

Mechanikai alapismeretek 1. Statika

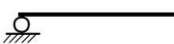
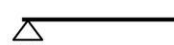
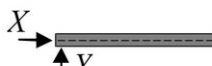
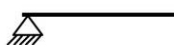
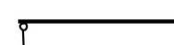
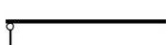
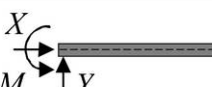
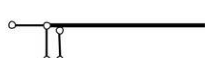
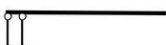
Építésmérnök O/BSc, Építőművész BA

EGYSZERŰ TARTÓK

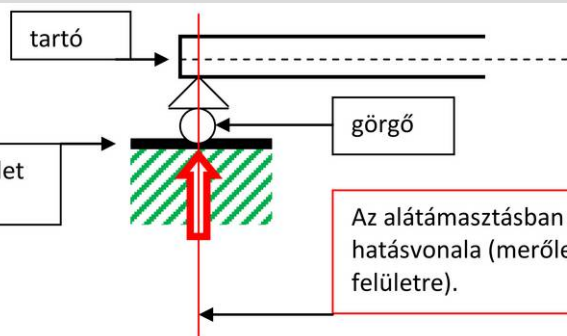
EGYENSÚLYA, REAKCIÓERŐK



Támaszok

Támasztó szerkezet			Statikai kényszer	Jelölés	Ismeret- lenek száma	Helyettesítés támasztó rudakkal	
neve		vázlata					
Saru	mozgó	hengeres				1	
		görgős				1	
		csúszó				1	
	álló (csukló)					2	
Támasztó rúd						1	
Befogás	álló (fix)				3		
	mozgó				2		

Támaszok

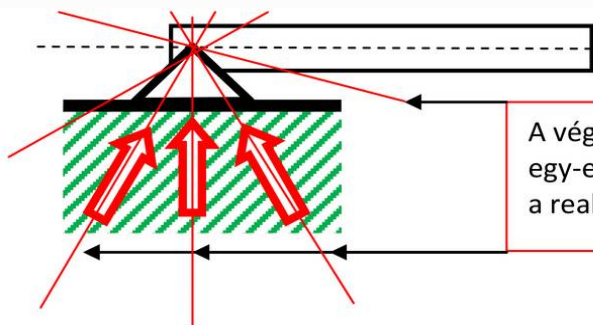


görgős (csúszó) alátámasztás

Az alátámasztó felület síkja.

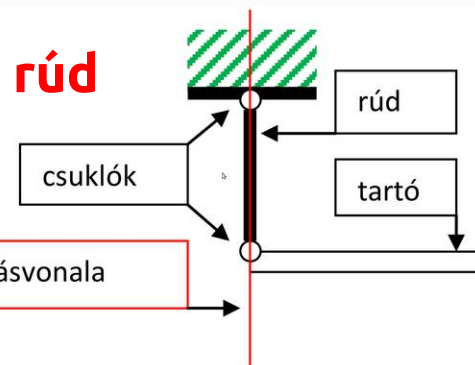
Az alátámasztásban ébredő reakcióerő hatásvonala (merőleges az alátámasztó felületre).

fix csukló (álló csukló)



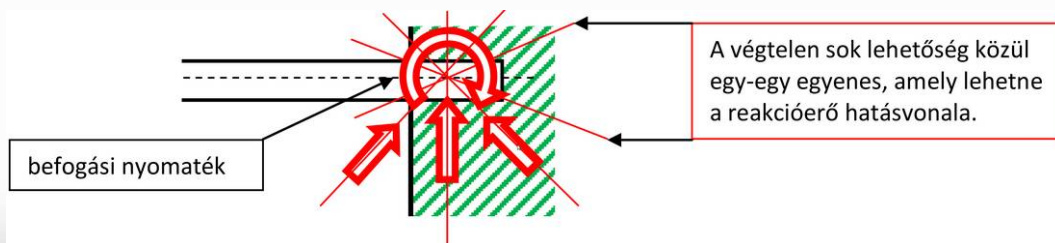
A végtelen sok lehetőség közül egy-egy egyenes, amely lehetne a reakcióerő hatásvonala.

rúd



a rúdban ébredő erő hatásvonala

merev befogás



befogási nyomaték

A végtelen sok lehetőség közül egy-egy egyenes, amely lehetne a reakcióerő hatásvonala.

Statikai határozottság

$$\sum F_{ix} = 0$$

Az összes erő vízszintes összetevőjének előjelhelyes összege egyenlő nullával.

$$\sum F_{iy} = 0$$

Az összes erő függőleges összetevőjének előjelhelyes összege egyenlő nullával.

$$\sum M_i = 0$$

Az összes erő nyomatékának előjelhelyes összege a sík minden pontjára nulla.

Statikailag határozott tartó:

$$K \leq E$$

Statikailag határozatlan tartó:

$$K > E$$

ahol

K az ismeretlenek száma

E egy merev testre felírt egyensúlyi egyenletek száma

Statikailag határozott egyszerű tartó

BEFOGOTT TARTÓ (KONZOL)



KÉTTÁMASZÚ TARTÓ



**EGYIK VÉGÉN TÚLNYÚLÓ
KÉTTÁMASZÚ TARTÓ**

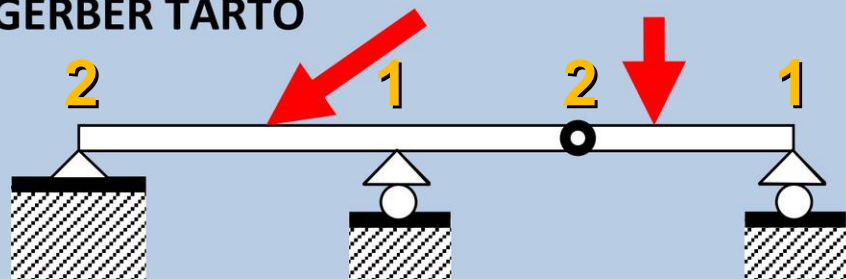


**MINDKÉT VÉGÉN TÚLNYÚLÓ
KÉTTÁMASZÚ TARTÓ**



Statikailag határozott összetett tartó

GERBER TARTÓ



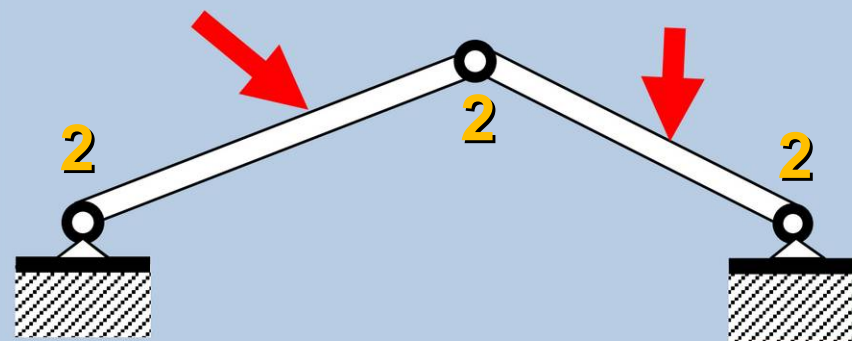
2 db merev test: $2 \times 3 = 6$ egyenlet

2 db csukló: $2 \times 2 = 4$ ismeretlen

2 db görgő: $2 \times 1 = 2$ ismeretlen

6 ismeretlen

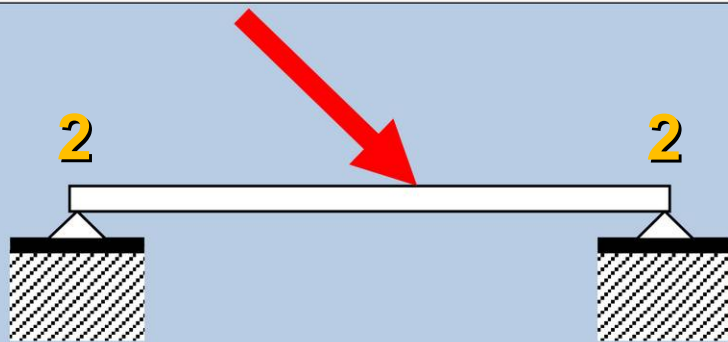
HÁROMCSUKLÓS TARTÓ



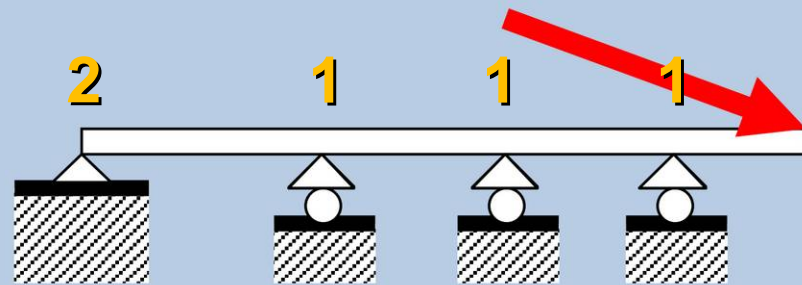
2 db merev test: $2 \times 3 = 6$ egyenlet

3 db csukló: $3 \times 2 = 6$ ismeretlen

Statikailag határozatlan egyszerű tartó

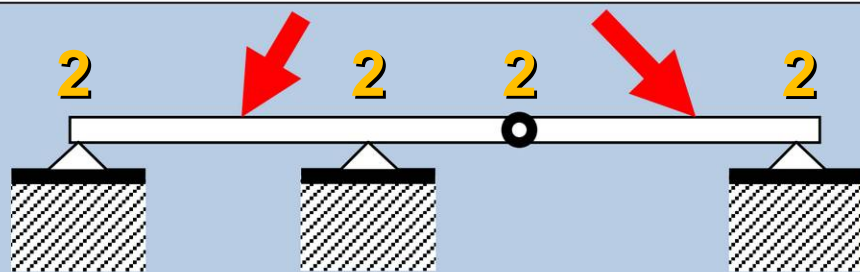


1 db merev test: $1 \times 3 = 3$ egyenlet
2 db csukló: $2 \times 2 = 4$ ismeretlen
 $4 - 3 = 1$ -SZERESEN HATÁROZATLAN

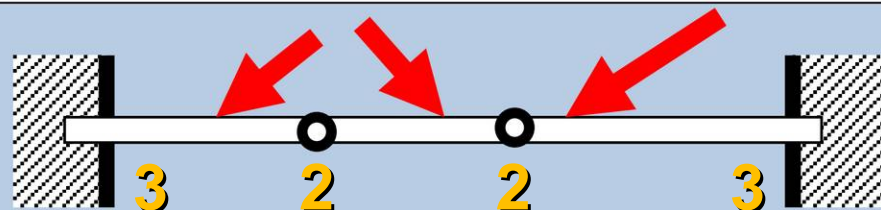


1 db merev test: $1 \times 3 = 3$ egyenlet
1 db csukló: $1 \times 2 = 2$ ismeretlen
3 db görgő: $3 \times 1 = 3$ ismeretlen
 $5 - 3 = 2$ -SZERESEN HATÁROZATLAN

Statikailag határozatlan összetett tartó



2 db merev test: $2 \times 3 = 6$ egyenlet
4 db csukló: $4 \times 2 = 8$ ismeretlen
 $8 - 6 = 2$ -SZERESEN HATÁROZATLAN



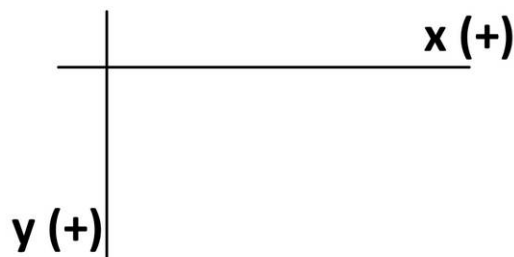
3 db merev test: $3 \times 3 = 9$ egyenlet
2 db csukló: $2 \times 2 = 4$ ismeretlen
2 db befogás : $2 \times 3 = 6$ ismeretlen
 $10 - 9 = 1$ -SZERESEN HATÁROZATLAN

Tartók támaszerőinek meghatározása

$$\sum F_{ix} = 0$$

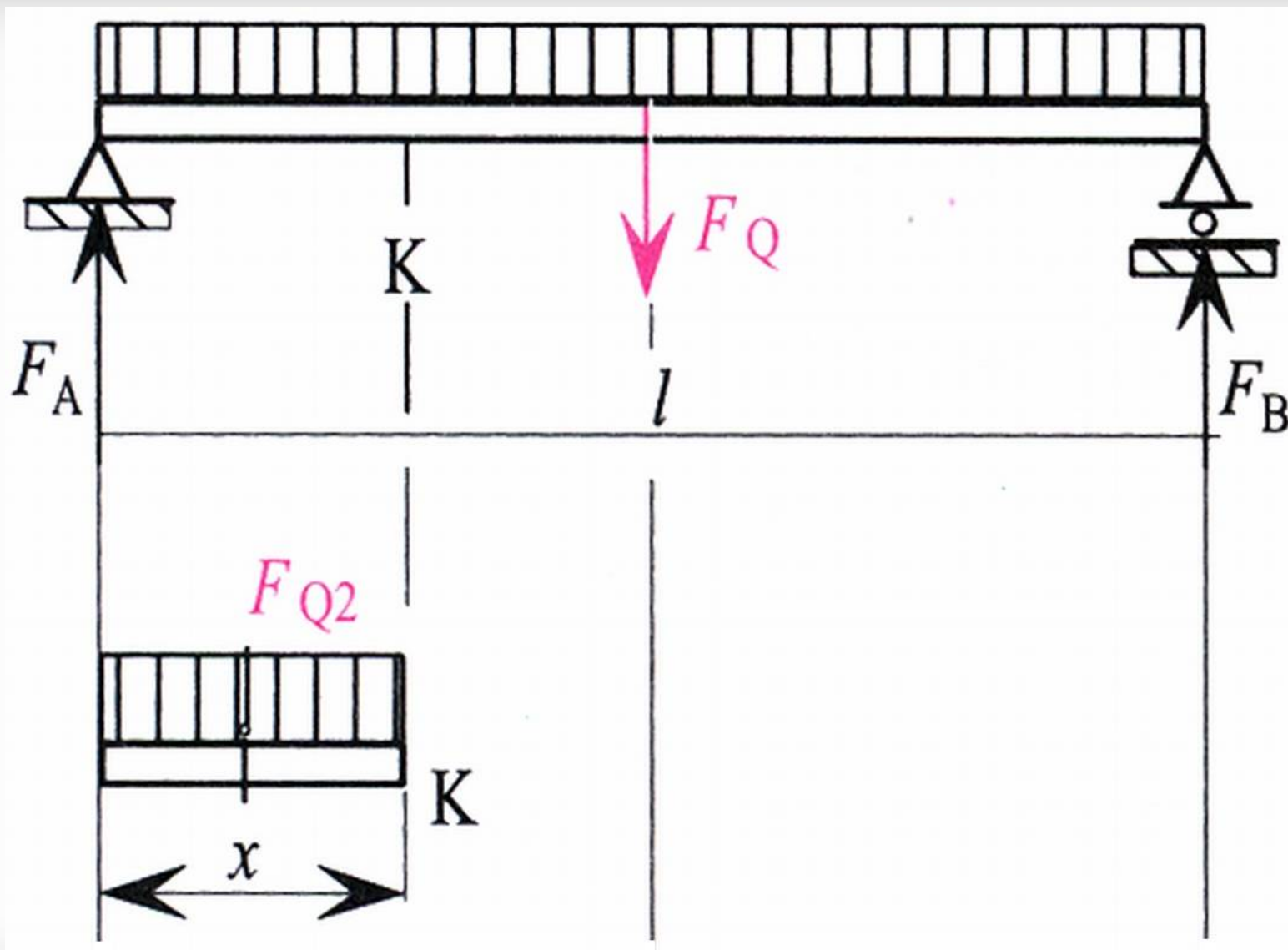
$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

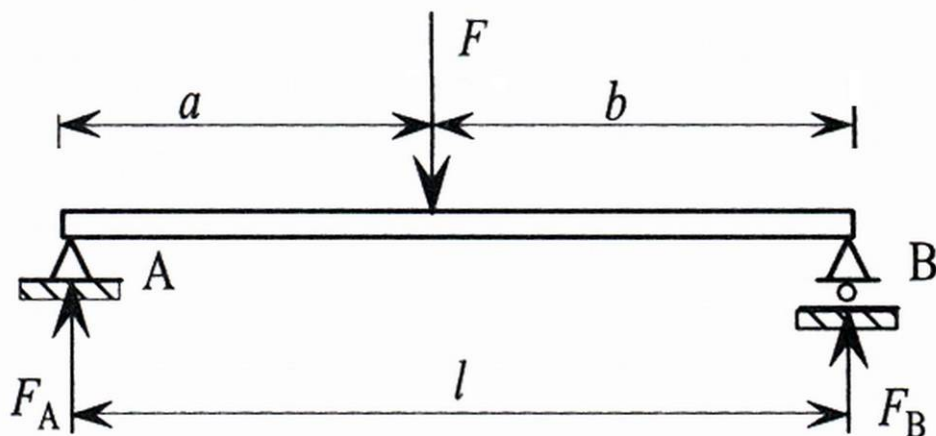


A koordináta-rendszer előjelei csak a külső (terhelés + támaszerők) erőkre vonatkoznak!

Megoszló terhelés számítása



Kéttámaszú tartó támaszerői

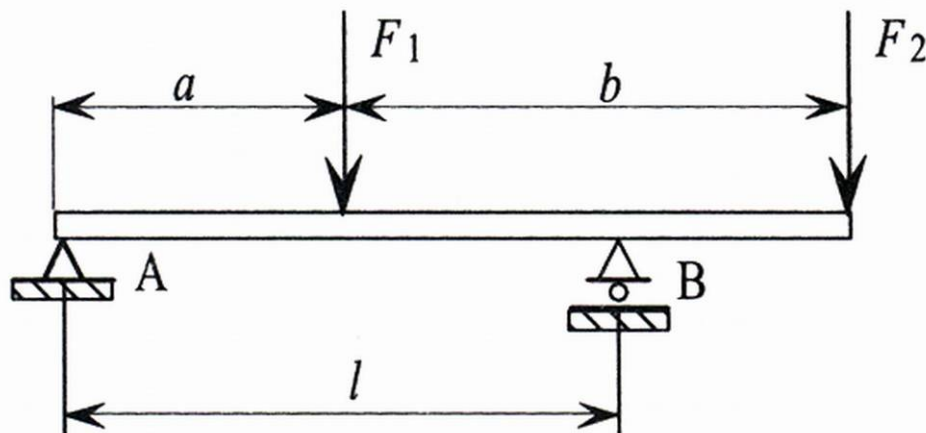


$$\Sigma M_A = 0 = F \cdot a - F_B \cdot l$$

$$F_B = F \cdot \frac{a}{l}$$

$$F_A = F \cdot \frac{b}{l}$$

$$\text{ha } a = b = \frac{l}{2} \Rightarrow F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

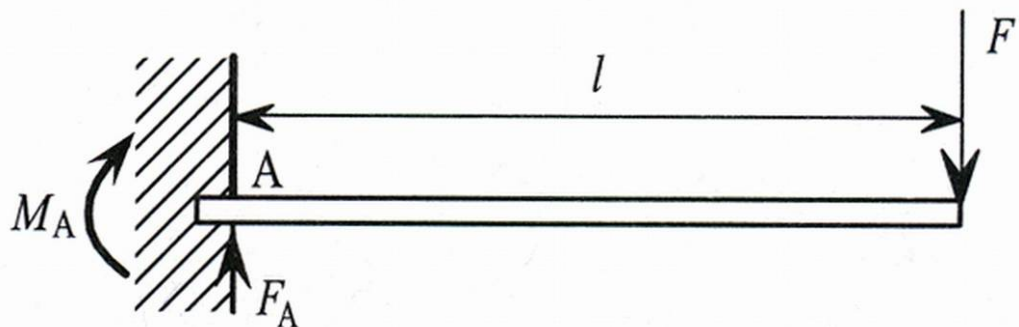


$$\Sigma M_A = 0 = F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + b) - F_B \cdot l$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot (a + b)}{l}$$

$$F_A = F_1 + F_2 - F_B$$

Egyszerű tartók támaszerői

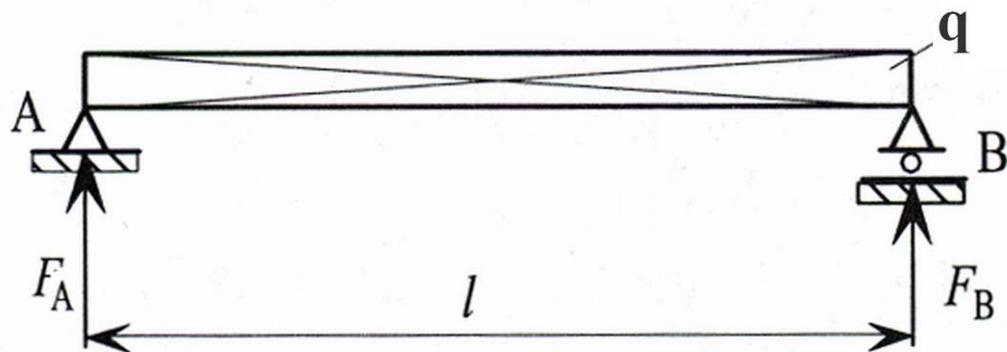


$$\Sigma M = 0 = F \cdot l - M_A$$

$$M_A = -F \cdot l$$

$$\Sigma F_y = 0 = F - F_A$$

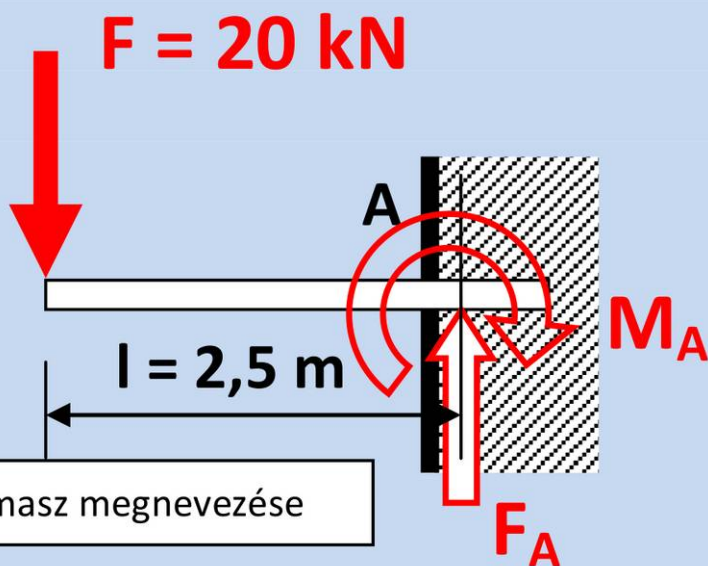
$$F_A = -F$$



$$\Sigma M_A = 0 = q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l$$

$$F_A = F_B = q \cdot \frac{l}{2}$$

Befogott tartó (konzol) támaszerői



A tartón nincs vízszintes erő, ezért a **$\Sigma F_{ix} = 0$** egyenletre nincs szükség.

$\Sigma F_{iy} = 0$: a függőleges erők összege nulla, behelyettesítve:

$$+F - F_A = 0$$

$$+ 20 - F_A = 0$$

$$\mathbf{F_A = 20 \text{ kN}}$$

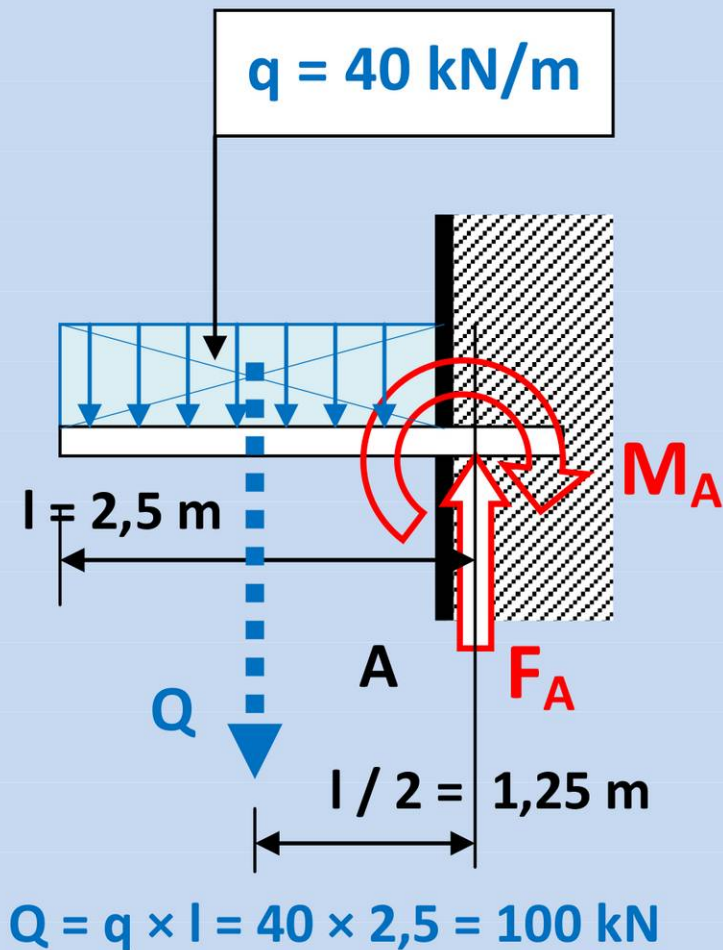
$\Sigma M_i = 0$: az összes nyomaték összege nulla, behelyettesítve:

$$-F \times l + M_A = 0$$

$$-20 \times 2,5 + M_A = 0$$

$$\mathbf{M_A = + 50 \text{ kNm}}$$

Befogott tartó (konzol) támaszerői



A tartón nincs vízszintes erő, ezért a $\Sigma F_{ix} = 0$ egyenletre nincs szükség.

A megoszló erőt át kell alakítani koncentrálttá: $Q = q \times l$

$\Sigma F_{iy} = 0$: a függőleges erők összege nulla, behelyettesítve:

$$+ Q - F_A = 0$$

$$+ 100 - F_A = 0$$

$$F_A = 100 \text{ kN}$$

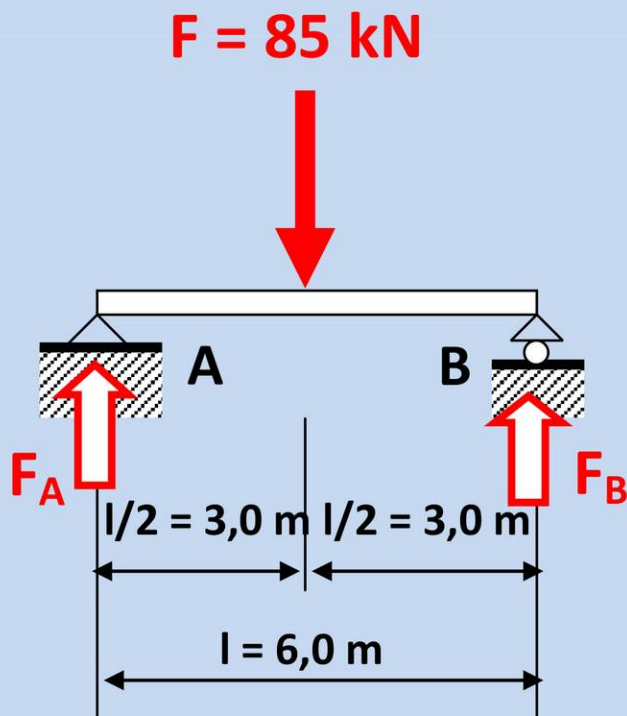
$\Sigma M_i = 0$: az összes nyomaték összege nulla, behelyettesítve:

$$- Q \times l/2 + M_A = 0$$

$$- 100 \times 1,25 + M_A = 0$$

$$M_A = + 125 \text{ kNm}$$

Kéttámaszú tartó támaszerői



Az eredmény láttán általános érvénnyel megállapíthatjuk, hogy a szimmetrikus tartók támaszerői egyenlők, a nagyságuk pedig a terhelő erő fele.

$$F_A = F_B = F/2 = 85 / 2 = 42,5 \text{ kN}$$

A tartón nincs vízszintes erő, ezért a $\Sigma F_{ix} = 0$ egyenletre nincs szükség.

A $\Sigma F_{iy} = 0$ egyenlettel nem lehet kezdeni a számítást, mert két ismeretlen van benne, a két függőleges támaszerő, F_A és F_B . A nyomatéki

$\Sigma M_i = 0$ egyenlettel kell kezdeni a számítást, mert ha felírjuk az összes erő nyomatékát az egyik (mindegy, hogy melyik) támaszra, akkor az „kiesik” az egyenletből és bent marad egyedül a másik. Most a „B” támaszra írjuk fel a nyomatékokat. Behelyettesítve:

$$+ F_A \times l - F \times l/2 = 0$$

$$+ F_A \times 6 - 85 \times 3 = 0$$

$$F_A = 42,5 \text{ kN}$$

ezt követően már használhatjuk a

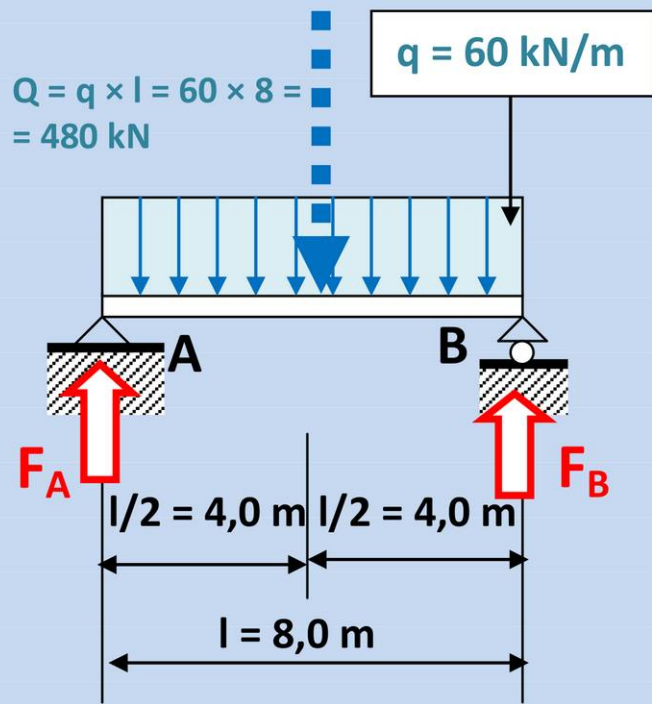
$\Sigma F_{iy} = 0$ egyenletet, mert egy ismeretlen maradt benne. Behelyettesítve:

$$-F_A + F - F_B = 0$$

$$-42,5 + 85 - F_B = 0$$

$$F_B = 42,5 \text{ kN}$$

Kéttámaszú tartó támaszerői



Az eredmény láttán általános érvénnyel megállapíthatjuk, hogy a szimmetrikus tartók támaszerői egyenlők, a nagyságuk pedig a terhelő erő fele.

$$F_A = F_B = Q/2 = 480 / 2 = 240 \text{ kN}$$

A tartón nincs vízszintes erő, ezért a $\sum F_{ix} = 0$ egyenletre nincs szükség.

A megoszló erőt át kell alakítani koncentrálttá:

$$Q = q \times l$$

A $\sum F_{iy} = 0$ egyenlettel nem lehet kezdeni a számítást, mert két ismeretlen van benne, a két függőleges támaszerő, F_A és F_B . A nyomatéki

$\sum M_i = 0$ egyenlettel kell kezdeni a számítást, mert ha felírjuk az összes erő nyomatékát az egyik (mindegy, hogy melyik) támaszra, akkor az „kiesik” az egyenletből és bent marad egyedül a másik. Most a „B” támaszra írjuk fel a nyomatékokat. Behelyettesítve:

$$+ F_A \times l - Q \times l/2 = 0$$

$$+ F_A \times 8 - 480 \times 4 = 0$$

$$F_A = 240 \text{ kN}$$

ezt követően már használhatjuk a

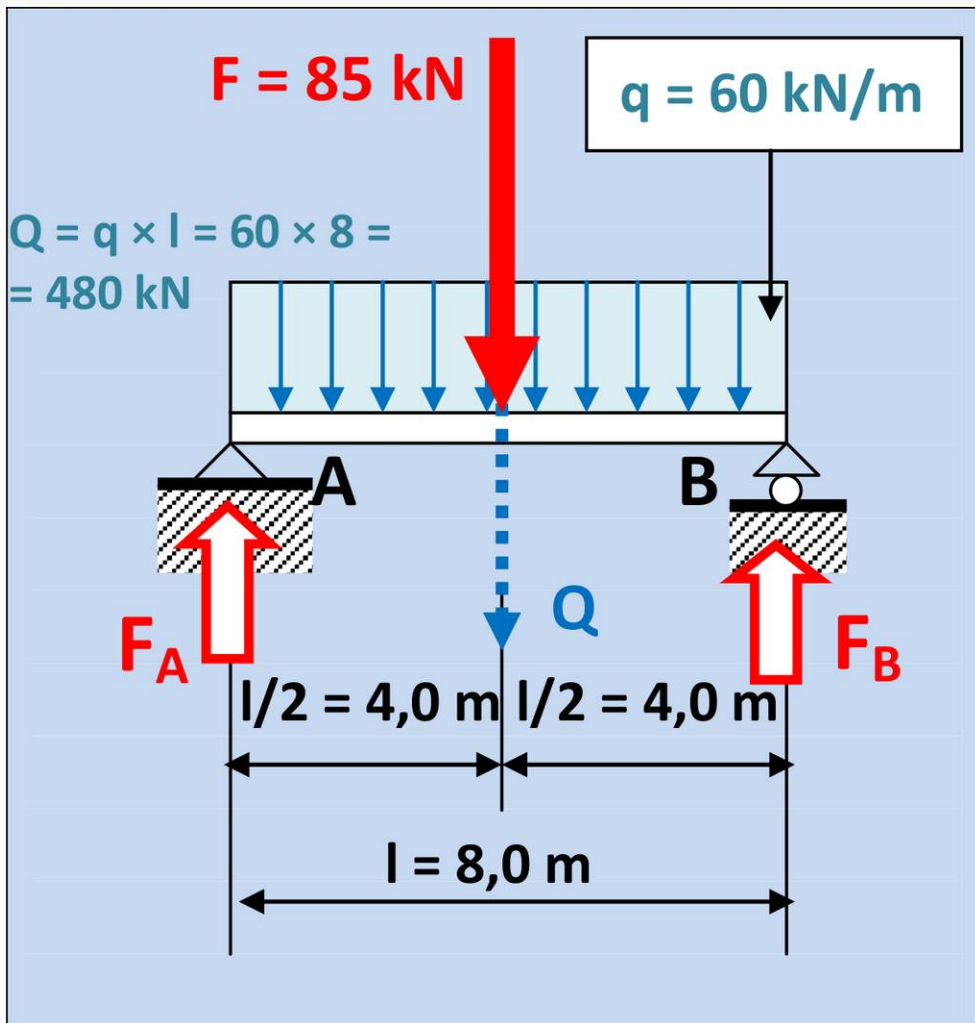
$\sum F_{iy} = 0$ egyenletet, mert egy ismeretlen maradt benne. Behelyettesítve:

$$-F_A + Q - F_B = 0$$

$$-240 + 480 - F_B = 0$$

$$F_B = 240 \text{ kN}$$

Kéttámaszú tartó támaszerői



Ennél a feladatnál vegyünk észre két körülményt!

Az egyik az, hogy az előző két feladat összevonásáról van szó, tehát most a koncentrált „ F ” erő és a megoszló „ q ” erő **együtt működik** a tartón. Ennek a tartónak a támaszerői tehát az előző támaszerők összegei. Tehát

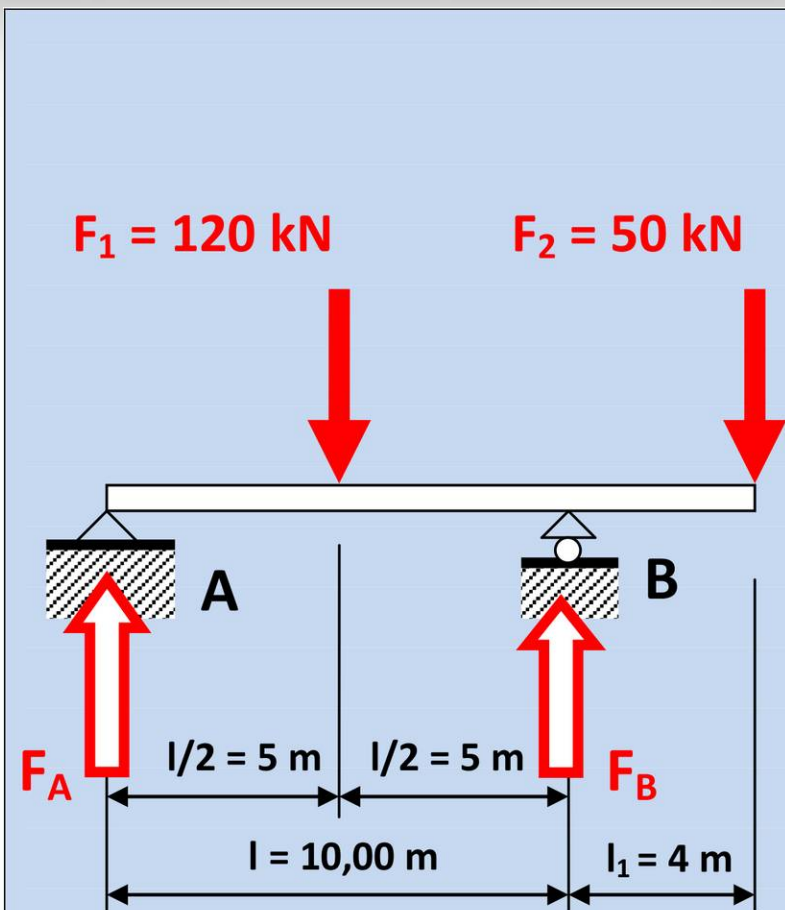
$$F_A = 42,5 + 240 = 282,5 \text{ kN}$$

$$F_B = 42,5 + 240 = 282,5 \text{ kN}$$

A másik az, hogy a tartó szimmetrikus, tehát a támaszerők egyenlők egymással is és a teher felével is:

$$F_A = F_B = (85 + 480)/2 = 282,5 \text{ kN}$$

Kéttámaszú konzolos tartó támaszerői



A tartón nincs vízszintes erő, ezért a $\Sigma F_{ix} = 0$ egyenletre nincs szükség.

A $\Sigma F_{iy} = 0$ egyenlettel nem lehet kezdeni a számítást, mert két ismeretlen van benne, a két függőleges támaszerő, F_A és F_B .

A nyomatéki

$\Sigma M_i = 0$ egyenlettel kell kezdeni a számítást, mert ha felírjuk az összes erő nyomatékát az egyik (mindegy, hogy melyik) támaszra, akkor az „kiesik” az egyenletből és bent marad egyedül a másik. Most a „B” támaszra írjuk fel a nyomatékokat. Behelyettesítve:

$$+ F_A \times l - F_1 \times l/2 + F_2 \times l_1 = 0$$

$$+ F_A \times 10 - 120 \times 5 + 50 \times 4 = 0$$

$$F_A = 40 \text{ kN}$$

ezt követően már használhatjuk a

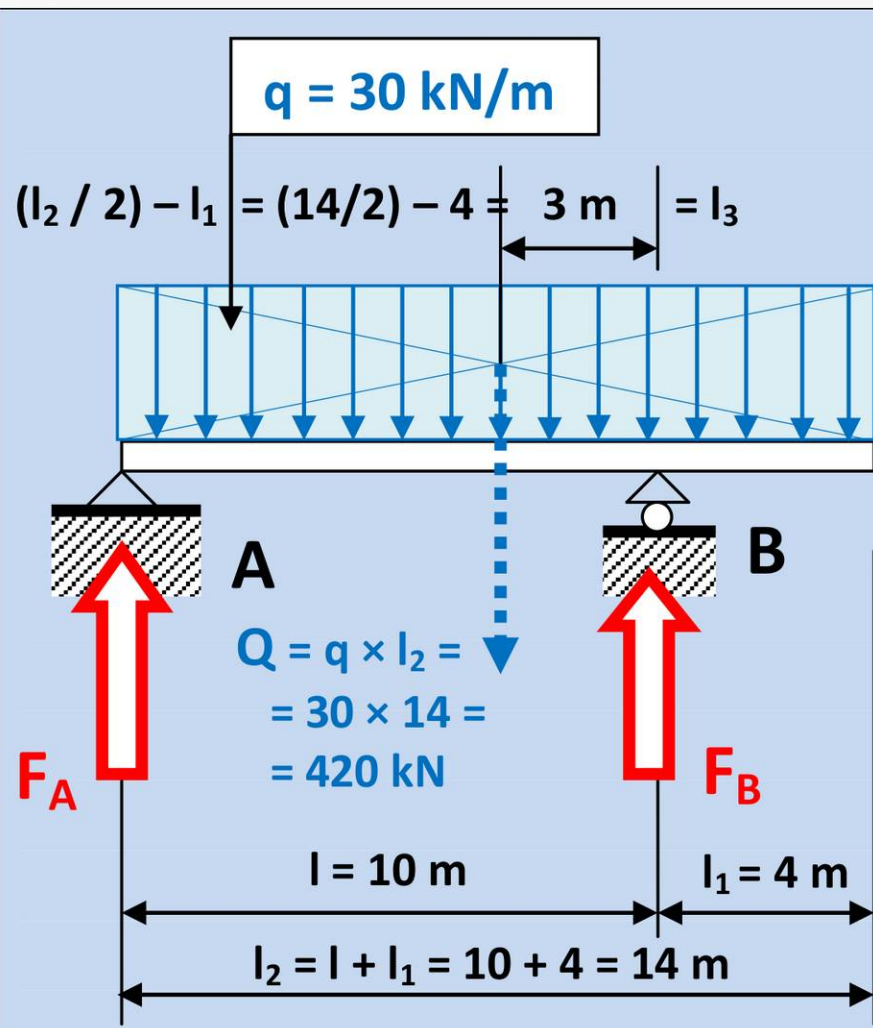
$\Sigma F_{iy} = 0$ egyenletet, mert egy ismeretlen maradt benne. Behelyettesítve:

$$- F_A + F_1 - F_B + F_2 = 0$$

$$- 40 + 120 - F_B + 50 = 0$$

$$F_B = 130 \text{ kN}$$

Kéttámaszú konzolos tartó támaszerői



A $\Sigma F_{iy} = 0$ egyenlettel nem lehet kezdeni a számítást, mert két ismeretlen van benne, a két függőleges támaszerő, F_A és F_B .

A nyomatéki

$\Sigma M_i = 0$ egyenlettel kell kezdeni a számítást, Most a „B” támaszra írjuk fel a nyomatékokat. Behelyettesítve:

$$+ F_A \times l - Q \times l_3 = 0$$

$$+ F_A \times 10 - 420 \times 3 = 0$$

$$F_A = 126 \text{ kN}$$

ezt követően már használhatjuk a

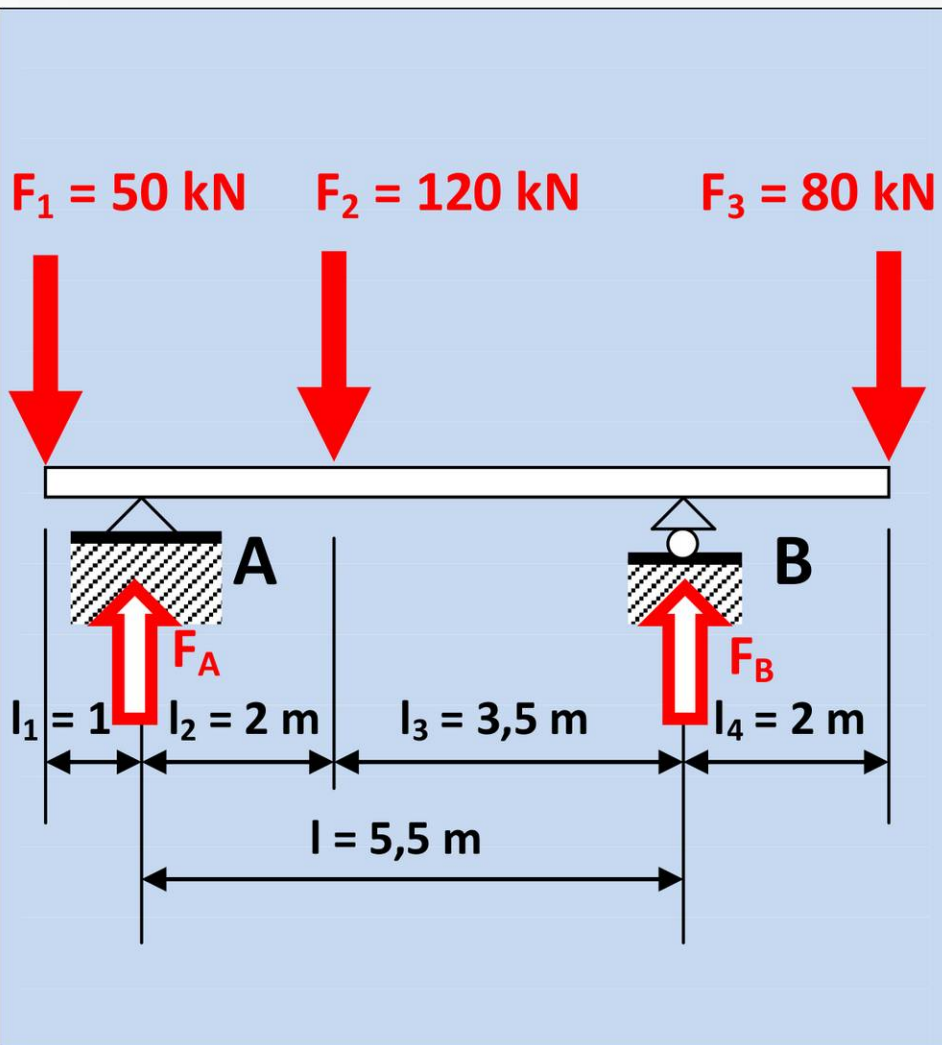
$\Sigma F_{iy} = 0$ egyenletet, mert egy ismeretlen maradt benne. Behelyettesítve:

$$- F_A + Q - F_B = 0$$

$$- 126 + 420 - F_B = 0$$

$$F_B = 294 \text{ kN}$$

Kéttámaszú konzolos tartó támaszerői



A $\Sigma F_{iy} = 0$ egyenlettel nem lehet kezdeni a számítást, mert két ismeretlen van benne, a két függőleges támaszerő, F_A és F_B .

A nyomatéki

$\Sigma M_i = 0$ egyenlettel kell kezdeni a számítást, Most a „B” támaszra írjuk fel a nyomatékokat. Behelyettesítve:

$$-F_1 \times (l_1 + l) + F_A \times l - F_2 \times l_3 + F_3 \times l_4 = 0$$

$$-50 \times (1 + 5,5) + F_A \times 5,5 - 120 \times 3,5 + 80 \times 2 = 0$$

$$F_A = 106,36 \text{ kN}$$

ezt követően már használhatjuk a

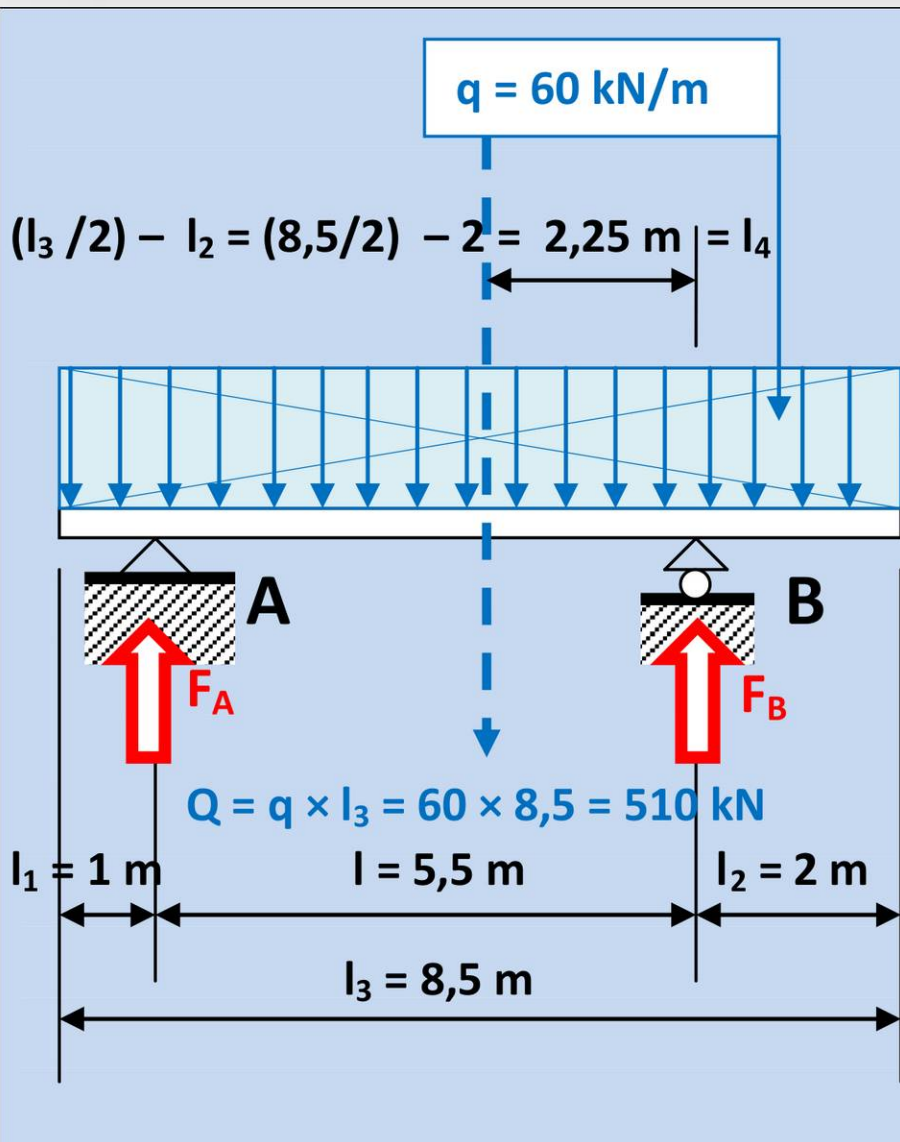
$\Sigma F_{iy} = 0$ egyenletet, mert egy ismeretlen maradt benne. Behelyettesítve:

$$+F_1 - F_A + F_2 - F_B + F_3 = 0$$

$$+50 - 106,36 + 120 - F_B + 80 = 0$$

$$F_B = 143,64 \text{ kN}$$

Kéttámaszú konzolos tartó támaszerői



A $\Sigma F_{iy} = 0$ egyenlettel nem lehet kezdeni a számítást, mert két ismeretlen van benne, a két függőleges támaszerő, F_A és F_B .

A nyomatéki

$\Sigma M_i = 0$ egyenlettel kell kezdeni a számítást, Most a „B” támaszra írjuk fel a nyomatékokat. Behelyettesítve:

$$+ F_A \times l - Q \times l_4 = 0$$

$$+ F_A \times 5,5 - 510 \times 2,25 = 0$$

$$F_A = 208,63 \text{ kN}$$

ezt követően már használhatjuk a

$\Sigma F_{iy} = 0$ egyenletet, mert egy ismeretlen maradt benne. Behelyettesítve:

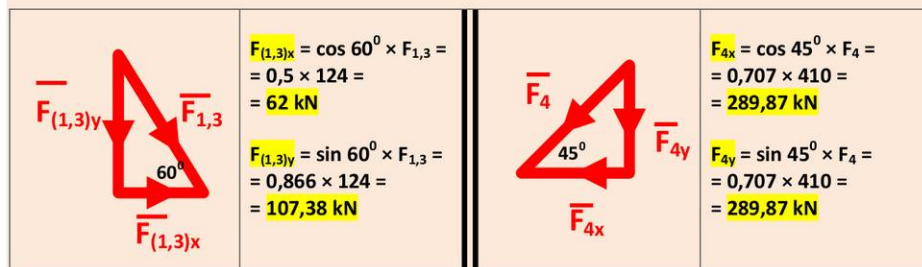
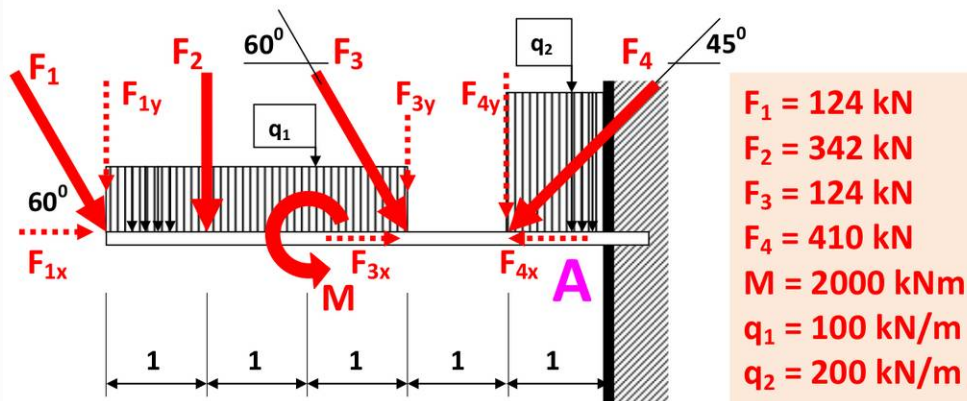
$$- F_A + Q - F_B = 0$$

$$- 208,63 + 510 - F_B = 0$$

$$F_B = 301,37 \text{ kN}$$

Támaszerők meghatározása – példa 1.

MEGHATÁROZANDÓK A KONZOL-TARTÓ „A” JELŰ TÁMASZÁBAN ÉBREDŐ REAKCIÓK, TEHÁT AZ „A” TÁMASZERŐ ÉS AZ „M_A” BEFOGÁSI NYOMATÉK!



A KONZOL-TARTÓ TÁMASZA A **MEREV BEFOGÁS**. EZ A TÁMASZ HÁROM ISMERETLENT JELENT, TEHÁT HARMADFOKÚ TÁMASZ (KÉNYSZER).

AZ EGYIK ISMERETLEN A **TÁMASZERŐ NAGYSÁGA**,
A MÁSIK ISMERETLEN A **TÁMASZERŐ HATÁSVONALA**,
A HARMADIK ISMERETLEN A **BEFOGÁSI NYOMATÉK**.

TERMÉSZETESEN A TÁMASZERŐT A KÉT KOMPONENSE IS HELYETTESÍTHETI. EZEKET SZOLGÁLTATJÁK A VETÜLETI EGYENLETEK. A BEFOGÁSI NYOMATÉKOT PEDIG A NYOMATÉKI EGYENLET SZOLGÁLTATJA.

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\begin{aligned}
 + F_{1x} + F_{3x} - F_{4x} + A_x &= 0 \\
 + 62 + 62 - 289,87 + A_x &= 0 \\
 A_x &= + 165,87 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

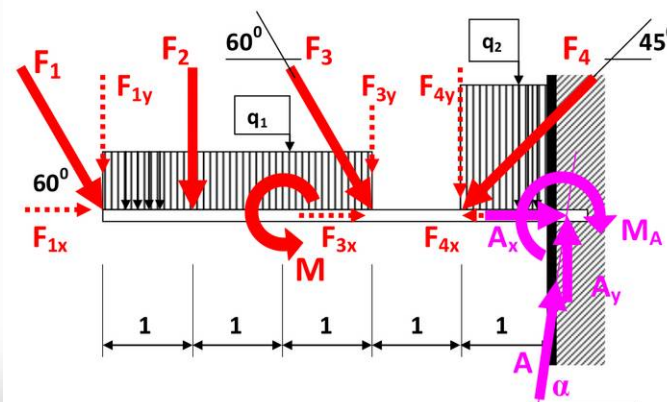
$$\begin{aligned}
 + F_{1y} + F_2 + Q_1 + F_{3y} + F_{4y} + Q_2 + A_y &= 0 \\
 + 107,38 + 342 + 300 + 107,38 + 289,97 + 200 + A_y &= 0 \\
 A_y &= - 1346,63 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= (A_x^2 + A_y^2)^{1/2} = (165,87^2 + 1346,63^2) = 1356,8 \text{ kN} \\
 \text{tg } \alpha &= A_y / A_x = 1346,63 / 165,87 = 8,11858 \\
 \alpha &= 82,97^\circ
 \end{aligned}$$

$$\sum M_i^A = 0$$

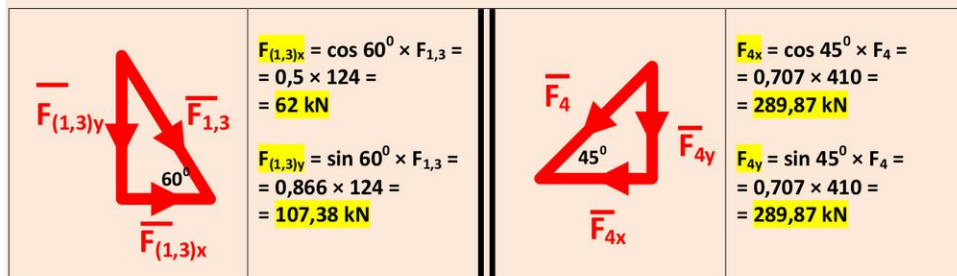
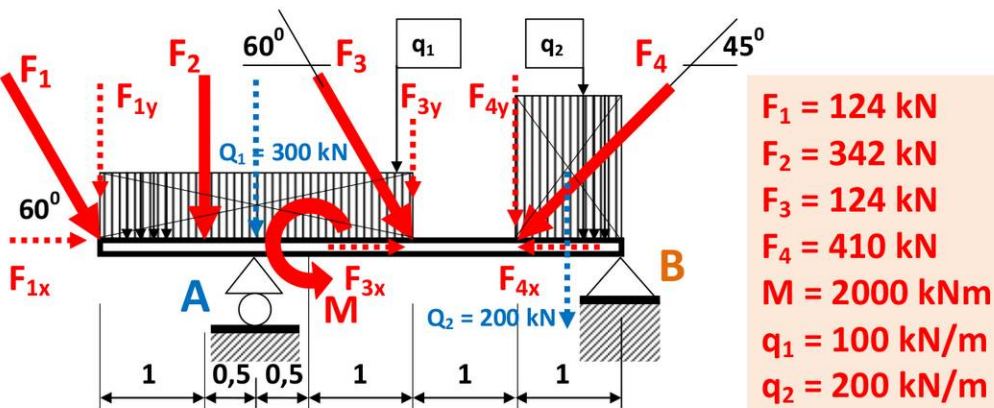
$$\begin{aligned}
 -F_{1y} \times 5 - F_2 \times 4 - Q_1 \times 3,5 - M - F_{3y} \times 2 - F_{4y} \times 1 - Q_2 \times 0,5 + M_A &= 0 \\
 -107,38 \times 5 - 342 \times 4 - 300 \times 3,5 - 2000 - 107,38 \times 2 - 289,87 \times 1 - 200 \times 0,5 + M_A &= 0 \\
 M_A &= + 5559,53 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

EREDMÉNYVÁZLAT



Támaszerők meghatározása – példa 2.

MEGHATÁROZANDÓK A KÉTTÁMASZÚ TARTÓ „A” ÉS „B” JELŰ TÁMASZÁBAN ÉBREDŐ REAKCIÓK!



A KÉTTÁMASZÚ TARTÓ EGYIK TÁMASZA AZ „A” GÖRGŐ, A MÁSIK TÁMASZA A „B” FIX CSUKLÓ. A GÖRGŐBEN CSAK AZ ALÁTÁMASZTÁS SÍKJÁRA MERŐLEGES ERŐ ÉBREDHET, ITT TEHÁT EGY ISMRETLEN VAN, A TÁMASZERŐ NAGYSÁGA, MELYET A „B”-RE FELÍRT EGYENSÚLYI NYOMATÉKI EGYENLET SZOLGÁLTAT. A FIX CSUKLÓBAN BÁRMILYEN HATÁSVONALÚ ERŐ ÉBREDHET, TEHÁT ITT KÉT ISMERETLEN VAN, AZ EGYIK A TÁMASZERŐ NAGYSÁGA, A MÁSIK A HATÁSVONALA. EZT A TÁMASZERŐT TERMÉSZETESEN A VÍZSZINTES ÉS FÜGGŐLEGES KOMPONENSEI IS HELYETTESÍTHETIK, MELYEKET AZ EGYENSÚLY VETÜLETI EGYENLETEI SZOLGÁLTATNAK.

$$\Sigma M_i^B = 0$$

$$-F_{1y} \times 5 - F_2 \times 4 - Q_1 \times 3,5 + A \times 3,5 - M - F_{3y} \times 2 - F_{4y} \times 1 - Q_2 \times 0,5 = 0$$

$$-107,38 \times 5 - 342 \times 4 - 300 \times 3,5 + A \times 3,5 - 2000 - 107,38 \times 2 - 289,87 \times 1 - 200 \times 0,5 = 0$$

$$-5559,53 + A \times 3,5 = 0$$

$$A = + 1588,43 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{ix} = 0$$

$$+ F_{1x} + F_{3x} - F_{4x} + B_x = 0$$
$$+ 62 + 62 - 289,87 + B_x = 0$$
$$B_x = + 165,87 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_{iy} = 0$$

$$+ F_{1y} + F_2 + Q_1 - A + F_{3y} + F_{4y} + Q_2 + B_y = 0$$

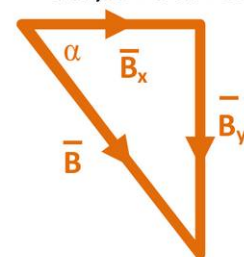
$$+ 107,38 + 342 + 300 - 1588,43 + 107,38 + 289,97 + 200 + B_y = 0$$

$$B_y = + 241,7 \text{ kN}$$

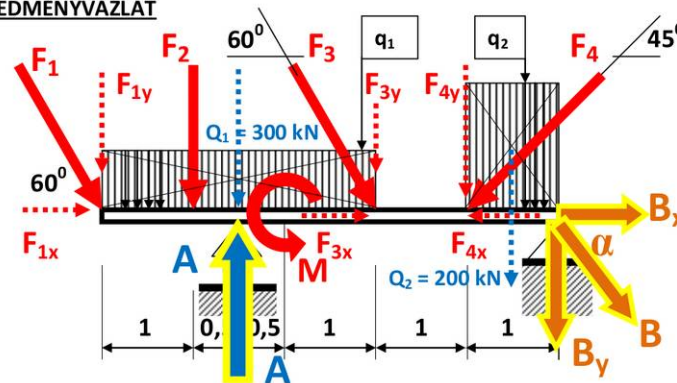
$$B = (B_x^2 + B_y^2)^{1/2} = (165,87^2 + 241,7^2)^{1/2}$$

$$B = 293,14 \text{ kN}$$

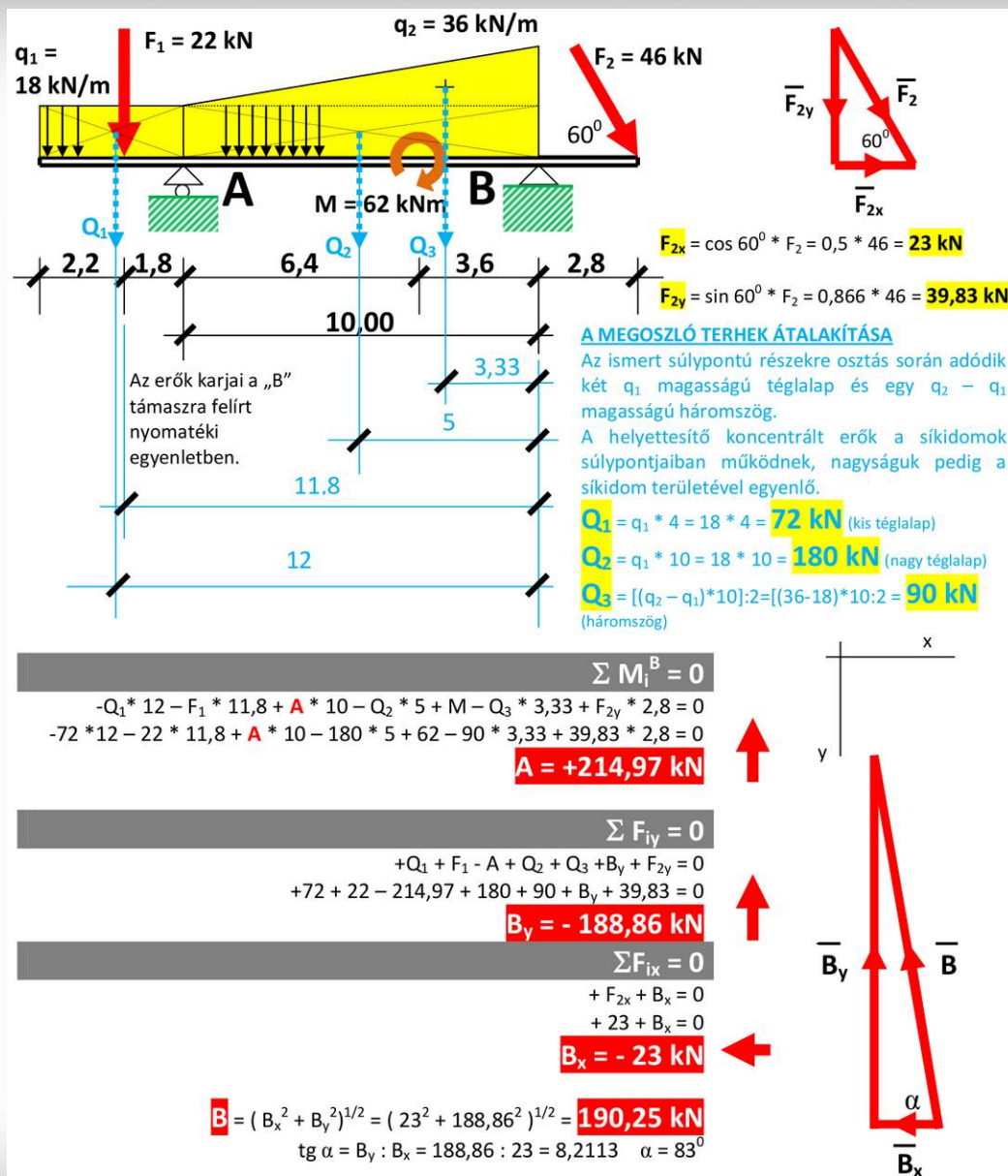
$$\alpha = 55,53^\circ$$



EREDMÉNYVÁZLAT



Támaszerők meghatározása – példa 3.



Egyszerű tartó támaszerői



$$\sum M_B = 0 = M_A + q \cdot 6,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} - F_C \cdot 6,0 \text{ m} = -36 \text{ kNm} + 2 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} - F_C \cdot 6,0 \text{ m}$$

$$F_C = \frac{-36 \text{ kNm} + 2 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m}}{6,0 \text{ m}} = \frac{-36 \text{ kNm} + 36 \text{ kNm}}{6,0 \text{ m}} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot 6,0 \text{ m} - F_B - F_C$$

$$F_B = q \cdot 6,0 \text{ m} = 2 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} = 12 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői



$$\Sigma M_B = 0 = -F \cdot 6,0\text{ m} + F_{Ay} \cdot 4,0\text{ m} = -4\text{ kN} \cdot 6,0\text{ m} + F_{Ay} \cdot 4,0\text{ m}$$

$$F_{Ay} = \frac{4\text{ kN} \cdot 6,0\text{ m}}{4,0\text{ m}} = \frac{24,0\text{ kNm}}{4,0\text{ m}} = 6,0\text{ kN} (\uparrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = F - F_{Ay} + F_{By} = 4,0\text{ kN} - 6,0\text{ kN} + F_{By}$$

$$F_{By} = 2,0\text{ kN} (\downarrow)$$

$$F_{Bx} = F_{By} \cdot \tan 30^\circ = 2,0\text{ kN} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2,0\text{ kN}}{\sqrt{3}} = 1,155\text{ kN} (\leftarrow)$$

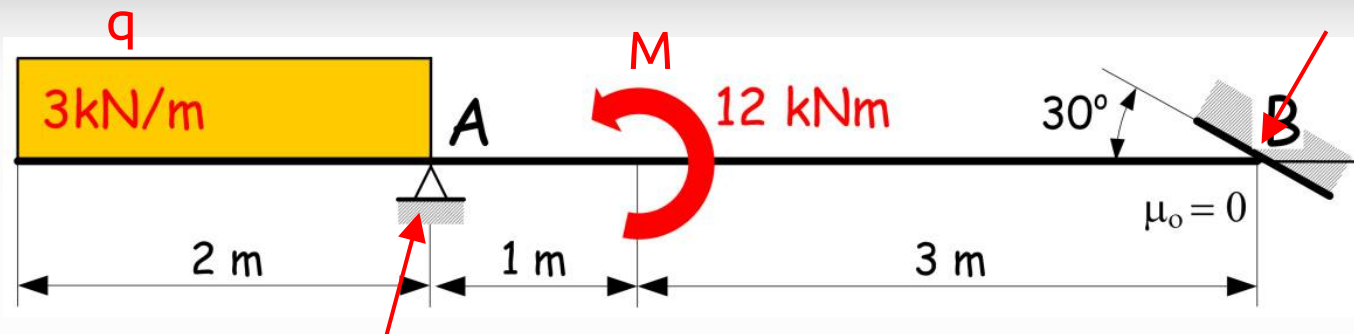
$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(2,0\text{ kN})^2 + (1,155\text{ kN})^2} = 2,31\text{ kN} (\leftarrow \downarrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx} \Rightarrow F_{Ax} = F_{Bx} = 1,155\text{ kN} (\rightarrow)$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(6,0\text{ kN})^2 + (1,155\text{ kN})^2} = 6,11\text{ kN} (\rightarrow \uparrow)$$

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{6,0}{1,155} \Rightarrow \alpha = 79,1^\circ$$

Egyszerű tartó támaszerői



$$\Sigma M_B = 0 = M - q \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} + F_{Ay} \cdot 4,0 \text{ m} = -12 \text{ kNm} - 3,0 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} + F_{Ay} \cdot 4,0 \text{ m}$$

$$F_{Ay} = \frac{12 \text{ kNm} + 3,0 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m}}{4,0 \text{ m}} = \frac{42,0 \text{ kNm}}{4,0 \text{ m}} = 10,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 = q \cdot 2,0 \text{ m} - F_{Ay} + F_{By} = 6,0 \text{ kN} - 10,5 \text{ kN} + F_{By}$$

$$F_{By} = 4,5 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$F_{Bx} = F_{By} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 4,5 \text{ kN} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4,5 \text{ kN}}{\sqrt{3}} = 2,6 (\leftarrow)$$

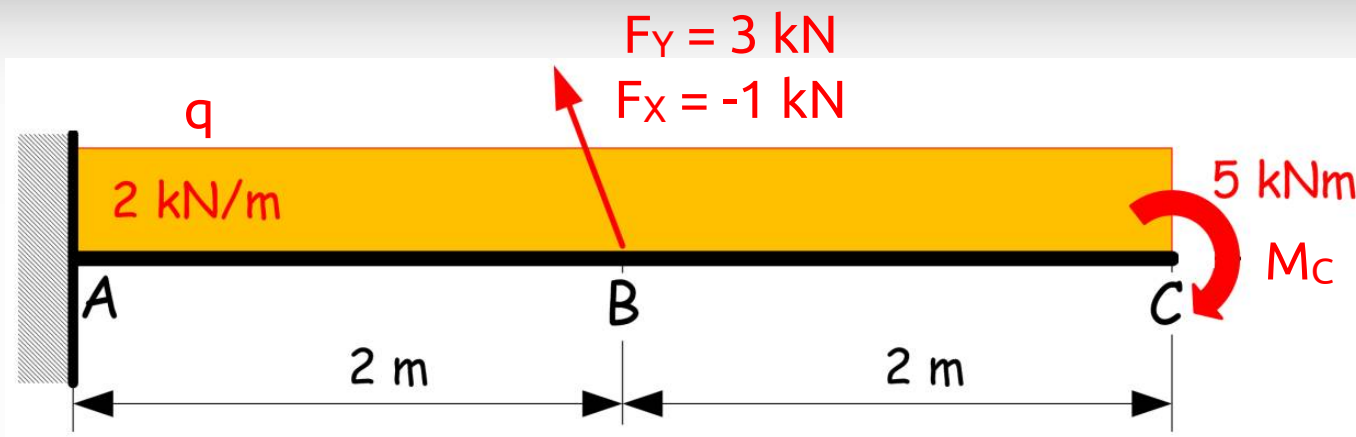
$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{(4,5 \text{ kN})^2 + (2,6 \text{ kN})^2} = 5,2 \text{ kN} (\swarrow)$$

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx} \Rightarrow F_{Ax} = F_{Bx} = 2,6 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(10,5 \text{ kN})^2 + (2,6 \text{ kN})^2} = 10,82 \text{ kN} (\nearrow)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{10,5}{2,6} \Rightarrow \alpha = 76,1^\circ$$

Egyszerű tartó támaszerői



$$\Sigma M_{(A)} = 0 = M_A - F_y \cdot 2,0m + q \cdot 4,0m \cdot 2,0m + M_C = M_A - 3,0kN \cdot 2,0m + 2,0kN/m \cdot 4,0m \cdot 2,0m + 5,0kNm$$

$$M_A = 3,0kN \cdot 2,0m - 2,0kN/m \cdot 4,0m \cdot 2,0m - 5,0kNm = -15,0kNm$$

$$\Sigma F_y = 0 = q \cdot 4,0m - F_y - F_{Ay} = 2kN/m \cdot 4,0m - 3,0kN - F_{Ay}$$

$$F_{Ay} = 2,0kN/m \cdot 4,0m - 3,0kN = 5,0kN (\uparrow)$$

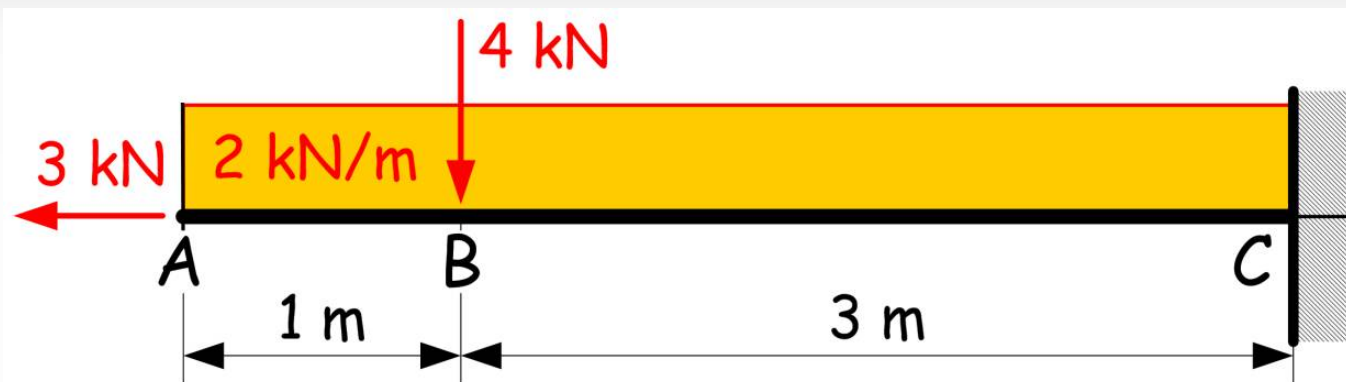
$$\Sigma F_x = 0 = -F_x + F_{Ax} = F_{Ax} - 1,0kN$$

$$F_{Ax} = 1,0kN (\rightarrow)$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(5,0kN)^2 + (1,0kN)^2} = 5,1kN (\rightarrow \uparrow)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{5,0}{1,0} \Rightarrow \alpha = 78,7^\circ$$

Egyszerű tartó támaszerői



$$\Sigma M_{(C)} = 0 = -F_2 \cdot 3,0m - q \cdot 4,0m \cdot 2,0m + M_C = -4,0kN \cdot 3,0m - 2,0kN/m \cdot 4,0m \cdot 2,0m + M_C$$

$$M_C = 4,0kN \cdot 3,0m + 2,0kN/m \cdot 4,0m \cdot 2,0m = 28,0kNm$$

$$\Sigma F_y = 0 = q \cdot 4,0m + F_2 - F_{Cy} = 2kN/m \cdot 4,0m + 4,0kN - F_{Cy}$$

$$F_{Cy} = 2,0kN/m \cdot 4,0m + 4,0kN = 12,0kN (\uparrow)$$

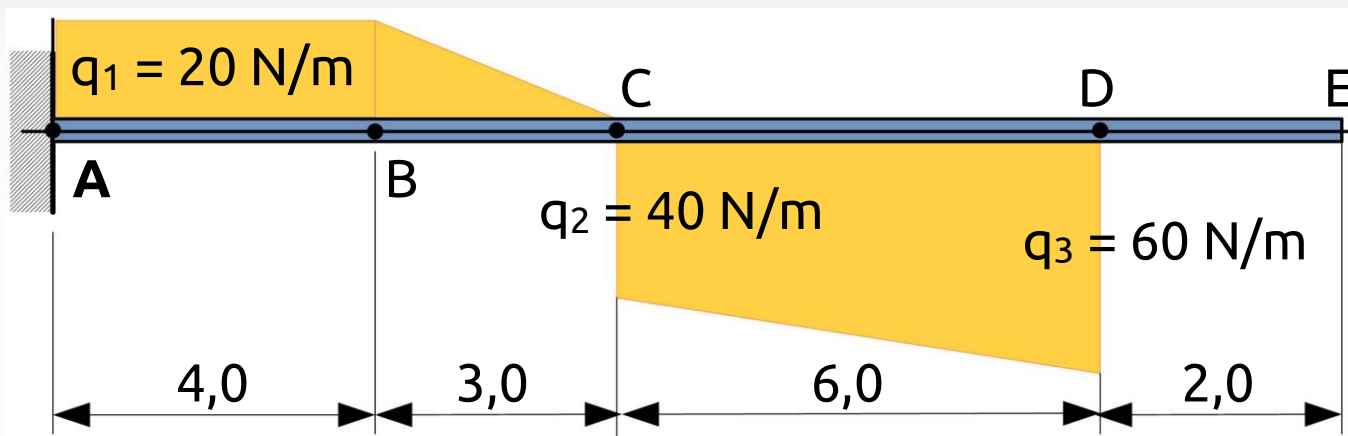
$$\Sigma F_x = 0 = -F_1 + F_{Cx} = -3kN + F_{Cx}$$

$$F_{Cx} = 3,0kN (\rightarrow)$$

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \sqrt{(12,0kN)^2 + (3,0kN)^2} = 12,37kN (\rightarrow \uparrow)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{Cy}}{F_{Cx}} = \frac{12,0}{3,0} \Rightarrow \alpha = 75,96^\circ$$

Egyszerű tartó támaszerői

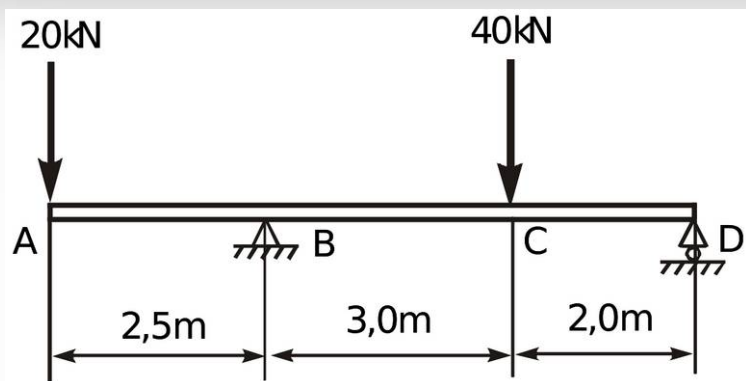


$$\begin{aligned}\Sigma M_{(A)} = 0 &= M_A + q_1 \cdot 4,0m \cdot 2,0m + q_1 \cdot \frac{3,0m}{2} \cdot (4,0m + 1,0m) \\ &\quad - q_2 \cdot 6,0m \cdot (7,0m + 3,0m) - (q_3 - q_2) \cdot \frac{6,0m}{2} \cdot (7,0m + 4,0m) = \\ &= M_A + 20 \text{ N/m} \cdot 4,0m \cdot 2,0m + 20 \text{ N/m} \cdot \frac{3,0m}{2} \cdot 5,0m - 40 \text{ N/m} \cdot 6,0m \cdot 10,0m - 20 \text{ N/m} \cdot \frac{6,0m}{2} \cdot 11,0m = \\ &= M_A + 160 \text{ Nm} + 150 \text{ Nm} - 2400 \text{ Nm} - 660 \text{ Nm} = M_A - 2750 \text{ Nm}\end{aligned}$$

$$M_A = 2750 \text{ Nm}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &= A_y + q_1 \cdot 4,0m + q_1 \cdot \frac{3,0m}{2} - q_2 \cdot 6,0m - (q_3 - q_2) \cdot \frac{6,0m}{2} = \\ &= A_y + 20 \text{ N/m} \cdot 4,0m + 20 \text{ N/m} \cdot \frac{3,0m}{2} - 40 \text{ N/m} \cdot 6,0m - (60 \text{ N/m} - 40 \text{ N/m}) \cdot \frac{6,0m}{2} = \\ &= A_y + 80 \text{ N} + 30 \text{ N} - 240 \text{ N} - 60 \text{ N} = A_y - 190 \text{ N} \Rightarrow A_y = 190 \text{ N} (\downarrow)\end{aligned}$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 1



$$\begin{aligned} F_1 &= 20 \text{ kN} \\ F_2 &= 40 \text{ kN} \\ a &= 2,0 \text{ m} \\ b &= 3,0 \text{ m} \\ c &= 2,0 \text{ m} \end{aligned}$$

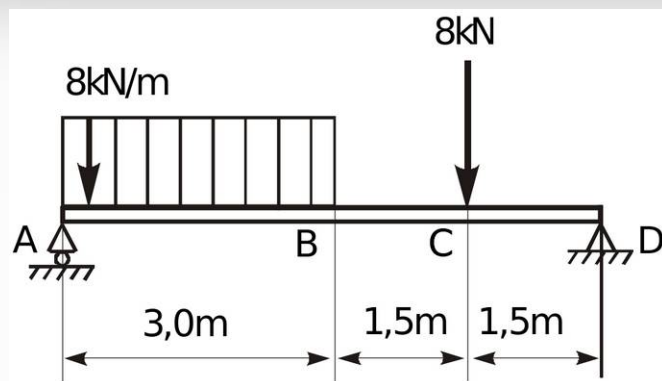
$$\begin{aligned} \sum M_{(B)} &= 0 = -F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - D \cdot (b + c) = -20 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 40 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - D \cdot (3,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) \\ &= -20 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 40 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - D \cdot 5,0 \text{ m} = -40,0 \text{ kNm} + 120,0 \text{ kNm} - D \cdot 5,0 \text{ m} = 80,0 \text{ kNm} - D \cdot 5,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$D = \frac{80 \text{ kNm}}{5,0 \text{ m}} = 16,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = F_1 + F_2 - D - B = 20,0 \text{ kN} + 40,0 \text{ kN} - 16,0 \text{ kN} - B = 44,0 \text{ kN} - B$$

$$B = 44,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 2



$$\begin{aligned} q &= 8 \text{ kN/m} \\ F &= 8 \text{ kN} \\ a &= 3,0 \text{ m} \\ b &= 1,5 \text{ m} \\ c &= 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

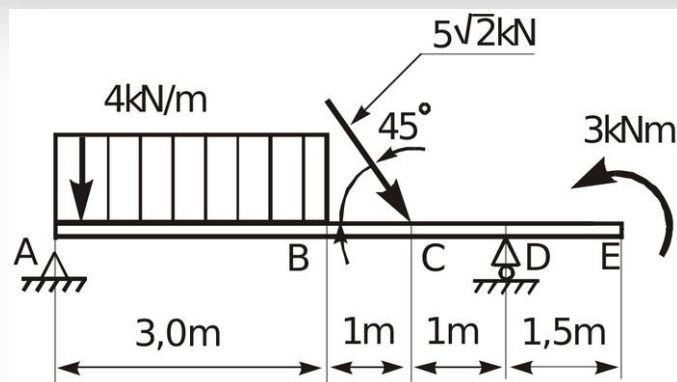
$$\begin{aligned} \sum M_{(A)} = 0 &= q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot (b + c) - D \cdot (a + b + c) = 8 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} \cdot \frac{3,0 \text{ m}}{2} + 8 \text{ kN} \cdot (3,0 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) - D \cdot (3,0 \text{ m} + 1,5 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) \\ &= 8 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} - D \cdot 6,0 \text{ m} = 36,0 \text{ kNm} + 36,0 \text{ kNm} - D \cdot 6,0 \text{ m} = 72,0 \text{ kNm} - D \cdot 6,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$D = \frac{72,0 \text{ kNm}}{6,0 \text{ m}} = 12,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot a + F - D - A = 8,0 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 8,0 \text{ kN} - 12,0 \text{ kN} - A = 20,0 \text{ kN} - A$$

$$A = 20,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 3



$q = 4 \text{ kN/m}$
 $F = 5\sqrt{2} \text{ kN}$ ($F_x = F_y = 5 \text{ kN}$)
 $M = 3 \text{ kNm}$
 $a = 3,0 \text{ m}$
 $b = 1,0 \text{ m}$
 $c = 1,0 \text{ m}$
 $d = 1,5 \text{ m}$

$$\begin{aligned}
 \sum M_{(A)} = 0 &= q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F_y \cdot (b + c) - D \cdot (a + b + c) - M \\
 &= 4 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} \cdot \frac{3,0 \text{ m}}{2} + 5 \text{ kN} \cdot (3,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m}) - D \cdot (3,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m}) - 3 \text{ kNm} \\
 &= 4 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} + 5 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} - D \cdot 5,0 \text{ m} - 3 \text{ kNm} = 18 \text{ kNm} + 20 \text{ kNm} - D \cdot 5,0 \text{ m} - 3 \text{ kNm} = 35,0 \text{ kNm} - D \cdot 5,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{35,0 \text{ kNm}}{5,0 \text{ m}} = 7,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

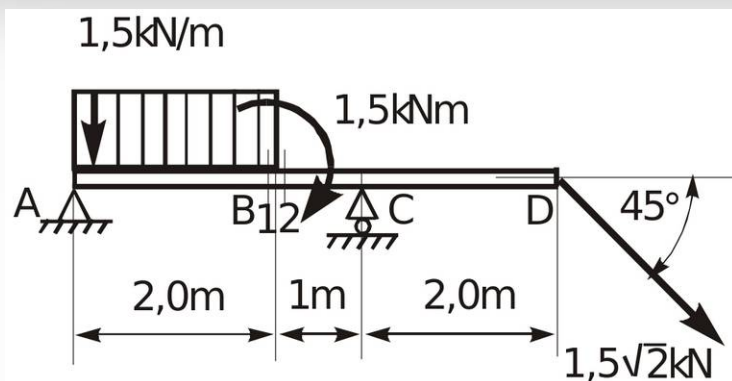
$$\sum F_y = 0 = q \cdot a + F_y - D - A_y = 4,0 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} + 5,0 \text{ kN} - 7,0 \text{ kN} - A_y = 10,0 \text{ kN} - A_y$$

$$A_y = 20,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0 = F_x - A_x = 5,0 \text{ kN} - A_x$$

$$A_x = 5,0 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 4



$q = 1,5 \text{ kN/m}$
 $F = 1,5\sqrt{2} \text{ kN} \text{ (} F_x = F_y = 1,5 \text{ kN)}$
 $M = 1,5 \text{ kNm}$
 $a = 2,0 \text{ m}$
 $b = 1,0 \text{ m}$
 $c = 2,0 \text{ m}$

$$\begin{aligned}
 \sum M_{(A)} = 0 &= q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M - C \cdot (a + b) + F_y \cdot (a + b + c) \\
 &= 1,5 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \frac{2,0 \text{ m}}{2} + 1,5 \text{ kNm} - C \cdot (2,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m}) + 1,5 \text{ kN} \cdot (2,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) \\
 &= 1,5 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ m} + 1,5 \text{ kNm} - C \cdot 3,0 \text{ m} + 1,5 \text{ kN} \cdot 5,0 \text{ m} = 3,0 \text{ kNm} + 1,5 \text{ kNm} - C \cdot 3,0 \text{ m} + 7,5 \text{ kNm} \\
 &= 12,0 \text{ kNm} - C \cdot 3,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{12,0 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = 4,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

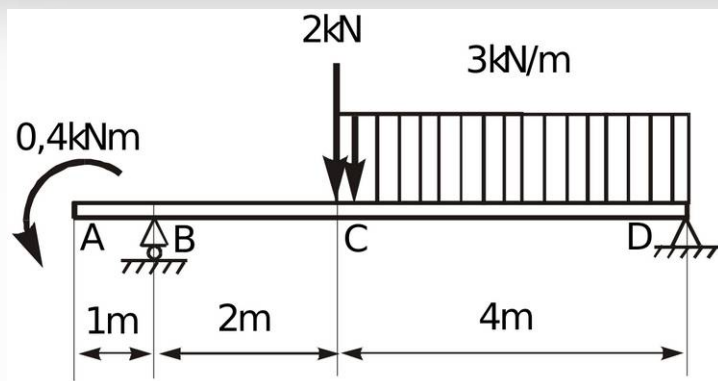
$$\sum F_y = 0 = q \cdot a + F_y - C - A_y = 1,5 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 1,5 \text{ kN} - 4,0 \text{ kN} - A_y = 0,5 \text{ kN} - A_y$$

$$A_y = 0,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0 = F_x - A_x = 1,5 \text{ kN} - A_x$$

$$A_x = 1,5 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 5



$q = 3 \text{ kN/m}$
 $F = 2 \text{ kN}$
 $M = 0,4 \text{ kNm}$
 $a = 1,0 \text{ m}$
 $b = 2,0 \text{ m}$
 $c = 4,0 \text{ m}$

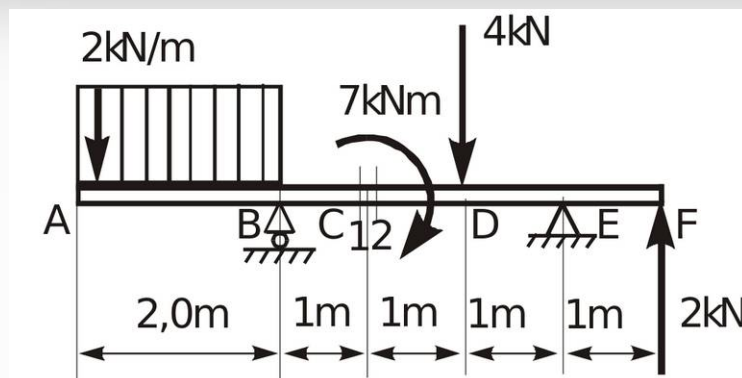
$$\begin{aligned}
 \sum M_{(B)} &= 0 = -M + F \cdot b + q \cdot c \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) - D \cdot (b + c) \\
 &= -0,4 \text{ kNm} + 2 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 3 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \left(2,0 \text{ m} + \frac{4,0 \text{ m}}{2}\right) - D \cdot (2,0 \text{ m} + 4,0 \text{ m}) \\
 &= -0,4 \text{ kNm} + 2 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} + 3 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot 4,0 \text{ m} - D \cdot 6,0 \text{ m} = -0,4 \text{ kNm} + 4,0 \text{ kNm} + 48,0 \text{ kNm} - D \cdot 6,0 \text{ m} \\
 &= 51,6 \text{ kNm} - D \cdot 6,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{51,6 \text{ kNm}}{6,0 \text{ m}} = 8,6 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = F + q \cdot c - D - B = 2,0 \text{ kN} + 3,0 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} - 8,6 \text{ kN} - B = 5,4 \text{ kN} - B$$

$$B = 5,4 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 6



$q = 2 \text{ kN/m}$
 $M = 7 \text{ kNm}$
 $F_1 = 4 \text{ kN}$
 $F_2 = 2 \text{ kN}$
 $a = 2,0 \text{ m}$
 $b = 1,0 \text{ m}$
 $c = 1,0 \text{ m}$
 $d = 1,0 \text{ m}$
 $e = 1,0 \text{ m}$

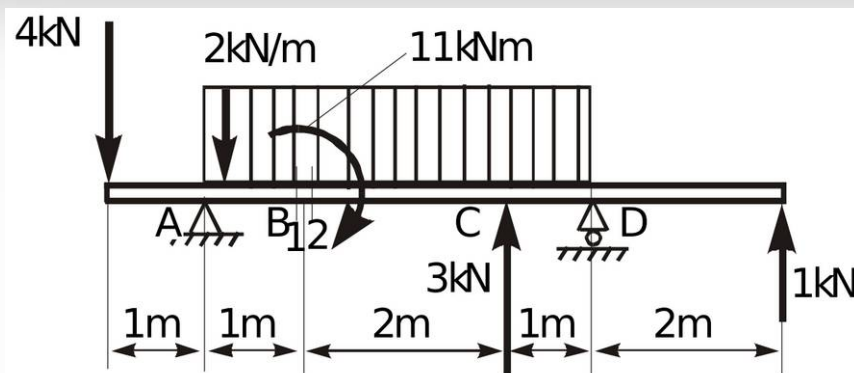
$$\begin{aligned}
 \sum M_{(B)} &= 0 = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M + F_1 \cdot (b + c) - E \cdot (b + c + d) - F_2 \cdot (b + c + d + e) \\
 &= -2 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \frac{2,0 \text{ m}}{2} + 7 \text{ kNm} + 4 \text{ kN} \cdot (1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m}) - E \cdot (1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m}) - 2 \text{ kN} \cdot (1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 1,0 \text{ m}) \\
 &= -2 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ m} + 7 \text{ kNm} + 4 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} - E \cdot 3,0 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} = -4 \text{ kNm} + 7 \text{ kNm} + 8 \text{ kNm} - E \cdot 3,0 \text{ m} - 8 \text{ kNm} \\
 &= 3,0 \text{ kNm} - E \cdot 3,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$E = \frac{3,0 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = 1,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot a + F_1 - E - F_2 - B = 2,0 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} + 4,0 \text{ kN} - 1,0 \text{ kN} - 2,0 \text{ kN} - B = 5,0 \text{ kN} - B$$

$$B = 5,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 7



$q = 2 \text{ kN/m}$
 $M = 11 \text{ kNm}$
 $F_1 = 4 \text{ kN}$
 $F_2 = 3 \text{ kN}$
 $F_3 = 1 \text{ kN}$
 $a = 1,0 \text{ m}$
 $b = 1,0 \text{ m}$
 $c = 2,0 \text{ m}$
 $d = 1,0 \text{ m}$
 $e = 2,0 \text{ m}$
 $l = b + c + d = 4,0 \text{ m}$

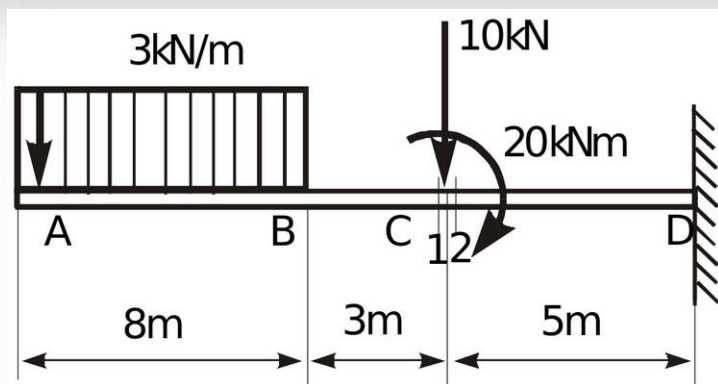
$$\begin{aligned}
 \sum M_{(A)} &= 0 = -F_1 \cdot a + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M - F_2 \cdot (b + c) - D \cdot l - F_3 \cdot (l + e) \\
 &= -4 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} + 2 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \frac{4,0 \text{ m}}{2} + 11 \text{ kNm} - 3 \text{ kN} \cdot (1,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) - D \cdot 4,0 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot (4,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) \\
 &= -4 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} + 2 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot 2,0 \text{ m} + 11 \text{ kNm} - 3 \text{ kN} \cdot 3,0 \text{ m} - D \cdot 4,0 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} \\
 &= -4 \text{ kNm} + 16 \text{ kNm} + 11 \text{ kNm} - 9 \text{ kNm} - D \cdot 4,0 \text{ m} - 6 \text{ kNm} = 8,0 \text{ kNm} - D \cdot 4,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{8,0 \text{ kNm}}{4,0 \text{ m}} = 2,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = F_1 + q \cdot l - F_2 - D - F_3 - A = 4,0 \text{ kN} + 2,0 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} - 3,0 \text{ kN} - 2,0 \text{ kN} - 1,0 \text{ kN} - A = 6,0 \text{ kN} - A$$

$$A = 6,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 8



$q = 3 \text{ kN/m}$
 $F = 10 \text{ kN}$
 $M = 20 \text{ kNm}$
 $a = 8,0 \text{ m}$
 $b = 3,0 \text{ m}$
 $c = 5,0 \text{ m}$

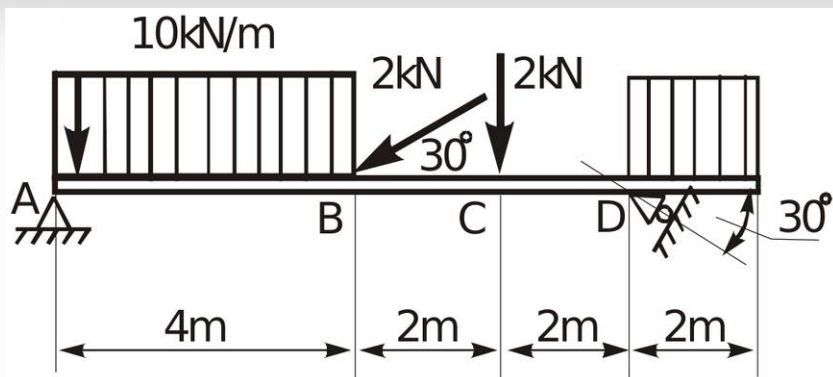
$$\begin{aligned}
 \sum M_{(D)} = 0 &= -q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c \right) - F \cdot c + M + M_D = -3 \text{ kN/m} \cdot 8,0 \text{ m} \cdot \left(\frac{8,0 \text{ m}}{2} + 3,0 \text{ m} + 5,0 \text{ m} \right) - 10 \text{ kN} \cdot 5,0 \text{ m} + 20 \text{ kNm} + M_D \\
 &= -3 \text{ kN/m} \cdot 8,0 \text{ m} \cdot (4,0 \text{ m} + 3,0 \text{ m} + 5,0 \text{ m}) - 10 \text{ kN} \cdot 5,0 \text{ m} + 20 \text{ kNm} + M_D \\
 &= -3 \text{ kN/m} \cdot 8,0 \text{ m} \cdot 12,0 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 5,0 \text{ m} + 20 \text{ kNm} + M_D \\
 &= -288,0 \text{ kNm} - 50,0 \text{ kNm} + 20,0 \text{ kNm} + M_D = -318,0 \text{ kNm} + M_D
 \end{aligned}$$

$$M_D = +318,0 \text{ kNm}$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot a + F - D = 3,0 \text{ kN/m} \cdot 8,0 \text{ m} + 10,0 \text{ kN} - D = 34,0 \text{ kN} - D$$

$$D = 34,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 9



$q = 10 \text{ kN/m}$
 $F_1 = 2 \text{ kN}$ ($F_x = 1,732 \text{ kN}$, $F_y = 1,0 \text{ kN}$)
 $F_2 = 2 \text{ kN}$
 $a = 4,0 \text{ m}$
 $b = 2,0 \text{ m}$
 $c = 2,0 \text{ m}$
 $d = 2,0 \text{ m}$
 $l = a + b + c = 8,0 \text{ m}$

$$\begin{aligned}
 \sum M_{(A)} = 0 &= q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F_{1y} \cdot a + F_2 \cdot (a + b) - D_y \cdot l + q \cdot d \cdot \left(l + \frac{d}{2} \right) \\
 &= 10 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \frac{4,0 \text{ m}}{2} + 1 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 2 \text{ kN} \cdot (4,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) - D_y \cdot 8,0 \text{ m} + 10 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \left(8,0 \text{ m} + \frac{2,0 \text{ m}}{2} \right) \\
 &= 10 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot 2,0 \text{ m} + 1 \text{ kN} \cdot 4,0 \text{ m} + 2 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} - D_y \cdot 8,0 \text{ m} + 10 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 9,0 \text{ m} \\
 &= 80 \text{ kNm} + 4 \text{ kNm} + 12 \text{ kNm} - D_y \cdot 8,0 \text{ m} + 180 \text{ kNm} = 276 \text{ kNm} - D_y \cdot 8,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$D_y = \frac{276,0 \text{ kNm}}{8,0 \text{ m}} = 34,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

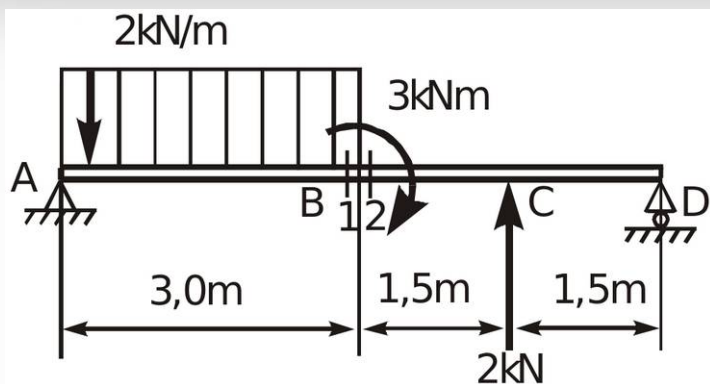
$$D_x = D_y \cdot \text{ctg } \alpha = 34,5 \text{ kN} \cdot \text{ctg } 30^\circ = \frac{34,5 \text{ kN}}{\text{tg } 30^\circ} = 34,5 \text{ kN} \cdot 1,732 = 59,75 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$D = 69,0 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_y = 0 &= q \cdot (a + d) + F_{1y} + F_2 - D_y - A_y = 10 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} + 1,0 \text{ kN} + 2,0 \text{ kN} - 34,5 \text{ kN} - A_y = 28,5 \text{ kN} - A_y \\
 A_y &= 28,5 \text{ kN} (\uparrow)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &= -F_{1x} - D_x + A_x = -1,73 \text{ kN} - 59,75 \text{ kN} + A_x = -61,48 \text{ kN} + A_x \\
 A_x &= 61,48 \text{ kN} (\rightarrow)
 \end{aligned}$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 10



$q = 2 \text{ kN/m}$
 $M = 3 \text{ kNm}$
 $F = 2 \text{ kN}$
 $a = 3,0 \text{ m}$
 $b = 1,5 \text{ m}$
 $c = 1,5 \text{ m}$

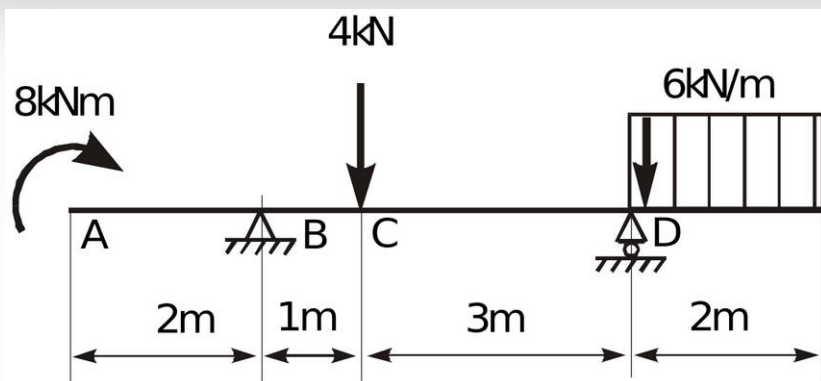
$$\begin{aligned}
 \sum M_{(A)} = 0 &= q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M - F \cdot (a + b) - D \cdot (a + b + c) \\
 &= 2 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} \cdot \frac{3,0 \text{ m}}{2} + 3 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot (3,0 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) - D \cdot (3,0 \text{ m} + 1,5 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) \\
 &= 2 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} + 3 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} - D \cdot 6,0 \text{ m} = 9 \text{ kNm} + 3 \text{ kNm} - 9 \text{ kNm} - D \cdot 6,0 \text{ m} \\
 &= 3,0 \text{ kNm} - D \cdot 6,0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{3,0 \text{ kNm}}{6,0 \text{ m}} = 0,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot a - F - D - A = 2,0 \text{ kN/m} \cdot 3,0 \text{ m} - 2,0 \text{ kN} - 0,5 \text{ kN} - A = 3,5 \text{ kN} - A$$

$$A = 3,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 11



$$\begin{aligned} F &= 4 \text{ kN} \\ q &= 6 \text{ kN/m} \\ M &= 8 \text{ kNm} \\ a &= 2,0 \text{ m} \\ b &= 1,0 \text{ m} \\ c &= 3,0 \text{ m} \\ d &= 2,0 \text{ m} \end{aligned}$$

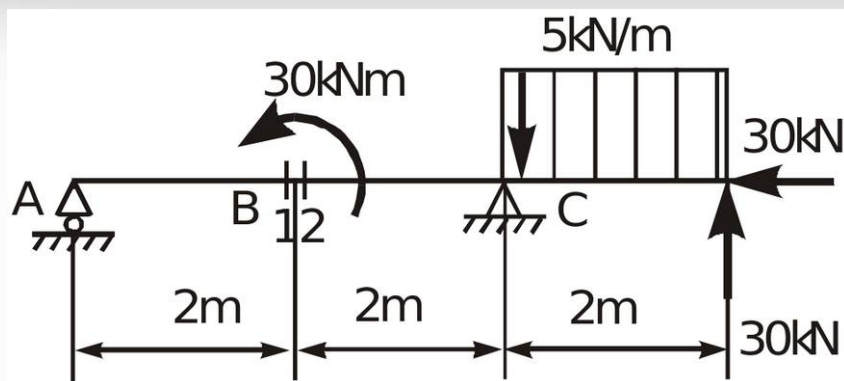
$$\begin{aligned} \sum M_{(B)} &= 0 = M + F \cdot b + q \cdot d \cdot \left(b + c + \frac{d}{2} \right) - D \cdot (b + c) \\ &= 8 \text{ kNm} + 4 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} + 6 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \left(1,0 \text{ m} + 3,0 \text{ m} + \frac{2,0 \text{ m}}{2} \right) - D \cdot (1,0 \text{ m} + 3,0 \text{ m}) \\ &= 8 \text{ kNm} + 4 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} + 6 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} - D \cdot 4,0 \text{ m} = 8 \text{ kNm} + 4 \text{ kNm} + 60 \text{ kNm} - D \cdot 4,0 \text{ m} \\ &= 72 \text{ kNm} - D \cdot 4,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$D = \frac{72,0 \text{ kNm}}{8,0 \text{ m}} = 18,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = F + q \cdot d - D - B = 4,0 \text{ kN} + 6,0 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} - 18,0 \text{ kN} - B = -2,0 \text{ kN} - B$$

$$B = 2,0 \text{ kN} (\downarrow)$$

Egyszerű tartó támaszerői – HF 12



$$\begin{aligned} q &= 5 \text{ kN/m} \\ M &= 30 \text{ kNm} \\ F_1 &= 30 \text{ kN} \\ F_2 &= 30 \text{ kN} \\ a &= 2,0 \text{ m} \\ b &= 2,0 \text{ m} \\ c &= 2,0 \text{ m} \end{aligned}$$

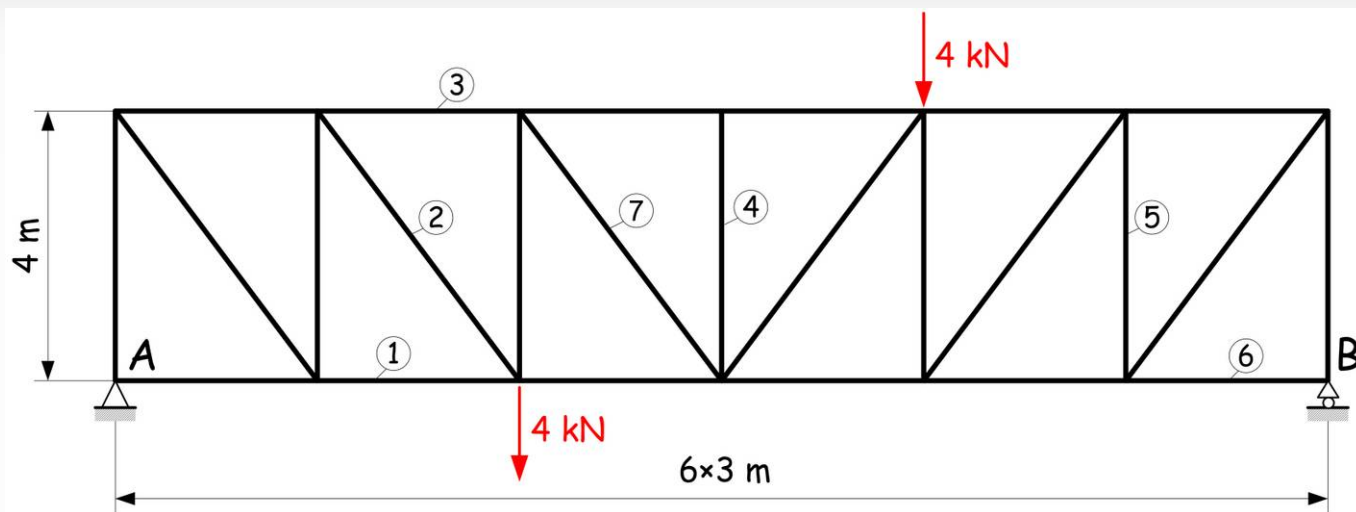
$$\begin{aligned} \sum M_{(A)} &= 0 = -M + q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2}\right) - F_1 \cdot (a + b + c) - C_y \cdot (a + b) \\ &= -30 \text{ kNm} + 5 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot \left(2,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m} + \frac{2,0 \text{ m}}{2}\right) - 30 \text{ kN} \cdot (2,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) - C_y \cdot (2,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) \\ &= -30 \text{ kNm} + 5 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} - 30 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} - C_y \cdot 4,0 \text{ m} = -30 \text{ kNm} + 50 \text{ kNm} - 180 \text{ kNm} - C_y \cdot 4,0 \text{ m} \\ &= -160 \text{ kNm} - C_y \cdot 4,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$C_y = \frac{160,0 \text{ kNm}}{4,0 \text{ m}} = 40,0 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 = q \cdot c - F_1 + C_y - A = 5 \text{ kN/m} \cdot 2,0 \text{ m} - 30 \text{ kN} + 40 \text{ kN} - A = 20 \text{ kN} - A \\ A &= 20,0 \text{ kN} (\uparrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 = -F_2 + C_x = -30 \text{ kN} + C_x \\ C_x &= 30,0 \text{ kN} (\rightarrow) \end{aligned}$$

Rácsos tartó támaszerői



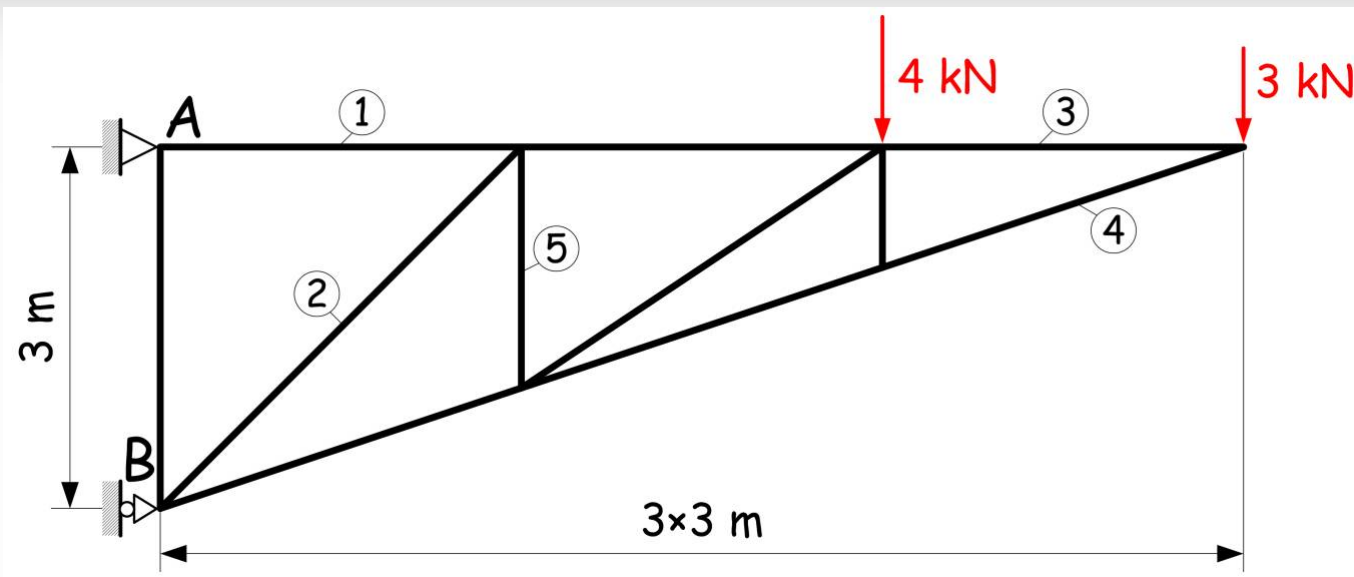
$$\sum M_A = 0 = 4,0 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} + 4,0 \text{ kN} \cdot 12,0 \text{ m} - B \cdot 18,0 \text{ m}$$

$$B = \frac{4,0 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} + 4,0 \text{ kN} \cdot 12,0 \text{ m}}{18,0 \text{ m}} = \frac{72,0 \text{ kNm}}{18,0 \text{ m}} = 4,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = -A_y + 4,0 \text{ kN} + 4,0 \text{ kN} - B = -A_y + 4,0 \text{ kN}$$

$$A_y = 4,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

Rácsos tartó támaszerői



$$\sum M_A = 0 = 4,0 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} + 3,0 \text{ kN} \cdot 9,0 \text{ m} - B \cdot 3,0 \text{ m}$$

$$B = \frac{4,0 \text{ kN} \cdot 6,0 \text{ m} + 3,0 \text{ kN} \cdot 9,0 \text{ m}}{3,0 \text{ m}} = \frac{51,0 \text{ kNm}}{3,0 \text{ m}} = 17,0 \text{ kN} (\rightarrow)$$

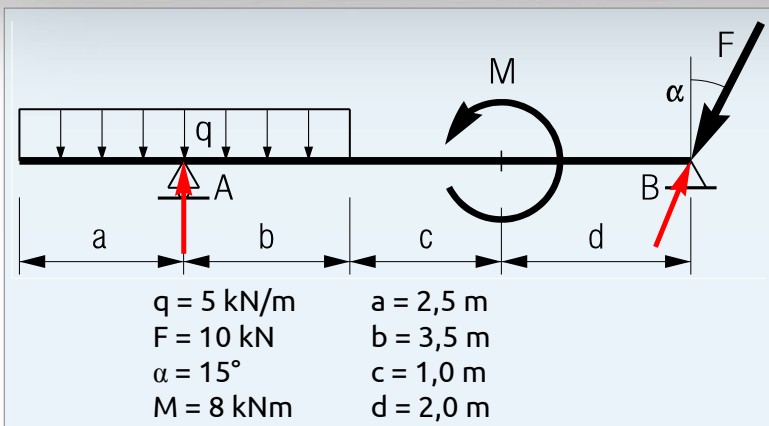
$$\sum F_x = 0 = B - A_x = 17,0 \text{ kN} - A_x \Rightarrow A_x = 17,0 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0 = -A_y + 4,0 \text{ kN} + 3,0 \text{ kN} = -A_y + 7,0 \text{ kN} \Rightarrow A_y = 7,0 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(17,0 \text{ kN})^2 + (7,0 \text{ kN})^2} = 18,38 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{7,0}{17,0} \Rightarrow \alpha = 22,4^\circ$$

Támaszerők meghatározása – ZH A



A B támaszerő meghatározása táblázatos formában

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + B \cdot (b+c+d)$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_x	2,588 kN	0	–	0	0	0
F_y	9,659 kN	6,50	↺	$+ F_y \cdot (b + c + d)$	$+9,659 \cdot 6,50$	+62,78
q	5 kN/m	0,50	↺	$+ q \cdot (a + b) \cdot 0,50$	$+5 \cdot 6,00 \cdot 0,50$	+15,00
M	8 kNm	–	↻	$- M$	-8,00	-8,00
$\sum M_A^*$			↺			+69,78
B	10,74 kN (↑)	6,50	↻	←←←←←←←←←←		-69,78
$\sum M_A$	0 kNm	–	–	–	–	0

$$F_x = F \cdot \sin \alpha = 10 \text{ kN} \cdot \sin 15^\circ = \mathbf{2,588 \text{ kN}} (\leftarrow)$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha = 10 \text{ kN} \cdot \cos 15^\circ = \mathbf{9,659 \text{ kN}} (\downarrow)$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= q \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{a + b}{2} - a \right) + M + F_y \cdot (b + c + d) + B_y \cdot (b + c + d) \\ &= 5 \text{ kN/m} \cdot (2,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m}) \cdot \left(\frac{2,5 \text{ m} + 3,5 \text{ m}}{2} - 2,5 \text{ m} \right) - 8 \text{ kNm} + 9,659 \text{ kN} \cdot (3,5 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) + B_y \cdot (3,5 \text{ m} + 1,0 \text{ m} + 2,0 \text{ m}) \\ &= 5 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m} - 8 \text{ kNm} + 9,659 \text{ kN} \cdot 6,5 \text{ m} + B_y \cdot 6,5 \text{ m} = 15 \text{ kNm} - 8 \text{ kNm} + 62,784 \text{ kNm} + B_y \cdot 6,5 \text{ m} = 69,784 \text{ kNm} + B_y \cdot 6,5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$B_y = \frac{-69,784 \text{ kNm}}{6,5 \text{ m}} = \mathbf{-10,736 \text{ kN}} (\uparrow)$$

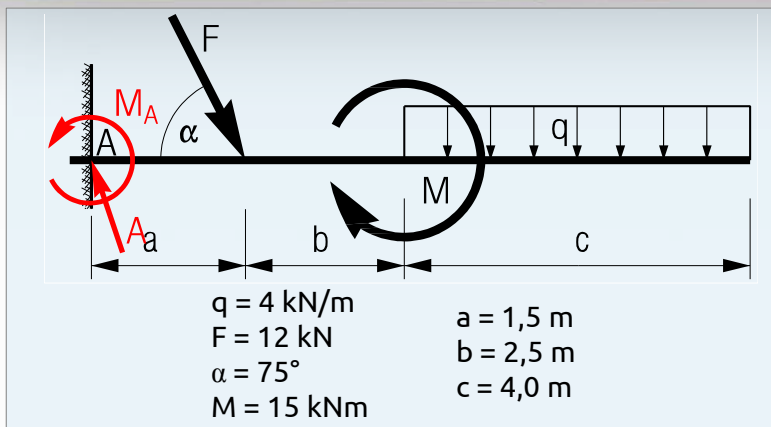
$$\sum F_x = 0 = F_x + B_x = -2,588 \text{ kN} + B_x \Rightarrow B_x = \mathbf{2,588 \text{ kN}} (\rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot (a + b) + A + F_y + B_y = 5 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} + A + 9,659 \text{ kN} - 10,736 \text{ kN} \Rightarrow A = \mathbf{-28,923 \text{ kN}} (\uparrow)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{2,588^2 + 10,736^2} = \sqrt{121,959} = \mathbf{11,044 \text{ kN}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{B_y}{B_x} = \frac{10,736 \text{ kN}}{2,588 \text{ kN}} = \mathbf{4,1484} \Rightarrow \alpha = \arctan(4,1484) = \mathbf{76,45^\circ}$$

Támaszerők meghatározása – ZH B



Az M_A befogási nyomaték meghatározása táblázatos formában

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + M_A$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_x	3,106 kN	0	–	0	0	0
F_y	11,591 kN	1,50	⌚	$+ F_y \cdot a$	$+11,591 \cdot 1,50$	+17,39
q	4 kN/m	6,00	⌚	$+ q \cdot c \cdot (a + b + c/2)$	$+4 \cdot 4,00 \cdot 6,00$	+96,00
M	15 kNm	–	⌚	$+ M$	+15,00	+15,00
ΣM_A^*			⌚			+128,39
M_A		–	⌚			-128,39
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	0

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 12 \text{ kN} \cdot \cos 75^\circ = \mathbf{3,106 \text{ kN}} \rightarrow [1 \text{ p}]$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 12 \text{ kN} \cdot \sin 75^\circ = \mathbf{11,591 \text{ kN}} \downarrow [1 \text{ p}]$$

$$\begin{aligned} \sum M_A^* = 0 &= q \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2} \right) + M + F_y \cdot a + M_A = 4 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot \left(1,5 \text{ m} + 2,5 \text{ m} + \frac{4,0 \text{ m}}{2} \right) + 15 \text{ kNm} + 11,591 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} + M_A \\ &= 4 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} \cdot 6,0 \text{ m} + 15 \text{ kNm} + 11,591 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} + M_A = 96,0 \text{ kNm} + 15 \text{ kNm} + 17,387 \text{ kNm} + M_A = 128,39 \text{ kNm} + M_A \\ M_A &= \mathbf{-128,39 \text{ kNm}} \end{aligned}$$

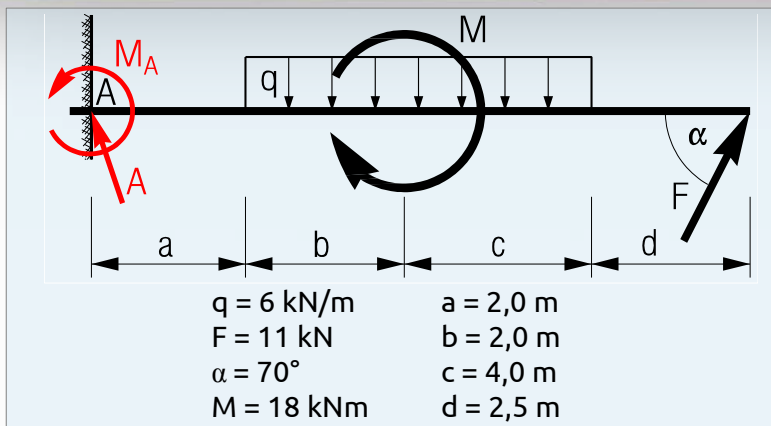
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= A_x + F_x = A_x + 3,106 \text{ kN} \\ A_x &= \mathbf{-3,106 \text{ kN}} \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &= A_y + F_y + q \cdot c = A_y + 11,591 \text{ kN} + 4 \text{ kN/m} \cdot 4,0 \text{ m} = A_y + 11,591 \text{ kN} + 16,0 \text{ kN} = A_y + 27,591 \text{ kN} \\ A_y &= \mathbf{-27,591 \text{ kN}} \uparrow \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3,106^2 + 27,591^2} = \sqrt{770,91} = \mathbf{27,76 \text{ kN}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{27,591 \text{ kN}}{3,106 \text{ kN}} = \mathbf{8,883} \Rightarrow \alpha = \arctan(8,883) = \mathbf{83,58^\circ}$$

Támaszerők meghatározása – ZH C



Az M_A befogási nyomaték meghatározása táblázatos formában

$$\sum M_A = 0 = \sum M_A^* + M_A$$

teher		erőkar, m	forgatás iránya	nyomaték, kNm		
jel	érték			betűvel	adattal	részeredmény
F_x	3,762 kN	0	–	0	0	0
F_y	10,337 kN	10,50	↺	$-F_y \cdot 10,50$	$-10,337 \cdot 10,50$	-108,54
q	6 kN/m	5,00	↺	$+q \cdot (b+c) \cdot 5,00$	$+6 \cdot 6,00 \cdot 5,00$	+180,00
M	18 kNm	–	↺	$+M$	+18	+18,00
ΣM_A^*			↺			+89,46
M_A		–	↻			-89,46
ΣM_A	0 kNm	–	–	–	–	0

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 11 \text{ kN} \cdot \cos 70^\circ = \mathbf{3,762 \text{ kN}} (\rightarrow)$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 11 \text{ kN} \cdot \sin 70^\circ = \mathbf{10,337 \text{ kN}} (\uparrow)$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= q \cdot (b+c) \cdot \left(a + \frac{b+c}{2}\right) + M + F_y \cdot (a+b+c+d) + M_A \\ &= 6 \text{ kN/m} \cdot (2,0 \text{ m} + 4,0 \text{ m}) \cdot \left(2,0 \text{ m} + \frac{2,0 \text{ m} + 4,0 \text{ m}}{2}\right) + 18 \text{ kNm} - 10,337 \text{ kN} \cdot 10,5 \text{ m} + M_A \\ &= 5 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} + 18 \text{ kNm} - 10,337 \text{ kN} \cdot 10,5 \text{ m} + M_A = 180,00 \text{ kNm} + 18 \text{ kNm} - 108,54 \text{ kNm} + M_A = 89,46 \text{ kNm} + M_A \end{aligned}$$

$$M_A = \mathbf{-89,46 \text{ kN}}$$

$$\sum F_x = 0 = F_x + A_x = 3,762 \text{ kN} + A_x$$

$$A_x = \mathbf{-3,762 \text{ kN}} (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0 = q \cdot (b+c) + F_y + A_y = 6 \text{ kN/m} \cdot 6,0 \text{ m} - 10,337 \text{ kN} + A_y = 25,663 \text{ kN} + A_y$$

$$A_y = \mathbf{-25,663 \text{ kN}} (\uparrow)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{3,762^2 + 25,663^2} = \sqrt{672,74} = \mathbf{25,937 \text{ kN}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{A_y}{A_x} = \frac{25,663 \text{ kN}}{3,762 \text{ kN}} = \mathbf{6,8216} \Rightarrow \alpha = \arctan(6,8216) = \mathbf{81,66^\circ}$$