

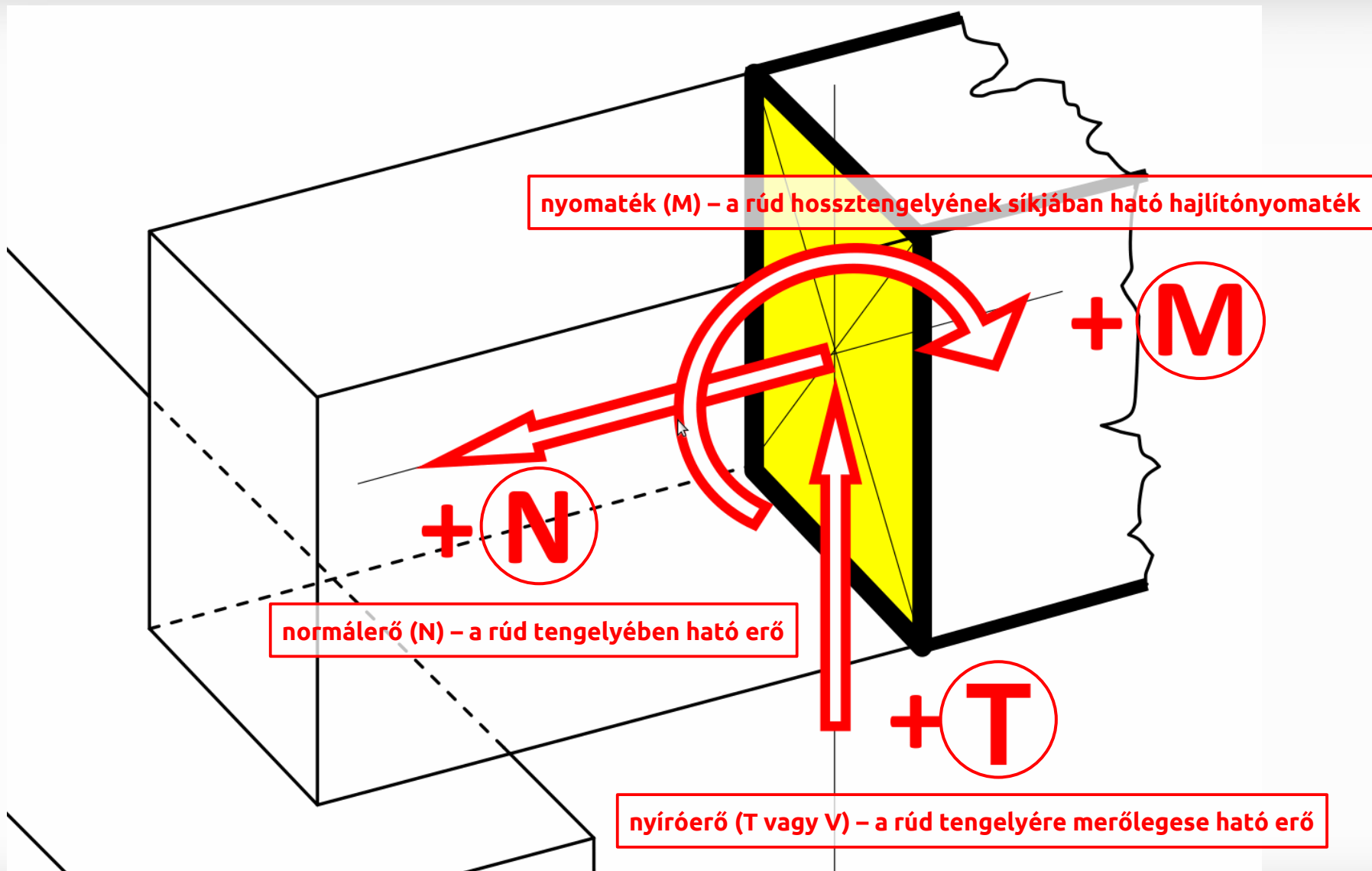
Mechanikai alapismeretek 1. Statika

Építészmérnök O/BSc, Építőművész BA

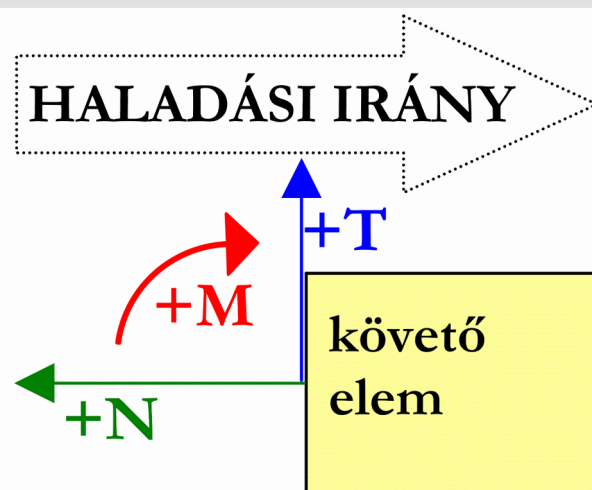
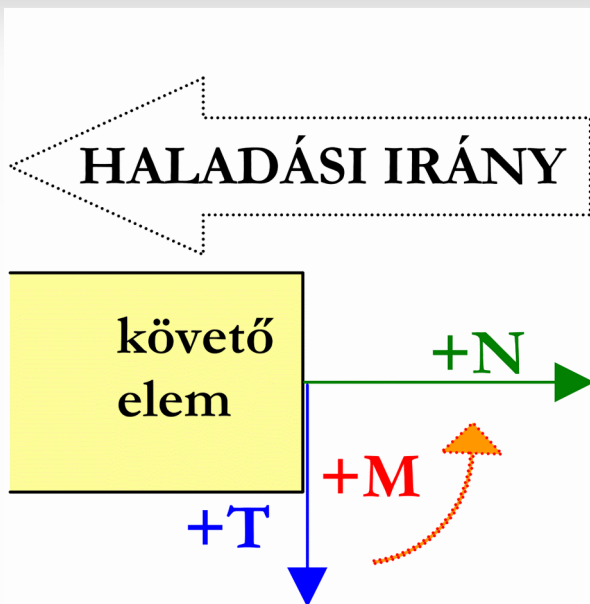
IGÉNYBEVÉTELI (BELSŐ ERŐ) ÁBRÁK SZABÁLYAI, SZÁMÍTÁSA



A belső erők (igénybevételek)



Az igénybevételi ábra előjelszabálya



$$N_{jobb} = \sum_{j=1}^m N_{j, jobb} = -N_{bal}$$

$$T_{jobb} = \sum_{j=1}^m T_{j, jobb} = -T_{bal}$$

$$M_{jobb} = \sum_{j=1}^m M_{j, jobb} = -M_{bal}$$

$$N_{bal} = \sum_{i=1}^n N_{i, bal} = -N_{jobb}$$

$$T_{bal} = \sum_{i=1}^n T_{i, bal} = -T_{jobb}$$

$$M_{bal} = \sum_{i=1}^n M_{i, bal} = -M_{jobb}$$

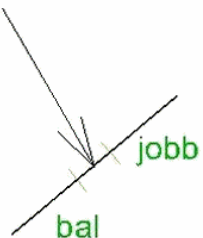
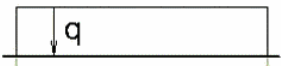
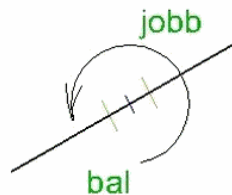
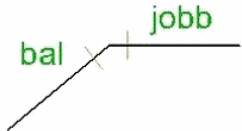
Az igénybevételi ábra szabályai

- A tartó azon szakaszán, ahol nincs erőhatás, az N és T ábra a tengellyel párhuzamosan halad
- Ha van erőhatás, koncentrált erő helyén az N és T ábrában az erő (megfelelő x és y irányú összetevői) nagyságának és irányának megfelelő ugrás van
- A tartó azon szakaszán, ahol nincs erőhatás, az M ábra lineárisan halad;
az erőhatás helyén az M ábrában a tengelyre merőleges erő irányának megfelelő törés van
- Az M, T és a terhelési ábra között differenciális kapcsolat:
ahol az M ábra másodfokú parabola, ott a T ábra lineáris, a terhelési ábra konstans;
ahol az M ábra lineáris, ott a T ábra konstans, a terhelési ábra 0
- Ahol a T ábra 0 (előjelet vált), ott az M ábrában az előjelváltás irányának megfelelő helyi szélsőérték van
- A tartó végein, ha nincs koncentrált nyomaték, akkor az M ábra 0: konstans 0, vagy lineárisan közelíti meg a 0 értéket
- Egyenletesen megoszló terhelés esetén a terhelés szakaszán a T ábra ferde (lineáris) egyenes, meredeksége a teherintenzitás
- Egyenletesen megoszló terhelés alatt az M ábra másodfokú parabola, adott pontjában az érintőjének meredeksége a T ábra megfelelő értéke
- Az M ábra alulról domború, ha a megoszló terhelés iránya lefelé hat, felülről domború, ha felfelé hat.
- Koncentrált nyomaték az N és T ábrában változást nem okoz
- A koncentrált nyomaték helyén az M ábrában a nyomaték előjelének megfelelő ugrás van

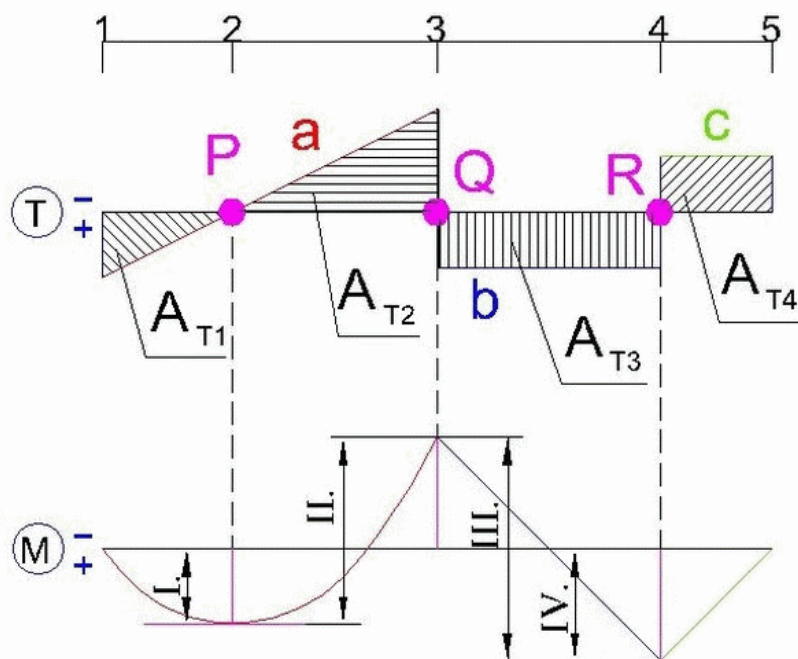
A terhelés és a függvények kapcsolata

terhelés		terhelési függvény	nyíróerő függvény	nyomatéki függvény
koncentrált nyomaték	M	-2 fokú (pontoszerű)	-1 fokú (ugrás)	0-ad fokú (konstans)
koncentrált erő	F	-1 fokú (ugrás)	0-ad fokú (konstans)	elsőfokú (ferde egyenes)
egyenletesen megoszló terhelés	q	0-ad fokú (konstans)	elsőfokú (ferde egyenes)	másodfokú (parabola)
lineárisan változó megoszló terhelés	q ₀	elsőfokú (ferde egyenes)	másodfokú (parabola)	harmadfokú (parabola)

Az igénybevételi ábra változása

	Terheletlen tartószakasz	Koncentrált erő	Megoszló teher	Koncentrált nyomaték	Töréspont
					
Normálerő	állandó	ugrás	lineáris	változatlan	változik
Nyíróerő	állandó	ugrás	lineáris	változatlan	változik
Nyomaték	lineárisan változik	törés	másodfokú	ugrás	változatlan

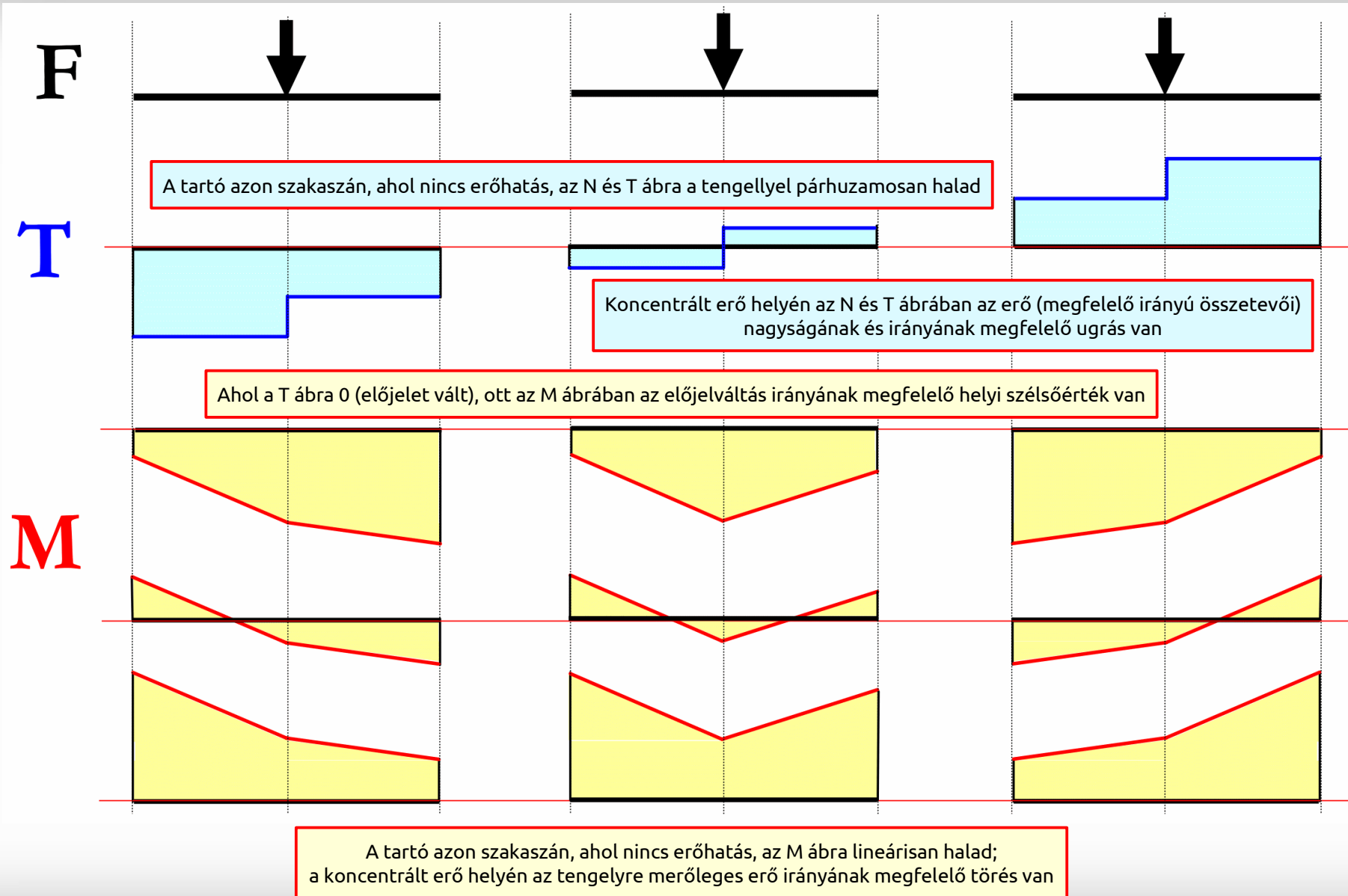
Az ábraszakaszok tulajdonsága



	T ábra	M ábra
●	előjel váltás	lokális szélsőérték
a	lineáris	másodfokú
c	állandó	lineáris
b	pozitív	növekszik
c	negatív	csökken
	ugrás	törés

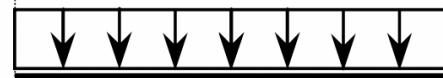
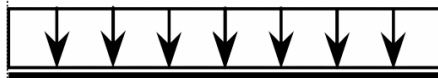
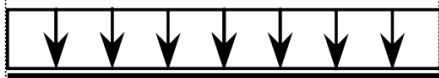
Két keresztmetszet közötti nyíróerő ábra területe a két keresztmetszet közötti nyomaték megváltozását adja.

Tengelyre merőleges koncentrált erő



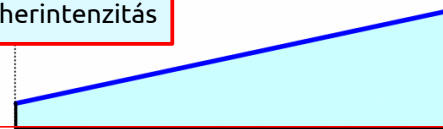
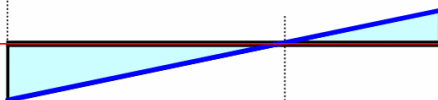
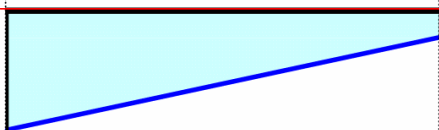
Tengelyre merőleges megoszló teher

q



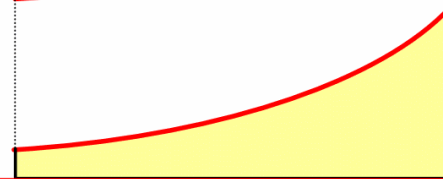
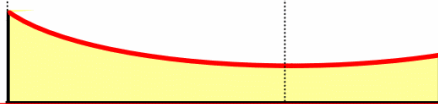
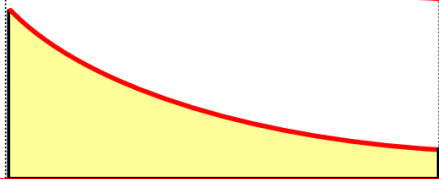
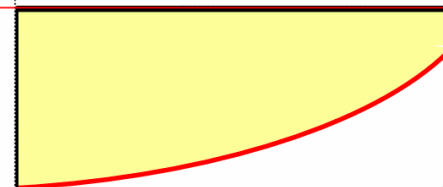
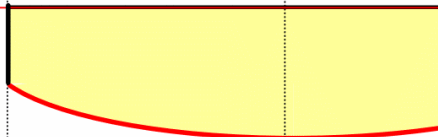
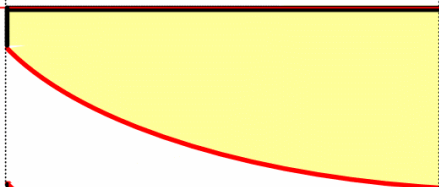
Egyenletesen megoszló terhelés esetén a terhelés szakaszán a T ábra ferde (lineáris) egyenes, meredeksége a teherintenzitás

T



Ahol a T ábra 0 (előjelet vált),
ott az M ábrában az előjelváltás irányának megfelelő helyi szélsőérték van

M



Egyenletesen megoszló terhelés alatt az M ábra másodfokú parabola, adott pontjában az érintője a T ábra megfelelő értéke
Az M ábra alulról domború, ha a megoszló terhelés iránya lefelé hat, felülre domború, ha felfelé hat.

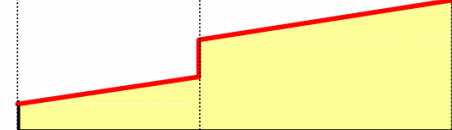
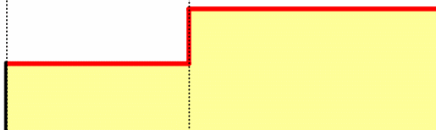
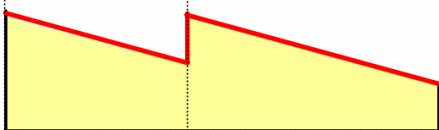
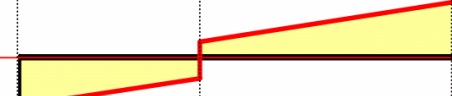
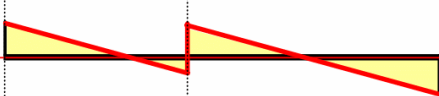
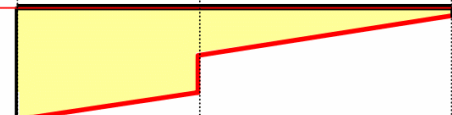
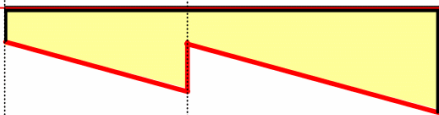
Koncentrált nyomaték

M



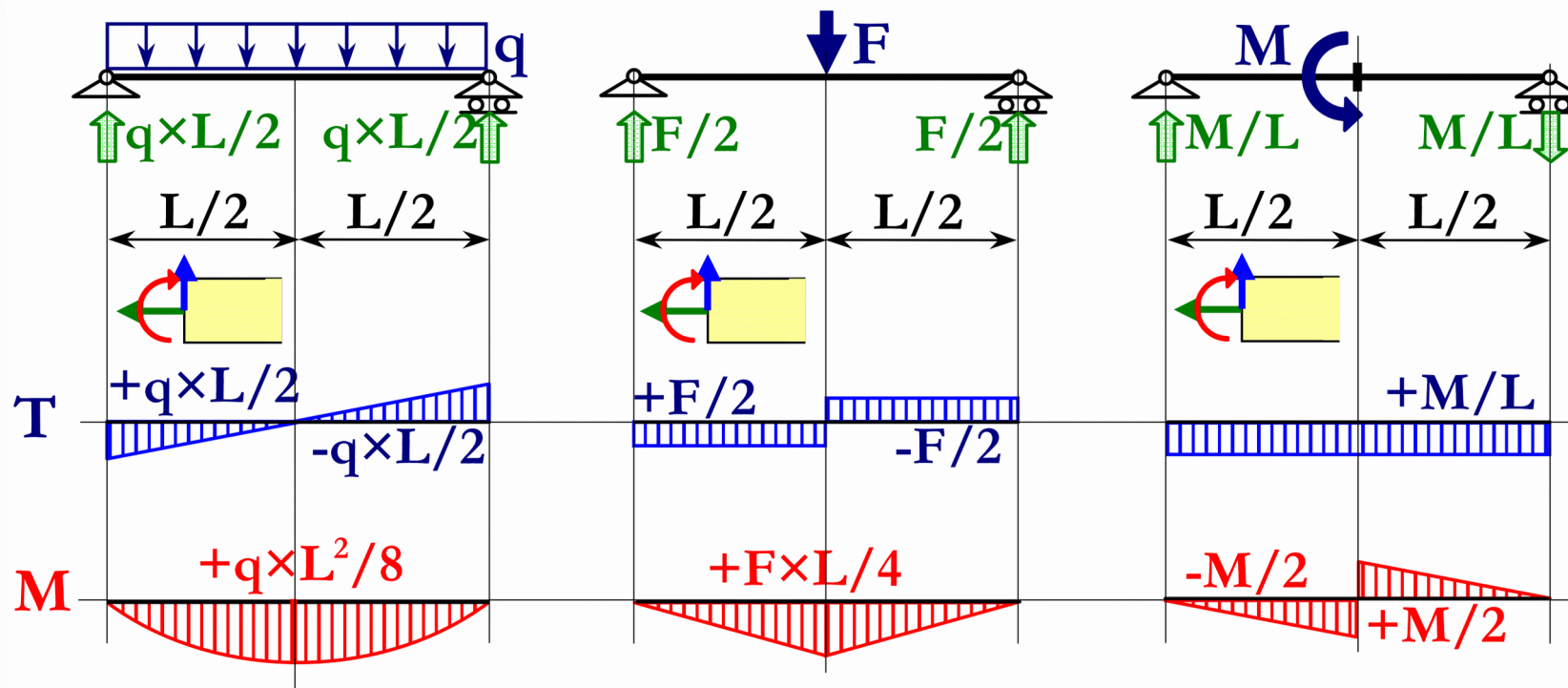
T

Koncentrált nyomaték az N és T ábrában változást nem okoz

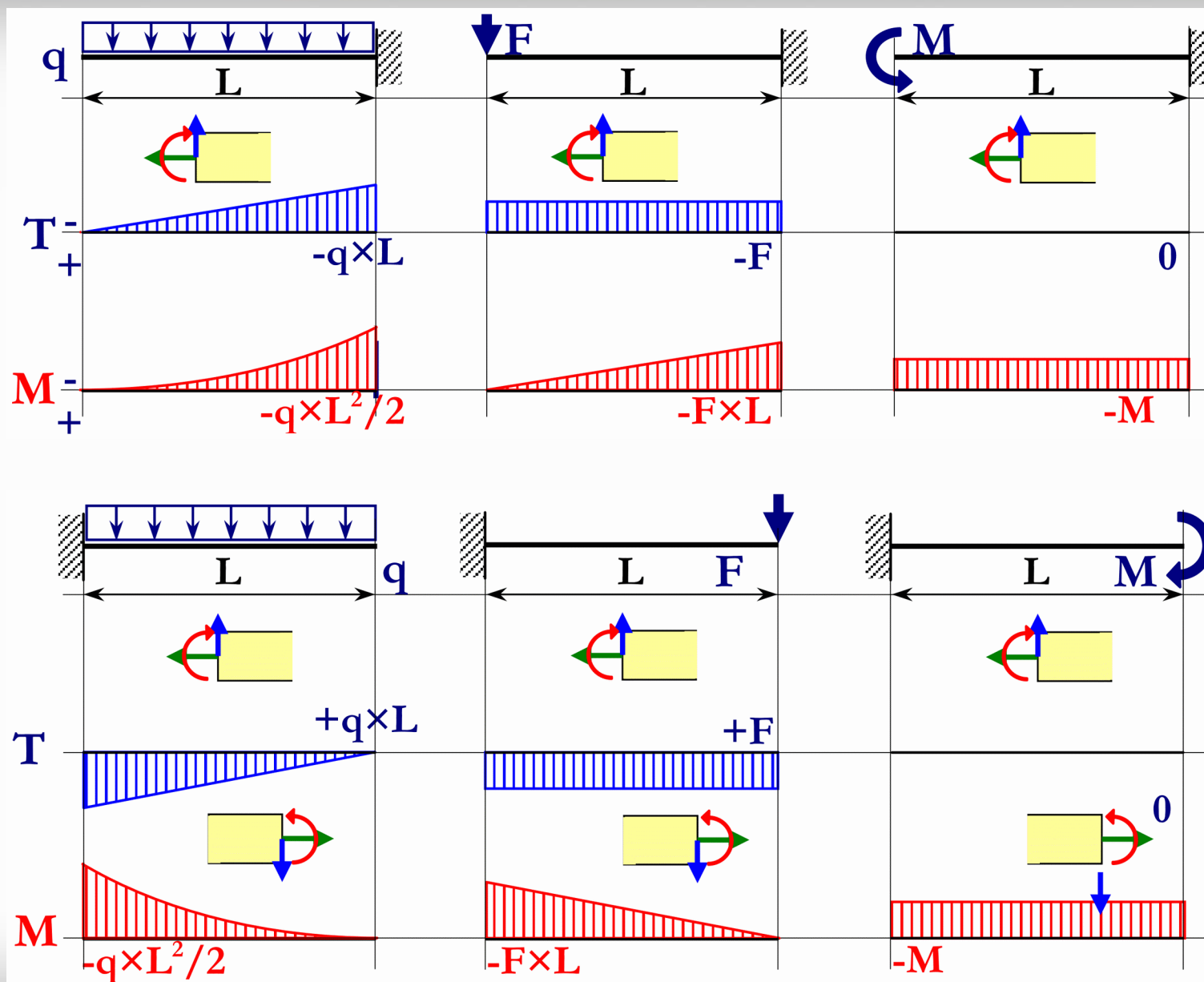


A koncentrált nyomaték helyén az M ábrában a nyomaték előjelének megfelelő ugrás van

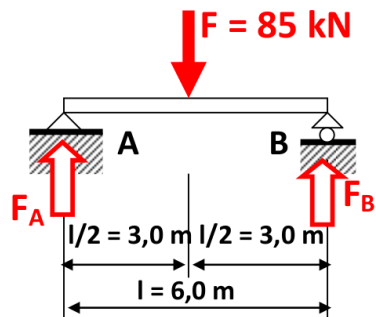
Kéttámaszú tartó igénybevételi ábrái



Befogott tartó igénybevételi ábrái



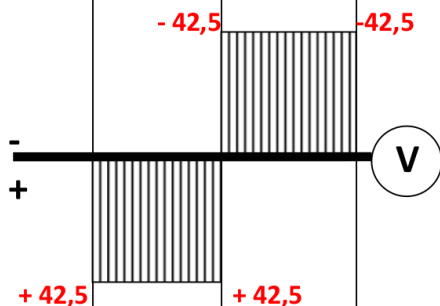
Az igénybevételi ábra alapesetei



A tartó reakcióit korábban a „Támaszerők” részben meghatároztuk. Ezek eredményei:

$$F_A = 42,5 \text{ kN}$$

$$F_B = 42,5 \text{ kN}$$



A tartó **bal végén** az $F_A = 42,5 \text{ kN}$ támaszerő a nyíróerő. Felfelé mutat, ezért (+) pozitív.

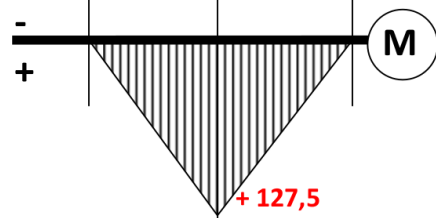
Az „F” erő**től balra** végtelen közel levő keresztmetszettől csak az F_A van balra, tehát itt is $+42,5 \text{ kN}$ a nyíróerő.

Az „F” erő**től jobbra** végtelen közel levő keresztmetszettől balra van az F_A és az „F”. Itt tehát a nyíróerő:

$$+F_A - F = +42,5 - 85 = -42,5 \text{ kN}$$

A tartó **jobb végétől balra** végtelen közel levő keresztmetszettől is az F_A és az „F” áll balra, így a nyíróerő ott is $-42,5 \text{ kN}$.

Ha ehhez a végső keresztmetszetben hozzáadnánk a $+F_B$ -t záródna az ábra.

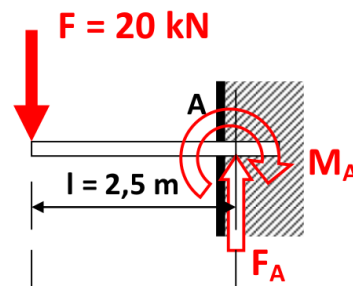


Az „A” keresztmetszetben azért **NULLA** a nyomaték, mert az A reakcióerő a saját hatásvonalán levő pontokra nem forgat. Az „F” erő alatti keresztmetszettől balra csak az A forgat. Forgatóértelme az óramutatóéval megegyezik, tehát a nyomatéka $+42,5 \times 3 = +127,5 \text{ kNm}$.

A „B” keresztmetszettől az összes erő balra van, az egyensúly miatt is **NULLA** a nyomatékösszegük:

$$+A \times 6 - F \times 3 = +42,5 \times 6 - 85 \times 3 = 0$$

A tartón mindig ott van a legnagyobb nyomaték, ahol a nyíróerő ábra előjelet vált.
Itt $M_{\max} = +127,5 \text{ kNm}$



A tartó reakcióit korábban a „Támaszerők” részben meghatároztuk. Ezek eredményei:

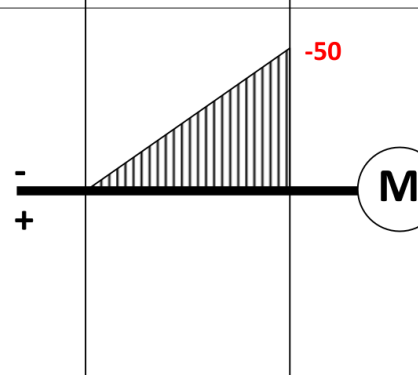
$$F_A = 20 \text{ kN}$$

$$M_A = 50 \text{ kNm}$$

Mivel a vízszintes tartón csak függőleges erők működnek, nem keletkezik normál erő, ezért **nincs „N” ábra**.
Ez a következő tartókra is vonatkozik!

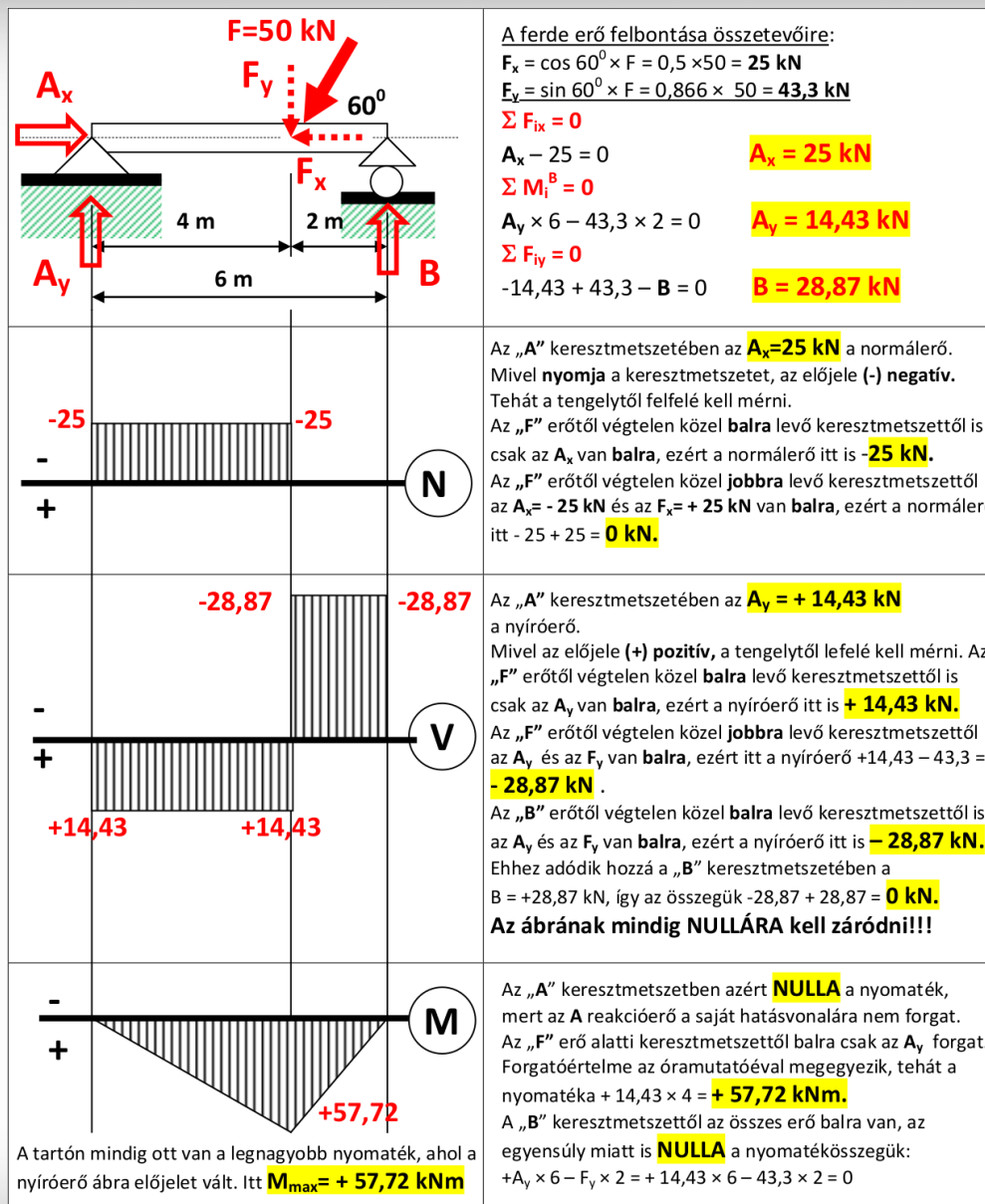


A bal oldali végső keresztmetszetben álló „F” erő a keresztmetszet nyíróereje. Mivel lefelé mutat az igénybevételi előjelszabály értelmében az előjele (-) mínusz: **-20 kN**.
A befogási keresztmetszettől végtelen közeli **bal oldali** keresztmetszetben is ekkora a nyíróerő: **-20 kN**. Ehhez adódik hozzá a felfelé mutató és ezért (+) pozitív előjelű $F_A = +20 \text{ kN}$. Így a tartó jobb oldali végén záródik a nyíróerő ábra: $-20 + 20 = 0 \text{ kN}$



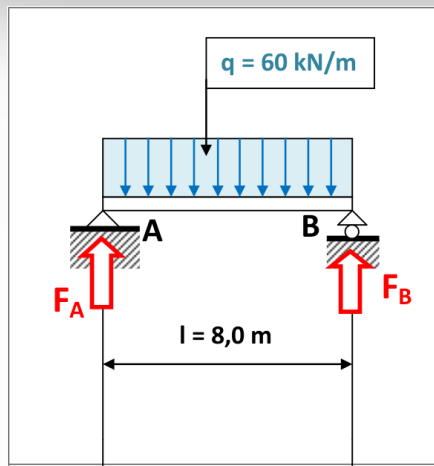
Mivel minden erőnek a saját hatásvonalán levő pontjaira a nyomatéka nulla, a bal oldali végső keresztmetszetre nem hat nyomaték. Ezért ott a nyomaték értéke **NULLA**.
A befogási keresztmetszettől balra csak az „F” erő áll, így a befogási keresztmetszettől végtelen közeli bal oldali keresztmetszetre az „F” erő nyomatéka:
 $-F \times l = -20 \times 2,5 = -50 \text{ kNm}$
Ez a nyomaték megegyezik az **ellenkező forgatóértelmű** reakció nyomatékkal M_A -val, ami magában a befogási keresztmetszetben működik. Ha ezeket is összeadnánk, ez az ábra is záródna.

Az igénybevételi ábra alapesetei



A tartón mindig ott van a legnagyobb nyomaték, ahol a nyíróerő ábra előjelet vált. Itt $M_{\max} = +57,72 \text{ kNm}$

Az igénybevételi ábra alapesetei



A tartó reakcióit korábban a „Támaszerők” részben meghatároztuk. Ezek eredményei:

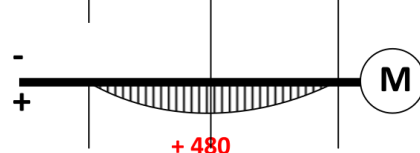
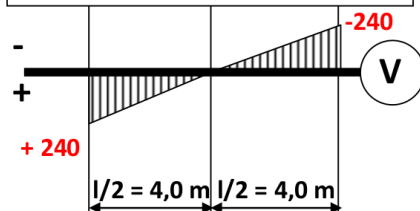
$$F_A = 240 \text{ kN}$$

$$F_B = 240 \text{ kN}$$

Ha az olvasó nem akar visszalapozni, vegye észre, hogy a tartó szimmetrikus, tehát a támaszerők a teher felével egyenlők:

$$F_A = F_B = q \times l / 2 = 60 \times 8 / 2 = 240 \text{ kN}$$

Mivel a két tartóvégén a nyíróerők értéke egyenlő, az őket összekötő egyenes pontosan a tartó felében metszi a tengelyt, tehát itt van az előjelváltás, itt keletkezik az M_{maximum} .



A „V” ábra előjelváltása a tartó felező pontjában jelöli ki a legnagyobb nyomaték helyét. Írjuk ezt fel a balra álló erők nyomatékösszegeként:

$$M_{\text{max}} = +F_A \times l/2 - Q/2 \times l/4 = +240 \times 8/2 - 480/2 \times 8/4 = +480 \text{ kNm}$$

A tartó bal végén az $F_A = 240 \text{ kN}$ támaszerő a nyíróerő. Felfelé mutat, ezért (+) pozitív.

Ahogy korábban is volt róla szó, a „Q” csak a számítás segédereje „**nincs a tartón**”. Úgy ahogy az itteni nézetrajzon sem jelenik meg. Ezért a terhelésbeli legközelebbi változás a „B” támasz előtt végtelen közeli keresztmetszetben van.

A tartó jobb végétől balra végtelen közel levő keresztmetszetről az F_A és az **egész megoszló teher**, (Q) áll balra, így a nyíróerő ott $+F_A - Q = +240 - 480 = -240 \text{ kN}$.

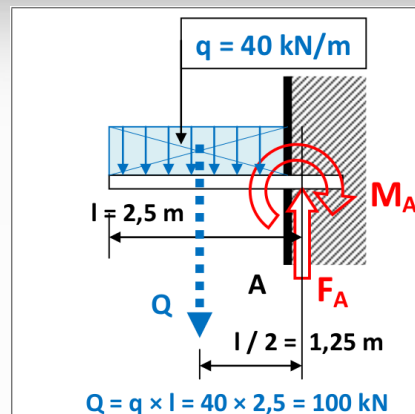
Ha ehhez a végső keresztmetszetben hozzáadnánk a $+F_B$ -t záródna az ábra.

Az „A” keresztmetszetében azért **NULLA** a nyomaték, mert az „A” reakció erő a saját hatásvonalán levő pontokra nem forgat. A „B” keresztmetszetében azért **NULLA** a nyomaték, mert az **összes erő** balra van, és az egyensúly miatt az **összes erő** nyomatékának minden pontra **NULLA** a nyomatéka.

Így a nulla értékű pontokat a tengely köti össze, ezért ennek a közepétől kell a tengelyre merőlegesen lemérni a

$$q \times l^2 / 8 = 60 \times 8^2 / 8 = 480 \text{ kNm}$$

értékű nyomatékot, és ezzel a lefogással kell megrajzolni a parabolát.

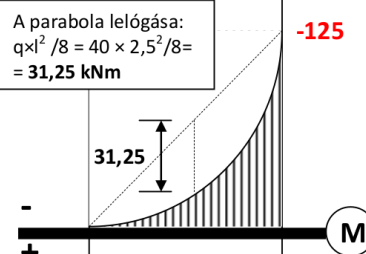
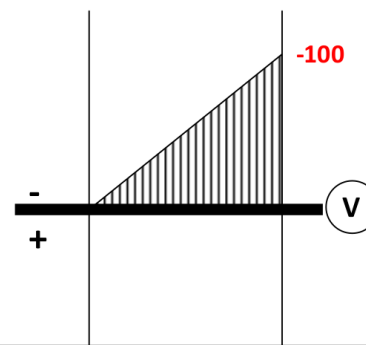


A tartó reakcióit korábban a „Támaszerők” részben meghatároztuk. Ezek eredményei:

$$F_A = 100 \text{ kN}$$

$$M_A = 125 \text{ kNm}$$

FONTOS MEGJEGYZÉS: A „Q” erő csak a számítás segédereje, ezért is van szaggatott vonallal jelölve. Tehát a hatásvonalában nincs a terhelésben változás!!!



A parabola lefogása:
 $q \times l^2 / 8 = 40 \times 2,5^2 / 8 = 31,25 \text{ kNm}$

Miután felmérjük a -125-öt, szaggatottan összekötjük a bal oldali NULLA ponttal. A szaggatott középponttól függőlegesen $q \times l^2 / 8$ értékben parabolát látunk le. Az ez alatti terület az „M” ábra.

A bal oldali végső keresztmetszetben nem áll erő, ezért itt a nyíróerő **NULLA**. Fenti fontos megjegyzésben olvasható, hogy a „Q” tulajdonképpen nincs a tartón, csak a számítás segédereje. Ezért a terhelésben változás a befogás előtti, attól végtelen közeli keresztmetszetben van. Mivel ettől balra csak a $Q = 100 \text{ kN}$ működik, ez lesz itt a nyíróerő értéke, tehát **-100 kN** mivel lefelé mutat. Ehhez adódik hozzá a felfelé mutató és ezért (+) pozitív előjelű $F_A = +100 \text{ kN}$. Így a tartó jobb oldali végén záródik a nyíróerő ábra: $-100 + 100 = 0 \text{ kN}$

A bal oldali végső keresztmetszetre nem hat nyomaték. Ezért ott a nyomaték értéke **NULLA**. A befogási keresztmetszetről balra csak a „Q” erő (az **egész megoszló teher eredője**) áll, így a befogási keresztmetszetről végtelen közeli bal oldali keresztmetszetre a „Q” erő nyomatéka: $-Q \times l/2 = -100 \times 1,25 = -125 \text{ kNm}$

Ez a nyomaték megegyezik az **ellenkező forgatóérintelmű** reakció (befogási) nyomatékkal M_A -val, ami magában a befogási keresztmetszetben működik. Ha ezeket is összeadnánk, ez az ábra is záródna.