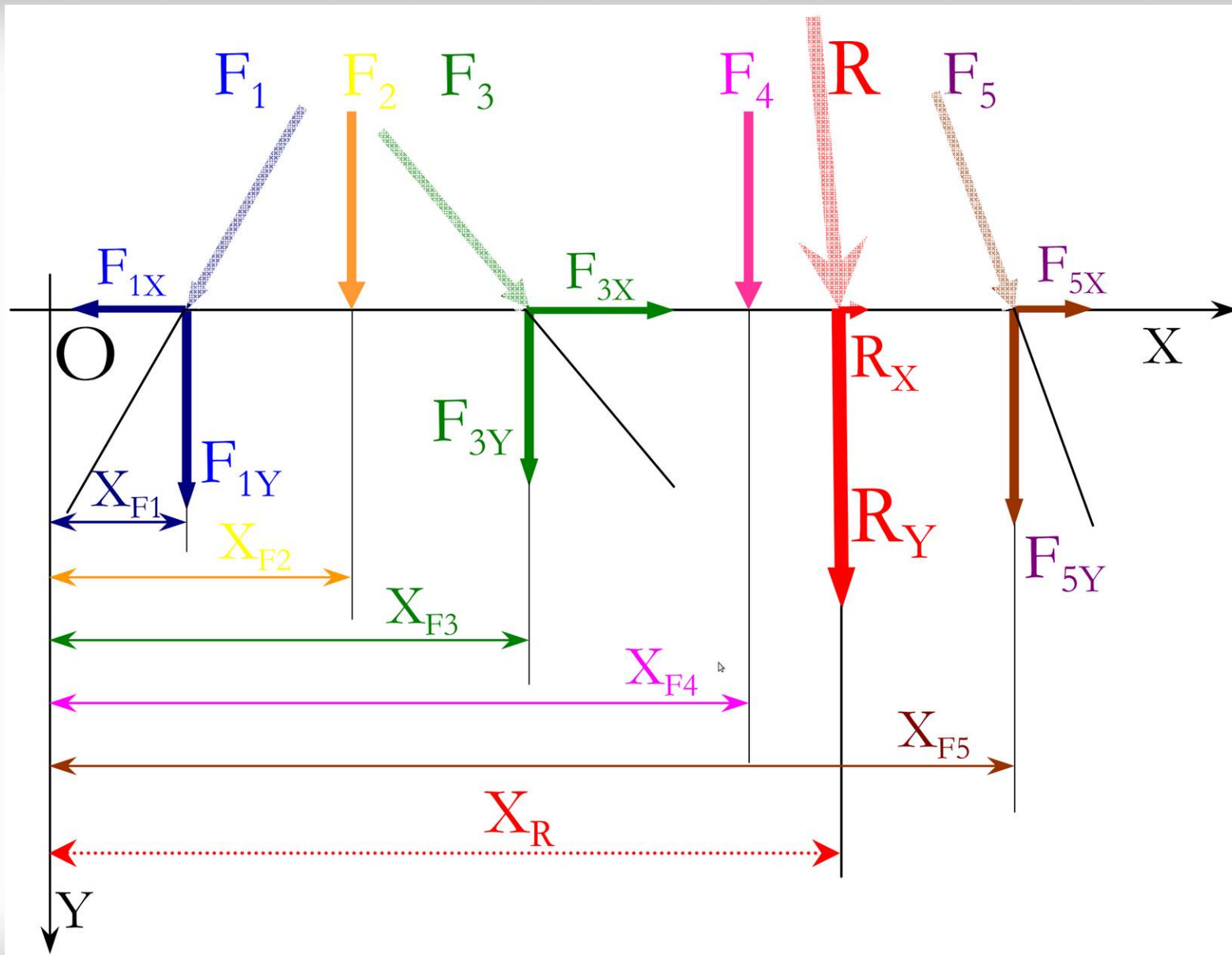
Erőrendszer eredője

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = R_X \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = R_Y$$

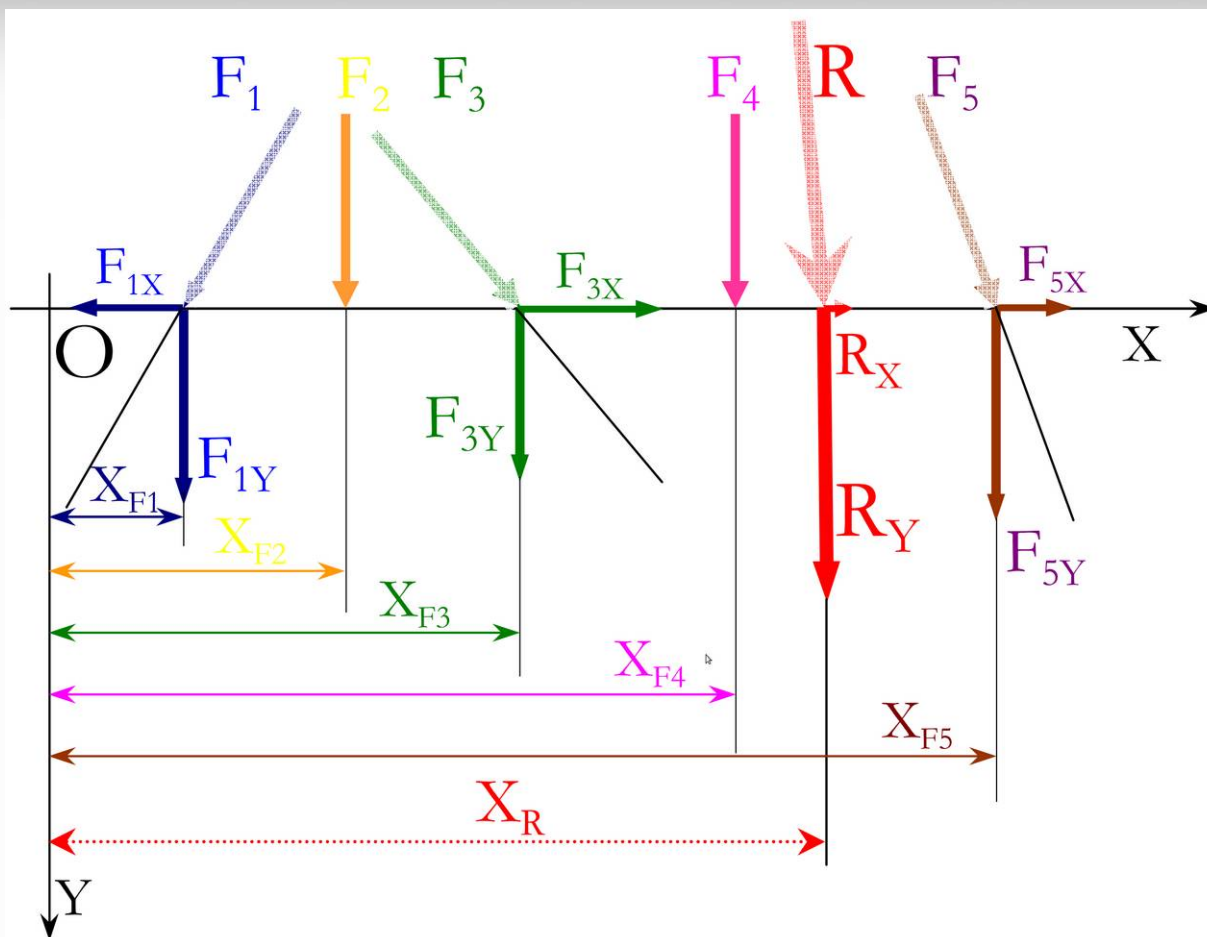
$$\sum_{i=1}^n M_{Fi}^P + \sum_{j=1}^k M_j = \sum_{i=1}^n F_i \times k_{Fi}^P + \sum_{j=1}^k M_j = M_R^P = R \times k_R^P$$



Erőrendszer eredője



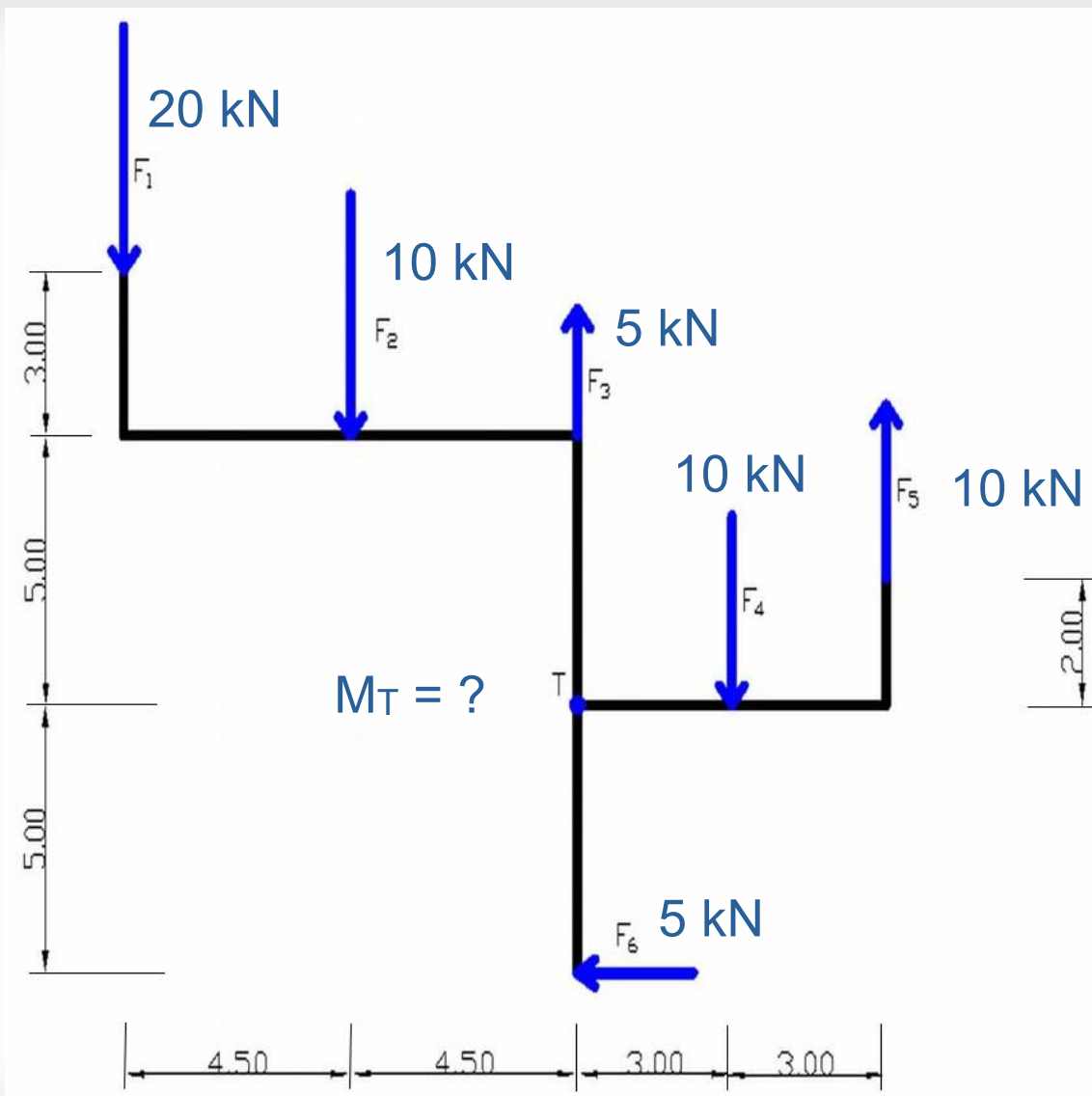
Erőrendszer eredője



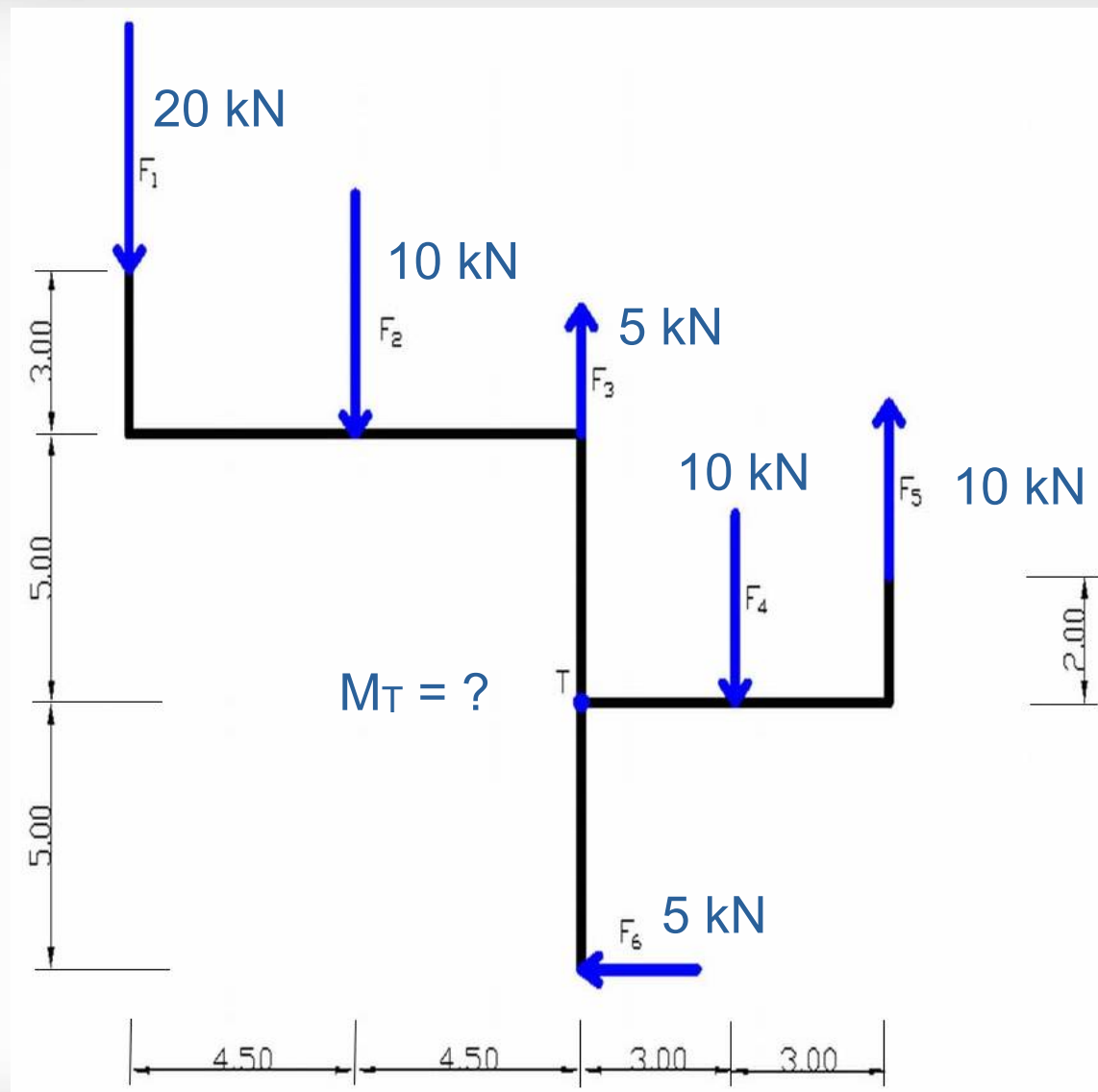
$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = R_X \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = R_Y$$

$$\sum_{i=1}^n M_i^O = R_Y \times X_R \Rightarrow X_R = \frac{\sum_{i=1}^n M_i^O}{R_Y}$$

Nyomatékszámítás



Nyomatékszámítás



$$M_1 = -9,0 \cdot 20 = -180 \text{ kNm}$$

$$M_2 = -4,5 \cdot 10 = -45,0 \text{ kNm}$$

$$M_3 = 0 \cdot 5 = 0 \text{ kNm}$$

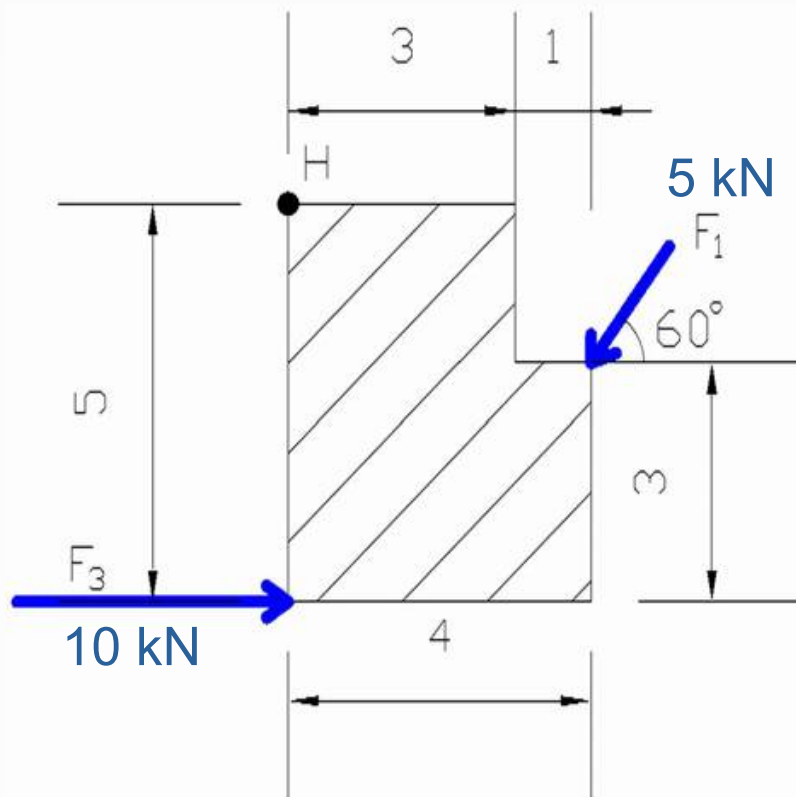
$$M_4 = +3,0 \cdot 10 = +30,0 \text{ kNm}$$

$$M_5 = -6,0 \cdot 10 = -60,0 \text{ kNm}$$

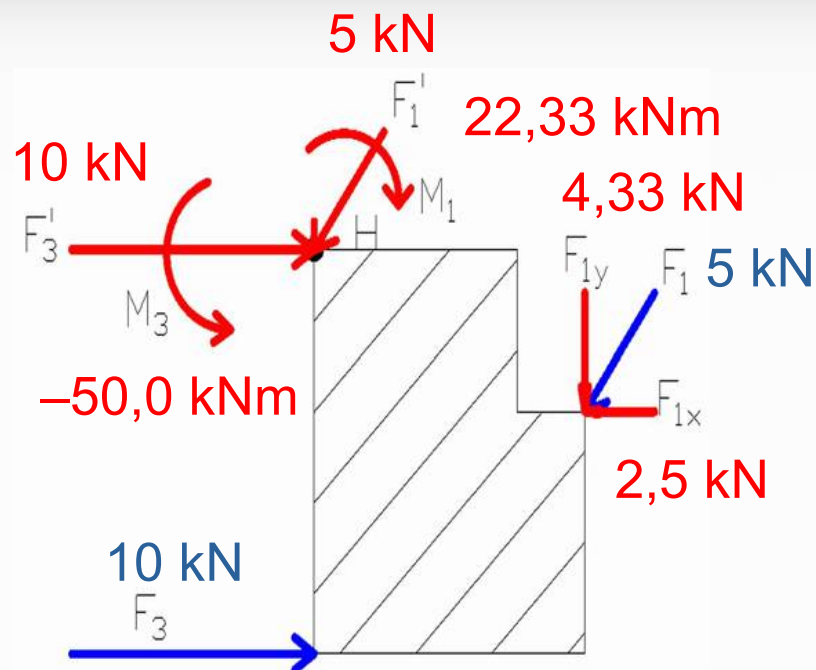
$$M_6 = +5,0 \cdot 5 = +25,0 \text{ kNm}$$

$$M_T = \Sigma M_i = -230,0 \text{ kNm}$$

Erő áthelyezése (helyettesítése)



Erő áthelyezése (helyettesítése)



$$R_x = 7,50 \text{ kNm} \rightarrow$$

$$R_y = 4,33 \text{ kNm} \downarrow$$

$$R = 8,66 \text{ kNm} \searrow$$

$$M_R = -27,66 \text{ kNm}$$

Erőrendszer egyensúlya

I. Az erők vízszintes vetületeinek algebrai összege zérus:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0$$

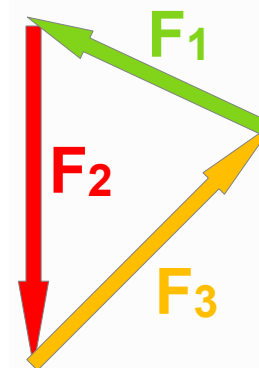
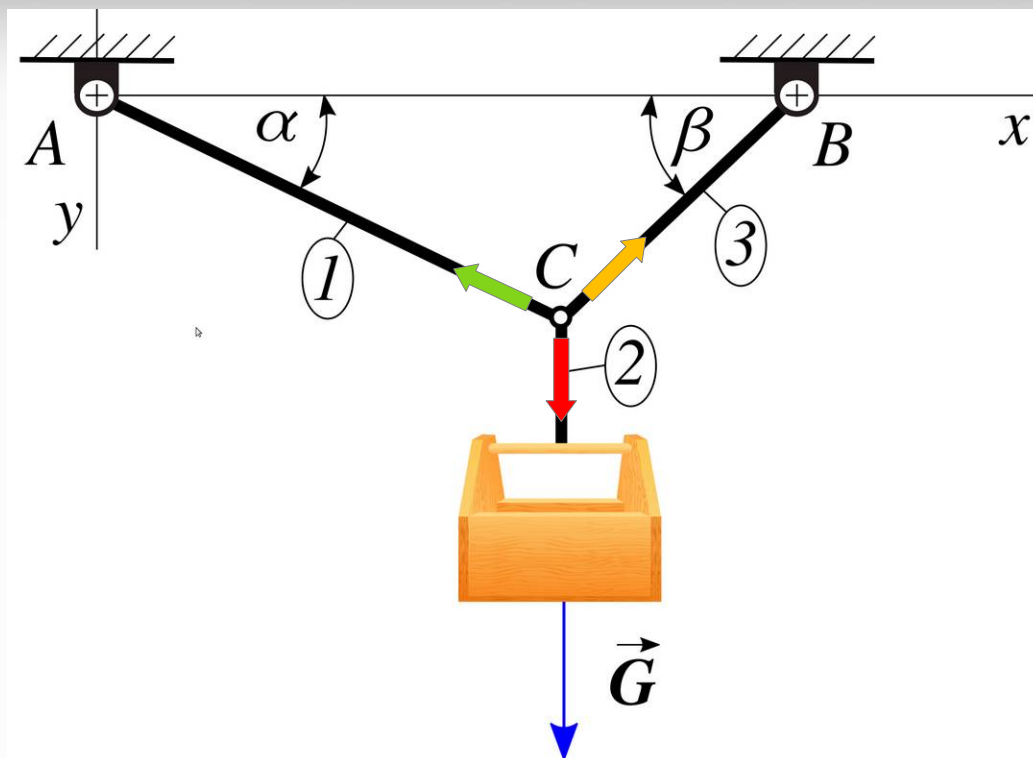
II. Az erők függőleges vetületeinek algebrai összege zérus:

$$\sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0$$

III. Az erők nyomatékösszege a sík bármely pontjára zérus:

$$\sum_{i=1}^n M^{F_i} = 0$$

3 (közös pontban ható) erő egyensúlya



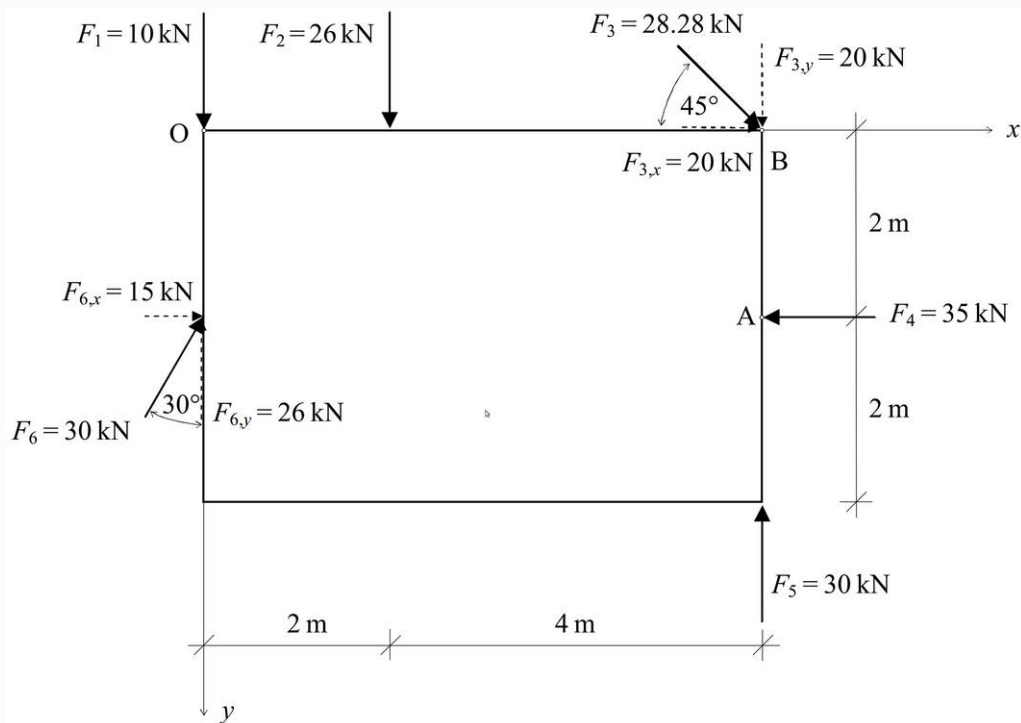
$$F_2 = G$$

$$\Sigma F_x = 0 = F_{3x} - F_{1x} = F_3 \cdot \cos \beta - F_1 \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_3 = F_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\Sigma F_y = 0 = F_2 - F_{1y} - F_{3y} = F_2 - F_1 \cdot \sin \alpha - F_3 \cdot \sin \beta = G - F_1 \cdot \sin \alpha - F_3 \cdot \sin \beta$$

$$\Sigma F_y = 0 = G - F_1 \cdot \sin \alpha - F_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta \Rightarrow F_1 = \frac{G}{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta} = \frac{G}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \tan \beta}$$

Erőrendszer egyensúlya – ellenőrzés

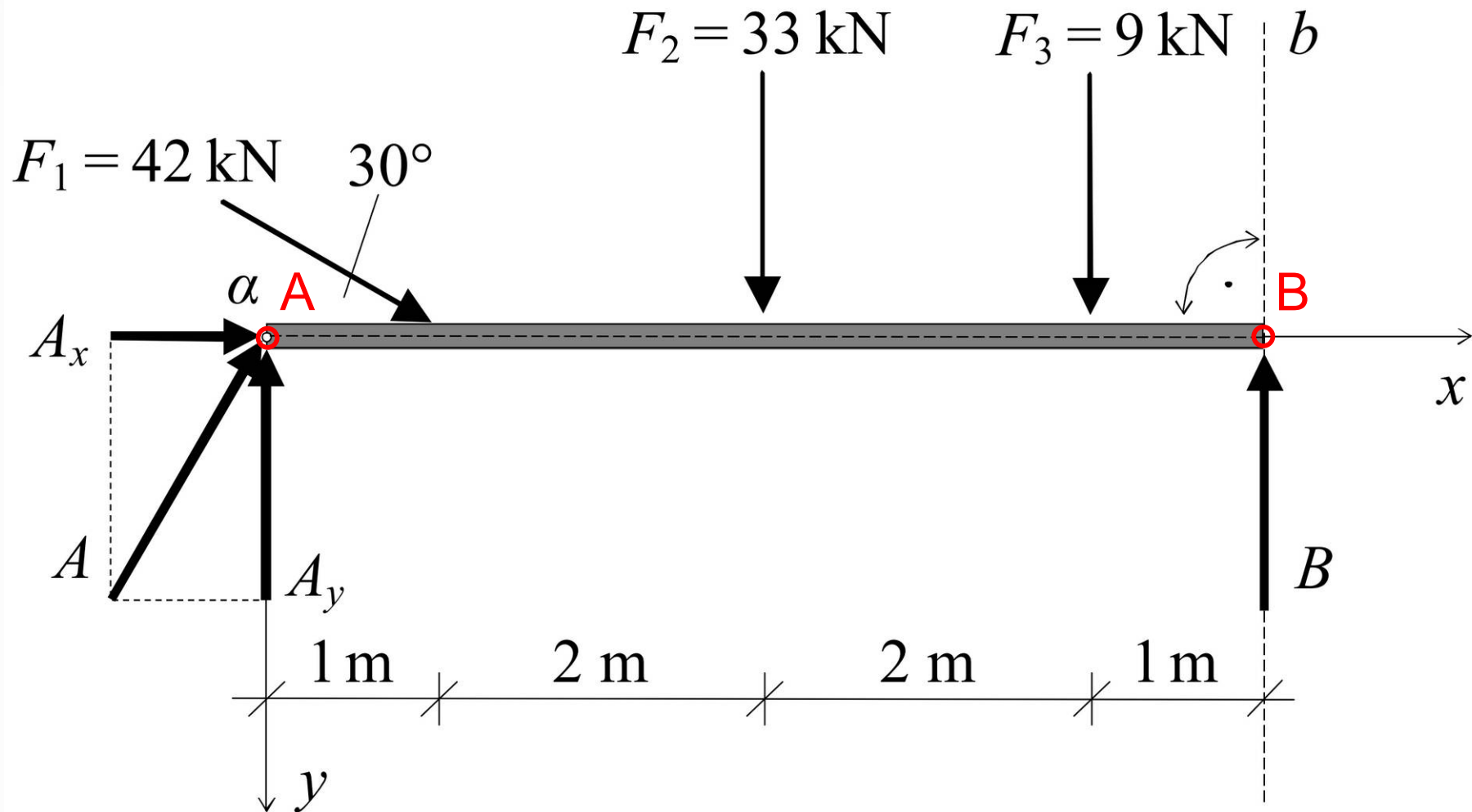


$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 20 - 35 + 15 = 0$$

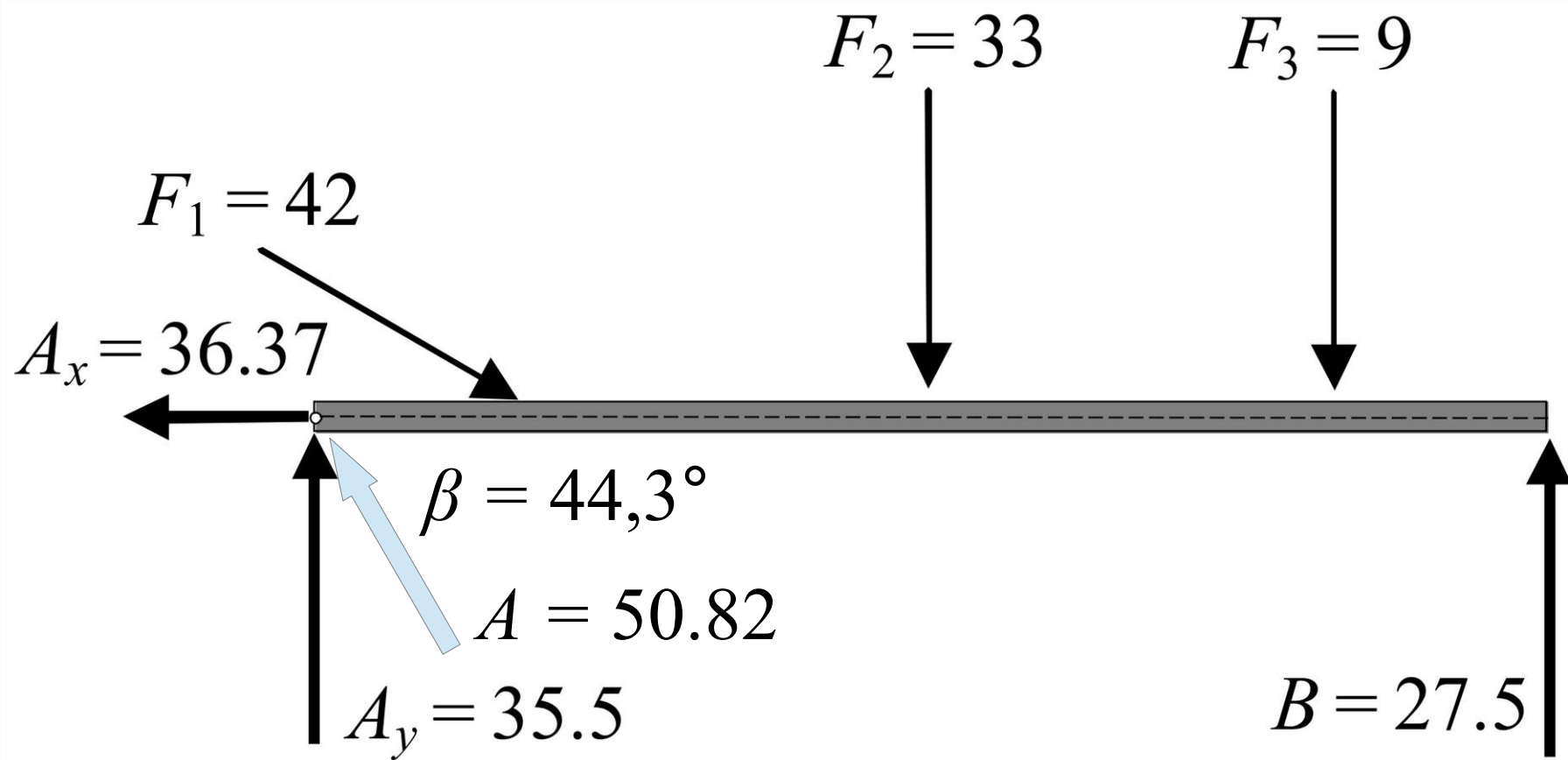
$$\sum_{i=1}^n F_{i,y} = 10 + 26 + 20 - 30 - 26 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_O^{F_i} = 26 \cdot 2 + 20 \cdot 6 + 35 \cdot 2 - 6 \cdot 30 - 15 \cdot 2 = 32 \text{ kNm}$$

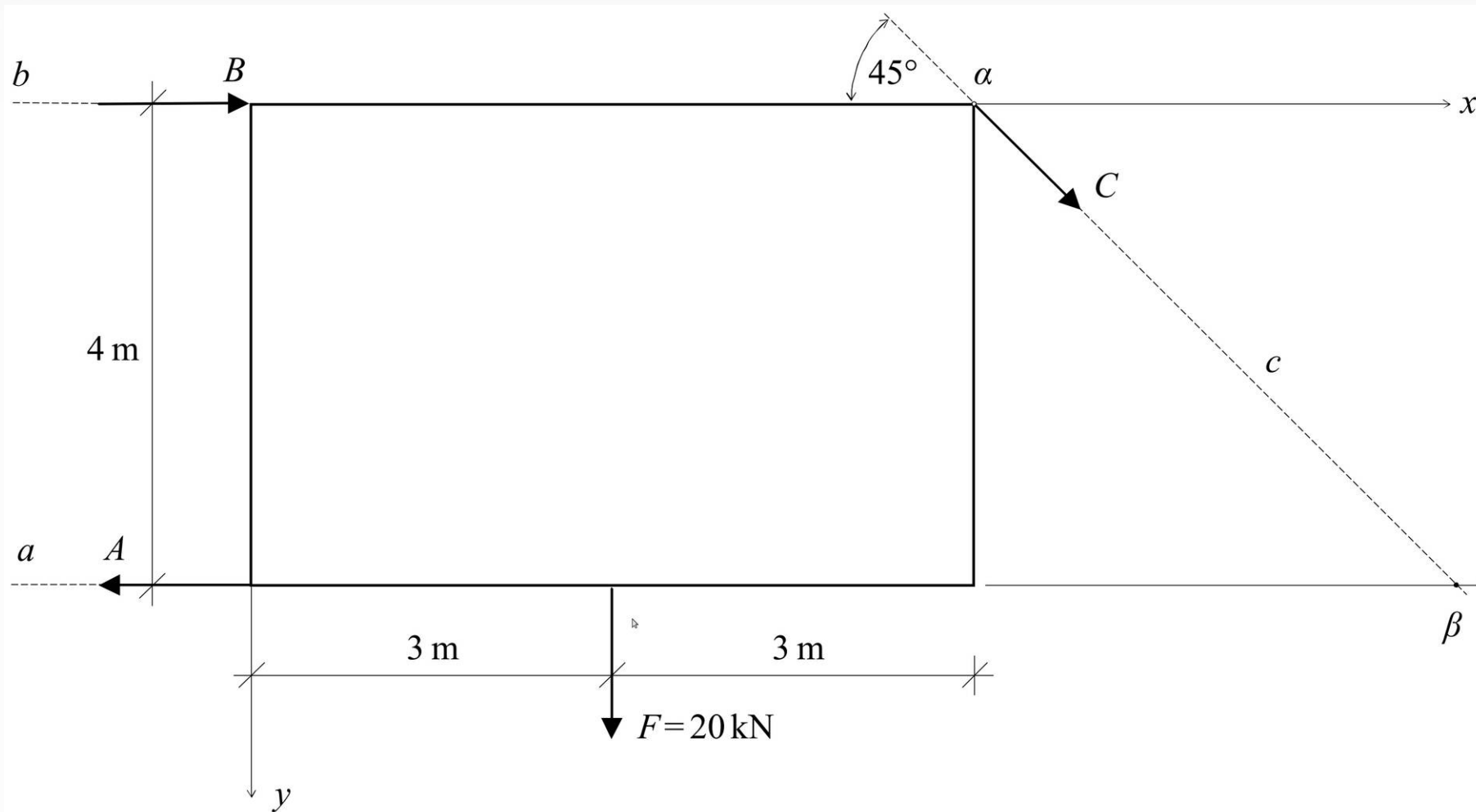
Erőrendszer egyensúlya



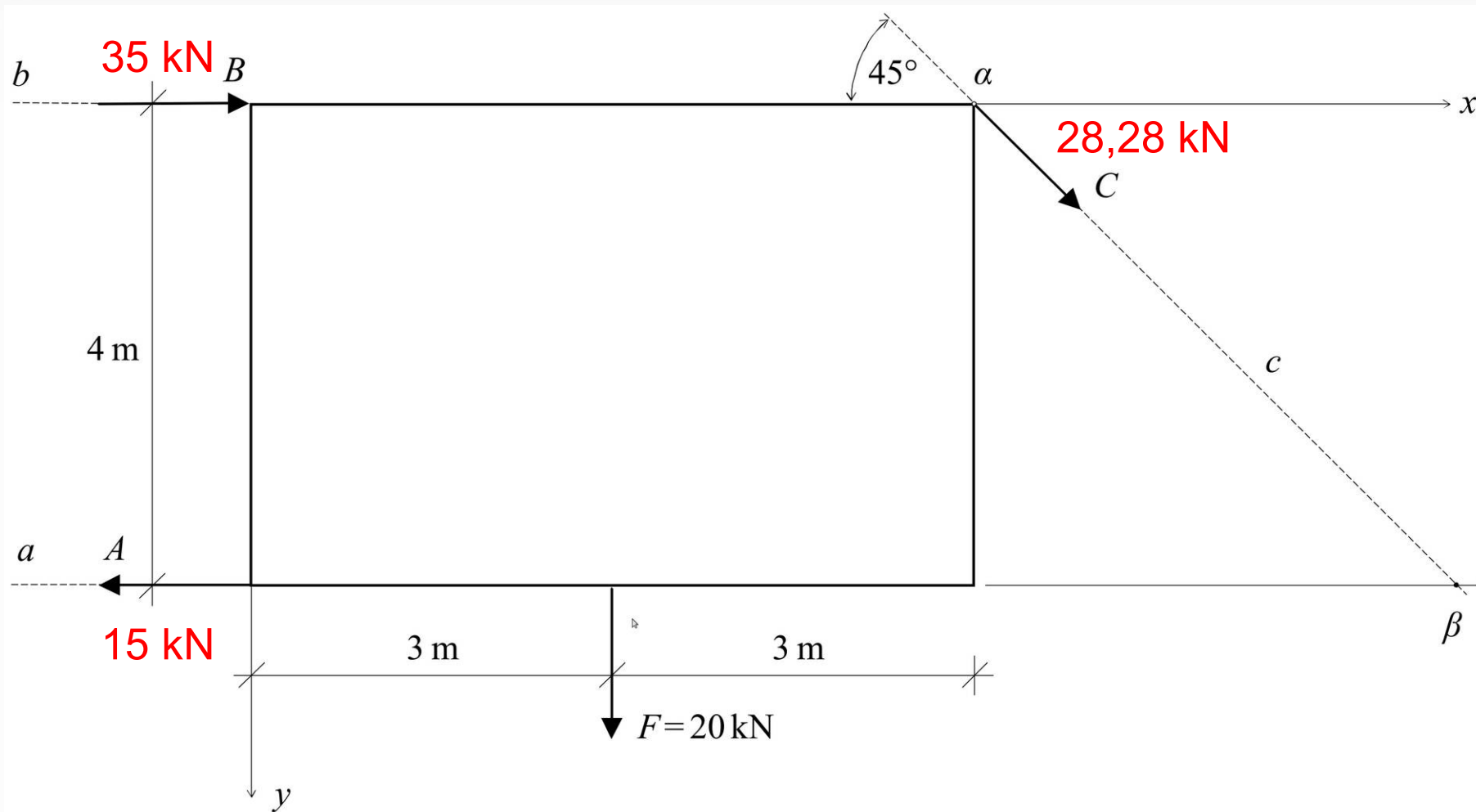
Erőrendszer egyensúlya



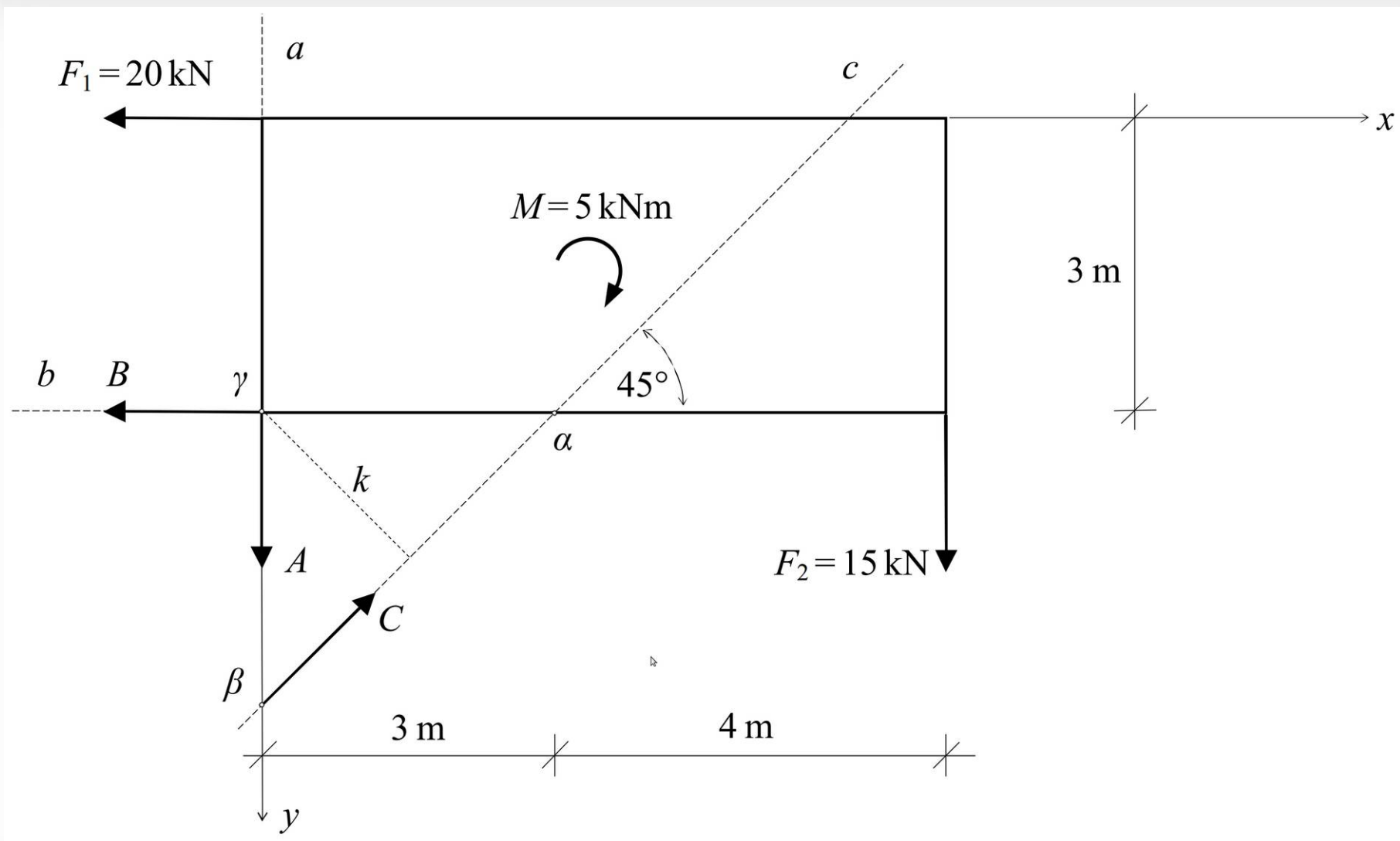
Erőrendszer egyensúlya



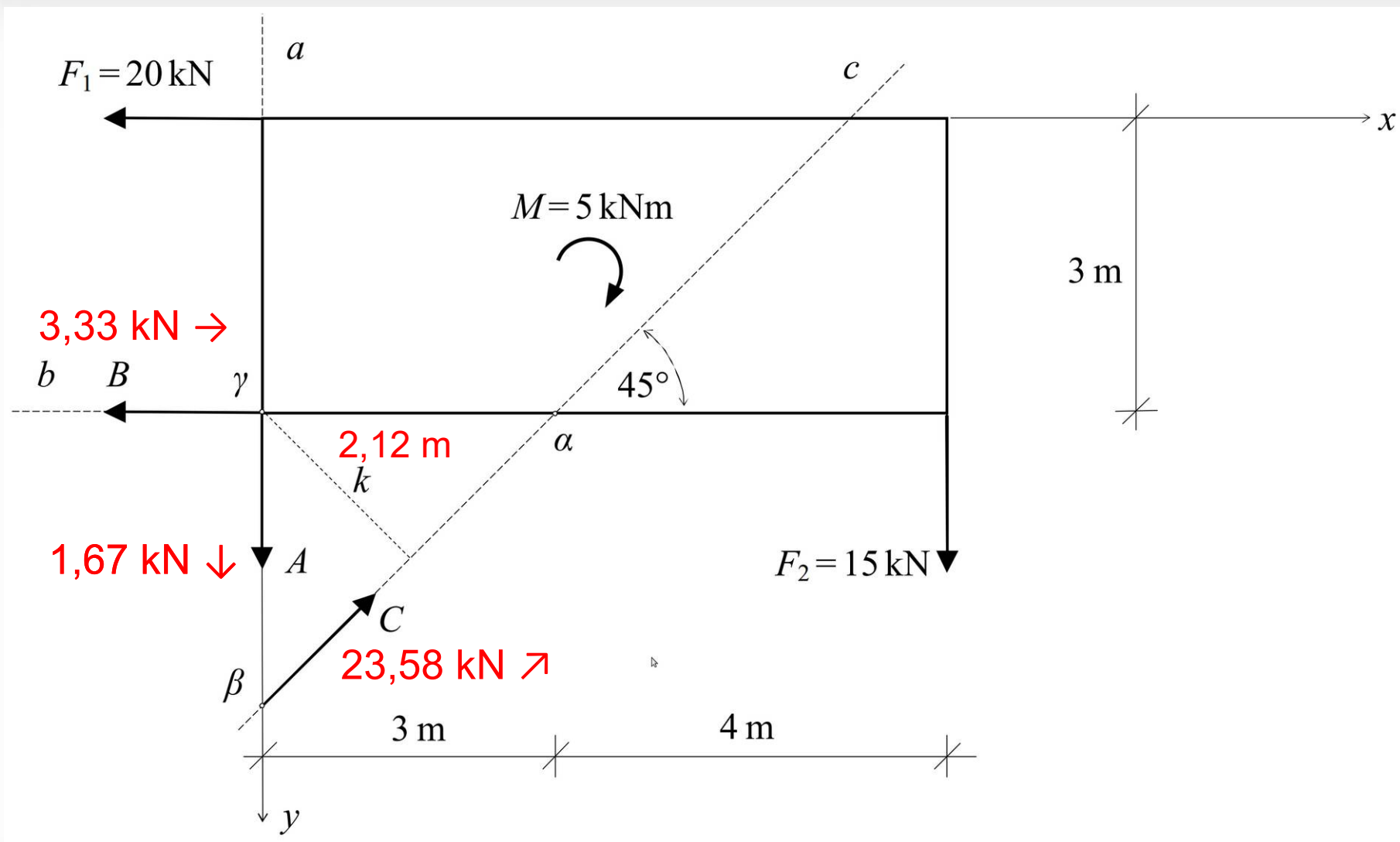
Erőrendszer egyensúlya



Erőrendszer egyensúlya

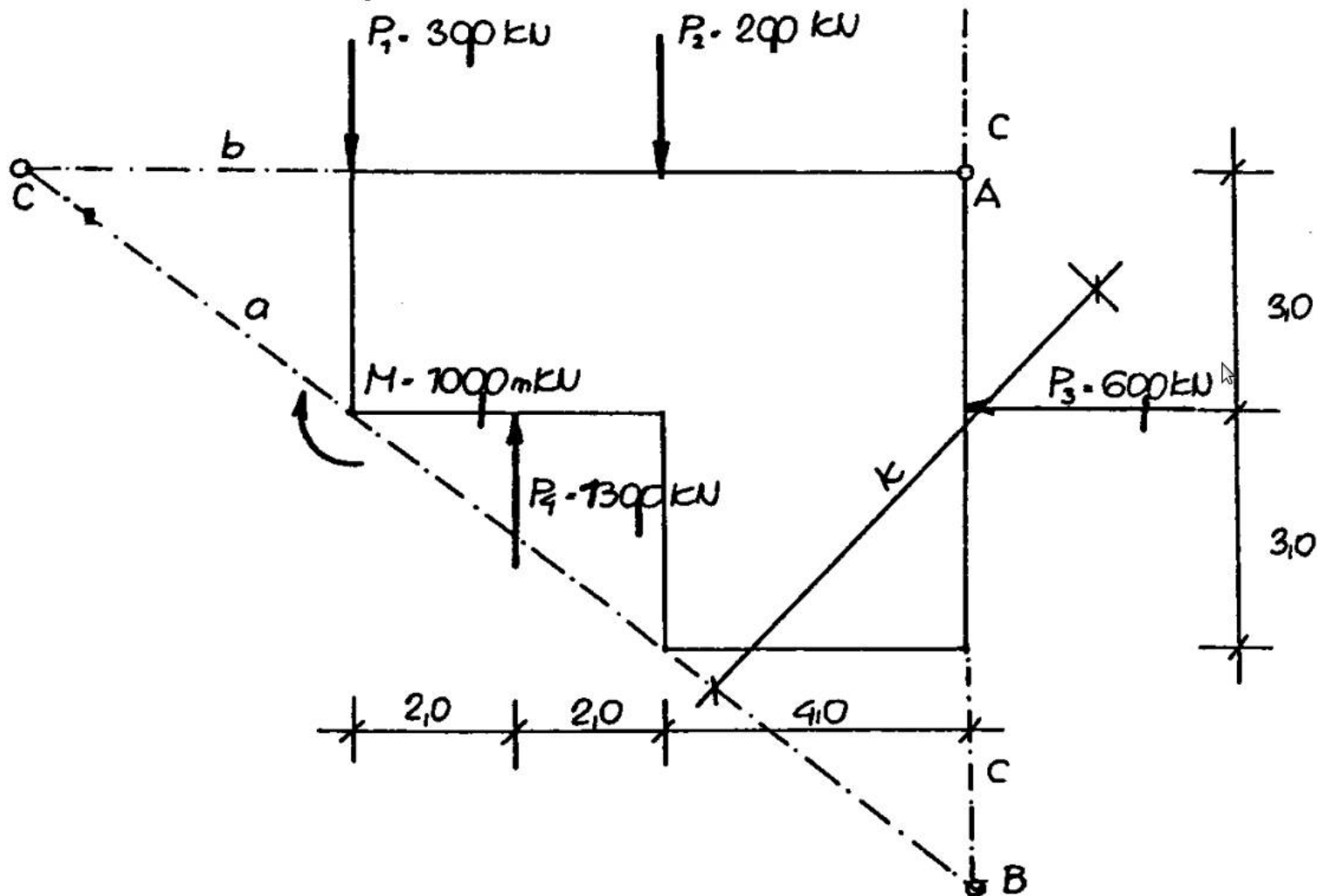


Erőrendszer egyensúlya

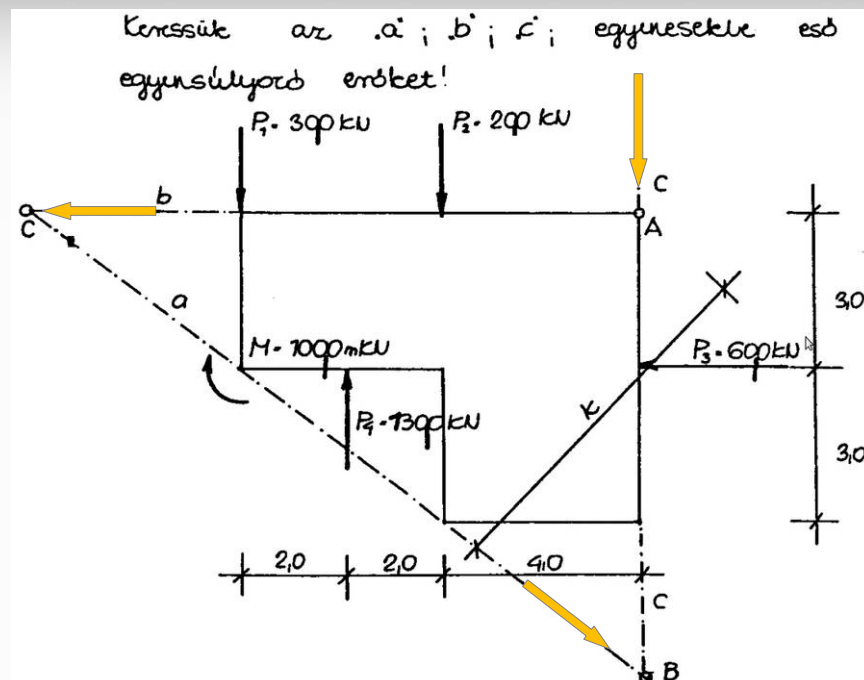


Erőrendszer egyensúlya

Keressük az a ; b ; c ; egyenestekre eső egyensúlyozó erőket!



Erőrendszer egyensúlya



$$\Sigma M_B = 0 = 100 \text{ kNm} - 8 \text{ m} \cdot 30 \text{ kN} - 4 \text{ m} \cdot 20 \text{ kN} - 6 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} + 6 \text{ m} \cdot 130 \text{ kN} + 9 \text{ m} \cdot F_b$$

$$F_b = -\frac{200}{9} = -22,22 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\Sigma M_C = 0 = 100 \text{ kNm} + 4 \text{ m} \cdot 30 \text{ kN} + 8 \text{ m} \cdot 20 \text{ kN} + 3 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} - 6 \text{ m} \cdot 130 \text{ kN} + 12 \text{ m} \cdot F_c$$

$$F_c = \frac{200}{12} = 18,33 \text{ kN} (\downarrow)$$

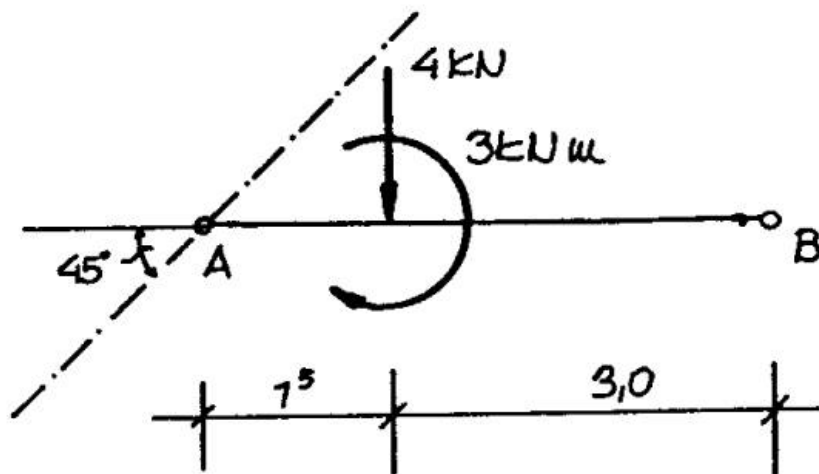
$$k = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7,2 \text{ m}$$

$$\Sigma M_A = 0 = 100 \text{ kNm} - 8 \text{ m} \cdot 30 \text{ kN} - 4 \text{ m} \cdot 20 \text{ kN} + 3 \text{ m} \cdot 60 \text{ kN} + 6 \text{ m} \cdot 130 \text{ kN} + 7,2 \text{ m} \cdot F_a$$

$$F_a = -\frac{740}{7,2} = -102,78 \text{ kN} (\rightarrow \downarrow)$$

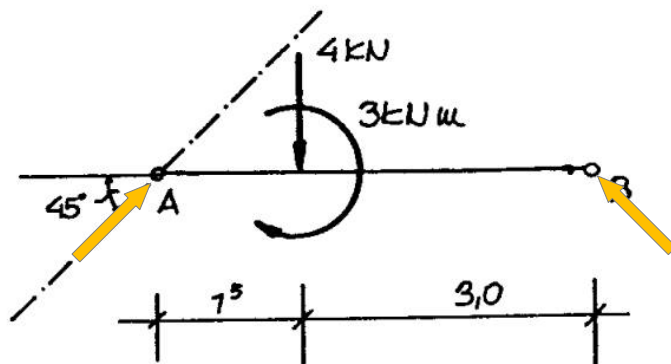
Erőrendszer egyensúlya

Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A és B ponton átmenő erővel.



Erőrendszer egyensúlya

Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A és B ponton átvett erővel.



$$\Sigma M_A = 0 = 3 \text{ kNm} + 1,5 \text{ m} \cdot 4 \text{ kN} - 4,5 \text{ m} \cdot B$$

$$B = \frac{9}{4,5} = 2,00 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = 4 \text{ kN} - A_y - B$$

$$A_y = 2,00 \text{ kN}(\uparrow)$$

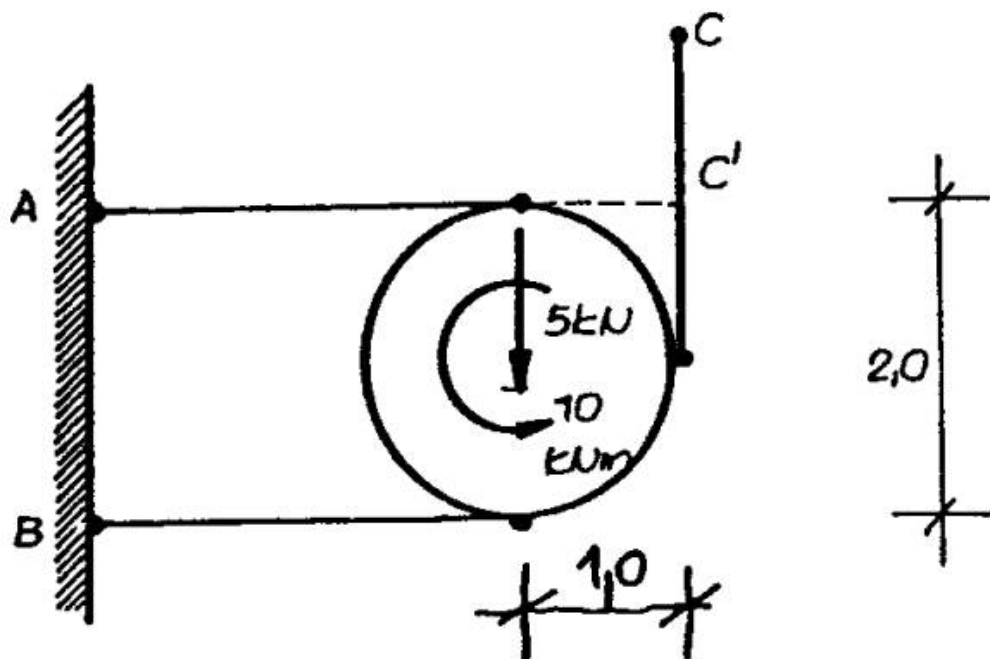
$$A_x = A_y = 2,00 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = A_x - B_x$$

$$B_x = 2,00 \text{ kN}(\leftarrow)$$

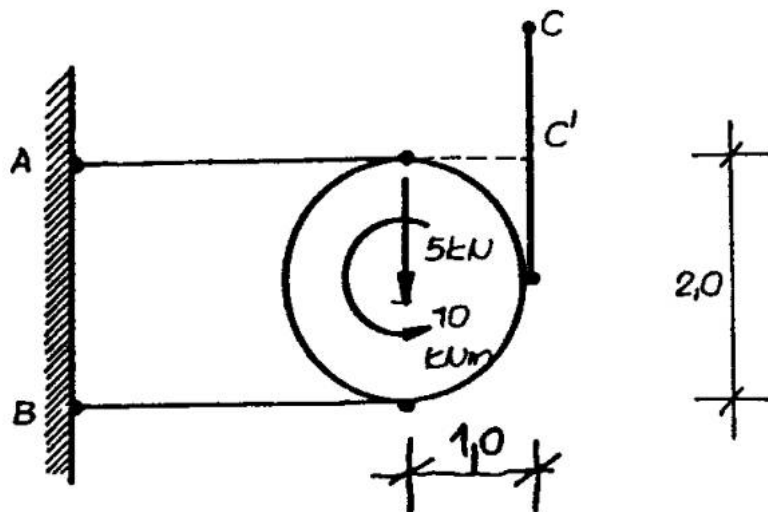
Erőrendszer egyensúlya

Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A ; B ; C ; ponton keresztül menő erővel.



Erőrendszer egyensúlya

Egyensúlyozzuk az erőrendszert az $A; B; C;$ ponton keresztül menő erővel.



$$\Sigma F_y = 0 = 5 \text{ kN} - C$$

$$C = -5,00 \text{ kN} (\uparrow)$$

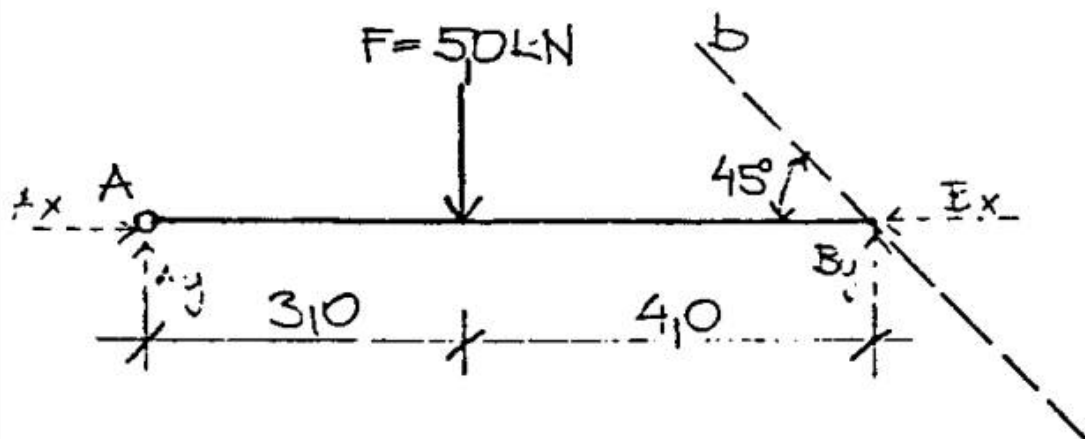
$$\Sigma M_{C'} = 0 = -10 \text{ kNm} - 1,0 \text{ m} \cdot 5 \text{ kN} + 2,0 \text{ m} \cdot B$$

$$B = \frac{15}{2} = -7,5 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = A - B$$

$$A = 7,5 \text{ kN} (\rightarrow)$$

Erőrendszer egyensúlya

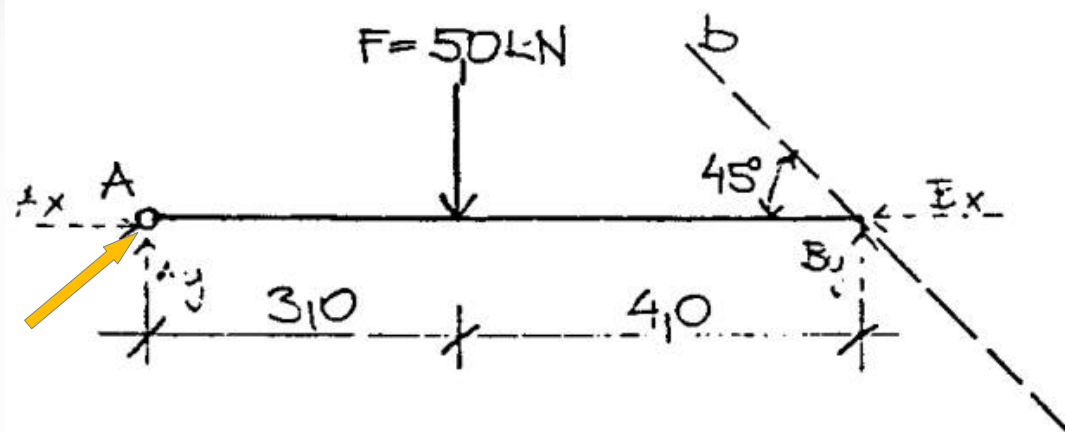


EGYENSÚLYOZZUK AZ
F'' ERŐT AZ "A"
PONTON ÁTMENŐ ÉS
EGY A "b" EGYENESTE
ESŐ ERŐVEL!

$$A = ? \quad B = ?$$

$$\alpha = ?$$

Erőrendszer egyensúlya



EGYENSÚLYOZZUK AZ
F' ERŐT AZ "A"
PONTON ÁTMENŐ ÉS
EGY A "b" EGYENESTE
ESŐ ERŐVEL!

A = ? B = ?
 $\alpha = ?$

$$\Sigma M_A = 0 = 3,0m \cdot 5kN + 7,0m \cdot B_y$$

$$B_y = \frac{15}{7} = -2,14kN(\uparrow)$$

$$B_x = -2,14kN(\leftarrow)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 3,03kN(\nwarrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = A_x - B_x$$

$$A_x = 2,14kN(\rightarrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = 5kN - B_y$$

$$A_y = -2,86kN(\uparrow)$$

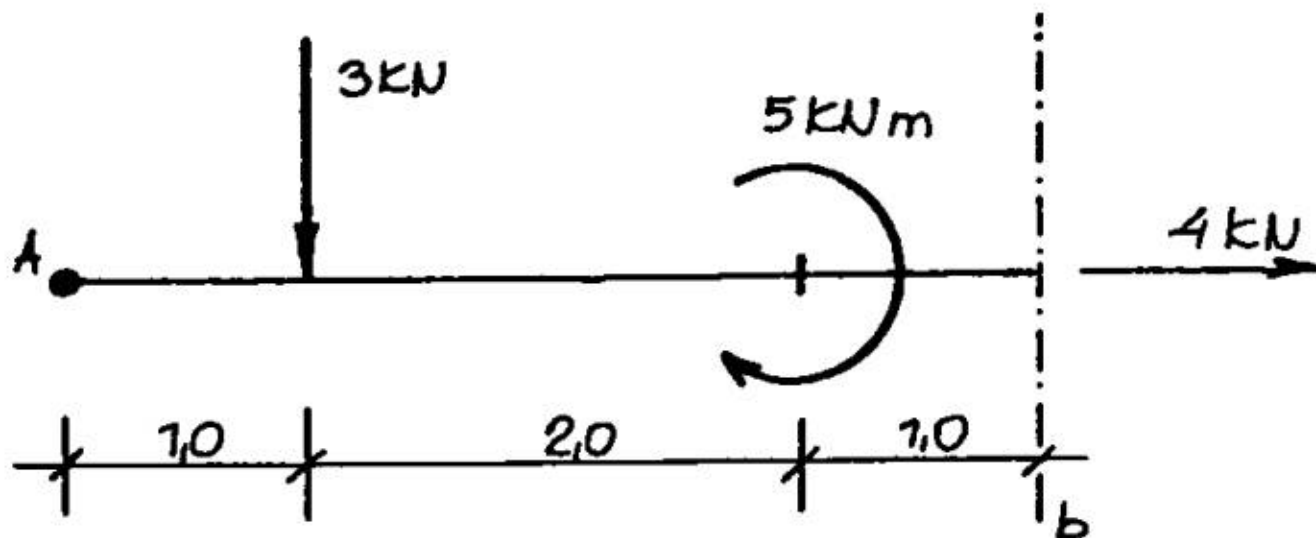
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 3,57kN(\nearrow)$$

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{2,86}{2,14}$$

$$\alpha = 53,2^\circ$$

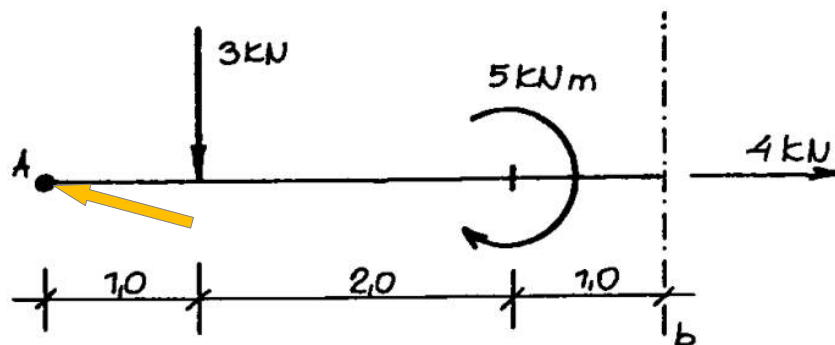
Erőrendszer egyensúlya

Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A ponton átmenő és a 'b' hatásvonalán levő erővel.



Erőrendszer egyensúlya

Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A ponton átmenő és a 'b' hatásvonalára levő erővel.



$$\Sigma M_A = 0 = 5 \text{ kNm} + 1,0 \text{ m} \cdot 3 \text{ kN} - 4,0 \text{ m} \cdot B$$

$$B = \frac{8}{4} = -2,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = 4 \text{ kN} - A_x$$

$$A_x = 4 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = 3 \text{ kN} - A_y - B_y$$

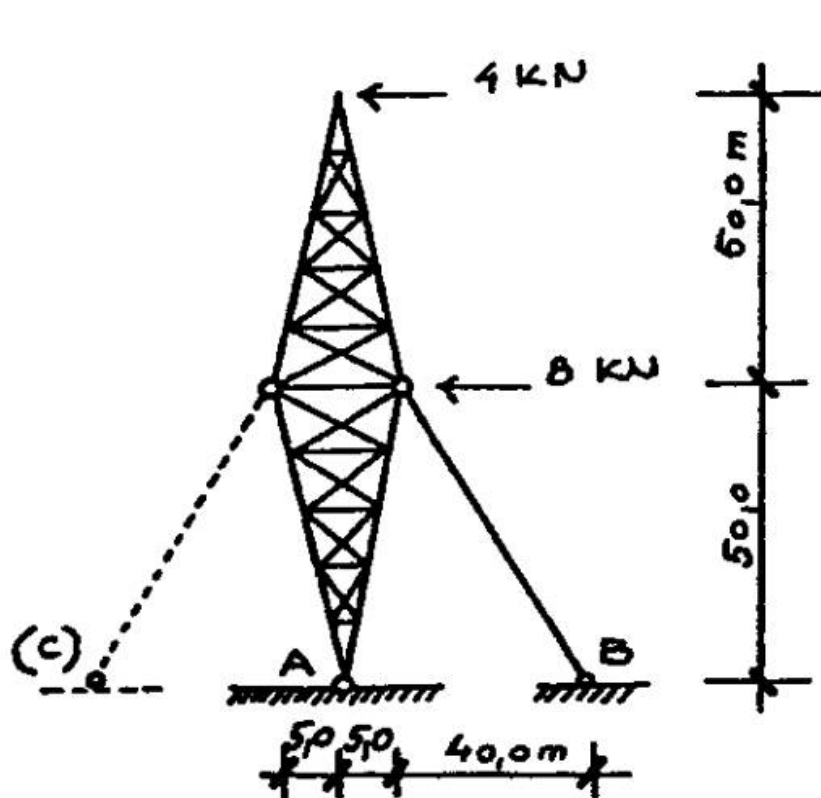
$$A_y = 1 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 4,12 \text{ kN} (\nwarrow \nearrow)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{1,0}{4,0}$$

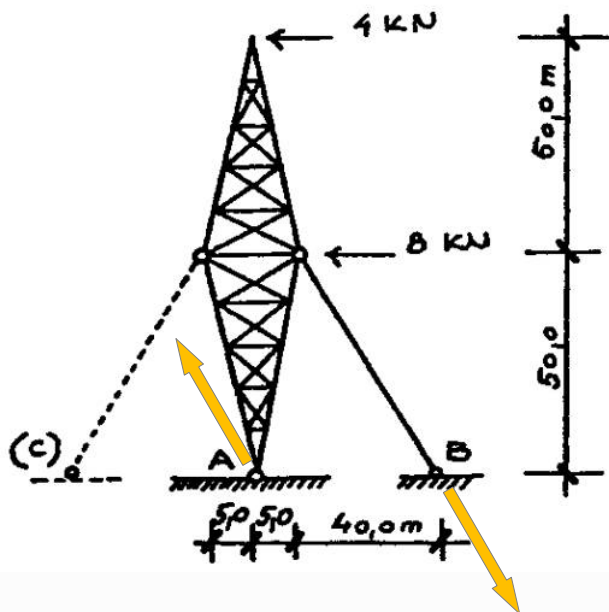
$$\alpha = 14,04^\circ$$

Erőrendszer egyensúlya



HATÁROZZUK MEG AZ „A” ÉS
„B” REAKCIÓERŐKET

Erőrendszer egyensúlya



HATÁROZZUK MEG AZ 'A' ÉS
'B' REAKCIÓERŐKET

$$\Sigma M_A = 0 = -100,0m \cdot 4kN - 50,0m \cdot 8kN + 45,0m \cdot B_y$$

$$B_y = \frac{800}{45} = -17,78kN(\downarrow)$$

$$B_x = \frac{40m}{50m} \cdot B_y = -14,22kN(\rightarrow)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 22,77kN(\rightarrow\downarrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = -4kN - 8kN + A_x + B_x$$

$$A_x = -2,22kN(\leftarrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = -A_y + B_y$$

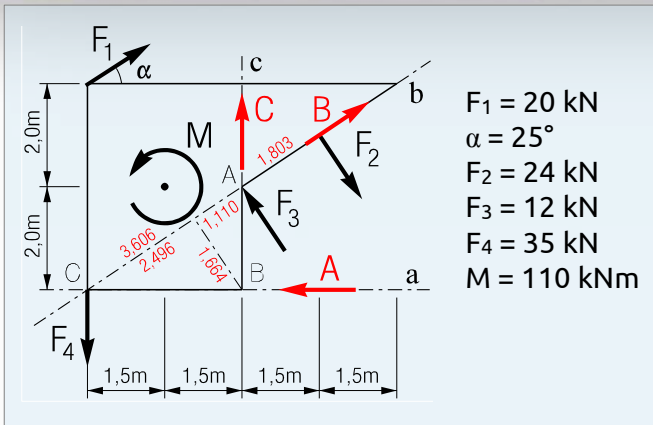
$$A_y = -17,78kN(\uparrow)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 17,92kN(\leftarrow\uparrow)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{17,78}{2,22}$$

$$\alpha = 82,87^\circ$$

Egyensúlyozás 3 erővel – ZH A/1



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \cos 25^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{18,126 \text{ kN} } (\rightarrow)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \sin 25^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{8,452 \text{ kN} } (\uparrow)$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= F_{1x} \cdot 2,0 \text{ m} + F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 1,8 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} - M - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= 18,13 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 8,45 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot 1,8 \text{ m} - 35 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - 110 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= 36,25 \text{ kNm} + 25,36 \text{ kNm} + 43,27 \text{ kNm} - 105,00 \text{ kNm} - 110,00 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= -110,12 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$A = \frac{-110,12 \text{ kNm}}{2,0 \text{ m}} = \mathbf{-55,06 \text{ kN} } (\leftarrow)$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &= F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 2,91 \text{ m} - F_3 \cdot 1,11 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} - M + B_y \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 18,13 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 8,45 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot 2,91 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot 1,11 \text{ m} - 35 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} \\ &\quad - 110 \text{ kNm} + B_y \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 72,50 \text{ kNm} + 25,36 \text{ kNm} + 70,08 \text{ kNm} - 13,32 \text{ kNm} - 105 \text{ kNm} \\ &\quad - 110 \text{ kNm} + B_y \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= -60,55 \text{ kNm} + B_y \cdot 3,0 \text{ m} = -60,55 \text{ kNm} + B \cdot 1,664 \text{ m} \end{aligned}$$

$$B_y = \frac{60,55 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = \mathbf{20,18 \text{ kN} } (\uparrow)$$

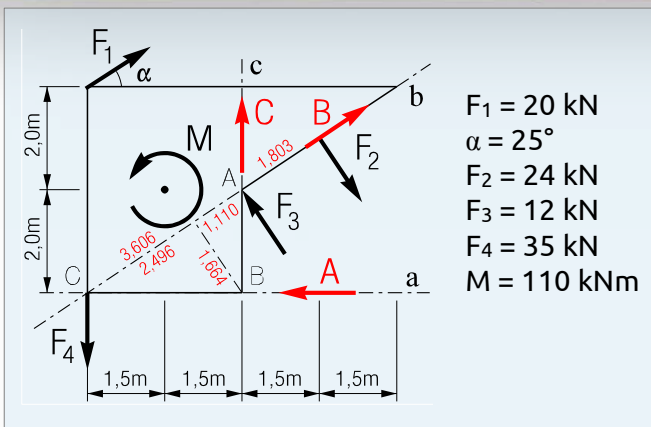
$$B_x = \frac{3}{2} \cdot B_y = \mathbf{30,28 \text{ kN} } (\rightarrow)$$

$$B = \frac{60,55 \text{ kNm}}{1,664 \text{ m}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{20,18^2 + 30,28^2} = \sqrt{1323,94} = \mathbf{36,39 \text{ kN} } (\nearrow)$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &= F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_2 \cdot 5,41 \text{ m} - F_3 \cdot 3,61 \text{ m} - M + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 18,13 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot 5,41 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot 3,61 \text{ m} - 110 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 72,50 \text{ kNm} + 129,82 \text{ kNm} - 43,27 \text{ kNm} - 110,00 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 49,05 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$C = \frac{-49,05 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = \mathbf{-16,35 \text{ kN} } (\uparrow)$$

Egyensúlyozás 3 erővel – ZH A/2



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \cos 25^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{18,126 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 20 \text{ kN} \cdot \sin 25^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{8,452 \text{ kN} (\uparrow)}$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + A \cdot k_A$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	2,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 2,00$	$+18,126 \cdot 2,00$	+36,25
F_{1y}	8,452 kN	3,00	↺	$+ F_{1y} \cdot 3,00$	$+8,452 \cdot 3,00$	+25,36
F_2	24 kN	1,803	↺	$+ F_2 \cdot 1,803$	$+24 \cdot 1,803$	+43,27
F_3	12 kN	0	–	$F_3 \cdot 0$	$12 \cdot 0$	0
F_4	35 kN	3,00	↻	$- F_4 \cdot 3,00$	$-35 \cdot 3,00$	-105,00
M	110 kNm	–	↻	$- M$	-110	-110,00
$\sum M_A^*$			↻			-110,12
A	55,06 kN (←)	2,00	↺	←←←←←←←←		+110,12
$\sum M_A$	0 kNm	–	–	–	–	0

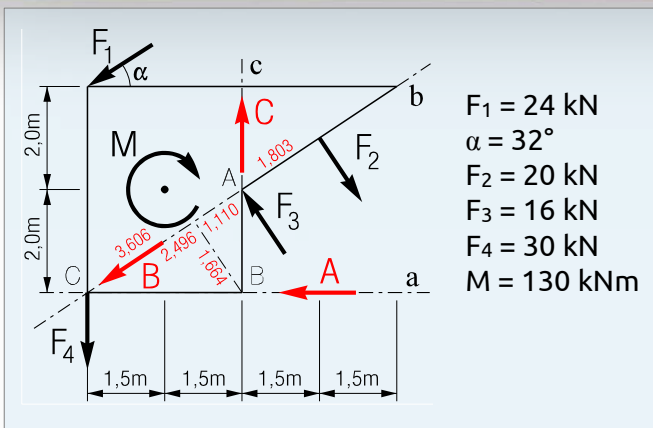
$$\sum M_B = 0 = \sum M_B^* + B \cdot k_B$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	4,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 4,00$	$+18,126 \cdot 4,00$	+72,50
F_{1y}	8,452 kN	3,00	↺	$+ F_{1y} \cdot 3,00$	$+8,452 \cdot 3,00$	+25,36
F_2	24 kN	2,913	↺	$+ F_2 \cdot 2,913$	$+24 \cdot 2,913$	+69,91
F_3	12 kN	1,110	↻	$- F_3 \cdot 1,110$	$-12 \cdot 1,110$	-13,32
F_4	35 kN	3,00	↻	$- F_4 \cdot 3,00$	$-35 \cdot 3,00$	-105,00
M	110 kNm	–	↻	$- M$	-110	-110,00
$\sum M_B^*$			↻			-60,55
B	36,39 kN (↗)	1,664	↺	←←←←←←←←		+60,55
$\sum M_B$	0 kNm	–	–	–	–	0

$$\sum M_C = 0 = \sum M_C^* + C \cdot k_C$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	18,126 kN	4,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 4,00$	$+18,126 \cdot 4,00$	+72,50
F_{1y}	8,452 kN	0	–	$F_{1y} \cdot 0$	$8,452 \cdot 0$	0
F_2	24 kN	5,409	↺	$+ F_2 \cdot 5,409$	$+24 \cdot 5,409$	+129,82
F_3	12 kN	3,606	↻	$- F_3 \cdot 3,606$	$-12 \cdot 3,606$	-43,27
F_4	35 kN	0	–	$F_4 \cdot 0$	$35 \cdot 0$	0
M	110 kNm	–	↻	$- M$	-110	-110,00
$\sum M_C^*$			↺			+49,05
C	16,35 kN (↑)	3,00	↻	←←←←←←←←		-49,05
$\sum M_C$	0 kNm	–	–	–	–	0

Egyensúlyozás 3 erővel – ZH B/1



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 24 \text{ kN} \cdot \cos 32^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{20,353 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 24 \text{ kN} \cdot \sin 32^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{12,718 \text{ kN} (\uparrow)}$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= -F_{1x} \cdot 2,0 \text{ m} - F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 1,8 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} + M - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= -20,35 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} - 12,72 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 1,8 \text{ m} - 30 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 130 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= -40,71 \text{ kNm} - 38,15 \text{ kNm} + 36,06 \text{ kNm} - 90,00 \text{ kNm} + 130,00 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= -2,80 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$A = \frac{-2,80 \text{ kNm}}{2,0 \text{ m}} = \mathbf{-1,40 \text{ kN} (\leftarrow)}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &= -F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} - F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 2,91 \text{ m} - F_3 \cdot 1,11 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} \\ &\quad + M - B \cdot 1,66 \text{ m} \\ &= -20,35 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} - 12,72 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 2,91 \text{ m} - 16 \text{ kN} \cdot 1,11 \text{ m} - 30 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} \\ &\quad + 130 \text{ kNm} - B \cdot 1,66 \text{ m} \\ &= -81,41 \text{ kNm} - 38,15 \text{ kNm} + 58,26 \text{ kNm} - 17,76 \text{ kNm} - 90,0 \text{ kNm} + 130,0 \text{ kNm} - B \cdot 1,66 \text{ m} \\ &= -23,47 \text{ kNm} - B \cdot 1,66 \text{ m} \end{aligned}$$

$$B_y = \frac{23,47 \text{ kNm}}{1,664 \text{ m}} = \mathbf{7,82 \text{ kN} (\downarrow)}$$

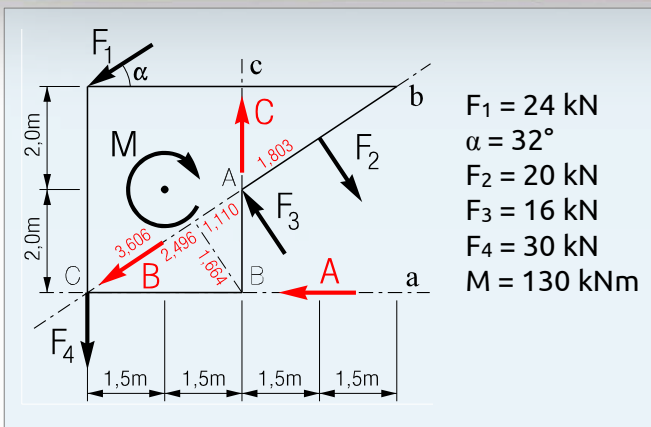
$$B_x = \frac{3}{2} \cdot B_y = \mathbf{11,74 \text{ kN} (\leftarrow)}$$

$$B = \frac{23,47 \text{ kNm}}{1,664 \text{ m}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{7,82^2 + 11,74^2} = \sqrt{199,00} = \mathbf{14,11 \text{ kN} (\swarrow)}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &= -F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_2 \cdot 5,41 \text{ m} - F_3 \cdot 3,61 \text{ m} - M + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= -20,35 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 5,41 \text{ m} - 16 \text{ kN} \cdot 3,61 \text{ m} + 130 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= -81,41 \text{ kNm} + 108,18 \text{ kNm} - 57,70 \text{ kNm} + 130,00 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 99,07 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$C = \frac{-99,07 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = \mathbf{-33,02 \text{ kN} (\uparrow)}$$

Egyensúlyozás 3 erővel – ZH B/2



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 24 \text{ kN} \cdot \cos 32^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{20,353 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 24 \text{ kN} \cdot \sin 32^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{12,718 \text{ kN} (\uparrow)}$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + A \cdot k_A$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	20,353 kN	2,00	↺	$-F_{1x} \cdot 2,00$	$-20,353 \cdot 2,00$	-40,71
F_{1y}	12,718 kN	3,00	↺	$-F_{1y} \cdot 3,00$	$-12,718 \cdot 3,00$	-38,15
F_2	20 kN	1,803	↻	$+F_2 \cdot 1,803$	$+20 \cdot 1,803$	+36,06
F_3	16 kN	0	–	$F_3 \cdot 0$	$16 \cdot 0$	0
F_4	30 kN	3,00	↺	$-F_4 \cdot 3,00$	$-30 \cdot 3,00$	-90,00
M	130 kNm	–	↻	$+M$	130	130,00
$\sum M_A^*$			↺			-2,80
A	1,40 kN (←)	2,00	↻	←←←←←←←←←←		+2,80
$\sum M_A$	0 kNm	–	–	–	–	0

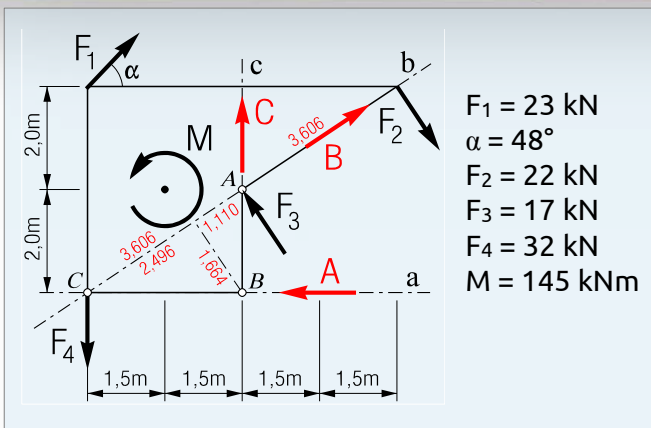
$$\sum M_B = 0 = \sum M_B^* + B \cdot k_B$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	20,353 kN	4,00	↺	$-F_{1x} \cdot 4,00$	$-20,353 \cdot 4,00$	-81,41
F_{1y}	12,718 kN	3,00	↺	$-F_{1y} \cdot 3,00$	$-12,718 \cdot 3,00$	-38,15
F_2	20 kN	2,913	↻	$+F_2 \cdot 2,913$	$+20 \cdot 2,913$	+58,26
F_3	16 kN	1,110	↺	$-F_3 \cdot 1,110$	$-16 \cdot 1,110$	-17,76
F_4	30 kN	3,00	↺	$-F_4 \cdot 3,00$	$-30 \cdot 3,00$	-90,00
M	130 kNm	–	↻	$+M$	130	130,00
$\sum M_B^*$			↺			-23,47
B	14,11 kN (↘)	1,664	↻	←←←←←←←←←←		+23,47
$\sum M_B$	0 kNm	–	–	–	–	0

$$\sum M_C = 0 = \sum M_C^* + C \cdot k_C$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	20,353 kN	4,00	↺	$-F_{1x} \cdot 4,00$	$-20,353 \cdot 4,00$	-81,41
F_{1y}	12,718 kN	–	↺	$-F_{1y} \cdot 0$	$-12,718 \cdot 0$	0
F_2	20 kN	5,409	↻	$+F_2 \cdot 5,409$	$+20 \cdot 5,409$	+108,18
F_3	16 kN	3,606	↺	$-F_3 \cdot 3,606$	$-16 \cdot 3,606$	-57,70
F_4	30 kN	–	↺	$-F_4 \cdot 0$	$-30 \cdot 0$	0
M	130 kNm	–	↻	$+M$	130	130,00
$\sum M_C^*$			↻			+99,07
C	33,02 kN (↑)	3,00	↺	←←←←←←←←←←		-99,07
$\sum M_C$	0 kNm	–	–	–	–	0

Egyensúlyozás 3 erővel – ZH C/1



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 23 \text{ kN} \cdot \cos 48^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{15,390 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 23 \text{ kN} \cdot \sin 48^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{17,092 \text{ kN} (\uparrow)}$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= F_{1x} \cdot 2,0 \text{ m} + F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 3,61 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} - M - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= 15,39 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 17,09 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 22 \text{ kN} \cdot 3,61 \text{ m} - 32 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - 145 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= 30,78 \text{ kNm} + 51,28 \text{ kNm} + 79,33 \text{ kNm} - 96,00 \text{ kNm} - 145,00 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \\ &= -79,61 \text{ kNm} - A \cdot 2,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$A = \frac{-79,61 \text{ kNm}}{2,0 \text{ m}} = \mathbf{-39,805 \text{ kN} (\leftarrow)}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &= F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_{1y} \cdot 3,0 \text{ m} + F_2 \cdot 4,72 \text{ m} - F_3 \cdot 1,11 \text{ m} - F_4 \cdot 3,0 \text{ m} \\ &\quad - M + B \cdot 1,66 \text{ m} \\ &= 15,39 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 17,09 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 22 \text{ kN} \cdot 4,72 \text{ m} - 17 \text{ kN} \cdot 1,11 \text{ m} - 32 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} \\ &\quad - 145 \text{ kNm} + B \cdot 1,66 \text{ m} \\ &= 61,56 \text{ kNm} + 51,28 \text{ kNm} + 103,75 \text{ kNm} - 18,87 \text{ kNm} - 96 \text{ kNm} \\ &\quad - 145 \text{ kNm} + B \cdot 1,66 \text{ m} = -43,28 \text{ kNm} + B \cdot 1,66 \text{ m} \end{aligned}$$

$$B_y = \frac{43,28 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = \mathbf{14,43 \text{ kN} (\uparrow)}$$

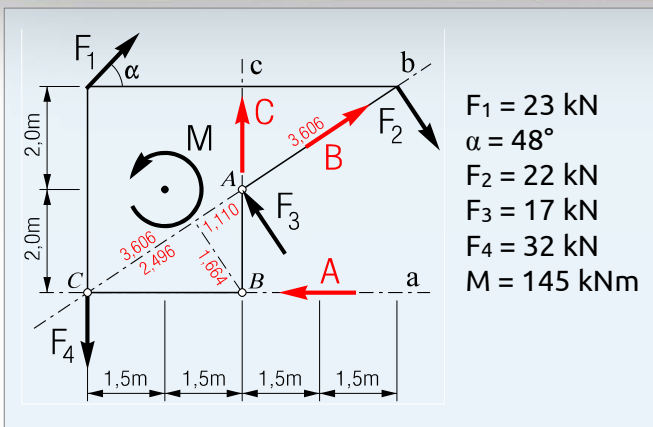
$$B_x = \frac{3}{2} \cdot B_y = \mathbf{21,64 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$B = \frac{43,28 \text{ kNm}}{1,664 \text{ m}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{21,64^2 + 14,43^2} = \sqrt{676,42} = \mathbf{26,01 \text{ kN} (\nearrow)}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &= F_{1x} \cdot 4,0 \text{ m} + F_2 \cdot 7,21 \text{ m} - F_3 \cdot 3,61 \text{ m} - M + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 15,39 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 22 \text{ kN} \cdot 7,21 \text{ m} - 17 \text{ kN} \cdot 3,61 \text{ m} - 145 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 61,56 \text{ kNm} + 158,66 \text{ kNm} - 61,30 \text{ kNm} - 145,00 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \\ &= 13,92 \text{ kNm} + C \cdot 3,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$C = \frac{-13,92 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = \mathbf{-4,64 \text{ kN} (\uparrow)}$$

Egyensúlyozás 3 erővel – ZH C/2



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 23 \text{ kN} \cdot \cos 48^\circ$$

$$F_{1x} = \mathbf{15,390 \text{ kN} } (\rightarrow)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 23 \text{ kN} \cdot \sin 48^\circ$$

$$F_{1y} = \mathbf{17,092 \text{ kN} } (\uparrow)$$

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(3,0^2 + 2,0^2)} = \mathbf{3,606 \text{ m}}$$

$$k_B = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{3,0 \cdot 2,0}{3,606} = \mathbf{1,664 \text{ m}}$$

$$c_1 = \frac{k_B \cdot a}{b} = \frac{1,664 \cdot 3,0}{2,0} = \mathbf{2,496 \text{ m}}$$

$$c_2 = c - c_1 = 3,606 - 2,496 = \mathbf{1,110 \text{ m}}$$

$$d = \frac{c}{2} = \frac{3,606}{2} = \mathbf{1,803 \text{ m}}$$

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + A \cdot k_A$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	15,390 kN	2,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 2,00$	$+15,390 \cdot 2,00$	+30,78
F_{1y}	17,092 kN	3,00	↺	$+ F_{1y} \cdot 3,00$	$+17,092 \cdot 3,00$	+51,28
F_2	22 kN	3,606	↺	$+ F_2 \cdot 3,606$	$+22 \cdot 3,606$	+79,33
F_3	17 kN	0	–	$F_3 \cdot 0$	$12 \cdot 0$	0
F_4	32 kN	3,00	↻	$- F_4 \cdot 3,00$	$-32 \cdot 3,00$	-96,00
M	145 kNm	–	↻	$- M$	-145	-145,00
$\sum M_A^*$			↻			-79,61
A	39,805 kN (←)	2,00	↺	← ← ← ← ← ← ← ←		+79,61
$\sum M_A$	0 kNm	–	–	–	–	0

$$\sum M_B = 0 = \sum M_B^* + B \cdot k_B$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	15,390 kN	4,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 4,00$	$+15,390 \cdot 4,00$	+61,56
F_{1y}	17,092 kN	3,00	↺	$+ F_{1y} \cdot 3,00$	$+17,092 \cdot 3,00$	+51,28
F_2	22 kN	4,716	↺	$+ F_2 \cdot 4,716$	$+22 \cdot 4,716$	+103,75
F_3	17 kN	1,110	↻	$- F_3 \cdot 1,110$	$-17 \cdot 1,110$	-18,87
F_4	32 kN	3,00	↻	$- F_4 \cdot 3,00$	$-32 \cdot 3,00$	-96,00
M	145 kNm	–	↻	$- M$	-145	-145,00
$\sum M_B^*$			↻			-43,28
B	26,01 kN (↗)	1,664	↺	← ← ← ← ← ← ← ←		+43,28
$\sum M_B$	0 kNm	–	–	–	–	0

$$\sum M_C = 0 = \sum M_C^* + C \cdot k_C$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_{1x}	15,390 kN	4,00	↺	$+ F_{1x} \cdot 4,00$	$+15,390 \cdot 4,00$	+61,56
F_{1y}	17,092 kN	0	–	$F_{1y} \cdot 0$	$8,452 \cdot 0$	0
F_2	22 kN	7,212	↺	$+ F_2 \cdot 7,212$	$+22 \cdot 7,212$	+158,66
F_3	17 kN	3,606	↻	$- F_3 \cdot 3,606$	$-17 \cdot 3,606$	-61,30
F_4	32 kN	0	–	$F_4 \cdot 0$	$35 \cdot 0$	0
M	145 kNm	–	↻	$- M$	-145	-145,00
$\sum M_C^*$			↺			+13,92
C	4,64 kN (↑)	3,00	↻	← ← ← ← ← ← ← ←		-13,92
$\sum M_C$	0 kNm	–	–	–	–	0